УДК 517.2

С.А. МАРЗАН
Брест, БрГУ имени А.С. Пушкина

ЗАДАЧА ТИПА КОШИ ДЛЯ ОБОБЩЕННОГО НЕЛИНЕЙНОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ С ДРОБНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ РИМАНА–ЛИУВИЛЛЯ

Исследуем проблему существования и единственности решения задачи типа Коши для нелинейного дифференциального уравнения порядка $\alpha \in C$ $(\mathrm{Re}(\alpha) > 0)$:

$$\left(D_{a+}^{\alpha} y\right)(x) = f\left[x, y(x), \left(D_{a+}^{\alpha_1} y\right)(x), \ldots, \left(D_{a+}^{\alpha_{n-1}} y\right)(x)\right], \; n = -[-\mathrm{Re}(\alpha)], \tag{1}$$

$$\alpha_i \in C \; \left(0 = \alpha_0 < \mathrm{Re}(\alpha_1) < \ldots < \mathrm{Re}(\alpha_{n-1}) < \mathrm{Re}(\alpha)\right), \tag{2}$$

с начальными условиями

$$\left(D_{a+}^{\alpha-k} y\right)(a+) = b_k, \; b_k \in C \; \left(k = 1, \ldots, n = -[-\mathrm{Re}(\alpha)]\right) \tag{3}$$

в пространстве

$$C_{n-\alpha,\gamma}^{\alpha}[a,b] = \left\{y \in C_{n-\alpha}[a,b] : D_{a+}^{\alpha} y \in C_{\gamma}[a,b]\right\}, \; C_{\gamma}^{\alpha}[a,b] = C_{0,\gamma}^{\alpha}[a,b], \tag{4}$$

$$C_{\gamma}[a,b] = \left\{g(x) : \|g(x)\|_{C_{\gamma}} = \left\|(x-a)^{\gamma} g(x)\right\|_{C} < \infty\right\}, \; C_0[a,b] = C[a,b] \; \left(\gamma \in C\right).$$

Для $\gamma \in C$ и $n \in N$ обозначим через $C_{\gamma}^{n}[a,b]$ банахово пространство функций $g(x)$, непрерывно дифференцируемых на $[a,b]$ до порядка $n-1$ и имеющих производную порядка *n*, такую, что $g^{(n)}(x) \in C_{\gamma}[a,b]$.

Из этого определения вытекает следующее описание пространства $C_{\gamma}^{n}[a,b]$.

Лемма 1. *Пространству* $C_{\gamma}^{n}[a,b]$ $\left(\gamma \in C, 0 \le \mathrm{Re}(\gamma) < 1\right)$ *принадлежат те и только те функции* $g(x)$, *которые представимы в виде*

$$g(x) = \frac{1}{(n-1)!}\int_a^x \varphi(t)dt + \sum_{k=0}^{n-1} c_k (x-a)^k,$$

где $\varphi(t) \in C_{\gamma}[a,b]$, *а* c_k *– произвольные постоянные. При этом*

$$\varphi(x) = g^{(n)}(x), \; c_k = \frac{g^{(k)}(a)}{k!} \; (k = 0, 1, \ldots, n-1).$$

Теорема 1. Пусть $\alpha \in C$ $\left(\mathrm{Re}(\alpha) > 0\right)$, $\gamma \in C$ $\left(0 \le \mathrm{Re}(\gamma) < 1\right)$, $\alpha_0, \ldots, \alpha_{n-1}$ $\left(n = -[-\mathrm{Re}(\alpha)]\right)$ удовлетворяют условию (2). Пусть функция

$f[x, y_1, \dots, y_n] : [a,b] \times R^n \to R$ такова, что при любых $y_i \in R$ $(i = 1, \dots, n)$ $f[x, y_1, \dots, y_n] \in C_\gamma[a,b]$ и

$$\max_{(x, y_1, \dots, y_n) \in [a,b] \times \bar{R}^n} \left| (x-a)^\gamma f[x, y_1, \dots, y_n] \right| = M_\gamma < \infty . \quad (5)$$

Для того чтобы функция $y(x) \in C_{n-\alpha}[a,b]$ являлась решением задачи типа Коши (1), (3), необходимо и достаточно, чтобы она была решением интегрального уравнения

$$y(x) = \sum_{j=1}^{n} \frac{b_k}{\Gamma(\alpha - j + 1)} (x-a)^{\alpha - j} + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x \frac{f\left[t, y(t), \left(D_{a+}^{\alpha_1} y\right)(t), \dots, \left(D_{a+}^{\alpha_{n-1}} y\right)(t)\right]}{(x-a)^{1-\alpha}} dt, \quad (6)$$

Доказательство. Если $y(x) \in C_{n-\alpha}[a,b]$ и выполняется условие (5), то из (1) и (4) следует, что дробная производная $\left(D_{a+}^{\alpha} y\right)(x) \in C_\gamma[a,b]$. В соответствии с определением дробной производной Римана–Лиувилля

$$\left(D_{a+}^{\alpha} y\right)(x) = \left(\frac{d}{dx}\right)^n \left(I_{a+}^{n-\alpha} y\right)(x), \, n = [\operatorname{Re}(\alpha)] + 1,$$

и тогда согласно Лемме 1 $\left(I_{a+}^{n-\alpha} y\right)(x) \in C_\gamma^n[a,b]$. Применяя оператор I_{a+}^{α} к обеим частям (1), используя свойства дробных интегралов Римана–Лиувилля и равенства (3), с учетом (5) и того, что

$$\left(I_{a+}^{\alpha} f\right)\left[x, y(x), \left(D_{a+}^{\alpha_1} y\right)(x), \dots, \left(D_{a+}^{\alpha_{n-1}} y\right)(x)\right] \in C_{n-\alpha}[a,b],$$

мы приходим к интегральному уравнению (6).

Пусть теперь $y(x) \in C_{n-\alpha}[a,b]$ – решение интегрального уравнения (6). Применяя оператор D_{a+}^{α} к обеим частям (6), учитывая равенства

$$\left(D_{a+}^{\alpha} (t-a)^{\beta - 1}\right)(x) = 0, \, \beta = \alpha, \alpha - 1, \dots, a - [\operatorname{Re}(\alpha)],$$

получим уравнение (1).

Покажем, что $y(x)$ удовлетворяет начальным условиям (3).

Пусть $k \in N$, $1 \le k \le n-1$. Применяя оператор $D_{a+}^{\alpha - k}$ к обеим частям уравнения (6) и используя равенство

$$\left(D_{a+}^{\alpha} (t-a)^{\beta - 1}\right)(x) = \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\beta - \alpha)} (x-a)^{\beta - \alpha - 1} \left(\beta \in C, \operatorname{Re}(\beta) > \operatorname{Re}(\alpha) > 0\right)$$

и свойства дробной производной Римана–Лиувилля, получим:

$$\left(D_{a+}^{\alpha - k} y\right)(x) = \sum_{j=1}^{n} \frac{b_j}{\Gamma(k - j + 1)} (x-a)^{k-j} +$$

$$+ \frac{1}{(k-1)!} \int_a^x f\left[t, y(t), \left(D_{a+}^{\alpha_1} y\right)(t), \dots, \left(D_{a+}^{\alpha_{n-1}} y\right)(t)\right] (x-t)^{k-1} dt . \quad (7)$$

Если же $k = n$, то

$$\left(D_{a+}^{\alpha-n} y\right)(x) \equiv \left(I_{a+}^{n-\alpha} y\right)(x) = \sum_{j=1}^{n} \frac{b_j}{(n-j)!}(x-a)^{n-j} +$$

$$+\frac{1}{(n-1)!}\int_a^x f\left[t, y(t), \left(D_{a+}^{\alpha_1} y\right)(t), \ldots, \left(D_{a+}^{\alpha_{n-1}} y\right)(t)\right](x-t)^{n-1} dt. \qquad (8)$$

Переходя в (7) и (8) к пределу при $x \to a$, приходим к равенствам (3). Это завершает доказательство теоремы.

При $\alpha = n \in N, \alpha_1 = 1, \ldots, \alpha_{n-1} = n-1$ получаем следующее утверждение.

Теорема 2. *Пусть* $n \in N$, *функция* $f[x, y_1, \ldots, y_n]$ *удовлетворяет условиям теоремы* 1 . *Для того, чтобы функция* $y(x) \in C[a,b]$ *являлась решением задачи Коши*

$$y^{(n)}(x) = f\left[x, y(x), y'(x), \ldots, y^{(n-1)}(x)\right],\ y^{(n-k)}(a) = b_k \in R\ (k = 1, 2, \ldots, n), \quad (9)$$

необходимо и достаточно, чтобы она была решением интегрального уравнения (6) *с* $\alpha_1 = 1, \ldots, \alpha_{n-1} = n-1$.

Для установления условий существования и единственности решения задачи типа Коши (1), (3) к условиям теоремы 1 добавим дополнительное условие: липшицевость функции f относительно *n* переменных:

$$|f[x, y_1, \ldots, y_n] - f[x, y_1', \ldots, y_n']| \le L \sum_{i=1}^{n} |y_i - y_i'| \qquad (10)$$

для любых $x \in [a,b]$ и $(y_1, \ldots, y_n)$, $(y_1', \ldots, y_n') \in G \subset R^n$, где постоянная $L > 0$ не зависит от *x*.

Теорема 3. *Пусть* $\alpha \in C$, $\mathrm{Re}(\alpha) > 0$, $n = -[-\mathrm{Re}(\alpha)]$, $\gamma \in C$ $(0 \le \mathrm{Re}(\gamma) < 1)$, *функция* $f[x, y_1, \ldots, y_n] : [a,b] \times R^n \to R$ *удовлетворяет условиям теоремы* 1 *и условию* (10). *Тогда существует единственное решение* $y(x) \in C_{n-\alpha,\gamma}^{\alpha}[a,b]$ *задачи типа Коши* (1), (3).

Для доказательства теоремы достаточно доказать существование единственного решения интегрального уравнения (6), что можно сделать с помощью метода последовательных приближений.

Теорема 4. *Пусть* $n \in N$, $\gamma \in C$ $(0 \le \mathrm{Re}(\gamma) < 1)$, *функция* $f[x, y_1, \ldots, y_n]$ *удовлетворяет условиям теоремы* 1 *и условию* (10). *Тогда существует единственное решение* $y(x)$ *задачи Коши* (9) *в пространстве* $C_\gamma^n[a,b]$.

Литература

1. Самко, С.Г. Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения / С.Г. Самко, А.А. Килбас, О.И. Маричев. – Минск : Наука и техника, 1987. – 687 с.