Серыя "У дапамогу педагогу"
заснавана ў 1995 годзе

Навукова-метадычны часопіс
Выдаецца з IV квартала 1995 года
Пасведчанне аб дзяржаўнай рэгістрацыі сродку масавай інфармацыі № 686 ад 16.09.2009 г., выдадзенае Міністэрствам інфармацыі Рэспублікі Беларусь
Перарэгістраваны 03.01.2013 г.
Выходзіць 6 разоў у год

Заснавальнік і выдавец –
РУП «Выдавецтва
"Адукацыя і выхаванне"»
Міністэрства адукацыі
Рэспублікі Беларусь

4(116) • 2018
ліпень — жнівень

МАТЭМАТЫКА

Вул. Будзённага, 21,
220070, г. Мінск,
тэл.: 297-93-18 (адк. сакратар),
297-93-25 (аддзел продажу),
факс: 297-91-49
e-mail: matem@aiv.by
http://www.aiv.by

4/2018

ЗМЕСТ

Нарматыўныя прававыя дакументы

У дапамогу маладому настаўніку

На факультатыўных занятках

Дасылаючы матэрыялы для публікацыі ў нашым часопісе, аўтары тым самым перадаюць выдаўцу невыключныя маёмасныя правы на ўзнаўленне, распаўсюджванне, паведамленне для ўсеагульнага ведама і іншыя магчымыя спосабы выкарыстання твора без абмежавання тэрыторыі распаўсюджвання (у тым ліку ў электроннай версіі часопіса).

*Е. П. **Гринько**, кандидат педагогических наук, доцент, заведующий кафедрой методики преподавания физико-математических дисциплин Брестского государственного университета имени А. С. Пушкина,*
*К. Н. **Шинкевич**, аспирант кафедры методики преподавания физико-математических дисциплин Брестского государственного университета имени А. С. Пушкина*

СИСТЕМЫ ДИНАМИЧЕСКОЙ ГЕОМЕТРИИ В ПРЕПОДАВАНИИ МАТЕМАТИКИ

Аннотация. В статье иллюстрируются возможности использования систем динамической геометрии (СДГ) в преподавании математики в общеобразовательной школе и вузе. Использование СДГ при обучении математике способствует лучшему усвоению знаний, развитию интереса к математике, установлению межпредметных связей.

Ключевые слова: системы динамической геометрии, GeoGebra, преподавание математики с использованием СДГ, примеры решения задач с использованием GeoGebra.

В современных условиях информатизации образования совершенствование преподавания математических дисциплин в школе и вузе невозможно без использования информационно-коммуникационных технологий (ИКТ). Использование ИКТ в процессе математической подготовки позволяет осуществлять визуализацию учебной информации, моделирование изучаемых объектов и экспериментальное наблюдение за их свойствами, иллюстрацию динамики изучаемых процессов и явлений, что способствует более глубокому усвоению учебного материала.

Вопросами определения роли и места ИКТ в образовательном процессе занимаются такие учёные, как В. А. Далингер, В. Н. Дубровский, В. И. Рыжик, Т. Ф. Сергеева, М. В. Шабанова, Г. Б. Шабат и др.

Разработке технологий создания учебных материалов на основе систем динамической геометрии посвящены исследования В. И. Глизбурга, А. Г. Яголы, Н. Джеквик, Ж.-М. Лаборда, Х. Шумана и др. [1].

Однако проведено не так много исследований, посвящённых методике использования дидактических возможностей систем динамической геометрии в преподавании математических дисциплин в школе и университете.

В настоящее время среди программного обеспечения, которое применяется в математическом образовании, выделяют:

- системы компьютерной математики (СКМ);
- специализированные системы (для поддержки отдельных разделов математики);
- системы динамической геометрии (СДГ).

Системы динамической геометрии — это специализированное программное обеспечение, позволяющее выполнять геометрические построения с помощью геометрических объектов, задавая соотношения между ними. Программные продукты образовательного назначения, такие как GeoGebra, Cabri Geometry, C.a.R., GeoNext и др., помимо выполнения вычислительных действий дают возможность создания динамических образов математических объектов, позволяют исследовать устойчивость и изменчивость их свойств. Использование этих систем в процессе преподавания математических дисциплин способствует созданию визуальных образов математических объектов, ускоряет процесс восприятия нового материала, экономит время на выполнении математических расчётов, позволяет увеличить количество заданий для самостоятельного изучения за счёт сокращения времени на вычисления и т. д. [2].

Приложения динамической геометрии способствуют выполнению расчётов за короткое время, позволяют выполнять построения графиков функций и объёмных тел и т. д., что способствует повышению уровня наглядности.

Рассмотрим возможности наиболее известных, свободно распространяемых приложений динамической геометрии.

C.a.R. — приложение динамической геометрии, название которого происходит от английского «compass and ruler» — циркуль и линейка, встречается и немецкое название Z.u.L («Zirkel und Lineal»). Приложение направлено на использование как на уроках в школе, так и на занятиях в университете. C.a.R. с открытым кодом, распространяется бесплатно. Основными языками являются английский и немецкий. В приложении реализована связь между геометрическим и алгебраическим представлениями математических объектов.

Sketchometry — достаточно новое приложение, появившееся в 2013 г. В версии Sketchometry 1.2.5. от 27.09.2016 приложение стало доступно на русском языке. Существуют версии для установки на смартфон, планшет, компьютер (Windows 8.1+, Android, iOS). Особенность приложения состоит в том, что для рисования какого-либо математического объекта необходимо совершать определённые движения манипулятором. Результаты работы можно сохранять в облачном хранилище. Приложение в основном ориентировано на школьное образование, особенно успешно можно использовать его в сочетании с интерактивной доской. Sketchometry позволяет строить интерактивные чертежи, то есть направлено на использование при обучении геометрии, обладает интуитивно понятным интерфейсом. Распространяется бесплатно.

Dr. Geo — приложение интерактивной геометрии, позволяющее создавать и манипулировать геометрическими объектами. Может использоваться в общеобразовательной школе на различных уровнях обучения. Не поддерживает 3D-графику, но даёт возможность программировать на языке Smalltalk. Существует русскоязычная версия приложения, распространяется бесплатно, не требует установки. Dr. Geo является кроссплатформенным, работает на операционных системах Linux, Mac OS, Windows, Android. Последняя версия появилась в июле 2017 г. Официальный сайт содержит пособие по обучению и видеоинструкции.

Archimedes Geo3D — ещё одно приложение динамической геометрии. Существует бесплатная версия. Приложение имеет французский, немецкий, английский языковые пакеты. Archimedes Geo3D может работать в операционных системах Windows, Linux, Mac OS. В данном приложении упор делается на построении трёхмерных объектов, однако Archimedes Geo3D позволяет строить объекты и на плоскости. Геометрические объекты можно рисовать «от руки», а также задать уравнениями поверхностей и прямых (в том числе параметрически). Приложение подойдёт для использования как в школе, так и в университете. Официальный сайт содержит руководство по использованию.

IGeom — приложение, написанное на языке Java, работает на любой платформе, портативное. Распространяется бесплатно. Разработано преимущественно для учителей с целью использования на уроках геометрии. Поддерживает только португальский языковой пакет, имеет очень дружелюбный интерфейс (с первых минут работы в приложении становится понятно, какой инструмент как нужно использовать, даже если вы не знаете португальского языка). Каждый инструмент имеет графические и текстовые подсказки по использованию. На официальном сайте есть руководство по использованию и обучению работе в приложении, а также конкретные примеры использования приложения при решении определённых задач. Поддерживает создание анимации.

Geometrix — также приложение динамической геометрии, распространяется бесплатно, поддерживает только испанский язык. Задавать математические объекты можно двумя способами: 1) путём указания на экране; 2) описанием в строке ввода. Приложение в большей степени подходит для обучения в общеобразовательной школе.

GeoGebra — бесплатное приложение, которое даёт возможность создания динамических чертежей для использования на разных уровнях обучения геометрии, алгебры, физики и других смежных дисциплин. Программа позволяет работать с функциями (построение графиков, вычисление корней, экстремумов, интегралов и т. д.). Идея GeoGebra заключается в интерактивном сочетании геометрического, алгебраического и числового представления. Можно создавать конструкции с точками, векторами, линиями, коническими сечениями, а также с математическими функциями, а затем динамически изменять их. Существуют версии для ОС Windows, Mac OS, Linux, Android, есть версия для браузера Google Chrome, а также онлайн-версия. Построенные изображения можно сохранять в облаке (одна из основных тенденций развития систем динамической математики). На официальном сайте https://www.geogebra.org представлен огромный объём информации по использованию приложения GeoGebra, также ведётся блог, в котором люди со всего мира делятся своими разработками. Интерфейс программы интуитивно понятен, поддерживает множество языковых пакетов, в том числе и русский язык. GeoGebra фактически может заменить все вышеперечисленные приложения [3].

GeoGebra предоставляет возможность создания динамических чертежей при изучении аналитической геометрии, алгебры, математического анализа и др. В программе можно создавать всевозможные конструкции из точек, векторов, отрезков, прямых, строить графики функций, серединные перпендикуляры, биссектрисы углов, касательные, перпендикулярные и параллельные заданной прямой линии, определять длины отрезков, площади многоугольников, а также производить динамические изменения построенных конструкций. Особенно хороша GeoGebra в стереометрии при построении комбинаций многогранников и тел вращения.

Программа обладает богатыми возможностями работы с функциями, позволяет вычислять корни, экстремумы, интегралы, раскладывать функции в ряд, атакже строить различные двухмерные и трёхмерные математические объекты по заданным уравенениям. Помимо этого, в программе возможно производить действия над матрицами, работать с комплексными числами, выполнять статистические вычисления и др. GeoGebra позволяет напрямую вводить уравнения, неравенства, их системы и совокупности, манипулировать координатами. Применение интерактивной геометрической среды GeoGebra в ходе решения задач, а также при изучении лекционного материала позволяет выполнить наглядное изображение всех изучаемых математических объектов, что способствует лучшему пониманию нового материала, ускоряет процесс решения задач, упрощает вычисления и т. д. [4].

Одним из основных направлений Концепции информатизации системы образования Республики Беларусь на период до 2020 г. является применение облачных технологий, что позволит обеспечить мобильность и актуальность образовательных ресурсов. Облачные технологии «позволят вовлечь в образовательный процесс личные компьютерные устройства педагогических работников, обучающихся и их родителей» [5]. Результаты работы в приложении GeoGebra можно сохранять в облаке, доступ к которому можно получить не только с домашнего компьютера, но и с мобильного телефона. Многие используют GeoGebra только как инструмент для создания чертежа, рисунка, однако приложение позволяет и решать задачи, хотя ход решения может отличаться от классического «в тетради».

Решение математической задачи в динамической математике проходит три этапа:

1) геометрическое моделирование условия задачи на дисплее монитора;

2) решение задачи на дисплее с использованием возможностей анимации;

3) построение математической модели решения, увиденного на дисплее.

GeoGebra даёт возможность создавать анимированные чертежи с помощью инструмента «ползунок». Это позволяет изучать отношение объектов в зависимости от определённых параметров.

Покажем решение некоторых задач в GeoGebra.

Задача 1. Два мотоцикла, находясь на расстоянии 540 м, начали двигаться навстречу друг другу. Первый проезжает 8 м в секунду. Второй в первую секунду проехал 5 м, а в каждую следующую секунду — на 2 м больше, чем в предыдущую. Через сколько секунд мотоциклы встретятся?

Решение. В GeoGebra создадим модель движения мотоциклов и посмотрим, через какое время они встретятся. Этапы построения модели в GeoGebra приведены в таблице 1.

После выполненных действий запускаем анимацию «ползунка», получаем модель движения мотоциклов (рис. 1), замечаем, что они встречаются при $t = 13{,}5$, значит, *ответ:* мотоциклы встретятся через 13,5 секунды.

Задача 2. Найдите значение параметра a, при котором система уравнений

$$\begin{cases}(a-1)x+y=a-1,\\(a+3)x+ay=2a\end{cases}$$

имеет более одного решения.

Таблица 1 — Этапы построения модели

Описание действия	**Запись в GeoGebra**
Задаём точки начального и конечного пункта	$A=(0,0)$ $B=(540,0)$
Опишем скорости. Первый мотоцикл движется с постоянной скоростью, второй — равноускоренно	$v_1=8$ $v_2=5+2t$ После ввода последнего уравнения GeoGebra создаст «ползунок» t
Создадим две точки, соответствующие каждому мотоциклу, зададим их координаты	$V_1=((v_1t),0)$ $V_2=((540-v_2t),0)$

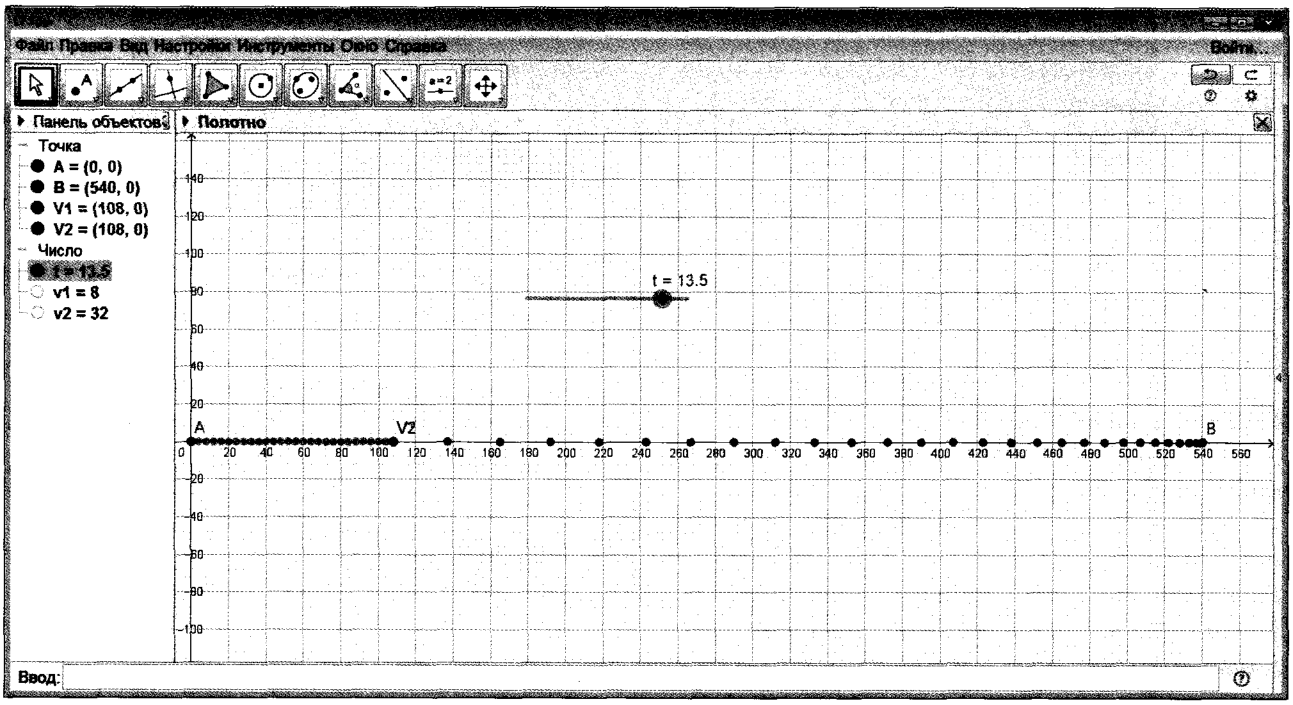

Рисунок 1 — Модель движения тел

Решение. Решим задачу геометрически. Построим две прямые и посмотрим, при каком значении параметра они совпадают (только в этом случае система будет иметь более одного решения). Вначале зададим параметр a, то есть создаем «ползунок» a. Затем задаём прямые в GeoGebra таким образом:

$$f:(a-1)x+y=a-1,\quad g:(a+3)x+ay=2a.$$

Запускаем анимацию «ползунка». Видим, как изменяется положение прямых при изменении параметра a, также видим, как изменяются уравнения прямых (рис. 2).

При $a=-1$ прямые параллельны, при $a=3$ прямые совпадают, видно, что их уравнения одинаковы. В остальных случаях прямые имеют одну общую точку.

Ответ: при $a=3$ данная система имеет более одного решения.

Приведённые задачи наглядно демонстрируют, что, используя системы динамической геометрии при обучении математике, мы можем смотреть на алгебраические задачи с точки зрения геометрии (что показывает неразрывную связь алгебры и геометрии), способствует более глубокому пониманию математики и лучшему усвоению знаний учащимися.

В курсе вузовской аналитической геометрии задачи зачастую не связаны с геометрическим представлением объектов. Заданы уравнения, координаты, и после определённых манипуляций мы приходим к ответу, и мало кто задумывается о том, как выглядят эти уравнения в пространстве с точки зрения геометрии. Использование системы динамической геометрии позволяет выполнить наглядное представление изучаемых математических объектов, что способствует лучшему пониманию изучаемого материала [6].

Задача 3. Составьте уравнение плоскости, проходящей через точку $P(4,-3,1)$ и параллельной прямым

$$\frac{x}{6}=\frac{y}{2}=\frac{z}{-3},\quad \frac{x+1}{5}=\frac{y-3}{4}=\frac{z-4}{2}.$$

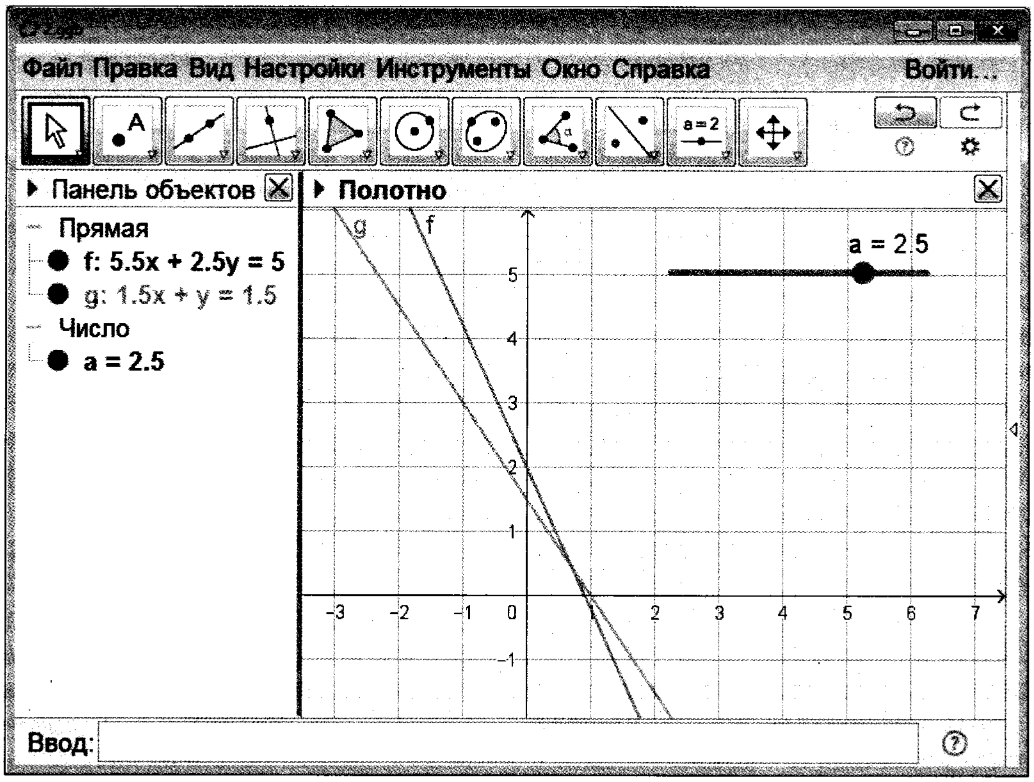

Рисунок 2 — Решение системы уравнений

Таблица 2 — Этапы построения модели

Описание действия	Действия в GeoGebra
Создаём точку P	В строке ввода записываем: $P = (4, -3, 1)$
Строим прямую $\frac{x}{6}=\frac{y}{2}=\frac{z}{-3}$. Для этого необходимо построить направляющий вектор прямой и точку, которая принадлежит прямой. Строим прямую по точке, принадлежащей ей, и направляющему вектору	В строке ввода делаем последовательно следующие записи: *A = (0, 0, 0),* *C = (6, 2, −3),* *a = Вектор (C).* В GeoGebra прямую можно задать следующим образом: *l = Прямая (<Точка>, <Направление>*) *l = Прямая* (A, a)
Аналогично строим вторую прямую	$B = (-1, 3, 4)$ $D = (5, 4, 2)$ b = Вектор (D) m = Прямая (B, b)
Построим прямые (h, k), проходящие через точку P и параллельные прямым l и m	Создаём прямые с помощью инструмента «параллельная прямая» или записываем в строке ввода: *Прямая (P, l)* *Прямая (P, m)*

Окончание таблицы 2

Отмечаем произвольно на одной из прямых h или k (например, k)	Используем инструмент «точка на объекте» или делаем запись в строке ввода D = *Точка* (k)
Проводим плоскость через прямую h и точку D	Пишем в строке ввода *Плоскость* (D, h)
	CAS $U:= \{\{x-1, y+3, z-1\}, \{6, 2, -3\}, \{5, 4, 2\}\}$

Эту задачу можно решить и другим способом, с помощью системы CAS: задаём матрицу V, определитель которой опишет искомое уравнение плоскости.

В строке ввода CAS запишем:

$$\mathrm{V} := \left\{\{x-1, y+3, z-1\},\right.$$

$$\left.\{6, 2, -3\}, \{5, 4{,}2\}\right\}$$

Определитель (B)

В результате этих действий получаем искомое уравнение (рис. 4).

Решим ещё одну задачу из курса «Аналитическая геометрия».

Задача 4. Укажите, сколько общих точек имеют плоскости $x+2y+3z=7$, $2x-y+z=9$, $x-4y+2z=11$. Если возможно, найдите их.

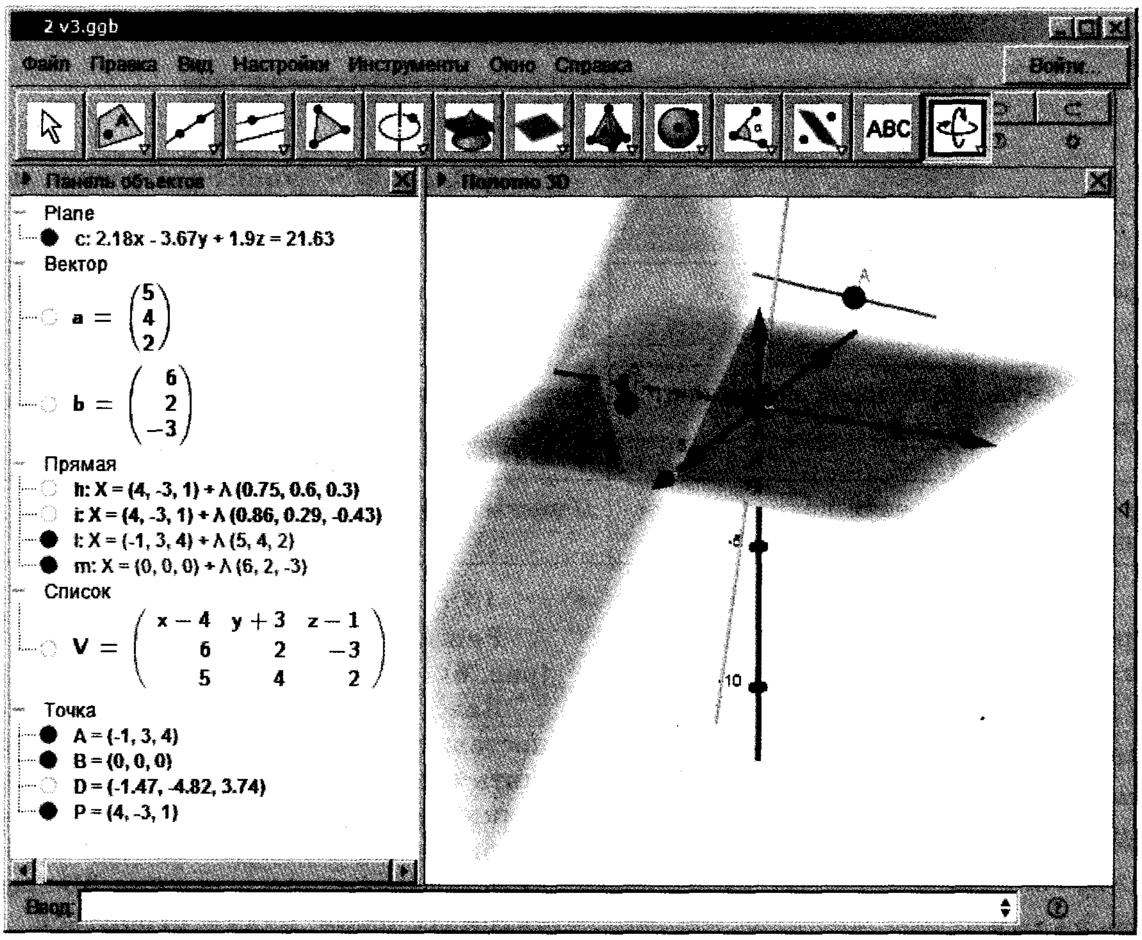

Рисунок 3 — Геометрическое решение задачи

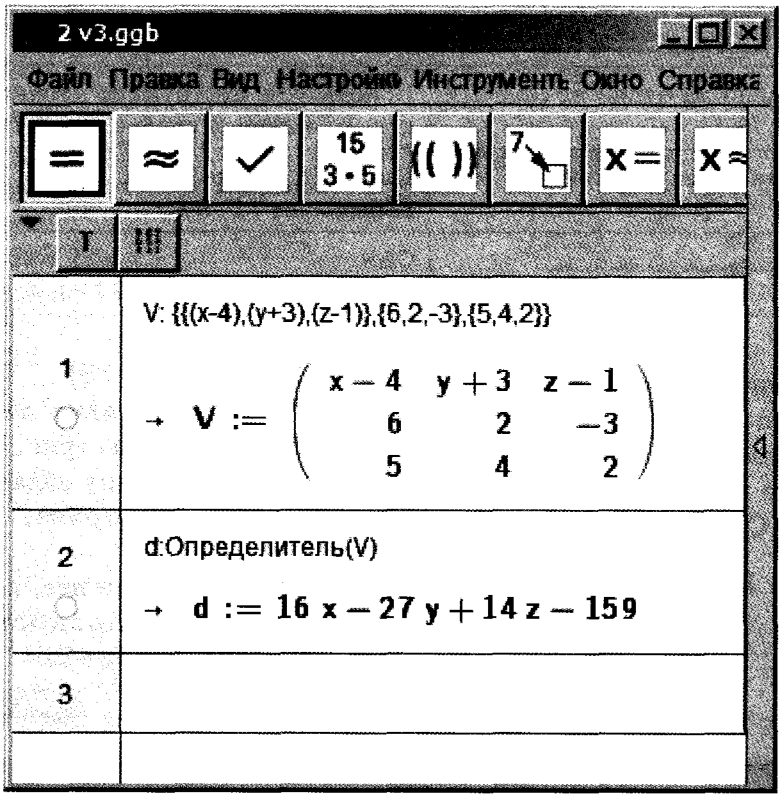

Рисунок 4 — Алгебраическое решение задачи

Таблица 3 — Этапы построения модели

Описание действия	Действия в GeoGebra
Построим заданные плоскости	В строке ввода последовательно записываем: $x+2y+3z=7,\ 2x-y+z=9,\ x-4y+2z=11$
Строим прямую, по которой пересекаются первые две плоскости	В строке ввода пишем: *Пересечение* (*a*, *b*) Получили прямую *f*
Строим точку пересечения прямой *f* и третьей плоскости	*Пересечение* (*c*, *f*)

В результате решения мы получили, что плоскости пересекаются в точке $A(3,-1,2)$ (рис. 5).

В алгебре эта задача могла бы звучать так:

Решите систему линейных алгебраических уравнений:

$$\begin{cases} x+2y+3z=7, \\ 2x-y+z=9, \\ x-4y+2z=11. \end{cases}$$

Решим систему с помощью CAS (рис. 6).

Каждому уравнению системы можно поставить в соответствие плоскость. Решить систему уравнений — значит найти точки пересечения плоскостей, заданных уравнениями системы. Если в CAS вводить уравнения, то в режиме 3D-графики автоматически будут строиться плоскости.

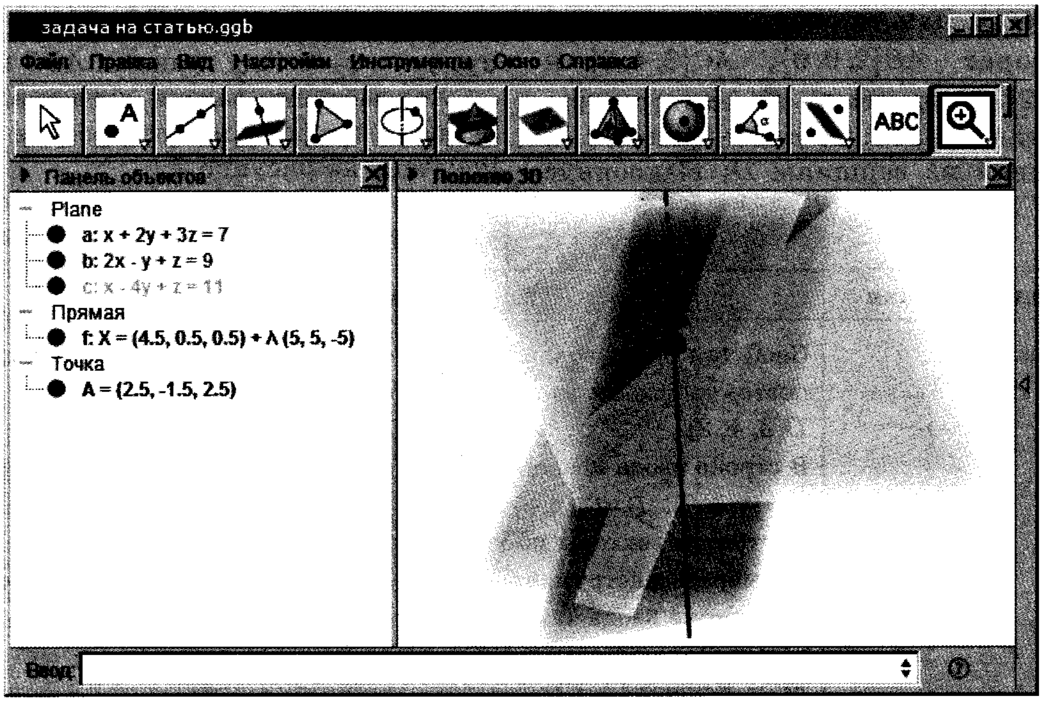

Рисунок 5 — Геометрическое решение задачи

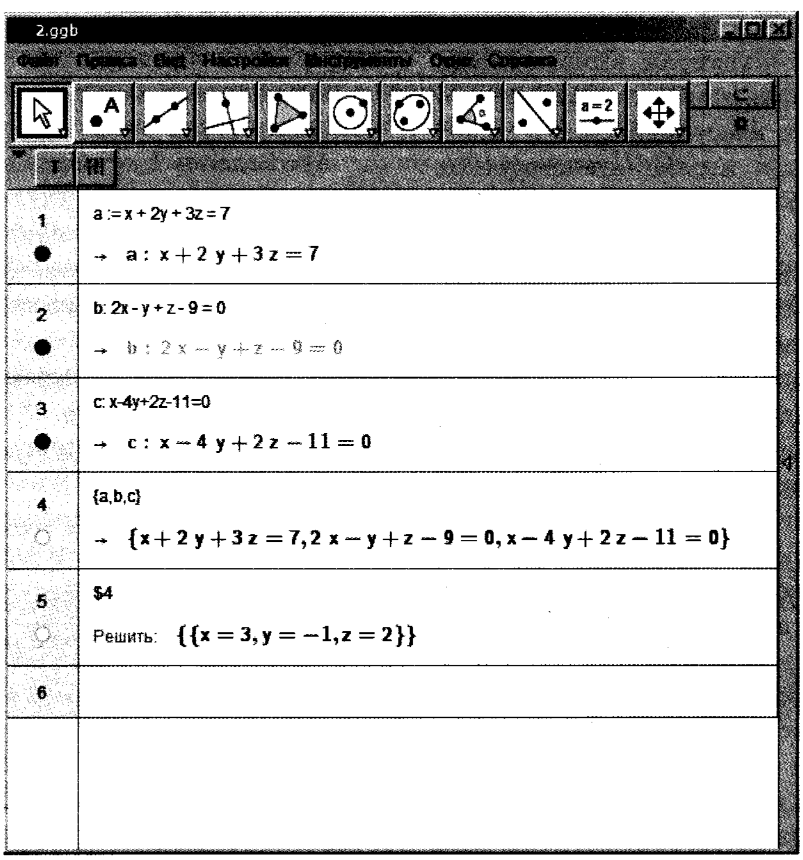

Рисунок 6 — Решение СЛАУ

Задача 5. Дан тетраэдр, построенный на векторах $\overrightarrow{AB}\{2, 0, 0\}$, $\overrightarrow{AC}\{3, 4, 0\}$ и $\overrightarrow{AD}\{3, 4, 2\}$. Найдите: а) объём тетраэдра; б) площади граней; в) длину высоты h, проведённой из вершины D; г) косинус угла φ_1 между рёбрами AB и BC; д) косинус угла φ_2 между гранями ABC и ADC.

Ход решения задачи представлен в таблице 4, графическое построение к задаче показано на рисунке 7.

Таблица 4 — Этапы построения модели

Описание действия	Действие в GeoGebra
Строим векторы $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}$	GeoGebra не позволяет строить векторы по заданным координатам, поэтому зададим точку $A(0, 0, 0)$ и точки $B(2, 0, 0)$, $C(3, 4, 0)$, $D(3, 4, 2)$. В строке ввода последовательно записываем: $A=(0,0,0)$; $B=(2,0,0)$, $C=(3, 4, 0)$, $D=(3, 4, 2)$. Построить векторы по двум точкам можно двумя способами: а) выбрать инструмент «вектор» и указать необходимые точки; б) в строке ввода «записать вектор» задаётся таким образом: *Вектор* [<*Начальная точка*>, <*Конечная точка*>], в нашем случае *AC* = *Вектор* [*A*, *C*]
Построим основание тетраэдра	Выберем инструмент «многоугольник» и укажем точки *B, C, D* либо в строке ввода запишем: «*основание ABD* = *Многоугольник* [*B, C, D*]».
Строим тетраэдр	Используем инструмент «пирамида», указываем основание *ABD* и точку *A*. Можно иначе: в строке ввода пишем «*Q*=*Пирамида* [*основание, A*]». Заданный тетраэдр построен
Находим: а) объём тетраэдра; б) площади граней; в) длину высоты h, проведённой из вершины D; г) косинус угла φ_1 между рёбрами AB и BC; д) косинус угла φ_2 между гранями ABC и ADC	При построении тетраэдра на панели объектов автоматически указывается объём тетраэдра; площади граней; длины рёбер. С помощью инструмента «перпендикулярная прямая» строим перпендикуляр из точки D к грани ABC. Используя инструмент «угол», можно найти численное значение угла между рёбрами, а затем вычислить его косинус. GeoGebra не позволяет строить двухгранные углы (включая версию от 16.01.2017). Поступаем таким образом: • с помощью инструмента «точка на объекте» произвольно создаём точку $I \in ABC$; • воспользовавшись инструментом «перпендикулярная прямая» строим прямую, проходящую через точку I, перпендикулярную ребру AC. Точка $J = IJ \cap AC$; так как $DC \perp ABC$, то, если через точку J провести прямую, параллельную DC, она будет перпендикулярна грани ABC. Таким образом, получили прямую JH; используя инструмент «угол», указав точки H, J, I, находим искомый угол φ_2, а затем и его косинус

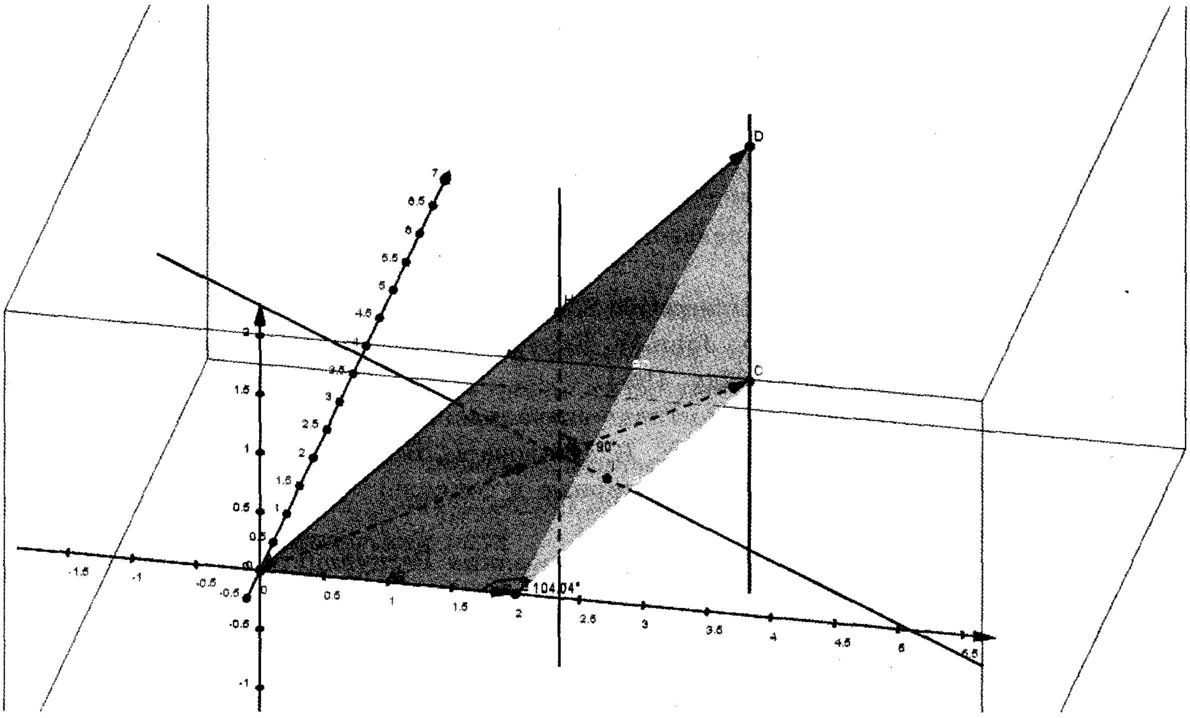

Рисунок 7 — Решение задачи по аналитической геометрии

Традиционная методика обучения в университете математическим дисциплинам не использует в полной мере потенциальные возможности динамических компьютерных моделей, описывающих развитие процесса (изменение пространственного положения и структуры) во времени и реализованных на ЭВМ. Налицо противоречие между потребностью в совершенствовании процесса обучения математическим дисциплинам в университете и традиционной методикой, не достаточно использующей наглядно-образный потенциал современных информационных дидактических средств. Использование компьютерного инструментария при решении задач профессионального характера является одной из главных составляющих профессионально ориентированного обучения студентов, предусматривающего ориентацию всех изучаемых дисциплин на конкретные результаты обучения, связанные с приобретением конкретной специальности.

Использование информационных технологий в процессе математической подготовки даёт возможность совершенствовать методику преподавания математики на этапе высшего профессионального образования в тесной связи с информатикой и информационно-коммуникационными технологиями, позволяя осуществлять визуализацию учебной информации, моделирование изучаемых объектов и экспериментальное наблюдение за их свойствами, иллюстрацию динамики изучаемых процессов и явлений. Зрительно воспринимаемые образы вызывают из памяти обучающихся необходимые ассоциации, опорные знания, помогают достаточно компактно выстроить систему изучаемого блока содержания учебного материала, облегчают понимание его структуры и тем самым способствуют глубокому усвоению [7].

Современный период информатизации общества и образования определяет необходимость обновления и совершенствования методики обучения математике в школе и вузе. Информационные технологии позволяют решать принципиально новые дидактические задачи, их применение обеспечивает повышение качества и эффективности образования.

Список использованных источников

1. *Далингер, В. А.* Обучение математике на основе когнитивно-визуального подхода / В. А. Далингер // Вестник Брянского государственного университета. — 2011. — № 1 — С. 297—303.

2. *Ларин, С. В.* Алгебра и математический анализ с GeoGebra / С. В. Ларин // Вестник Красноярского государственного педагогического университета им. В. П. Астафьева. — 2013. — № 1. — С. 236—241.

3. Geometric Discovery Through Interactive Software An Honors Thesis (HONRS 499) by William V. Habegger Thesis Advisor: Dr. John W. Emen Ball State University Muncie, Indiana May 1994 Expected Date of Graduation: May, 1994.

4. *Ерилова, Е. В.* Реализация когнитивно-визуального подхода посредством интерактивной геометрической среды GeoGebra / Е. В. Ерилова // Вестник Северного (Арктического) федерального университета. Сер. : Гуманитарные и социальные науки. — 2015. — № 1. — С. 144—149.

5. Концепция информатизации системы образования Республики Беларусь на период до 2020 года.

6. *Гринько, Е. П.* Возможности использования приложения GeoGebra при обучении геометрии / Е. П. Гринько, К. Н. Шинкевич // Формирование готовности будущего учителя математики к работе с одаренными учащимися : матер. Междунар. науч.-практ. конф., Брест, 12—13 апр. 2017 г. / Брест. гос. ун-т им. А. С. Пушкина ; редкол. : Н. А. Каллаур [и др.] ; под общ. ред. Е. П. Гринько. — Брест : БрГУ, 2017. — С. 187–190.

7. *Андрафанова, Н. В.* Применение информационных технологий в математическом образовании / Н. В. Андрафанова, Н. В. Губа // Образовательные технологии и общество. — 2015. — Т. 18. — № 4. — С. 559—573.