



БрГУ имени А.С. Пушкина

Главная

Содержание



Вернуться

Тесты

Учреждение образования «Брестский государственный университет имени А.С. Пушкина»

Кафедра общей и теоретической физики

Теоретическая физика (Электродинамика)

Электронный учебно-методический комплекс

Брест, 2017



БрГУ имени А.С. Пушкина

Главная

Содержание

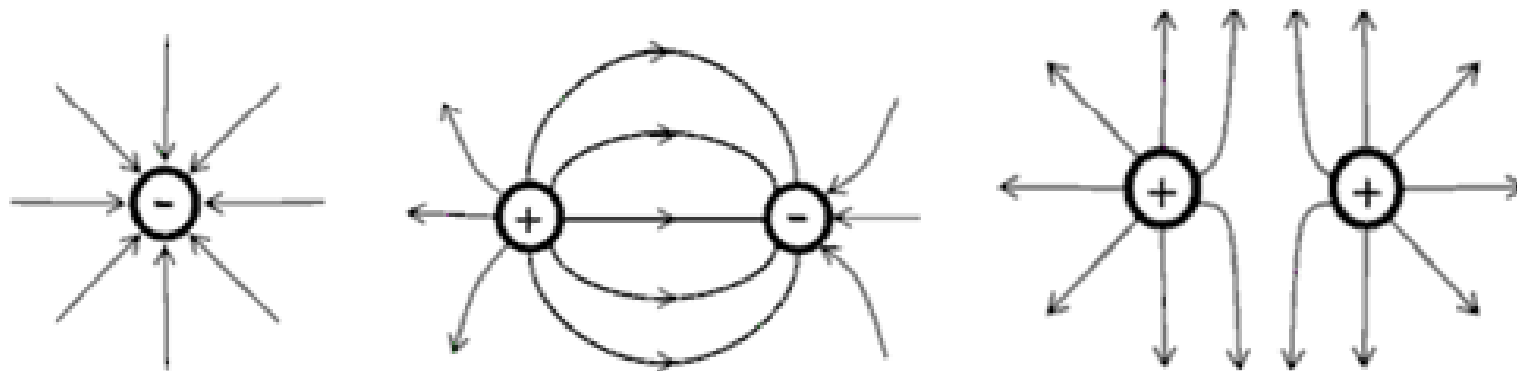


Вернуться

Тесты

Учреждение образования
«Брестский государственный университет имени А.С. Пушкина»

Кафедра общей и теоретической физики



Теоретическая физика (Электродинамика)

Учебно-методический комплекс
для студентов 3 курса специальности «Физика и информатика»
(6 семестр)

Брест, 2017



БрГУ имени А.С. Пушкина

Главная

Содержание



Вернуться

Тесты

УДК 530:537.8(075.8)

ББК 22.31я73

С 32

Составитель:

А.И. Серый

Рецензенты:

Кафедра физики факультета электронно-информационных систем учреждения образования
«Брестский государственный технический университет»

(И.о. заведующего кафедрой кандидат физико-математических наук, доцент

Т.Л. Кушнер)

Кандидат физико-математических наук, доцент кафедры прикладной математики и информатики
физико-математического факультета учреждения образования

«Брестский государственный университет имени А.С. Пушкина»

В.В. Тригук

Пособие соответствует разделу курса теоретической физики «Электродинамика» и рассчитано на 38 лекционных часов и 12 часов практических занятий

Предназначен для студентов 3 курса специальности «Физика и информатика» (6 семестр)



БрГУ имени А.С. Пушкина

Главная

Содержание



Вернуться

Тесты

Содержание

Содержание

Введение	7
Тематический план	9
Тема 1. Введение в электродинамику	11
1.1. Электрический заряд и его свойства. Предмет электродинамики. Интегральная и дифференциальная форма уравнений электродинамики.....	11
Тема 2. Электростатика.....	19
2.1. Закон Кулона. Основные интегральные соотношения электростатики вакуума.....	19
2.2. Полная система дифференциальных уравнений первого порядка электростатики вакуума. Граничные условия	29
2.3. Уравнения второго порядка электростатики вакуума	40
2.4. Энергия взаимодействия электрических зарядов. Энергия электростатического поля	48
Тема 3. Постоянный электрический ток	62
3.1. Дифференциальная форма основных законов стационарного тока. Закон сохранения электрического заряда в дифференциальной форме (уравнение непрерывности). Электрическое поле стационарного тока	62
Тема 4. Магнитостатика	79



БрГУ имени А.С. Пушкина

Главная

Содержание



Вернуться

Тесты

Содержание	
4.1. Магнитное взаимодействие токов. Законы Ампера и Био-Савара-Лапласа. Основные интегральные соотношения магнитостатики вакуума.....	79
4.2. Полная система дифференциальных уравнений первого порядка магнитостатики вакуума. Граничные условия	87
4.3. Векторный потенциал магнитного поля. Уравнения второго порядка магнитостатики вакуума	107
Тема 5. Квазистационарное электромагнитное поле.....	116
5.1. Условия квазистационарности. Явление электромагнитной индукции. Обобщенная формулировка закона электромагнитной индукции.....	116
5.2. Закон электромагнитной индукции в дифференциальной форме. Полная система дифференциальных уравнений первого порядка квазистационарного электромагнитного поля.....	124
Тема 6. Переменное электромагнитное поле.....	131
6.1. Гипотеза Максвелла, ток смещения. Полная система уравнений Максвелла.....	131
6.2. Уравнения второго порядка для потенциалов электромагнитного поля. Условие калибровки Лоренца	140
6.3. Энергия и поток электромагнитного поля. Вектор Пойнтинга.....	146
Тема 7. Излучение и распространение электромагнитных волн	153
7.1. Общие решения уравнений Даламбера. Запаздывающие потенциалы	153



БрГУ имени А.С. Пушкина

Главная

Содержание



Вернуться

Тесты

Содержание	
7.2. Дипольное излучение. Сферические электромагнитные волны и их свойства	159
7.3. Излучение ускоренно движущегося точечного заряда. Линейный гармонический осциллятор.....	177
7.4. Плоские электромагнитные волны и их свойства	182
7.5. Волновой пакет. Фазовая и групповая скорость волн	192
Содержание практических занятий	202
1. Элементы векторного анализа. Электростатическая теорема Гаусса.....	202
2. Потенциал электростатического поля. Уравнение Пуассона и Лапласа	205
3. Энергия взаимодействия зарядов. Энергия электростатического поля. Постоянный электрический ток.....	208
4. Закон полного тока. Уравнения II порядка постоянного магнитного поля.....	212
5. Энергия магнитного поля. Явление электромагнитной индукции	216
6. Переменное электромагнитное поле. Уравнения Максвелла. Электромагнитные волны	219
Ответы к задачам	222
Тесты	237
Список литературы.....	238



БрГУ имени А.С. Пушкина

Главная

Содержание



Вернуться

Тесты

Введение

Введение

Данный электронный учебно-методический комплекс (далее – ЭУМК) предназначен, прежде всего, для студентов специальности «Физика и информатика», хотя может быть использован и студентами других специальностей при изучении курса физики, если такой предусмотрен учебным планом.

При составлении ЭУМК была использована учебная программа по дисциплине «Теоретическая физика» (раздел «Электродинамика») (регистрационный № УД-29-001-15/уч.), составленная на основе образовательного стандарта «Высшее образование. Первая ступень. Специальность 1-02 05 02 Физика и информатика. Квалификация преподаватель», утвержденного и введенного в действие постановлением Министерства образования Республики Беларусь от 30.08.2013 № 87. В соответствии с программой, на изучение раздела «Электродинамика» отводится 38 часов лекций и 12 часов практических занятий.

ЭУМК направлен на достижение основной дидактической цели – самообразования. В то время как объем научной (и, соответственно, учебной) информации непрерывно растет, количество часов, отводимых учебными планами на преподавание традиционно изучаемых дисциплин, постепенно сокращается. В связи с этим необходимо, чтобы учебные дисциплины, которые еще остаются актуальными, преподавались на должном научном уровне, полноценно и кратко. При этом успешная организация самостоятельной работы студентов является необходимым условием для глубокого изучения материала студентами.



БрГУ имени А.С. Пушкина

Главная

Содержание



Вернуться

Тесты

Введение

В структуру ЭУМК входят 4 составляющие: 1) теоретическая, содержащая лекционный материал; 2) практическая, содержащая задачи к практическим занятиям с ответами; 3) контроля знаний, включающая тесты по лекционному материалу и вопросы для самоконтроля к практическим занятиям; 4) вспомогательная, включающая тематический план и список литературы.

Изложение теоретического материала в УМК приводится в последовательности, в целом характерной для многих учебных пособий по электродинамике. При изложении материала указываются стандартные способы решения основных задач. Электронный тест для закрепления теоретического материала дается по каждой из 7 тем. Для практических занятий по темам, предусмотренным учебной программой, составлены задачи и ответы к ним; вопросы для самоконтроля позволяют студентам выбрать правильные методы решения задач. Для ряда задач по электростатике и магнитостатике предполагается применение различных способов решения с целью выработки у студентов понимания того, что результат более надежен тогда, когда он может быть получен различными способами и при этом оказывается одним и тем же.



БрГУ имени А.С. Пушкина

Главная

Содержание



Вернуться

Тесты

Тематический план			
Тематический план			
ПРИМЕРНЫЙ ТЕМАТИЧЕСКИЙ ПЛАН			
№	Название темы, перечень изучаемых вопросов	ЛК	ПР
Электродинамика		38	12
1	Введение в электродинамику. Электрический заряд и его свойства. Предмет электродинамики. Интегральная и дифференциальная форма уравнений электродинамики.	2	
2	Электростатика. Закон Кулона. Основные интегральные соотношения электростатики вакуума. Полная система дифференциальных уравнений первого порядка электростатики вакуума. Граничные условия. Уравнения второго порядка электростатики вакуума. Примеры на расчет полей методом интегрирования уравнений Пуассона и Лапласа. Энергия взаимодействия электрических зарядов. Энергия электростатического поля.	8	4
3	Постоянный электрический ток. Дифференциальная форма основных законов стационарного тока. Закон сохранения электрического заряда в дифференциальной форме (уравнение непрерывности). Электрическое поле стационарного тока.	2	2
4	Магнитостатика. Магнитное взаимодействие токов. Законы Ампера и Био-Савара-Лапласа. Основные интегральные соотношения магнитостатики вакуума. Полная система дифференциальных уравнений первого порядка магнитостатики вакуума. Граничные условия. Векторный потенциал магнитного поля. Уравнения второго порядка магнитостатики вакуума.	6	2
5	Квазистационарное электромагнитное поле. Условия квазистационарности. Явление электромагнитной индукции. Обобщенная формулировка закона электромагнитной индукции. Закон	4	2



БрГУ имени А.С. Пушкина

Главная

Содержание



Вернуться

Тесты

	электромагнитной индукции в дифференциальной форме. Полная система дифференциальных уравнений первого порядка квазистационарного электромагнитного поля.		
6	Переменное электромагнитное поле. Гипотеза Максвелла, ток смещения. Полная система уравнений Максвелла. Уравнения второго порядка для потенциалов электромагнитного поля. Условие калибровки Лоренца. Энергия и поток электромагнитного поля. Вектор Пойнтинга.	6	
7	Излучение и распространение электромагнитных волн. Общие решения уравнений Даламбера. Запаздывающие потенциалы. Дипольное излучение. Сферические электромагнитные волны и их свойства. Излучение ускоренно движущегося точечного заряда. Линейный гармонический осциллятор. Плоские электромагнитные волны и их свойства. Волновой пакет. Фазовая и групповая скорость волн.	10	2



Тема 1. Введение в электродинамику

Тема 1. Введение в электродинамику

1.1. Электрический заряд и его свойства. Предмет электродинамики. Интегральная и дифференциальная форма уравнений электродинамики

Литература: [[1](#), с. 8–9; [3](#), с. 14–16; [4](#), с. 11–12; [5](#), с. 13–15; [7](#); [8](#); [9](#)]

Предмет электродинамики

Электродинамика – это раздел физики, который изучает электромагнитное взаимодействие как одно из фундаментальных взаимодействий.

Если не рассматривать различные теории и модели, в которых делаются попытки объединить известные фундаментальные взаимодействия и тем самым уменьшить их количество, то на сегодняшний день известно 4 фундаментальных взаимодействия (см. [таблицу 1.1](#)). Для сравнения интенсивности различных взаимодействий удобно сравнить значения потенциальной энергии каждого из 4 взаимодействий для 2 протонов (т.к. пара протонов может участвовать во всех 4 взаимодействиях), находящихся на одном и том же расстоянии друг от друга; в качестве такого расстояния берется комптоновская длина волны протона $\hbar/(m_p c)$, где $\hbar$ – постоянная Планка, m_p – масса протона, c – скорость света в вакууме. После этого полученный результат надо разделить на энергию покоя одного протона, равную $m_p c^2$. Результаты отражены в [таблице 1.1](#).

Главная

Содержание



Вернуться

Тесты

БрГУ имени А.С. Пушкина



БрГУ имени А.С. Пушкина

Главная

Содержание



Вернуться

Тесты

Тема 1. Введение в электродинамику

Таблица 1.1 – Фундаментальные взаимодействия и их энергия (константа взаимодействия по порядку величины)

Взаимодействие	Константа взаимодействия по порядку величины	Взаимодействие заметно проявляется
Сильное	1	лишь в микромире (на расстояниях до 10^{-12} см)
Электромагнитное	$\frac{e^2}{\hbar c} = \frac{1}{137}$	и в микромире, и в макромире
Слабое	10^{-5}	лишь в микромире (на расстояниях до 10^{-16} см)
Гравитационное	10^{-38}	и в микромире, и в макромире

По [таблице 1.1](#) следует сделать замечания: 1. На первый взгляд, с точки зрения пространственных масштабов проявления, электромагнитное взаимодействие имеет некоторое сходство с гравитационным. Вместе с тем, электромагнитное взаимодействие не может быть сведено к гравитационному, т.к. эксперименты показывают, что оно не зависит от масс взаимодействующих объектов, хотя и зависит, подобно гравитационному, от расстояния между ними. Напротив, попытки теоретического объединения электромагнитного взаимодействия с двумя остальными (с сильным и слабым) имеют заметные успехи, причем в области микромира, а не макромира. 2. Пространственные масштабы проявления классической электродинамики со стороны больших



Тема 1. Введение в электродинамику

расстояний не ограничены, а со стороны малых расстояний ограничены значением $r_0 = e_0^2 / (m_e c^2) \sim 10^{-13}$ см, которое называется классическим радиусом электрона (e_0 – элементарный электрический заряд (см. далее), m_e – масса электрона). Смысл классического радиуса электрона заключается в том, что на таком расстоянии потенциальная энергия кулоновского взаимодействия 2 электронов равна энергии покоя одного электрона $m_e c^2$. 3. На масштабах, меньших r_0 , важную роль играют эффекты квантовой электродинамики, которые в рамках нашего курса рассматриваться не будут.

Предметом изучения электродинамики являются электрические заряды и токи, создаваемые ими различные поля электромагнитной природы, а также взаимодействие зарядов, токов и полей между собой.

Изложение классической макроскопической электродинамики можно осуществлять 2 способами: 1) по индукции (от частного к общему); 2) по дедукции (от общего к частному).

Основные этапы изложения электродинамики по индукции: 1. Из экспериментальных фактов выводятся основные опытные законы. 2. Опытные законы обобщаются в виде [системы уравнений Максвелла](#). 3. На основе [системы уравнений Максвелла](#) выводятся новые законы (последний этап уже носит дедукционный характер).

Основные этапы изложения электродинамики по дедукции: 1. [Система уравнений Максвелла](#) постулируется как исходная. 2а. На основе [системы уравнений Максвелла](#) выводятся основные опытные законы. 2б. На основе [системы уравнений Максвелла](#) выводятся новые законы.

БрГУ имени А.С. Пушкина

Главная

Содержание



Вернуться

Тесты



Тема 1. Введение в электродинамику

В нашем курсе будет применяться изложение по индукции. В этом случае основными опытными законами, относящимися к первому этапу, являются законы [Кулона](#), [Био–Савара–Лапласа](#), [Ома](#), [электромагнитной индукции Фарадея](#). Именно они в обобщенном виде составляют полную [систему уравнений Максвелла](#), с помощью которой в макроскопической электродинамике можно описать любое произвольное поле электромагнитного происхождения.

Классическая макроскопическая электродинамика носит феноменологический характер. Т.е. подразумевается, что заряды и характеристики среды заполняют исследуемую область пространства сплошным образом. Тем самым устраняется проблема учета микроскопических неоднородностей и одновременно реализуется возможность учета макроскопических неоднородностей. Для достижения этих целей вводится такое важнейшее понятие, как [физически бесконечно малый объем](#).

Физически бесконечно малый объем – это объем, пространственные размеры которого: 1) велики по сравнению с расстояниями между молекулами; 2) малы по сравнению с размерами макроскопических тел. Под значением какой-либо физической величины в данной точке будем понимать среднее значение этой физической величины по [физически бесконечно малому объему](#), окружающему данную точку.

$$\Psi = \bar{\psi} = \frac{1}{V} \int_V \psi(V') dV'. \quad (1.1)$$

БрГУ имени А.С. Пушкина

Главная

Содержание



Вернуться

Тесты



Тема 1. Введение в электродинамику

По данному определению следует сделать замечания: 1. Первое условие позволяет устранить проблему учета микроскопических неоднородностей. 2. Второе условие позволяет учесть макроскопические неоднородности.

Электрический заряд и его свойства

Электромагнитное взаимодействие определяется такой фундаментальной характеристикой, как электрический заряд. В классической электродинамике определение понятия «электрический заряд» может быть дано по-разному, в зависимости от того, чем считать электрический заряд – объектом или физической величиной. В зависимости от этого в литературе можно встретить 2 разновидности определений этого понятия, которые можно свести к следующим:

1. Электрический заряд – это источник электромагнитного поля, непосредственно связанный со своим материальным носителем.

2. Электрический заряд (количество электричества) – это физическая скалярная величина, которая определяет способность материальных объектов быть источниками электромагнитных полей и принимать участие в электромагнитном взаимодействии.

По данным определениям следует сделать замечания: 1. Второе определение, имея тесную связь с первым, встречается гораздо чаще, поскольку позволяет приписать электрическому заряду количественную меру и поэтому оказывается более удобным для теоретического построения электродинамики. По этой причине именно это определение будет везде использоваться в

БрГУ имени А.С. Пушкина

Главная

Содержание



Вернуться

Тесты



БрГУ имени А.С. Пушкина

Главная

Содержание



Вернуться

Тесты

Тема 1. Введение в электродинамику

дальнейшем. 2. В физике элементарных частиц электрический заряд следует отличать от других типов зарядов – лептонного, барионного и др., которые играют роль квантовых чисел и имеют совершенно иное происхождение.

Что касается единиц измерения, то в нашем курсе за основу возьмем систему единиц СГС, в которой единица длины равна 1 см, единица массы – 1 г, а единица времени – 1 с. Распространение этой системы в область электродинамики дает систему единиц Гаусса, где в качестве единицы электрического заряда берется 1 СГСЭ_q.

Элементарный электрический заряд e_0 – это минимальное значение электрического заряда, которое по абсолютной величине могут иметь реально наблюдаемые объекты, обладающие электрическим зарядом. Это значение равно $4.8 \cdot 10^{-10}$ СГСЭ_q с положительным знаком.

По данному определению следует сделать замечания: 1. Значения электрического заряда по абсолютной величине ближе всего к e_0 у элементарных частиц. У них заряд равен либо нулю (например, у нейтрона или фотона), либо $+e_0$ (например, у протона и позитрона), либо $-e_0$ (например, у электрона и омега-минус-гиперона); у относительно небольшого количества элементарных частиц он равен $\pm 2e_0$. 2. Электрический заряд кварков и антикварков может быть равен $\pm e_0/3$ и $\pm 2e_0/3$, т.е. меньше элементарного электрического заряда по абсолютной величине. Но поскольку кварки и антикварки в свободном виде не наблюдаются, процессы с их участием в классической электродинамике не рассматриваются.

Основные свойства электрического заряда:



Тема 1. Введение в электродинамику

1. Электрический заряд любого тела дискретен и кратен e_0 . 2. Электрические заряды бывают двух знаков – положительные и отрицательные. 3. Алгебраическая сумма электрических зарядов любой замкнутой системы постоянна (**закон сохранения электрического заряда**, установленный Фарадеем).

Что касается последнего свойства, то следует заметить, что процессы, связанные с рождением или аннигиляцией заряженных частиц (например, двухфотонная аннигиляция электронно-позитронной пары $e^+ + e^- \rightarrow 2\gamma$) хотя и не противоречат закону сохранения электрического заряда, в рамках классической электродинамики, как правило, не рассматриваются.

Интегральная и дифференциальная форма уравнений электродинамики

Законы электродинамики могут записываться в дифференциальной и интегральной формах.

Законы, записанные в дифференциальной форме, связывают значения физических величин, относящиеся к одной и той же точке пространства. В подавляющем большинстве случаев они включают такую математическую операцию, как дифференцирование. В качестве примеров можно привести соотношения

$$\operatorname{div} \vec{E} = 4\pi\rho, \quad \vec{j} = \lambda \vec{E}. \quad (1.2)$$

БрГУ имени А.С. Пушкина

Главная

Содержание



Вернуться

Тесты



Тема 1. Введение в электродинамику

Законы, записанные в интегральной форме, связывают значения физических величин, относящихся к разным точкам пространства, и часто включают операцию интегрирования. В качестве примеров можно привести соотношения

$$\oint_S (\vec{E} \cdot \vec{n}) dS = 4\pi \int_V \rho dV, \quad I = U/R. \quad (1.3)$$

БрГУ имени А.С. Пушкина

Главная

Содержание



Вернуться

Тесты



БрГУ имени А.С. Пушкина

Главная

Содержание



Вернуться

Тесты

Тема 2. Электростатика

Тема 2. Электростатика

2.1. Закон Кулона. Основные интегральные соотношения электростатики вакуума

Литература: [1, с. 10–25; 3, с. 17–43; 4, с. 12–14, 24–35; 5, с. 18–33; 6, с. 128–129; 7; 8; 9]

Закон Кулона

Дадим следующую формулировку закона Кулона.

Сила взаимодействия между двумя неподвижными точечными зарядами прямо пропорциональна величине этих зарядов, обратно пропорциональна квадрату расстояния между ними и направлена вдоль прямой, соединяющей эти заряды.

Соответствующая формула выглядит следующим образом:

$$\vec{F} = k \frac{q_1 q_2}{r^2} \vec{r}_0, \quad \vec{r}_0 = \frac{\vec{r}}{r}. \quad (2.1)$$

Вектор $\vec{r}_0$ направлен от заряда q_1 к заряду q_2 , r – расстояние между зарядами. В системе единиц СГСЭ коэффициент пропорциональности $k=1$. Если электрические заряды имеют различные знаки, то сила взаимодействия отрицательна, т.е. имеет место притяжение между



БрГУ имени А.С. Пушкина

Главная

Содержание



Вернуться

Тесты

Тема 2. Электростатика

зарядами. В противном случае сила взаимодействия положительна, т.е. взаимодействие между зарядами носит характер отталкивания ([рис. 2.1](#)).

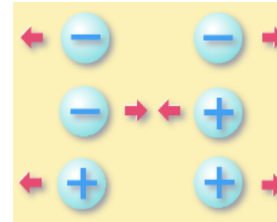


Рис. 2.1

Вокруг любого заряженного тела создается поле сил, которое можно обнаружить, внося в пространство, окружающее исследуемый заряд, какой-либо другой заряд. Свойства электрического поля изучаются с помощью пробного заряда – точечного заряда, поле которого не вносит заметных изменений в поле исследуемого заряда. **Электрическое поле неподвижных зарядов называется электростатическим.**

Напряженность электростатического поля есть векторная величина, численно равная силе, действующей на единичный положительный заряд, помещенный в данной точке поля:

$$\vec{E} = \vec{F}/e_0. \quad (2.2)$$



Тема 2. Электростатика

Если величина заряда, создающего поле, равна e , то, исходя из (2.2) и (2.1), получаем, что [напряженность электростатического поля](#) точечного заряда дается формулой

$$\vec{E} = \frac{e}{r^2} \vec{r}_0. \quad (2.3)$$

Линиями [напряженности](#) (силовыми линиями) называются линии, касательные в каждой точке к которым совпадают по направлению с вектором [напряженности](#) в этой точке. Они начинаются на положительных зарядах или на бесконечности, заканчиваются на отрицательных зарядах или на бесконечности. По густоте силовых линий можно судить о величине [напряженности](#).

Для электростатических полей справедлив **принцип суперпозиции**:

[Напряженность электростатического поля](#) системы неподвижных зарядов равна геометрической сумме [напряженностей](#) полей, создаваемых каждым зарядом системы.

$$\vec{E} = \sum_i \vec{E}_i. \quad (2.4)$$

Вывод основных интегральных соотношений электростатики вакуума

Потоком вектора произвольного векторного поля $\vec{A}$ называется скалярная величина

БрГУ имени А.С. Пушкина

Главная

Содержание



Вернуться

Тесты



БрГУ имени А.С. Пушкина

Главная

Содержание



Вернуться

Тесты

Тема 2. Электростатика

$$N = \oint_S (\vec{A} \cdot \vec{n}) dS, \quad (2.5)$$

где интегрирование ведется по произвольной замкнутой поверхности. При этом $\vec{n}$ – вектор нормали к элементу поверхности dS .

Вычислим поток вектора [напряженности электростатического поля](#), создаваемого точечным зарядом e через элемент поверхности dS . Исходя из (2.3) и (2.5), получаем:

$$dN = \frac{e}{r^2} (\vec{r}_0 \cdot \vec{n}) dS. \quad (2.6)$$

Введем следующие обозначения ([рис. 2.2](#)). Смысл величин $\vec{n}$, $\vec{r}_0$ и r был указан ранее в данном параграфе. Заряд e находится в точке O , элемент поверхности dS виден из точки O под телесным углом $d\Omega$. Поскольку элемент dS , вообще говоря, может не быть перпендикулярным вектору $\vec{r}_0$, введем вспомогательный элемент поверхности dS' , который виден из точки O под таким же телесным углом $d\Omega$ и расположен перпендикулярно $\vec{r}_0$. Обозначим через α угол между $\vec{n}$ и $\vec{r}_0$ (а значит, и между dS и dS').



БрГУ имени А.С. Пушкина

Главная

Содержание



Вернуться

Тесты

Тема 2. Электростатика

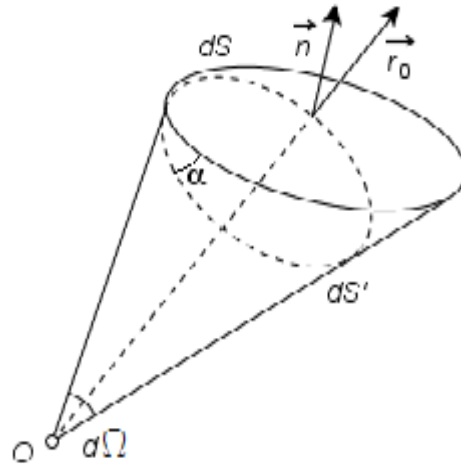


Рис. 2.2

В силу очевидных соотношений

$$\vec{r}_0 \cdot \vec{n} = \cos \alpha, \quad dS \cos \alpha = dS', \quad \frac{dS'}{r^2} = d\Omega, \quad (2.7)$$

для (2.6) получаем:



БрГУ имени А.С. Пушкина

Главная

Содержание



Вернуться

Тесты

Тема 2. Электростатика

$$N = e \oint_S d\Omega. \quad (2.8)$$

Далее рассмотрим 2 ситуации.

1. Заряд находится внутри поверхности. В этом случае

$$\oint_S d\Omega = 4\pi, \quad (2.9)$$

и тогда из [\(2.3\)](#), [\(2.5\)](#), [\(2.6\)](#), [\(2.8\)](#) и [\(2.9\)](#) следует, что

$$\oint_S (\vec{E} \cdot \vec{n}) dS = 4\pi e, \quad (2.10)$$

а для системы электрических зарядов

$$\oint_S (\vec{E} \cdot \vec{n}) dS = 4\pi \sum_i e_i. \quad (2.11)$$

2. Заряд находится вне объема, ограниченного поверхностью. В этом случае



БрГУ имени А.С. Пушкина

Главная

Содержание



Вернуться

Тесты

Тема 2. Электростатика

$$\oint_S d\Omega = 0, \quad (2.12)$$

и тогда

$$\oint_S (\vec{E} \cdot \vec{n}) dS = 0. \quad (2.13)$$

Обобщая (2.11) и (2.13), можно сформулировать теорему Гаусса.

Поток вектора напряженности произвольного электростатического поля в вакууме через любую замкнутую поверхность с точностью до множителя 4π равен алгебраической сумме зарядов, расположенных внутри объема, ограниченного данной поверхностью.

Определим плотность электрического заряда как заряд, приходящийся на единицу физически бесконечно малого объема:

$$\rho = de/dV. \quad (2.14)$$

Отсюда следует, что величина заряда, непрерывно распределенного в конечном объеме V , равна



БрГУ имени А.С. Пушкина

Главная

Содержание



Вернуться

Тесты

Тема 2. Электростатика

$$e = \int_V \rho dV. \quad (2.15)$$

Тогда обобщением формул (2.10) и (2.11) для системы зарядов, непрерывно распределенных в вакууме, будет соотношение:

$$\oint_S (\vec{E} \cdot \vec{n}) dS = 4\pi \int_V \rho dV. \quad (2.16)$$

Теорема Остроградского-Гаусса. Поток некоторого вектора $\vec{A}$ через произвольную замкнутую поверхность равен интегралу от дивергенции этого вектора по объему, ограниченному данной поверхностью:

$$\oint_S (\vec{A} \cdot \vec{n}) dS = \int_V \text{div} \vec{A} dV. \quad (2.17)$$

Заменяя в (2.17) произвольный вектор $\vec{A}$ на вектор напряженности электростатического поля $\vec{E}$ и переписывая левую часть с учетом (2.16), получаем:



БрГУ имени А.С. Пушкина

Главная

Содержание



Вернуться

Тесты

Тема 2. Электростатика

$$\int_V \operatorname{div} \vec{E} dV = 4\pi \int_V \rho dV. \quad (2.18)$$

Соотношение (2.18) должно быть справедливым для любого объема, а это имеет место лишь в случае равенства подынтегральных выражений, откуда следует, что

$$\operatorname{div} \vec{E} = 4\pi\rho. \quad (2.19)$$

Физический смысл уравнения (2.19) состоит в том, что источниками ($\rho > 0$) и стоками ($\rho < 0$) электростатического поля являются электрические заряды.

При наличии среды с диэлектрической проницаемостью ε уравнение (2.19) принимает вид:

$$\operatorname{div} \vec{D} = 4\pi\rho, \quad (2.20)$$

где $\vec{D}$ – **вектор электрического смещения**, связанный с $\vec{E}$ соотношением

$$\vec{D} = \varepsilon \vec{E}. \quad (2.21)$$

В вакууме



БрГУ имени А.С. Пушкина

Главная

Содержание



Вернуться

Тесты

Тема 2. Электростатика

В вакууме

$$\varepsilon = 1, \vec{D} = \vec{E}. \quad (2.22)$$



БрГУ имени А.С. Пушкина

Главная

Содержание



Вернуться

Тесты

Тема 2. Электростатика

2.2. Полная система дифференциальных уравнений первого порядка электростатики вакуума. Граничные условия

Литература: [1, с. 29–30; 3, с. 61–62, 69–74; 4, с. 40–45; 5, с. 62–67; 6, с. 109–110; 7; 8; 9]

Граничные условия для нормальной составляющей вектора напряженности электростатического поля

Рассмотрим произвольную заряженную поверхность S и введем по аналогии с объемной плотностью электрического заряда поверхностную плотность как заряд, приходящийся на физически бесконечно малый элемент поверхности:

$$\sigma = de/dS. \quad (2.23)$$

Пересечем заряженную поверхность S призмой, как показано на рис. 2.3. Считаем, что на рис. 2.3 в сечении S_0 заряд распределен равномерно.



БрГУ имени А.С. Пушкина

Главная

Содержание



Вернуться

Тесты

Тема 2. Электростатика

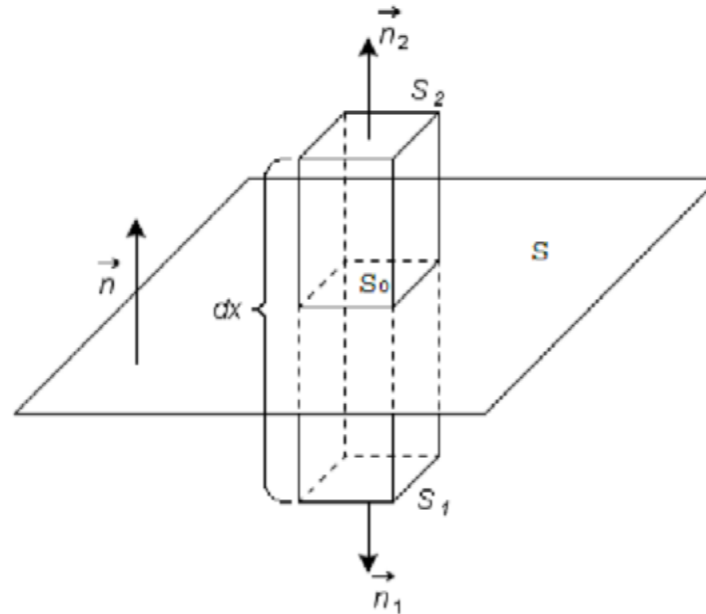


Рис. 2.3

Тогда поток вектора [напряженности электростатического поля](#) через поверхность призмы, согласно [теореме Гаусса \(2.11\)](#), равен

$$N = \oint_S (\vec{E} \cdot \vec{n}) dS = 4\pi\sigma S_0. \quad (2.24)$$



БрГУ имени А.С. Пушкина

Главная

Содержание



Вернуться

Тесты

Тема 2. Электростатика

Данный поток можно разделить на 3 составляющие:

$$N = N_1 + N_2 + N_3, \quad (2.25)$$

где N_1 – поток через нижнюю грань, N_2 – поток через верхнюю грань, N_3 – поток через боковую поверхность. Вычислим потоки N_1 и N_2 , обозначая через E_{1n} и E_{2n} , соответственно, проекцию вектора $\vec{E}$ на вектор $\vec{n}$ на нижней и верхней гранях призмы:

$$N_1 = \vec{E}_1 \cdot \vec{n}_1 S_1 = -\vec{E}_1 \cdot \vec{n} S_1 = -E_{1n} S_1, \quad (2.26)$$

$$N_2 = \vec{E}_2 \cdot \vec{n}_2 S_2 = \vec{E}_2 \cdot \vec{n} S_2 = E_{2n} S_2. \quad (2.27)$$

Устремим высоту dx призмы к нулю на [рис. 2.3](#). Тогда получается, что

$$S_1 \rightarrow S_0, \quad S_2 \rightarrow S_0, \quad N_3 \rightarrow 0. \quad (2.28)$$

Из [\(2.25\)](#)–[\(2.28\)](#) следует, что



БрГУ имени А.С. Пушкина

Главная

Содержание



Вернуться

Тесты

Тема 2. Электростатика

$$N \rightarrow (E_{2n} - E_{1n})S_0. \quad (2.29)$$

Поскольку сечение S_0 по-прежнему находится внутри призмы, соотношение (2.24) остается в силе. Приравнивая правые части (2.24) и (2.29), после сокращения на S_0 получаем:

$$E_{2n} - E_{1n} = 4\pi\sigma. \quad (2.30)$$

Это равенство показывает, что при переходе через заряженную поверхность (поверхность разрыва) нормальная составляющая вектора напряженности электростатического поля терпит разрыв. Величина скачка вектора напряженности электрического поля определяется поверхностной плотностью электрических зарядов. Выражение (2.30) есть теорема Гаусса для **поверхностного заряда**. Оно играет роль граничного условия для вектора $\vec{E}$ и дополняет уравнение (2.19) в вакууме:

$$\operatorname{div}\vec{E} = 4\pi\rho, \quad E_{2n} - E_{1n} = 4\pi\sigma. \quad (2.31)$$

При наличии среды с диэлектрической проницаемостью ε , как и при переходе от (2.19) к (2.20), в (2.30) компоненты вектора $\vec{E}$ надо заменить на компоненты вектора $\vec{D}$. В совокупности получаем дифференциальное уравнение первого порядка с граничным условием для вектора $\vec{D}$:



БрГУ имени А.С. Пушкина

Главная

Содержание



Вернуться

Тесты

Тема 2. Электростатика

$$\operatorname{div} \vec{D} = 4\pi\rho, \quad D_{2n} - D_{1n} = 4\pi\sigma. \quad (2.32)$$

Две основные задачи электростатики

В электростатике существуют две **основные задачи**:

1. Прямая задача – нахождение электростатического поля по заданному распределению зарядов.

2. Обратная – нахождение распределения зарядов по заданному электростатическому полю.

Система (2.31) или (2.32) позволяет, в принципе, решить обратную задачу. Для решения прямой задачи эти системы не являются достаточными, т.к. уравнения (2.19) и (2.20) являются векторными, включающими в себя по три скалярных уравнения.

Потенциальный характер электростатического поля

Вычислим работу A по перемещению точечного заряда e' , совершаемую электростатическим полем. Элементарная работа при перемещении $d\vec{l}$ равна

$$dA = \vec{F} \cdot d\vec{l}. \quad (2.33)$$



БрГУ имени А.С. Пушкина

Главная

Содержание



Вернуться

Тесты

Тема 2. Электростатика

Выражая в (2.33) силу $\vec{F}$ через напряженность $\vec{E}$ из (2.2), для заряда e' получаем:

$$dA = e'(\vec{E} \cdot d\vec{l}). \quad (2.34)$$

Тогда на конечном участке длиной L из (2.34) получаем:

$$A = \int_L e'(\vec{E} \cdot d\vec{l}) = e' \int_L (\vec{E} \cdot d\vec{l}). \quad (2.35)$$

Рассмотрим случай поля, создаваемого точечным зарядом e . Помещая этот заряд в начало координат, вычислим работу по перемещению заряда e' из точки с радиус-вектором $\vec{r}_1$ в точку с радиус-вектором $\vec{r}_2$ (рис. 2.4).

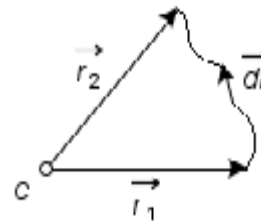


Рис. 2.4



БрГУ имени А.С. Пушкина

Главная

Содержание



Вернуться

Тесты

Тема 2. Электростатика

Подставляя в (2.35) выражение для $\vec{E}$ из (2.3), получаем:

$$A = e' \int_L \frac{e}{r^2} (\vec{r}_0 \cdot d\vec{l}). \quad (2.36)$$

В силу того, что $\vec{r}_0$ – единичный вектор, из [рис. 2.5](#) следует, что

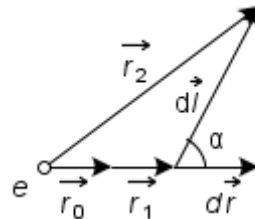


Рис. 2.5

$$\vec{r}_0 \cdot d\vec{l} = dl \cos \alpha = dr. \quad (2.37)$$

Подставляя (2.37) в (2.36), получаем:



БрГУ имени А.С. Пушкина

Главная

Содержание



Вернуться

Тесты

Тема 2. Электростатика

$$A = e'e \int_L \frac{dr}{r^2} = e'e \int_{r_1}^{r_2} \frac{dr}{r^2} = -e'e \left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1} \right). \quad (2.38)$$

Видно, что работа электростатических сил в поле точечного заряда зависит лишь от начальной и конечной точек пути при перемещении заряда и не зависит от формы пути. Поля, обладающие такими свойствами, называются потенциальными, или консервативными. Т.к. любое электростатическое поле, согласно принципу суперпозиции, можно представить как сумму полей точечных зарядов, то можно утверждать, что любое электростатическое поле есть поле потенциальное.

Отсюда следует, что

$$\oint_L (\vec{E} \cdot d\vec{l}) = 0. \quad (2.39)$$

Выражение [\(2.39\)](#) называется циркуляцией вектора $\vec{E}$ по замкнутому контуру. Отсюда вытекает **интегральное условие потенциальности электростатического поля: циркуляция вектора напряженности электростатического поля по замкнутому контуру равна нулю.**

Получим **дифференциальное условие потенциальности электростатического поля**, для чего сформулируем теорему Стокса:



БрГУ имени А.С. Пушкина

Главная

Содержание



Вернуться

Тесты

Тема 2. Электростатика

Циркуляция произвольного вектора по любому замкнутому контуру равна потоку ротора этого вектора через любую поверхность, натянутую на этот контур.

Для вектора $\vec{E}$ формулировка [теоремы Стокса](#) будет выглядеть следующим образом:

$$\oint_L (\vec{E} \cdot d\vec{l}) = \int_S (\text{rot} \vec{E} \cdot \vec{n}) dS. \quad (2.40)$$

С учетом [\(2.39\)](#) из [\(2.40\)](#) следует, что

$$\int_S (\text{rot} \vec{E} \cdot \vec{n}) dS = 0. \quad (2.41)$$

Поскольку поверхность S является произвольной, из [\(2.41\)](#) следует, что

$$\text{rot} \vec{E} = \vec{0}. \quad (2.42)$$

Формула [\(2.42\)](#) выражает **дифференциальное условие потенциальности электростатического поля** и является вторым основным уравнением электростатики вакуума.



Тема 2. Электростатика

Граничные условия для тангенциальной составляющей вектора напряженности электростатического поля

Рассмотрим, как ведет себя тангенциальная составляющая вектора [напряженности электростатического поля](#) при переходе через заряженную поверхность.

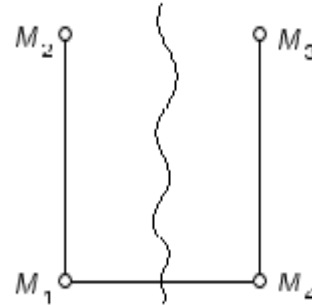


Рис. 2.6

Возьмем заряженную поверхность и контур $M_1M_2M_3M_4$ так, чтобы он пересекал эту поверхность, причем отрезки M_1M_4 и M_2M_3 выберем бесконечно малыми, остальные конечными. Предположим, что тангенциальная составляющая вектора [напряженности электростатического поля](#) терпит разрыв. А это означает, что работа на участке M_1M_2 отличается на конечную величину от работы на участке M_3M_4 . Следовательно, работа на всем замкнутом контуре при перемещении

БрГУ имени А.С. Пушкина

Главная

Содержание



Вернуться

Тесты



БрГУ имени А.С. Пушкина

Главная

Содержание



Вернуться

Тесты

Тема 2. Электростатика

заряда отлична от нуля (т.к. на бесконечно малых участках работа не может отличаться на конечную величину). Мы пришли к выводу, что электростатическое поле в данном случае не является потенциальным. Значит, наше предположение о разрыве тангенциальной составляющей ошибочно. Следовательно, она непрерывна, т.е.

$$E_{1\tau} = E_{2\tau}. \quad (2.43)$$

Формула (2.42) есть второе граничное условие для вектора [напряженности электростатического поля](#).

Объединяя (2.32), (2.42) и (2.43), получаем систему, которая уже в принципе позволяет решить прямую и обратную задачу электростатики.

$$\operatorname{div} \vec{D} = 4\pi\rho, \quad D_{2n} - D_{1n} = 4\pi\sigma, \quad \operatorname{rot} \vec{E} = \vec{0}, \quad E_{1\tau} = E_{2\tau}. \quad (2.44)$$

Но эта система неудобна, поэтому целесообразно привести ее к другому виду, введя новую величину, называемую **скалярным [потенциалом электростатического поля](#)**.



БрГУ имени А.С. Пушкина

Главная

Содержание



Вернуться

Тесты

Тема 2. Электростатика

2.3. Уравнения второго порядка электростатики вакуума

Литература: [3, с. 84–85; 4, с. 36–37; 6, с. 128; 7; 8; 9]

Потенциал. Разность потенциалов

В электростатике вакуума дифференциальные уравнения второго порядка получаются для величины, называемой потенциалом электростатического поля. Прежде чем выводить эти уравнения, введем определение потенциала.

Разностью потенциалов между двумя точками называется величина, численно равная работе, совершаемой против сил поля по перемещению единичного положительного заряда между этими точками.

$$d\varphi = \frac{dA}{q} = -\vec{E} \cdot d\vec{l} , \quad (2.45)$$

Переходя к конечной разности, получаем:

$$\varphi_2 - \varphi_1 = -\int_1^2 \vec{E} \cdot d\vec{l} . \quad (2.46)$$



БрГУ имени А.С. Пушкина

Главная

Содержание



Вернуться

Тесты

Тема 2. Электростатика

Понятие разности потенциалов между двумя точками является однозначной характеристикой и может быть измерена, поэтому она является однозначной характеристикой поля. [Потенциал](#) же в той или иной точке поля не является однозначной характеристикой, а определяется с точностью до аддитивной произвольной константы. Однако как только [потенциал](#) в какой-то точке зафиксирован, например, принят за ноль (эта процедура называется **нормировкой [потенциала](#)**), [потенциалы](#) всех остальных точек поля относительно этой определяются однозначно.

В общей теории за точку нулевого [потенциала](#) выбирают бесконечно удаленную точку:

$$\varphi(\infty) = 0. \quad (2.47)$$

С учетом (2.46) и (2.47) [потенциал](#) в произвольной точке M может быть определен следующим образом

$$\varphi_M = - \int_{\infty}^M \vec{E} \cdot d\vec{l} = \int_M^{\infty} \vec{E} \cdot d\vec{l}. \quad (2.48)$$

В данной точке поля потенциал равен работе, совершаемой против сил поля, из точки нулевого потенциала в данную точку поля.



БрГУ имени А.С. Пушкина

Главная

Содержание



Вернуться

Тесты

Тема 2. Электростатика

В качестве простейшего примера рассмотрим [потенциал](#) поля точечного заряда. Подставляя [\(2.3\)](#) в [\(2.48\)](#), с учетом [\(2.37\)](#) получаем:

$$\varphi(r) = -\int_{\infty}^r \frac{e}{r^2} \vec{r}_0 \cdot d\vec{l} = -\int_{\infty}^r \frac{e dr}{r^2} = \frac{e}{r}. \quad (2.49)$$

Связь между потенциалом и напряженностью электростатического поля

С одной стороны, из [\(2.45\)](#) следует, что

$$\vec{E} \cdot d\vec{l} = E_x dx + E_y dy + E_z dz = -d\varphi. \quad (2.50)$$

С другой стороны, из условия потенциальности электростатического поля вытекает, что $d\varphi$ есть полный дифференциал, откуда следует, что

$$d\varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial x} dx + \frac{\partial \varphi}{\partial y} dy + \frac{\partial \varphi}{\partial z} dz. \quad (2.51)$$

Сравнивая [\(2.50\)](#) и [\(2.51\)](#), делаем вывод, что



БрГУ имени А.С. Пушкина

Главная

Содержание



Вернуться

Тесты

Тема 2. Электростатика

$$E_x = -\frac{\partial \varphi}{\partial x}; E_y = -\frac{\partial \varphi}{\partial y}; E_z = -\frac{\partial \varphi}{\partial z}. \quad (2.52)$$

Вектор $\vec{E}$ можно представить как

$$\vec{E} = E_x \vec{i} + E_y \vec{j} + E_z \vec{k}. \quad (2.53)$$

Подставляя (2.52) в (2.53), получим:

$$\vec{E} = -\frac{d\varphi}{dx} \vec{i} - \frac{d\varphi}{dy} \vec{j} - \frac{d\varphi}{dz} \vec{k} = -\left(\frac{d\varphi}{dx} \vec{i} + \frac{d\varphi}{dy} \vec{j} + \frac{d\varphi}{dz} \vec{k} \right). \quad (2.54)$$

Выражение в скобках (2.54) есть не что иное, как $\text{grad } \varphi$, поэтому окончательно запишем:

$$\vec{E} = -\text{grad } \varphi. \quad (2.55)$$

Из (2.55) следует, что вектор напряженности электростатического поля направлен в сторону быстрого убывания потенциала, а по величине равен скорости этого убывания.



БрГУ имени А.С. Пушкина

Главная

Содержание



Вернуться

Тесты

Тема 2. Электростатика

Эквипотенциальной поверхностью называется поверхность, [потенциал](#) в каждой точке которой один и тот же.

В силу того, что поле в каждой точке определяется однозначно, через каждую точку может проходить лишь одна силовая линия и одна эквипотенциальная поверхность.

Уравнения Пуассона и Лапласа с граничным условием

Будем искать дифференциальное уравнение второго порядка для [потенциала](#) φ в вакууме.

Выражая в (2.19) [напряженность электростатического поля](#) $\vec{E}$ через [потенциал](#) φ из (2.55), получаем:

$$\operatorname{divgrad}\varphi = -4\pi\rho \Rightarrow \Delta\varphi = -4\pi\rho. \quad (2.56)$$

Уравнение (2.56) называется **уравнением Пуассона**. В пространстве, свободном от электрических зарядов, из (2.56) при $\rho = 0$ получаем **уравнение Лапласа**:

$$\Delta\varphi = 0. \quad (2.57)$$



БрГУ имени А.С. Пушкина

Главная

Содержание



Вернуться

Тесты

Тема 2. Электростатика

К уравнениям (2.56) и (2.57) необходимо добавить граничное условие, которое должно быть выведено из (2.30). Учитывая (2.55), вычислим производную $\partial\phi/\partial n$. По определению, производная от скалярной функции по некоторому направлению есть

$$\begin{aligned}\frac{\partial\phi}{\partial n} &= \text{grad}_n\phi = |\text{grad}\phi| \cos(\vec{N}, \vec{n}) = \text{grad}\phi \cdot \vec{n} = \\ &= \frac{\partial\phi}{\partial x} \cos\alpha + \frac{\partial\phi}{\partial y} \cos\beta + \frac{\partial\phi}{\partial z} \cos\gamma,\end{aligned}\quad (2.58)$$

где $\vec{N} \uparrow\uparrow \text{grad}\phi$, а $\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma$ суть направляющие косинусы вектора $\vec{n}$. Исходя из определения направляющих косинусов, можно переписать (2.58) следующим образом:

$$\frac{\partial\phi}{\partial n} = \frac{\partial\phi}{\partial x} (\vec{n} \cdot \vec{i}) + \frac{\partial\phi}{\partial y} (\vec{n} \cdot \vec{j}) + \frac{\partial\phi}{\partial z} (\vec{n} \cdot \vec{k}). \quad (2.59)$$

Переписывая (2.59) с учетом (2.52), получаем:

$$\frac{\partial\phi}{\partial n} = -(E_x (\vec{n} \cdot \vec{i}) + E_y (\vec{n} \cdot \vec{j}) + E_z (\vec{n} \cdot \vec{k})) = -\vec{E} \cdot \vec{n} = -E_n. \quad (2.60)$$



БрГУ имени А.С. Пушкина

Главная

Содержание



Вернуться

Тесты

Тема 2. Электростатика

Из (2.60) следует, что

$$\frac{\partial \varphi_1}{\partial n} = -E_{1n}, \quad \frac{\partial \varphi_2}{\partial n} = -E_{2n}. \quad (2.61)$$

Подставляя (2.61) в (2.30), получаем:

$$\frac{\partial \varphi_1}{\partial n} - \frac{\partial \varphi_2}{\partial n} = 4\pi\sigma. \quad (2.62)$$

Соотношение (2.62) есть граничное условие для потенциала электростатического поля. Видно, что при отсутствии поверхностных зарядов производная потенциала непрерывна. Сравнивая условия (2.62) и (2.30), следует обратить внимание на то, что в условии (2.62) для потенциала индекс «1» стоит при уменьшаемом, а индекс «2» – при вычитаемом; в условии же (2.30) для напряженности электростатического поля всё наоборот.

Свойства потенциала: 1. Конечность. 2. Однозначность. 3. Непрерывность. 4. Необходимость нормировки.



БрГУ имени А.С. Пушкина

Главная

Содержание



Вернуться

Тесты

Тема 2. Электростатика

Уравнения ([2.56](#)), ([2.57](#)) с граничным условием ([2.62](#)) позволяют, в принципе, определить [потенциал](#) поля при известном распределении поверхностного и объемного зарядов, а из формулы связи [потенциала](#) и [напряженности](#) ([2.55](#)) можно найти [напряженность поля](#).

Таким образом, система

$$\Delta\varphi = -4\pi\rho, \quad \vec{E} = -\text{grad}\varphi, \quad \frac{\partial\varphi_1}{\partial n} - \frac{\partial\varphi_2}{\partial n} = 4\pi\sigma. \quad (2.63)$$

эквивалентна системе первого порядка электростатики вакуума ([2.44](#)) при $\vec{D} = \vec{E}$.



БрГУ имени А.С. Пушкина

Главная

Содержание



Вернуться

Тесты

Тема 2. Электростатика

2.4. Энергия взаимодействия электрических зарядов. Энергия электростатического поля

Литература: [1, с. 69–73; 3, с. 108–118; 4, с. 74–76; 5, с. 74–75; 7; 8; 9]

Взаимная, собственная и полная энергия зарядов

На точечный заряд во внешнем поле действуют силы, которые имеют потенциальный характер. Поэтому можно говорить о потенциальной энергии заряда в поле. Эта энергия численно равна работе, которую надо совершить против сил поля по перемещению заряда из точки нулевого [потенциала](#) в данную точку поля.

Для системы точечных зарядов различают **взаимную, собственную и полную энергию**.

Взаимная энергия системы точечных зарядов численно равна работе, совершаемой силами взаимодействия этих зарядов при перемещении их на бесконечное расстояние друг от друга.

Собственная энергия – это энергия взаимодействия всех элементов отдельно каждого заряда между собой и равна работе, которую совершили бы силы взаимодействия между этими элементами, если бы эти элементы разлетелись на бесконечное расстояние друг от друга.

Полная энергия системы двух и более зарядов равна сумме взаимной и собственной. Условились считать положительной энергию отталкивания. Т.е. собственная энергия всегда положительна.



БрГУ имени А.С. Пушкина

Главная

Содержание



Вернуться

Тесты

Тема 2. Электростатика

Посчитаем взаимную энергию двух точечных зарядов e_1 и e_2 . Пусть заряд e_1 неподвижен, а заряд e_2 переместился на бесконечно малое расстояние dr . Тогда работа по перемещению равна

$$dA = -e_2 d\varphi_2, \quad (2.64)$$

где $d\varphi_2$ – [потенциал](#), создаваемый зарядом e_1 в точке, в которой находится заряд e_2 . Знак «минус» в (2.64) обусловлен тем, что работа совершается против сил поля. С другой стороны, работа равна убыли потенциальной энергии:

$$dA = -dW, \quad (2.65)$$

и тогда из (2.64) и (2.65) следует, что

$$dW = e_2 d\varphi_2 \Rightarrow W = e_2 \varphi_2 + const. \quad (2.66)$$

Из (2.49) следует, что

$$\varphi_2 = \frac{e_1}{r}. \quad (2.67)$$



БрГУ имени А.С. Пушкина

Главная

Содержание



Вернуться

Тесты

Тема 2. Электростатика

Из (2.47) получаем, что в бесконечно удаленной точке произвольная постоянная в (2.66) равна нулю. С учетом этого обстоятельства, а также (2.67), получаем, что

$$W = \frac{e_2 e_1}{r}. \quad (2.68)$$

Теперь считаем заряд e_2 неподвижным и перемещаем заряд e_1 . Рассуждая аналогично, получим, что

$$W = e_1 \varphi_1 = \frac{e_1 e_2}{r}. \quad (2.69)$$

Объединяя полученные результаты, можно записать в симметричном виде:

$$W = \frac{1}{2} (e_1 \varphi_1 + e_2 \varphi_2). \quad (2.70)$$

Полная энергия точечных зарядов всегда положительна, поскольку собственная энергия всегда превышает взаимную из-за малости расстояний между элементами.



БрГУ имени А.С. Пушкина

Главная

Содержание



Вернуться

Тесты

Тема 2. Электростатика

Найдем взаимную энергию системы точечных зарядов и непрерывно распределенных зарядов.

Для системы точечных зарядов

$$W = \frac{1}{2} \sum_i e_i \varphi_i, \quad (2.71)$$

где φ_i – потенциал, создаваемый в точке нахождения заряда e_i всеми остальными зарядами:

$$\varphi_i = \sum_{k=1}^n \frac{e_k}{r_{ik}}, i \neq k. \quad (2.72)$$

Подставляя (2.72) в (2.71), получаем:

$$W = \frac{1}{2} \sum_{i,k=1}^n \frac{e_i e_k}{r_{ik}} (1 - \delta_{ik}), \quad (2.73)$$

где δ_{ik} – символ Кронекера.



БрГУ имени А.С. Пушкина

Главная

Содержание



Вернуться

Тесты

Тема 2. Электростатика

Теперь рассмотрим непрерывно распределенные заряды – объемные и поверхностные. Разобьем объем V на физически бесконечно малые объемы ΔV_i , в пределах которых плотность заряда $\rho_i = \text{const}_i$. Тогда в пределах каждого такого объема ΔV_i электрический заряд будет равен

$$e_i = \rho_i \Delta V_i. \quad (2.74)$$

Подставляя (2.74) в (2.71), получаем:

$$W = \frac{1}{2} \sum_i \rho_i \Delta V_i \varphi_i. \quad (2.75)$$

Если в (2.75) совершить предельный переход при $\max_i \Delta V_i \rightarrow 0$, то

$$W = \frac{1}{2} \int_V \rho \varphi dV. \quad (2.76)$$

Рассуждая аналогично для заряда, распределенного по поверхности, получаем:



БрГУ имени А.С. Пушкина

Главная

Содержание



Вернуться

Тесты

Тема 2. Электростатика

$$W = \frac{1}{2} \int_S \sigma \varphi dS. \quad (2.77)$$

При одновременном наличии объемного и поверхностного заряда полная энергия складывается из (2.76) и (2.77):

$$W = \frac{1}{2} \int_V \rho \varphi dV + \frac{1}{2} \int_S \sigma \varphi dS. \quad (2.78)$$

Энергия электростатического поля

В самом общем случае непрерывно распределенных зарядов соотношение для энергии W имеет вид (2.78). Но выражение для энергии W может быть представлено в другой форме, которая эквивалентна (2.78), но допускает другую физическую интерпретацию. Воспользуемся **теоремой Грина**:

$$\int_V (\psi \Delta \omega + (\vec{\nabla} \psi) \cdot (\vec{\nabla} \omega)) dV = \oint_S \psi \frac{\partial \omega}{\partial n} dS, \quad (2.79)$$



БрГУ имени А.С. Пушкина

Главная

Содержание



Вернуться

Тесты

Тема 2. Электростатика

где S – поверхность, ограничивающая произвольный объем V , а ψ и ω – скалярные функции, которые в объеме V конечны, непрерывны и имеют конечные и непрерывные первую и вторую производные; $\vec{n}$ – единичный вектор внешней нормали к элементу dS .

Пусть внутри некоторого объема, ограниченного поверхностью S_0 , находится система непрерывно распределенных объемных и поверхностных зарядов, причем все поверхностные заряды распределены на некоторой поверхности S . Охватим заряженную поверхность S некоторой поверхностью S'_0 , целиком лежащей внутри поверхности S_0 (см. [рис. 2.7](#)).

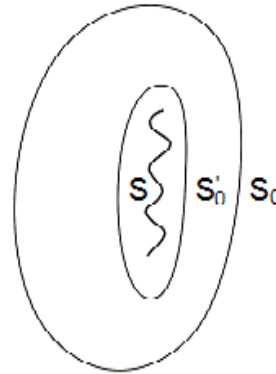


Рис. 2.7



БрГУ имени А.С. Пушкина

Главная

Содержание



Вернуться

Тесты

Тема 2. Электростатика

Ко всему объему V (который ограничен только поверхностью S_0) [теорему Грина](#) применять нельзя, т.к. вблизи заряженной поверхности S (при переходе через эту поверхность) производная от потенциала $\partial\varphi/\partial n$ терпит разрыв. Применим [теорему Грина \(2.79\)](#) к объему V' , ограниченному поверхностями S_0 и S'_0 . При этом обозначим через $\vec{n}$ единичный вектор нормали к поверхности S , а через $\vec{n}_0$ и $\vec{n}'_0$ единичные векторы внешней нормали к поверхностям S_0 и S'_0 , соответственно; также положим в [\(2.79\)](#)

$$\psi \equiv \omega \equiv \varphi. \quad (2.80)$$

В результате получим:

$$\int_{V'} \left(\varphi \Delta \varphi + (\vec{\nabla} \varphi)^2 \right) dV' = \oint_{S_0} \varphi \frac{\partial \varphi}{\partial n_0} dS_0 - \oint_{S'_0} \varphi \frac{\partial \varphi}{\partial n'_0} dS'_0. \quad (2.81)$$

Заметим, что $\vec{n}_0$ и $\vec{n}'_0$ имеют различные направления, т.к. внешняя нормаль к элементу поверхности dS'_0 должна быть направлена всегда из объема интегрирования. В соотношении [\(2.81\)](#) будем стягивать S'_0 к S . В пределе S'_0 совпадает с S (а объем V' – с объемом V), а интегрирование по S'_0 сведется к двукратному интегрированию по поверхности S , первый раз по внешней стороне (с



БрГУ имени А.С. Пушкина

Главная

Содержание



Вернуться

Тесты

Тема 2. Электростатика

точки зрения направления $\vec{n}$), а второй раз – по внутренней. Обозначим величины, входящие в (2.81), для внешней части поверхности S индексом «2», а для внутренней части поверхности S – индексом «1». Тогда для второго интеграла в правой части (2.81) получаем:

$$\oint_{S'_0} \varphi \frac{\partial \varphi}{\partial n'_0} dS'_0 = \int_S \varphi_2 \frac{\partial \varphi_2}{\partial n} dS - \int_S \varphi_1 \frac{\partial \varphi_1}{\partial n} dS. \quad (2.82)$$

Учитывая, что сам потенциал (но не его производная) непрерывен, т.е.

$$\varphi_2 = \varphi_1 = \varphi, \quad (2.83)$$

получаем:

$$\oint_{S'_0} \varphi \frac{\partial \varphi}{\partial n'_0} dS'_0 = \int_S \varphi \left(\frac{\partial \varphi_2}{\partial n} - \frac{\partial \varphi_1}{\partial n} \right) dS. \quad (2.84)$$

Подставляя (2.84) в (2.81), получаем:



БрГУ имени А.С. Пушкина

Главная

Содержание



Вернуться

Тесты

Тема 2. Электростатика

$$\int_V \left(\varphi \Delta \varphi + (\vec{\nabla} \varphi)^2 \right) dV = \oint_{S_0} \varphi \frac{\partial \varphi}{\partial n_0} dS_0 + \int_S \varphi \left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial n} - \frac{\partial \varphi_2}{\partial n} \right) dS. \quad (2.85)$$

Воспользуемся известными нам уравнениями (2.55), (2.56) и (2.62). Подставляя их в (2.85), получаем:

$$\int_V \varphi (-4\pi\rho) dV + \int_V (\vec{E})^2 dV = \oint_{S_0} \varphi \frac{\partial \varphi}{\partial n_0} dS_0 + \int_S 4\pi\sigma\varphi dS. \quad (2.86)$$

После дальнейших несложных преобразований получаем:

$$\frac{1}{8\pi} \int_V E^2 dV = \frac{1}{2} \int_V \rho\varphi dV + \frac{1}{2} \int_S \sigma\varphi dS + \frac{1}{8\pi} \oint_{S_0} \varphi \frac{\partial \varphi}{\partial n_0} dS_0. \quad (2.87)$$

Интегрирование в (2.87) производится по произвольному объему. Перейдем к интегрированию по всему объему, занимаемому объемными и поверхностными зарядами. Введем понятие полного поля как области, которая охватывает все взаимодействующие заряды и все поле этих зарядов. Замкнутая поверхность (роль этой поверхности играет S_0), охватывающая этот объем, может быть как конечной, так и бесконечной. Независимо от этого, главное ее свойство заключается в том, что



БрГУ имени А.С. Пушкина

Главная

Содержание



Вернуться

Тесты

Тема 2. Электростатика

все электрические величины на этой поверхности обращаются в ноль. Тогда последний интеграл в (2.87) обращается в ноль, и тогда на основании (2.78) получаем, что энергия объемного и поверхностного зарядов равна

$$W = \frac{1}{2} \int_{V_{\Pi}} \rho \varphi dV_{\Pi} + \frac{1}{2} \int_S \sigma \varphi dS = \frac{1}{8\pi} \int_{V_{\Pi}} E^2 dV_{\Pi}, \quad (2.88)$$

где под V_{Π} мы понимаем объем полного поля. Таким образом, с одной стороны, электростатическая энергия выражается по формуле (2.78) как энергия взаимодействия зарядов, а с другой стороны, та же энергия находится как

$$W = \frac{1}{8\pi} \int_{V_{\Pi}} E^2 dV_{\Pi}. \quad (2.89)$$

В математическом отношении обе формулировки ((2.78) и (2.89)) эквивалентны, однако их толкование различно.

Соотношение (2.78) трактует электростатическую энергию как **энергию взаимодействия зарядов** (в нее входят характеристики зарядов ρ и σ), и в данном случае поле входит как некая абстракция, позволяющая получить компактную математическую запись.



БрГУ имени А.С. Пушкина

Главная

Содержание



Вернуться

Тесты

Тема 2. Электростатика

В соотношении (2.89) характеристики зарядов отсутствуют, а есть только величина напряженности электростатического поля. Не имеет значения, чем создается поле, важно только знать напряженность $\vec{E}$ в физически бесконечно малом объеме dV . При этом каждому элементу объема можно приписать энергию

$$dW = \frac{1}{8\pi} E^2 dV. \quad (2.90)$$

Т.е. удастся локализовать энергию поля в каждом элементе объема. При этом мы можем найти энергию поля в любом конечном объеме V (а не только в объеме полного поля V_{II}), проинтегрировав по конечному объему V :

$$W = \frac{1}{8\pi} \int_V E^2 dV. \quad (2.91)$$

Такой подход позволяет ввести понятие **объемной плотности энергии электростатического поля**:



БрГУ имени А.С. Пушкина

Главная

Содержание



Вернуться

Тесты

Тема 2. Электростатика

$$w = \frac{dW}{dV} = \frac{E^2}{8\pi}. \quad (2.92)$$

Отметим, что энергия электростатического поля, в отличие от напряженности, не обладает свойством аддитивности. Действительно, пусть

$$\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2. \quad (2.93)$$

Тогда, согласно (2.92), для плотности энергии, соответствующей каждому слагаемому в правой части (2.93), получаем:

$$w_1 = \frac{E_1^2}{8\pi}, w_2 = \frac{E_2^2}{8\pi}. \quad (2.94)$$

Вместе с тем, плотность энергии, соответствующая вектору $\vec{E}$, равна

$$w = \frac{(\vec{E})^2}{8\pi} = \frac{(\vec{E}_1 + \vec{E}_2)^2}{8\pi} = \frac{E_1^2}{8\pi} + \frac{E_2^2}{8\pi} + \frac{2\vec{E}_1 \cdot \vec{E}_2}{8\pi}. \quad (2.95)$$



БрГУ имени А.С. Пушкина

Главная

Содержание



Вернуться

Тесты

Тема 2. Электростатика

Сопоставляя ([2.94](#)) и ([2.95](#)), легко убедиться, что, вообще говоря,

$$w \neq w_1 + w_2, \quad (2.96)$$

т.е. плотность энергии, вообще говоря, не обладает свойством аддитивности. Существует, однако, частный случай, когда в ([2.96](#)) можно поставить знак равенства. Это соответствует условию

$$\vec{E}_1 \perp \vec{E}_2. \quad (2.97)$$



БрГУ имени А.С. Пушкина

Главная

Содержание



Вернуться

Тесты

Тема 3. Постоянный электрический ток

Тема 3. Постоянный электрический ток

3.1. Дифференциальная форма основных законов стационарного тока. Закон сохранения электрического заряда в дифференциальной форме (уравнение непрерывности). Электрическое поле стационарного тока

Литература: [1, с. 74–106; 3, с. 173–208; 4, с. 115–118, 128–131, 136–137; 5, с. 122–139, 148–149; 6, с. 99, 105–107; 7; 8; 9]

Вывод основных законов стационарного тока в дифференциальной форме

В электростатике изучались явления, обусловленные неподвижными [электрическими зарядами](#). Если по какой-либо причине возникает упорядоченное движение зарядов и через какую-либо поверхность переносится [заряд](#), отличный от нуля, то говорят, что возникает **электрический ток**. Таким образом, электрический ток – упорядоченное движение [электрических зарядов](#).

Количественной характеристикой электрического тока служит **сила тока** – величина [заряда](#), переносимого через рассматриваемую поверхность в единицу времени. Если за время dt через поверхность переносится [заряд](#) dq , то сила тока равна:

$$I = \frac{dq}{dt} \quad (3.1)$$



БрГУ имени А.С. Пушкина

Главная

Содержание



Вернуться

Тесты

Тема 3. Постоянный электрический ток

Единицей силы тока в системе СГСЭ является $1 \text{ СГСЭ}_I = 1 \text{ СГСЭ}_q / 1 \text{ с}$.

За направление тока принимается направление, в котором перемещаются положительные заряды или направление, противоположное направлению движения отрицательных зарядов. Свободные заряды, которые перемещаются в среде, называются носителями тока. Носителями тока являются свободные заряды – электроны, ионы. В металлах носителями тока являются электроны.

Электрический ток может быть распределен неравномерно по поверхности, через которую он течет. Более детально ток можно охарактеризовать с помощью вектора плотности тока $\vec{j}$. Пусть заряженные частицы движутся в определенном направлении со скоростью $\vec{u}$. **Вектором плотности тока $\vec{j}$ называется вектор, по направлению совпадающий с направлением скорости положительных зарядов (или против направления скорости отрицательных зарядов), а по абсолютной величине равный отношению силы тока dI через элементарную площадку $dS_{\perp}$, расположенную в данной точке пространства перпендикулярно к направлению движения носителей, к ее площади.**

$$j = \frac{dI}{dS_{\perp}} \quad (3.2)$$



Тема 3. Постоянный электрический ток

Число носителей тока в единице объема n называется плотностью носителей тока. [Заряд](#) отдельного носителя обозначим через e .

Если свободными [зарядами](#) являются, например, электроны, а положительные [заряды](#) неподвижны (это имеет место в металлах), то плотность носителей будет совпадать с числом свободных электронов в единице объема.

Вектор [плотности тока](#) можно выразить через плотность носителей тока и скорость их движения. Количество заряда, перенесенного за время dt через некоторую поверхность S , перпендикулярную к вектору скорости ([рис. 3.1](#)), равно

$$dq = Sneudt. \quad (3.3)$$

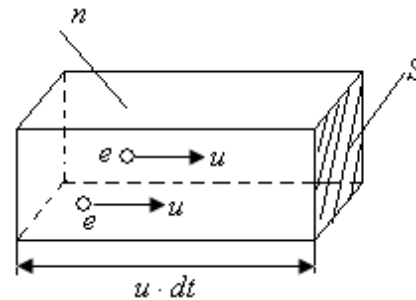


Рис. 3.1

Главная

Содержание



Вернуться
Рис. 20.1

Тесты



БрГУ имени А.С. Пушкина

Главная

Содержание



Вернуться

Тесты

Тема 3. Постоянный электрический ток

За время dt площадку S пересекут все свободные [заряды](#) в параллелепипеде с основанием S и длиной udt . Если площадка S достаточно мала, то [плотность тока](#) в её пределах можно считать постоянной и тогда:

$$j = \frac{I}{S} = \frac{dq}{Sdt} = \frac{Sneudt}{Sdt} = neu . \quad (3.4)$$

Переписывая (3.4) в векторной форме, получаем:

$$\vec{j} = ne\vec{u} . \quad (3.5)$$

Тогда сила тока через произвольную поверхность находится через вычисление следующего интеграла:

$$I = \int_S \vec{j} \cdot d\vec{S} . \quad (3.6)$$

Электрический ток, обусловленный движением свободных [зарядов](#) в проводниках различной природы, называется током проводимости.



БрГУ имени А.С. Пушкина

Главная

Содержание



Вернуться

Тесты

Тема 3. Постоянный электрический ток

Условиями существования тока являются: а) наличие свободных [зарядов](#); б) наличие электрического поля внутри проводника для поддержания перемещения [зарядов](#).

Если бы на носитель тока действовали только силы электростатического поля, то под действием этих сил положительные носители перемещались бы из места с большим [потенциалом](#) к месту с меньшим [потенциалом](#), а отрицательные носители двигались бы в обратном направлении. Это привело бы к выравниванию [потенциалов](#), и в результате ток бы прекратился. Чтобы этого не произошло, должны иметься участки, на которых перенос положительных [зарядов](#) происходит в сторону возрастания φ , т.е. против сил электростатического поля. Перенос носителей на этих участках возможен лишь с помощью сил не электростатического происхождения, называемых **сторонними силами**. Физическая природа сторонних сил может быть различна. Например, химическая (как в аккумуляторах), механическая, магнитная и другие.

Величина, равная отношению работы сторонних сил по перенесению заряда к величине этого заряда, называется электродвижущей силой (ЭДС).

Стороннюю силу, действующую на заряд, можно представить в виде

$$\vec{F}_{\text{стор}} = \vec{E}_{\text{стор}} q, \quad (3.7)$$

где $\vec{E}_{\text{стор}}$ – напряженность поля сторонних сил. Тогда из (3.7) следует, что работа сторонних сил над зарядом на некотором участке 1-2 находится по формуле:



БрГУ имени А.С. Пушкина

Главная

Содержание



Вернуться

Тесты

Тема 3. Постоянный электрический ток

$$A_{стор}^{1-2} = q \int_1^2 \vec{E}_{стор} \cdot d\vec{l} . \quad (3.8)$$

Разделив обе части (3.8), согласно определению ЭДС, на [заряд](#), получим:

$$\varepsilon_{12} = \frac{A_{стор}^{1-2}}{q} = \int_1^2 \vec{E}_{стор} \cdot d\vec{l} . \quad (3.9)$$

Тогда для замкнутой цепи можно записать:

$$\varepsilon = \oint \vec{E}_{стор} \cdot d\vec{l} . \quad (3.10)$$

Таким образом, ЭДС, действующая в замкнутой цепи, может быть определена как циркуляция вектора напряженности сторонних сил.

Кроме сторонних сил на заряд действуют силы электростатического поля $\vec{F}_E = q\vec{E}$. Таким образом, результирующая сила, действующая в каждой точке цепи на [заряд](#), равна:



БрГУ имени А.С. Пушкина

Главная

Содержание



Вернуться

Тесты

Тема 3. Постоянный электрический ток

$$\vec{F} = \vec{F}_E + \vec{F}_{\text{стор}} = q(\vec{E} + \vec{E}_{\text{стор}}). \quad (3.11)$$

Работа, совершаемая этой силой над зарядом q на участке цепи 1-2, определяется выражением

$$A_{12} = q \int_1^2 \vec{E} \cdot d\vec{l} + q \int_1^2 \vec{E}_{\text{стор}} \cdot d\vec{l}. \quad (3.12)$$

Первое слагаемое в правой части (3.12) перепишем в соответствии с взаимосвязью между [потенциалом](#) и [напряженностью](#) поля:

$$q \int_1^2 \vec{E} \cdot d\vec{l} = q(\varphi_1 - \varphi_2). \quad (3.13)$$

Второе слагаемое в правой части (3.12) перепишем в соответствии с (3.10):

$$q \int_1^2 \vec{E}_{\text{стор}} \cdot d\vec{l} = q\varepsilon_{12}. \quad (3.14)$$



БрГУ имени А.С. Пушкина

Главная

Содержание



Вернуться

Тесты

Тема 3. Постоянный электрический ток

Подставляя (3.13) и (3.14) в (3.12), получаем:

$$A_{12} = q(\varphi_1 - \varphi_2) + q\varepsilon_{12}. \quad (3.15)$$

Разделим обе части (3.15) на q . В левой части отношение $\frac{A_{12}}{q}$ обозначим U_{12} . Величина, численно равная отношению работы и электростатических и сторонних сил по перемещению заряда к величине этого заряда, называется падением напряжения или просто напряжением на данном участке цепи U_{12} .

Таким образом (см. [рис. 3.2](#)), из (3.15) получаем:

$$U_{12} = \varphi_1 - \varphi_2 + \varepsilon_{12}. \quad (3.16)$$

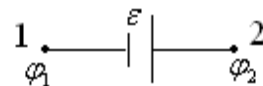


Рис. 3.2

Если на рассматриваемом участке отсутствует ЭДС, то



БрГУ имени А.С. Пушкина

Главная

Содержание



Вернуться

Тесты

Тема 3. Постоянный электрический ток

$$U_{12} = \varphi_1 - \varphi_2. \quad (3.17)$$

Переходя к разности потенциалов (и, соответственно, падению напряжения) на бесконечно малом участке длиной dx , а также учитывая связь [потенциала](#) с [напряженностью](#) поля, получаем, что

$$dU = Edx. \quad (3.18)$$

Согласно **закону Ома для однородного участка цепи** (без ЭДС)

$$U_{12} = IR, \quad (3.19)$$

где R – полное сопротивление цепи, из [\(3.16\)](#) следует, что:

$$IR = \varphi_1 - \varphi_2 + \varepsilon_{12}. \quad (3.20)$$

Уравнение [\(3.20\)](#) выражает **закон Ома для неоднородного участка цепи** (с ЭДС).

Закон Ома для однородного участка цепи можно переписать в дифференциальной форме. Для этого рассмотрим малый участок проводника длиной dx и площадью поперечного сечения S . Тогда сопротивление такого участка равно



БрГУ имени А.С. Пушкина

Главная

Содержание



Вернуться

Тесты

Тема 3. Постоянный электрический ток

$$dR = \frac{dx}{\lambda S}, \quad (3.21)$$

где λ – удельная проводимость. В системе СГСЭ она измеряется в обратных секундах: $[1 \text{ СГСЭ}_\lambda] = 1 \text{ с}^{-1}$.

Закон Ома (3.19) для данного участка, сила тока в котором равна I , переписывается в следующем виде:

$$dU = IdR. \quad (3.22)$$

Подставляя правую часть (3.18) в левую часть (3.22), а правую часть (3.21) в правую часть (3.22), после несложных преобразований с учетом (3.4) получаем:

$$\vec{j} = \lambda \vec{E}. \quad (3.23)$$

Это и есть закон Ома в векторной дифференциальной форме. Поскольку плотность тока пропорциональна напряженности электрического поля и направлена вдоль его силовых линий, то можно ввести также понятие силовых линий плотности тока.

Если необходимо учесть также сторонние силы, то (3.23) принимает вид:



БрГУ имени А.С. Пушкина

Главная

Содержание



Вернуться

Тесты

Тема 3. Постоянный электрический ток

$$\vec{j} = \lambda(\vec{E} + \vec{E}_{\text{стор}}). \quad (3.24)$$

Закон Джоуля – Ленца в интегральной форме: тепловая энергия, выделяемая на участке цепи (без ЭДС) за время t , определяется произведением силы тока I , напряжения U и времени t :

$$Q = UIt. \quad (3.25)$$

Переходя к бесконечно малым величинам dI , dU и dt , для количества теплоты получаем дифференциал третьего порядка:

$$d^3Q = dUdIdt. \quad (3.26)$$

С другой стороны, количество теплоты можно выразить через объемную плотность тепловой мощности w , время dt и объем данного участка, выраженный через длину dx и площадь dS :

$$d^3Q = wdx dS dt. \quad (3.27)$$



БрГУ имени А.С. Пушкина

Главная

Содержание



Вернуться

Тесты

Тема 3. Постоянный электрический ток

Приравнивая правые части формул (3.27) и (3.26) и выражая dU из (3.18), а dI из (3.2), получаем:

$$w = \vec{j} \cdot \vec{E}. \quad (3.28)$$

Формула (3.28) выражает закон Джоуля – Ленца в дифференциальной форме. С учетом (3.23) можно получить еще 2 разновидности записи этого закона в дифференциальной форме.

Во-первых, закон Джоуля – Ленца может быть записан через напряженность $\vec{E}$:

$$w = \lambda E^2. \quad (3.29)$$

Таким образом, тепловая мощность, выделяющаяся в единице объема проводника при протекании электрического тока, пропорциональна квадрату напряженности электрического поля.

Во-вторых, переходя от удельной проводимости λ к удельному сопротивлению ρ_0 (не путать с объемной плотностью электрического заряда ρ)

$$\rho_0 = \frac{1}{\lambda}, \quad (3.30)$$



БрГУ имени А.С. Пушкина

Главная

Содержание



Вернуться

Тесты

Тема 3. Постоянный электрический ток

которое в системе СГСЭ измеряется в секундах (что легко проверить из (3.30) и размерности удельной проводимости λ), можно записать закон Джоуля–Ленца через плотность электрического тока $\vec{j}$:

$$w = \rho_0 j^2. \quad (3.31)$$

Таким образом, **тепловая мощность, выделяющаяся в единице объема проводника при протекании электрического тока, пропорциональна квадрату плотности электрического тока.**

Закон сохранения электрического заряда в дифференциальной форме (уравнение непрерывности)

В наиболее общей форме, как было отмечено в п. 1.1, **закон сохранения электрического заряда** утверждает, что алгебраическая сумма электрических зарядов изолированной системы есть постоянная величина. Закон сохранения электрического заряда в макроскопической электродинамике можно сформулировать в более жесткой форме. Формулировка заключается в том, что в изолированной системе сохраняется заряд каждого знака. Это означает, что, например, процессы вида $e^+ + e^- \rightarrow 2\gamma$ и другие превращения элементарных частиц в макроскопической



БрГУ имени А.С. Пушкина

Главная

Содержание



Вернуться

Тесты

Тема 3. Постоянный электрический ток

электродинамике не рассматриваются. Вместе с тем, возникновение свободных электронов и ионов в результате ионизации и диссоциации, а также их исчезновение в результате рекомбинации в классической электродинамике могут рассматриваться, т.к. на самом деле электроны и атомные ядра не исчезают, а лишь перераспределяются в пространстве.

Рассмотрим объем V , ограничивающий замкнутую поверхность S . Предположим, что через поверхность S из объема V происходит вытекание [электрического заряда](#). Тогда, если $\partial e / \partial t$ есть скорость вытекания, то за время dt убыль [заряда](#) в объеме V составит $-\frac{\partial e}{\partial t} dt$. За это же время через поверхность S , ограничивающую объем V , пройдет [заряд](#)

$$\left(\oint_S \vec{j} \cdot \vec{n} dS \right) dt = -\frac{\partial e}{\partial t} dt. \quad (3.32)$$

Если объем V заряжен с объемной плотностью ρ , то

$$e = \int_V \rho dV. \quad (3.33)$$



БрГУ имени А.С. Пушкина

Главная

Содержание



Вернуться

Тесты

Тема 3. Постоянный электрический ток

Подставляя правую часть (3.33) в правую часть (3.32), после несложных преобразований получаем:

$$\oint_S \vec{j} \cdot \vec{n} dS = - \int_V \frac{\partial \rho}{\partial t} dV. \quad (3.34)$$

Формула (3.34) выражает **закон сохранения заряда в интегральной форме**, или представляет собой **уравнение непрерывности в интегральной форме**.

Получим теперь **уравнение непрерывности в дифференциальной форме**. Переписывая левую часть (3.34) с использованием [теоремы Остроградского-Гаусса](#), получаем:

$$\int_V \operatorname{div} \vec{j} dV = - \int_V \frac{\partial \rho}{\partial t} dV. \quad (3.35)$$

Поскольку соотношение (3.35) справедливо для произвольного объема V , окончательно получаем:

$$\operatorname{div} \vec{j} = - \frac{\partial \rho}{\partial t}. \quad (3.36)$$



БрГУ имени А.С. Пушкина

Главная

Содержание



Вернуться

Тесты

Тема 3. Постоянный электрический ток

Соотношение (3.36) и есть уравнение непрерывности в дифференциальной форме.

Электрическое поле стационарного тока

В случае стационарных токов объемная и поверхностная плотность зарядов (ρ и σ) в пространстве не изменяется, т.к. в противном случае токи перестали бы быть стационарными. Следовательно, электрическое поле стационарных токов совпадает с полем электростатическим, которое создается такими же по плотности (ρ и σ), но неподвижными зарядами.

Условие стационарности токов вытекает из определения стационарности и уравнения непрерывности (3.36), где $\rho = \text{const}$. Тогда из (3.36) следует, что

$$\text{div} \vec{j} = 0. \quad (3.37)$$

Для получения системы уравнений для стационарного электрического тока необходимо уравнение (3.37) дополнить: а) уравнением (3.24); б) системой (2.44), состоящей из дифференциальных уравнений первого порядка с граничными условиями. В результате получается следующая система:

$$\text{div} \vec{D} = 4\pi\rho, \quad \text{rot} \vec{E} = \vec{0}, \quad D_{2n} - D_{1n} = 4\pi\sigma, \quad \vec{j} = \lambda(\vec{E} + \vec{E}_{\text{сноп}}), \quad E_{2\tau} - E_{1\tau} = 0. \quad (3.38)$$



БрГУ имени А.С. Пушкина

Главная

Содержание



Вернуться

Тесты

Тема 3. Постоянный электрический ток

$$\operatorname{div} \vec{D} = 4\pi\rho, \operatorname{rot} \vec{E} = \vec{0}, D_{2n} - D_{1n} = 4\pi\sigma, \vec{j} = \lambda(\vec{E} + \vec{E}_{\text{стор}}), E_{2\tau} - E_{1\tau} = 0. \quad (3.38)$$



БрГУ имени А.С. Пушкина

Главная

Содержание



Вернуться

Тесты

Тема 4. Магнитостатика

Тема 4. Магнитостатика

4.1. Магнитное взаимодействие токов. Законы Ампера и Био-Савара-Лапласа. Основные интегральные соотношения магнитостатики вакуума

Литература: [[1](#), с. 140–154; [3](#), с. 212–219; [4](#), с. 162–178; [5](#), с. 205–208, 218–221; [6](#), с. 146–147; [7](#); [8](#); [9](#)]

Магнитное взаимодействие токов. Понятие магнитного поля

Вокруг проводников с током или любых движущихся зарядов создается поле сил, которое не может быть сведено к электрическому, т.к. в противном случае проводники с током всегда отталкивались бы. На самом деле имеет место как отталкивание, так и притяжение, причем притяжение имеет место для параллельно текущих токов, а отталкивание – для токов, текущих в противоположные стороны ([рис. 4.1](#)).

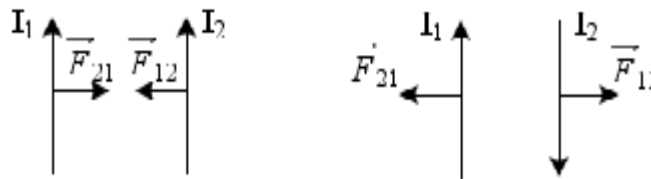


Рис. 4.1



Тема 4. Магнитостатика

Поле сил, создаваемое проводниками с током или движущимися зарядами, называется магнитным и проявляет себя по действию на движущиеся заряды или токи.

Законы Ампера и Био-Савара-Лапласа

Перед формулировкой закона Ампера дадим определение элемента тока.

Элементом тока называется величина $Id\vec{l}$, где $d\vec{l}$ – элемент длины проводника, I – сила тока в нем. $Id\vec{l}$ направлен по направлению тока.

Элемент тока должен удовлетворять требованиям:

1. Размерами его, линейными и объемными, можно пренебречь по сравнению с неоднородностями поля, т.е. в пределах элемента тока поле можно считать постоянным.
2. Магнитное поле элемента тока должно быть так мало, чтобы существенно не изменять величины изучаемого магнитного поля.

Рассмотрим элементы тока $Id\vec{l}$ и $I'd\vec{l}'$, находящиеся на расстоянии r друг от друга, причем выполняются условия

$$r \gg dl, r \gg dl'. \quad (4.1)$$

БрГУ имени А.С. Пушкина

Главная

Содержание



Вернуться

Тесты



БрГУ имени А.С. Пушкина

Главная

Содержание



Вернуться

Тесты

Тема 4. Магнитостатика

Опыт показывает, что сила магнитного взаимодействия токов определяется из соотношения

$$d^2 \vec{F}_{II'} = \frac{1}{c^2} \frac{II'}{r^3} [d\vec{l}', [d\vec{l}, \vec{r}]]. \quad (4.2)$$

В (4.2) $d^2 \vec{F}_{II'}$ – сила, действующая на элемент тока $I' d\vec{l}'$ со стороны тока $I d\vec{l}$; $\frac{1}{c^2}$ – коэффициент пропорциональности, где c – скорость света. Формула (4.2) выражает **закон Ампера**. Наличие дифференциала второго порядка в левой части (4.2) обусловлено тем, что в правой части (4.2) 2 множителя являются дифференциалами первого порядка.

Обратной по отношению к (4.2) является формула

$$d^2 \vec{F}_{I'I} = \frac{1}{c^2} \frac{II'}{r^3} [d\vec{l}, [d\vec{l}', \vec{r}]]. \quad (4.3)$$

Определим **силовую характеристику магнитного поля** – **вектор индукции**, который аналогичен вектору напряженности электростатического поля:

$$d\vec{B} = \frac{I}{cr^3} [d\vec{l}, \vec{r}]. \quad (4.4)$$



БрГУ имени А.С. Пушкина

Главная

Содержание



Вернуться

Тесты

Тема 4. Магнитостатика

где $\vec{r}$ – радиус-вектор, проведенный из элемента тока $I d\vec{l}$ в точку наблюдения. Формула (4.4) выражает закон **Био-Савара-Лапласа**, который можно сформулировать следующим образом: **индукция магнитного поля**, создаваемая элементом тока $I d\vec{l}$ в точке с радиус-вектором $\vec{r}$ относительно элемента тока, прямо пропорциональна векторному произведению элемента тока на радиус-вектор точки и обратно пропорциональна кубу расстояния между элементом тока и данной точкой.

Линии **индукции магнитного поля** – это линии, касательные в каждой точке к которым совпадают по направлению с вектором **индукции магнитного поля**.

Из (4.2) – (4.4) следует иная запись закона Ампера:

$$d^2 \vec{F} = \frac{I'}{c} [d\vec{l}', d\vec{B}]. \quad (4.5)$$

Формула (4.5) выражает силу, действующую на элемент тока $I' d\vec{l}'$ со стороны магнитного поля с индукцией $d\vec{B}$.

Магнитное поле линейных и объемных токов



БрГУ имени А.С. Пушкина

Главная

Содержание



Вернуться

Тесты

Тема 4. Магнитостатика

Реальные токи замкнуты, поэтому из (4.2) – (4.5) необходимо получить формулы для произвольных замкнутых токов.

Сначала получим формулы для **линейных токов**. Нам необходимо выполнение следующих условий:

1. Если ток вносится во внешнее магнитное поле, то его поперечное сечение должно быть мало по сравнению с неоднородностями магнитного поля. **поперечные**
2. Если исследуется поле самого тока, то его **размеры** должны быть малы по сравнению с расстояниями до исследуемых точек поля.

Из определения тока ясно, что он удовлетворяет требованию линейности, поэтому для обобщения формул (4.4) и (4.5) на случай линейных замкнутых токов достаточно произвести интегрирование по замкнутому контуру.

Интегрируя (4.4), получаем выражение для индукции магнитного поля, создаваемого замкнутым по контуру L линейным током I :

$$\vec{B} = \frac{I}{c} \oint_L \frac{[d\vec{l}, \vec{r}]}{r^3}. \quad (4.6)$$

где $\vec{r}$ – радиус-вектор, проведенный из элемента $d\vec{l}$ в точку наблюдения.



БрГУ имени А.С. Пушкина

Главная

Содержание



Вернуться

Тесты

Тема 4. Магнитостатика

Если теперь в (4.5) вместо $d\vec{B}$ подставить [индукцию](#) $\vec{B}$ (которая может быть определена по формуле (4.6)), то в левой части уже будет дифференциал первого порядка. Совершая после этого интегрирование по замкнутому контуру L' линейного тока I' , получаем:

$$\vec{F} = \frac{I'}{c} \oint_L [d\vec{l}', \vec{B}]. \quad (4.7)$$

Из (4.6) следует, что при $r \rightarrow 0$ $B \rightarrow \infty$, что противоречит действительности. Противоречие заключается в том, что при $r \rightarrow 0$ нарушаются условия линейности, сформулированные выше, поэтому формулу (4.6) уже применять нельзя. Требуется получить другую формулу.

Обобщим соотношения (4.6), (4.7) на случай **токов любого сечения, т.е. так называемых объемных токов**. Разобьем линейный ток на систему бесконечно тонких линий тока. По каждой линии течет ток dI , следовательно, согласно (3.2),

$$dI d\vec{l} = \vec{j} (d\vec{S} \cdot d\vec{l}) = \vec{j} dS dl = \vec{j} dV, \quad (4.8)$$

где dV – элемент объема тока. [Индукция магнитного поля](#), создаваемого этим элементом, согласно (4.4), находится по формуле



БрГУ имени А.С. Пушкина

Главная

Содержание



Вернуться

Тесты

Тема 4. Магнитостатика

$$d\vec{B} = \frac{1}{c} \frac{dI}{r^3} [\vec{dl}, \vec{r}] = \frac{1}{c} \frac{[\vec{j}, \vec{r}]}{r^3} dV. \quad (4.9)$$

Чтобы получить индукцию магнитного поля, создаваемого всем током, надо (4.9) проинтегрировать по всей нити тока, а полученный результат – по всем нитям, содержащимся в токе. Фактически, надо интегрировать по объему тока. В результате получаем:

$$\vec{B} = \frac{1}{c} \int_V \frac{[\vec{j}, \vec{r}]}{r^3} dV. \quad (4.10)$$

В (4.9) интегрирование ведется по координатам элемента dV , при этом $\vec{r}$ – радиус-вектор, проведенный из элемента dV в точку наблюдения. Соотношение (4.10) дает конечный (т.е. не расходящийся) результат для любого объема интегрирования. Значение $\vec{B}$ оказывается конечным во всех точках пространства, в том числе в тех, которые лежат внутри самого объема.

Соответствующее выражение для силы, действующей на ток в магнитном поле, имеет вид:

$$\vec{F} = \frac{1}{c} \int_V [\vec{j}, \vec{B}] dV, \quad (4.11)$$



БрГУ имени А.С. Пушкина

Главная

Содержание



Вернуться

Тесты

Тема 4. Магнитостатика

где $\vec{B}$, как и $\vec{j}$, зависит от координат элемента dV .



БрГУ имени А.С. Пушкина

Главная

Содержание



Вернуться

Тесты

Тема 4. Магнитостатика

4.2. Полная система дифференциальных уравнений первого порядка магнитостатики вакуума. Граничные условия

Литература: [[1](#), с. 157–158; [3](#), с. 223–233, 248–249; [7](#); [8](#); [9](#)]

Векторный потенциал магнитного поля

Введем новую характеристику магнитного поля – векторный потенциал. Сделаем замену в ([4.10](#)):

$$\frac{\vec{r}}{r^3} = -\vec{\nabla} \left(\frac{1}{r} \right). \quad (4.12)$$

Напомним, что в ([4.12](#)) присутствуют величины, относящиеся к точке наблюдения. Из ([4.12](#)) следует, что

$$\frac{[\vec{j}, \vec{r}]}{r^3} = \left[\vec{\nabla} \left(\frac{1}{r} \right), \vec{j} \right]. \quad (4.13)$$



Тема 4. Магнитостатика

Произведем в (4.13) дифференцирование по координатам точки наблюдения. Для этого воспользуемся соотношением, известным из векторного анализа:

$$\operatorname{rot}(\psi \vec{a}) = \psi \operatorname{rot} \vec{a} - [\vec{a}, \operatorname{grad} \psi]. \quad (4.14)$$

Сделаем в (4.14) следующие подстановки:

$$\vec{a} = \vec{j}, \quad \psi = \frac{1}{r}. \quad (4.15)$$

Тогда получим:

$$\operatorname{rot}\left(\frac{1}{r} \vec{j}\right) = \frac{1}{r} \operatorname{rot} \vec{j} + \left[\operatorname{grad}\left(\frac{1}{r}\right), \vec{j}\right]. \quad (4.16)$$

Дифференцирование в (4.16) производится по координатам точки наблюдения, а $\vec{j}$ есть плотность тока в элементе dV , поэтому она от $\vec{r}$ не зависит. Следовательно,

БрГУ имени А.С. Пушкина

Главная

Содержание



Вернуться

Тесты



БрГУ имени А.С. Пушкина

Главная

Содержание



Вернуться

Тесты

Тема 4. Магнитостатика

$$\operatorname{rot} \vec{j} = \vec{0}. \quad (4.17)$$

Тогда (4.16) переписывается с учетом (4.17) следующим образом:

$$\operatorname{rot} \left(\frac{\vec{j}}{r} \right) = \left[\operatorname{grad} \left(\frac{1}{r} \right), \vec{j} \right]. \quad (4.18)$$

Сравнивая (4.18) и (4.13), видим, что

$$\frac{[\vec{j}, \vec{r}]}{r^3} = \operatorname{rot} \left(\frac{\vec{j}}{r} \right). \quad (4.19)$$

Подставляя (4.19) в (4.10), получаем:

$$\vec{B} = \frac{1}{c_V} \int \operatorname{rot} \left(\frac{\vec{j}}{r} \right) dV. \quad (4.20)$$

В (4.20) интегрирование ведется по координатам элемента dV , а дифференцирование – по координатам точки наблюдения, расстояние до которой от элемента dV равно r . Т.е. если в (4.20)



БрГУ имени А.С. Пушкина

Главная

Содержание



Вернуться

Тесты

Тема 4. Магнитостатика

вынести ротор из-под знака интеграла, то результат не изменится, т.к. ротор будет по-прежнему действовать только на $1/r$. Тогда вместо (4.20) можно записать

$$\vec{B} = \text{rot} \left(\frac{1}{c} \int_V \frac{\vec{j}}{r} dV \right). \quad (4.21)$$

Таким образом, величина

$$\vec{A} = \frac{1}{c} \int_V \frac{\vec{j}}{r} dV, \quad (4.22)$$

к которой применяется ротор в (4.21), зависит только от координат точки наблюдения, т.к. в (4.21) и (4.22) по объему проведено интегрирование и расставлены пределы. Т.е. величина $\vec{A}$ есть характеристика поля B в точке наблюдения. Она называется **векторным потенциалом магнитного поля**.

Из (4.21), (4.22) следует, что

$$\vec{B} = \text{rot} \vec{A}. \quad (4.23)$$



БрГУ имени А.С. Пушкина

Главная

Содержание



Вернуться

Тесты

Тема 4. Магнитостатика

Т.к. магнитное поле непотенциально, то, в отличие от скалярного потенциала φ электростатического поля, векторный потенциал $\vec{A}$ конкретного физического смысла не имеет. Просто с его помощью удобно записывать уравнения поля.

Отметим, что векторный потенциал $\vec{A}$ определяется с точностью до градиента произвольной скалярной функции. Действительно, векторный потенциал $\vec{A}' = \vec{A} + \text{grad } \psi$ описывает такое же поле $\vec{B}$, как и потенциал $\vec{A}$, т.к. для любого ψ справедливо тождество

$$\text{rot grad } \psi = \vec{0}. \quad (4.24)$$

С учетом (4.24) и (4.23) получаем, что

$$\text{rot } \vec{A}' = \text{rot } \vec{A} + \text{rot grad } \psi = \text{rot } \vec{A} = \vec{B}, \quad (4.25)$$

что и требовалось доказать.

Вывод дифференциальных уравнений первого порядка магнитостатики вакуума

Получим дифференциальные уравнения для вектора индукции магнитного поля.



БрГУ имени А.С. Пушкина

Главная

Содержание



Вернуться

Тесты

Тема 4. Магнитостатика

Первое уравнение содержит операцию дивергенции. Это уравнение можно сразу получить из [\(4.23\)](#).

В силу того, что для любого векторного поля справедливо тождество

$$\operatorname{div} \operatorname{rot} \vec{A} = 0, \quad (4.26)$$

получаем:

$$\operatorname{div} \vec{B} = 0. \quad (4.27)$$

Это и есть искомое первое уравнение. Физический смысл [\(4.27\)](#) заключается в том, что **линии индукции магнитного поля нигде не начинаются и не заканчиваются. Они либо замкнуты, либо обоими концами уходят в бесконечность. Т.е. магнитные заряды в природе отсутствуют.** Вопрос о магнитном монополе рассматривается в квантовой теории поля, но это выходит за рамки нашего курса.

Второе уравнение содержит ротор. Его можно получить, исходя из **закона полного тока**, который аналогичен [теореме Гаусса](#) в электростатике.



БрГУ имени А.С. Пушкина

Главная

Содержание



Вернуться

Тесты

Тема 4. Магнитостатика

Формулировка закона следующая. **Циркуляция вектора индукции магнитного поля по произвольному замкнутому контуру с точностью до множителя $\frac{4\pi}{c}$ равна алгебраической сумме токов, охватываемых контуром.**

$$\oint_L \vec{B} \cdot d\vec{l} = \frac{4\pi}{c} \sum_k I_k. \quad (4.28)$$

Смысл алгебраической суммы в правой части (4.28) заключается в том, что токи, составляющие правовинтовую систему с направлением обхода, берутся со знаком «плюс», а токи, составляющие левовинтовую систему с направлением обхода, берутся со знаком «минус».

В случае непрерывного пространственного распределения токов указанную сумму в правой части (4.28) можно заменить по формуле (3.6), откуда получаем

$$\oint_L \vec{B} \cdot d\vec{l} = \frac{4\pi}{c} \int_S \vec{j} \cdot d\vec{S}. \quad (4.29)$$

Под S в (4.29) можно понимать произвольную поверхность, натянутую на контур L , а не только площадь сечения токов.



БрГУ имени А.С. Пушкина

Главная

Содержание



Вернуться

Тесты

Тема 4. Магнитостатика

Воспользуемся [теоремой Стокса](#). Формулу (2.40), записанную для вектора [напряженности электростатического поля](#), перепишем для [вектора индукции магнитного поля](#):

$$\oint_L \vec{B} \cdot d\vec{l} = \int_S \text{rot} \vec{B} \cdot d\vec{S}. \quad (4.30)$$

Приравнивая правые части (4.29) и (4.30), получаем:

$$\int_S \text{rot} \vec{B} \cdot d\vec{S} = \frac{4\pi}{c} \int_S \vec{j} \cdot d\vec{S}. \quad (4.31)$$

Т.к. S – произвольная поверхность, из (4.31) следует, что

$$\text{rot} \vec{B} = \frac{4\pi}{c} \vec{j}. \quad (4.32)$$

Это и есть искомое второе уравнение. Смысл (4.32) заключается в том, что **магнитное поле создается движущимися электрическими зарядами и не является потенциальным**. Таким образом, работа по перемещению тока по замкнутому контуру не равна нулю и зависит от траектории.



БрГУ имени А.С. Пушкина

Главная

Содержание



Вернуться

Тесты

Тема 4. Магнитостатика

Вихревые поля, у которых отсутствуют истоки и стоки, называются чисто вихревыми или соленоидальными.

Роль поверхностей разрыва играют поверхности, обтекаемые поверхностными токами, которые сосредоточены на бесконечно тонких проводящих поверхностях. Для таких случаев поверхностный ток (**линейная плотность тока**) определяется следующим выражением:

$$\vec{i} = \frac{d^2q}{dl_{\perp}dt} \vec{n}. \quad (4.33)$$

В (4.33) $dl_{\perp}$ – элемент длины, расположенный на поверхности перпендикулярно к направлению тока, $\frac{dq}{dt}$ – сила тока через всю поверхность, а вторая производная заряда берется по элементу $dl_{\perp}$; $\vec{n}$ – единичный вектор нормали, совпадающий с направлением тока.

При наличии объемных и поверхностных токов выражения для [вектора индукции магнитного поля](#) (4.10) и векторного потенциала (4.22) обобщаются и принимают вид:

$$\vec{B} = \frac{1}{c_V} \int \frac{[\vec{j}, \vec{r}]}{r^3} dV + \frac{1}{c_S} \int \frac{[\vec{i}, \vec{r}]}{r^3} dS, \quad (4.34)$$



БрГУ имени А.С. Пушкина

Главная

Содержание



Вернуться

Тесты

Тема 4. Магнитостатика

$$\vec{A} = \frac{1}{c} \int_V \frac{\vec{j}}{r} dV + \frac{1}{c} \int_S \frac{\vec{i}}{r} dS. \quad (4.35)$$

Граничные условия для вектора индукции магнитного поля

Рассмотрим поведение нормальной составляющей вектора [индукции магнитного поля](#).

Пересечем поверхность S прямоугольной призмой высотой dx ([рис. 4.2](#)) так, чтобы в сечении S_0 можно было считать постоянной величину [поверхностного тока](#) $\vec{i}$, а в сечениях S_1 и S_2 можно было считать постоянными величину и направление [индукции магнитного поля](#) $\vec{B}$.



БрГУ имени А.С. Пушкина

Главная

Содержание



Вернуться

Тесты

Тема 4. Магнитостатика

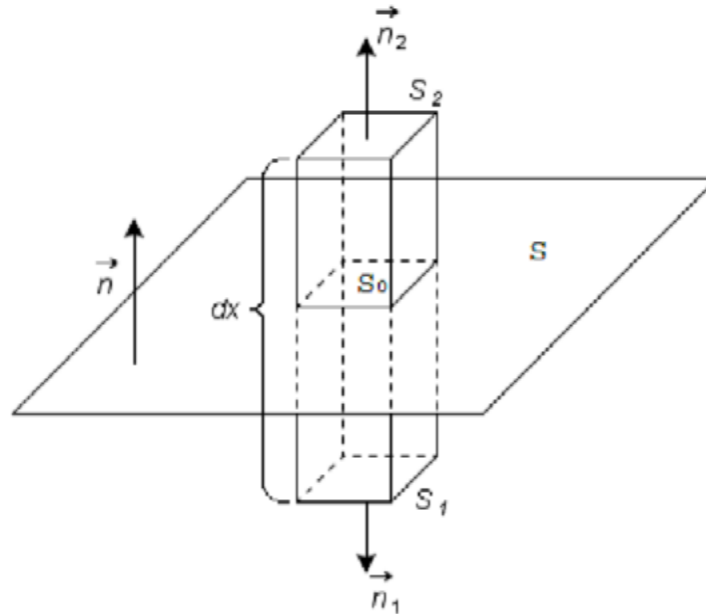


Рис. 4.2

Отметим, что [рис. 4.2](#) по внешнему виду совпадает с [рис. 2.3](#), хотя и имеет несколько иное смысловое содержание. Это связано с тем, что наши последующие рассуждения будут аналогичны рассуждениям, приведенным в [п. 2.2](#) для вектора [напряженности электростатического поля](#), а соответствующие формулы будут иметь аналогию с формулами ([2.24](#)) – ([2.30](#)).



БрГУ имени А.С. Пушкина

Главная

Содержание



Вернуться

Тесты

Тема 4. Магнитостатика

Запишем [теорему Гаусса](#) для потока [вектора магнитной индукции](#) через поверхность призмы. Применяя соотношение (2.17) к вектору $\vec{B}$, получим:

$$\oint_S (\vec{B} \cdot \vec{n}) dS = \int_V \operatorname{div} \vec{B} dV. \quad (4.36)$$

Поток, определяемый левой частью (4.36), разделим на 3 составляющие:

$$N = \oint_S \vec{B} \cdot \vec{n} dS = N_1 + N_2 + N_3, \quad (4.37)$$

где N_1 – поток через нижнюю грань, N_2 – поток через верхнюю грань, N_3 – поток через боковую поверхность. Вычислим потоки N_1 и N_2 , обозначая через B_{1n} и B_{2n} , соответственно, проекцию вектора $\vec{B}$ на вектор $\vec{n}$ на нижней и верхней гранях призмы:

$$N_1 = \vec{B}_1 \cdot \vec{n}_1 S_1 = -\vec{B}_1 \cdot \vec{n} S_1 = -B_{1n} S_1, \quad (4.38)$$

$$N_2 = \vec{B}_2 \cdot \vec{n}_2 S_2 = \vec{B}_2 \cdot \vec{n} S_2 = B_{2n} S_2, \quad (4.39)$$



БрГУ имени А.С. Пушкина

Главная

Содержание



Вернуться

Тесты

Тема 4. Магнитостатика

Устремим высоту dx призмы к нулю на [рис. 4.2](#). Тогда получается, что

$$S_1 \rightarrow S_0, S_2 \rightarrow S_0, N_3 \rightarrow 0. \quad (4.40)$$

Из [\(4.37\)](#)–[\(4.40\)](#) следует, что

$$N \rightarrow (B_{2n} - B_{1n})S_0. \quad (4.41)$$

В силу [\(4.27\)](#), для правой части [\(4.36\)](#) получаем:

$$\int_V \operatorname{div} \vec{B} dV = 0. \quad (4.42)$$

Подставляя [\(4.37\)](#) (с учетом [\(4.41\)](#)) в левую часть [\(4.36\)](#), а [\(4.42\)](#) – в правую часть [\(4.36\)](#), после сокращения на S_0 (поскольку это произвольное сечение) получаем:

$$B_{2n} - B_{1n} = 0. \quad (4.43)$$



БрГУ имени А.С. Пушкина

Главная

Содержание



Вернуться

Тесты

Тема 4. Магнитостатика

Таким образом, при переходе через поверхность, обтекаемую токами, нормальная составляющая вектора индукции магнитного поля непрерывна.

Теперь рассмотрим поведение тангенциальной составляющей вектора индукции магнитного поля.

Выберем некоторое тангенциальное направление и зададим его единичным вектором $\vec{\tau}$ (рис. 4.3). Пересечем поверхность S поверхностью S_0 таким образом, чтобы сечение $l_0 \in S$ совпадало с $\vec{\tau}$ и было столь малым, что l_0 можно было считать прямолинейным отрезком.

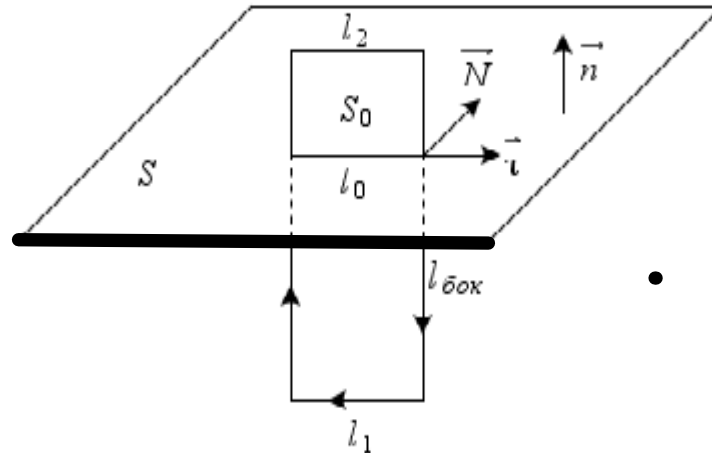


Рис. 4.3

На [рис. 4.3](#) соотношения между направлениями следующие:



БрГУ имени А.С. Пушкина

Главная

Содержание



Вернуться

Тесты

Тема 4. Магнитостатика

$$S_0 \parallel \vec{n}, \vec{N} \perp S_0. \quad (4.44)$$

При этом тройка векторов $\{\vec{\tau}, \vec{N}, \vec{n}\}$ является правой ([рис. 4.4](#)).

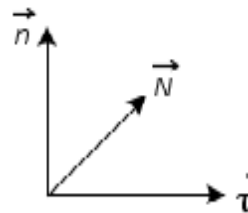


Рис. 4.4

Выберем направление обхода контура

$$L = l_{\text{бок}} + l_1 + l_2 \quad (4.45)$$

по часовой стрелке, как показано на [рис. 4.3](#). На основе ([4.28](#)), запишем [закон полного тока](#) для нашего случая:



БрГУ имени А.С. Пушкина

Главная

Содержание



Вернуться

Тесты

Тема 4. Магнитостатика

$$\oint_L \vec{B} \cdot d\vec{l} = \frac{4\pi}{c} I, \quad (4.46)$$

где I – сила тока, протекающего через площадку S_0 по поверхности S . Вычислим интеграл в левой части (4.46), разбивая его на 3 составляющие в соответствии с (4.45):

$$\oint_L \vec{B} \cdot d\vec{l} = \int_{l_1} \vec{B} \cdot d\vec{l}_1 + \int_{l_2} \vec{B} \cdot d\vec{l}_2 + \int_{l_{бок}} \vec{B}_{бок} \cdot d\vec{l}_{бок}. \quad (4.47)$$

Мы выбрали поверхность S_0 столь малой, чтобы в пределах l_1 , l_2 можно было считать, что $\vec{B} = const$. Тогда получаем:

$$\int_{l_1} \vec{B}_1 \cdot d\vec{l}_1 = \vec{B}_1 \cdot \vec{l}_1 = -\vec{B}_1 \cdot \vec{\tau}l_1 = -B_{1\tau}l_1, \quad (4.48)$$

$$\int_{l_2} \vec{B}_2 \cdot d\vec{l}_2 = \vec{B}_2 \cdot \vec{l}_2 = \vec{B}_2 \cdot \vec{\tau}l_2 = B_{2\tau}l_2. \quad (4.49)$$

Подставляя (4.48) и (4.49) в (4.47), получаем:



БрГУ имени А.С. Пушкина

Главная

Содержание



Вернуться

Тесты

Тема 4. Магнитостатика

$$\int_L \vec{B} \cdot d\vec{l} = -B_{1\tau} l_1 + B_{2\tau} l_2 + \int_{l_{\text{бок}}} \vec{B}_{\text{бок}} \cdot d\vec{l}_{\text{бок}}. \quad (4.50)$$

Подставляя (4.50) в (4.46), получаем:

$$-B_{1\tau} l_1 + B_{2\tau} l_2 + \int_{l_{\text{бок}}} \vec{B}_{\text{бок}} \cdot d\vec{l}_{\text{бок}} = \frac{4\pi}{c} I. \quad (4.51)$$

Устремим $l_{\text{бок}}$ к нулю, и тогда получится, что

$$l_1 \rightarrow l_0, l_2 \rightarrow l_0, \int_{l_{\text{бок}}} \vec{B}_{\text{бок}} \cdot d\vec{l}_{\text{бок}} \rightarrow 0. \quad (4.52)$$

Ток I в правой части (4.51) будет определяться линейной плотностью тока:

$$I = \int_{l_0} \vec{i} \cdot \vec{N} dl. \quad (4.53)$$



БрГУ имени А.С. Пушкина

Главная

Содержание



Вернуться

Тесты

Тема 4. Магнитостатика

Подставляя (4.52) и (4.53) в (4.51), получаем:

$$B_{2\tau}l_0 - B_{1\tau}l_0 = \frac{4\pi}{c} \int_{l_0} \vec{i} \cdot \vec{N} dl. \quad (4.54)$$

Т.к. сечение l_0 мало, в его пределах мы можем считать $\vec{i} = const$, вследствие чего правая часть (4.54) равна

$$\int_{l_0} \vec{i} \cdot \vec{N} dl = \vec{i} \cdot \vec{N} l_0 = i_N l_0. \quad (4.55)$$

Подставляя (4.55) в (4.54), получаем:

$$B_{2\tau} - B_{1\tau} = \frac{4\pi}{c} i_N. \quad (4.56)$$

Из (4.56) видно, что тангенциальная составляющая вектора индукции магнитного поля при переходе через поверхность, обтекаемую токами, терпит разрыв. Величина скачка B_τ определяется величиной поверхностных токов.



БрГУ имени А.С. Пушкина

Главная

Содержание



Вернуться

Тесты

Тема 4. Магнитостатика

Полная система дифференциальных уравнений первого порядка магнитостатики

Объединяя результаты (4.27), (4.32), (4.43), (4.56), запишем полную систему дифференциальных уравнений первого порядка магнитостатики вакуума:

$$\begin{cases} \operatorname{div} \vec{B} = 0, \\ \operatorname{rot} \vec{B} = \frac{4\pi}{c} \vec{j}, \\ B_{2n} - B_{1n} = 0, \\ B_{2\tau} - B_{1\tau} = \frac{4\pi}{c} i_N. \end{cases} \quad (4.57)$$

Эта система позволяет решить как прямую, так и обратную задачу магнитостатики вакуума. **Прямая задача магнитостатики вакуума** заключается в том, что по заданным токам требуется найти магнитное поле, создаваемое этими токами. **Обратная задача магнитостатики вакуума** заключается в том, что по заданному магнитному полю требуется найти токи, которыми это поле создается.

При наличии вещества с магнитной проницаемостью μ используется векторная величина $\vec{H}$, называемая **напряженностью магнитного поля** и связанная с индукцией $\vec{B}$ соотношением



БрГУ имени А.С. Пушкина

Главная

Содержание



Вернуться

Тесты

Тема 4. Магнитостатика

$$\vec{B} = \mu \vec{H} . \quad (4.58)$$

В этом случае уравнение (4.27) и граничное условие (4.43) остаются без изменений, а уравнение (4.32) и граничное условие (4.56) меняются и приобретают следующий вид:

$$\operatorname{rot} \vec{H} = \frac{4\pi}{c} \vec{j} . \quad (4.59)$$

$$H_{2\tau} - H_{1\tau} = \frac{4\pi}{c} i_N . \quad (4.60)$$



БрГУ имени А.С. Пушкина

Главная

Содержание



Вернуться

Тесты

Тема 4. Магнитостатика

4.3. Векторный потенциал магнитного поля. Уравнения второго порядка магнитостатики вакуума

Литература: [[6](#), с. 71–77; [7](#); [8](#); [9](#)]

Дифференциальное уравнение второго порядка для вектора $\vec{A}$ магнитостатики вакуума можно получить, подставляя правую часть уравнения ([4.23](#))

$$\vec{B} = \text{rot} \vec{A}$$

в левую часть уравнения ([4.32](#)):

$$\text{rot} \vec{B} = \frac{4\pi}{c} \vec{j}.$$

В результате уравнение 2-го порядка выглядит следующим образом:



БрГУ имени А.С. Пушкина

Главная

Содержание



Вернуться

Тесты

Тема 4. Магнитостатика

$$\operatorname{rot} \operatorname{rot} \vec{A} = \frac{4\pi}{c} \vec{j}. \quad (4.61)$$

Преобразуя левую часть ([4.61](#)) в соответствии с известной из векторного анализа формулой

$$\operatorname{rot} \operatorname{rot} \vec{A} = \operatorname{grad} \operatorname{div} \vec{A} - \Delta \vec{A}, \quad (4.62)$$

получаем:

$$\operatorname{grad} \operatorname{div} \vec{A} - \Delta \vec{A} = \frac{4\pi}{c} \vec{j}. \quad (4.63)$$

Покажем, что первое слагаемое в левой части ([4.63](#)) равно нулю. Будем для простоты считать, что поверхностные токи отсутствуют. В соответствии с ([4.22](#)) получаем, что

$$\operatorname{div} \vec{A} = \operatorname{div} \frac{1}{c} \int_V \frac{\vec{j}}{r} dV = \frac{1}{c} \int_V \operatorname{div} \frac{\vec{j}}{r} dV. \quad (4.64)$$



БрГУ имени А.С. Пушкина

Главная

Содержание



Вернуться

Тесты

Тема 4. Магнитостатика

Внесение дивергенции под знак интеграла в (4.64) справедливо, т.к. дифференцирование производится по координатам точки наблюдения, а интегрирование по координатам объема.

Для вычисления интеграла в (4.64) воспользуемся известным из векторного анализа соотношением

$$\operatorname{div}(\psi \vec{G}) = \psi \operatorname{div} \vec{G} + \vec{G} \cdot \operatorname{grad} \psi. \quad (4.65)$$

производя в (4.65) замены (по аналогии с (4.15))

$$\psi \equiv \frac{1}{r}, \quad \vec{G} \equiv \vec{j}, \quad (4.66)$$

получим:

$$\operatorname{div} \left(\frac{\vec{j}}{r} \right) = \frac{1}{r} \operatorname{div} \vec{j} + \vec{j} \cdot \operatorname{grad} \left(\frac{1}{r} \right). \quad (4.67)$$

Здесь мы подразумеваем дифференцирование по координатам точки наблюдения. Плотность тока $\vec{j}$ от этих координат не зависит, поэтому



БрГУ имени А.С. Пушкина

Главная

Содержание



Вернуться

Тесты

Тема 4. Магнитостатика

$$\operatorname{div} \vec{j} = 0. \quad (4.68)$$

Несмотря на то, что уравнения (4.68) и (3.37) внешне ничем не отличаются друг от друга, они имеют разный смысл, т.к. в (3.37) дифференцирование производится по координатам объема, в котором течет ток с плотностью $\vec{j}$, а в (4.68) дифференцирование производится по координатам точки, из которой происходит наблюдение магнитного поля и которая может находиться далеко от указанного объема с током.

Таким образом, (4.67) с учетом (4.68) переписывается:

$$\operatorname{div} \left(\frac{\vec{j}}{r} \right) = \vec{j} \cdot \operatorname{grad} \left(\frac{1}{r} \right). \quad (4.69)$$

Перейдем в правой части (4.69) к дифференцированию по координатам элемента объема. Учтем, что если радиус-вектор элемента объема равен $\vec{r}'$, а радиус-вектор точки наблюдения равен $\vec{r}$, то расстояние r между ними равно

$$r = |\vec{r} - \vec{r}'|. \quad (4.70)$$



БрГУ имени А.С. Пушкина

Главная

Содержание



Вернуться

Тесты

Тема 4. Магнитостатика

Очевидно, что дифференцирование по координатам точки наблюдения означает дифференцирование по координатам радиус-вектора $\vec{r}$, а дифференцирование по координатам элемента объема означает дифференцирование по координатам радиус-вектора $\vec{r}'$. Из (4.70) следует, что, по крайней мере, для правой части (4.69) результаты такого дифференцирования должны иметь противоположные знаки (для левой части (4.69) это не очевидно). Отсюда следует, что

$$\text{grad}\left(\frac{1}{r}\right) = -\text{grad}_V\left(\frac{1}{r}\right). \quad (4.71)$$

Подставляя (4.71) в (4.69), получаем:

$$\text{div}\left(\frac{\vec{j}}{r}\right) = -\vec{j} \cdot \text{grad}_V\left(\frac{1}{r}\right). \quad (4.72)$$

Поскольку формула (4.65) справедлива независимо от того, по каким координатам ведется дифференцирование, применим ее к дифференцированию по координатам элемента объема:

$$\text{div}_V\left(\frac{\vec{j}}{r}\right) = \frac{1}{r} \text{div}_V \vec{j} + \vec{j} \cdot \text{grad}_V\left(\frac{1}{r}\right). \quad (4.73)$$



БрГУ имени А.С. Пушкина

Главная

Содержание



Вернуться

Тесты

Тема 4. Магнитостатика

Из (4.73) с помощью (4.71) получим:

$$\operatorname{div}_V \left(\frac{\vec{j}}{r} \right) = \frac{1}{r} \operatorname{div}_V \vec{j} - \vec{j} \cdot \operatorname{grad} \left(\frac{1}{r} \right). \quad (4.74)$$

Поскольку мы рассматриваем стационарные токи, уравнение непрерывности (3.37) в нашем случае запишется как

$$\operatorname{div}_V \vec{j} = 0. \quad (4.75)$$

Подставляя (4.75) в (4.74), получаем:

$$\operatorname{div}_V \left(\frac{\vec{j}}{r} \right) = -\vec{j} \cdot \operatorname{grad} \left(\frac{1}{r} \right). \quad (4.76)$$

Сравнивая (4.76) с (4.69), получаем, что



БрГУ имени А.С. Пушкина

Главная

Содержание



Вернуться

Тесты

Тема 4. Магнитостатика

$$\operatorname{div}\left(\frac{\vec{j}}{r}\right) = -\operatorname{div}_V\left(\frac{\vec{j}}{r}\right). \quad (4.77)$$

Подставляя (4.77) в (4.64), получим:

$$\operatorname{div}\vec{A} = -\frac{1}{c} \int_V \operatorname{div}_V\left(\frac{\vec{j}}{r}\right) dV. \quad (4.78)$$

Справа в (4.78) дифференцирование и интегрирование ведется по координатам элемента объема. Следовательно, к правой части (4.78) можно применить [теорему Остроградского-Гаусса \(2.17\)](#), в результате чего получаем:

$$\int_V \operatorname{div}_V\left(\frac{\vec{j}}{r}\right) dV = \oint_S \frac{\vec{j} \cdot \vec{n}}{r} dS. \quad (4.79)$$

В связи с отсутствием поверхностных токов получаем, что на поверхности, по которой производится интегрирование в правой части (4.79),

$$\vec{j} = \vec{0}. \quad (4.80)$$



БрГУ имени А.С. Пушкина

Главная

Содержание



Вернуться

Тесты

Тема 4. Магнитостатика

Подставляя (4.80) в правую часть (4.79), получим:

$$\int_V \operatorname{div}_V \left(\frac{\vec{j}}{r} \right) dV = 0. \quad (4.81)$$

Подставляя (4.81) в (4.78), получаем:

$$\operatorname{div} \vec{A} = 0. \quad (4.82)$$

Равенство (4.82) показывает, что у векторного потенциала $\vec{A}$ лишь два независимых компонента, а это соответствует случаю поперечных волн. Следовательно, (4.82) есть **условие поперечности** и соответствует поперечности электромагнитной волны.

Подставляя (4.82) в (4.63), получаем **уравнение Пуассона** для векторного потенциала:

$$\Delta \vec{A} = -\frac{4\pi}{c} \vec{j}. \quad (4.83)$$



БрГУ имени А.С. Пушкина

Главная

Содержание



Вернуться

Тесты

Тема 4. Магнитостатика

Это есть искомое уравнение второго порядка для векторного потенциала $\vec{A}$, которое вместе с условием поперечности (4.82) составляет искомую систему уравнений второго порядка.

Если отсутствуют поверхностные токи и вектор $\vec{A}$ удовлетворяет условиям непрерывности и конечности вместе со своими первыми производными, то система уравнений (4.82) – (4.83) является полной и имеет единственное решение (4.22). Поскольку $\vec{A}$ не имеет физического смысла, то дополнением к системе (4.82) – (4.83) является уравнение (4.23), связывающее $\vec{A}$ и $\vec{B}$:

$$\vec{B} = \text{rot} \vec{A}.$$

Отметим, что если правая часть в (4.83) равна нулю, то получаем **уравнение Лапласа для векторного потенциала магнитного поля**:

$$\Delta \vec{A} = \vec{0}. \quad (4.84)$$



БрГУ имени А.С. Пушкина

Главная

Содержание



Вернуться

Тесты

Тема 5. Квазистационарное электромагнитное поле

Тема 5. Квазистационарное электромагнитное поле

5.1. Условия квазистационарности. Явление электромагнитной индукции.

Обобщенная формулировка закона электромагнитной индукции

Литература: [1, с. 200–225, 252–254; 3, с. 256–262; 4, с. 192–199; 5, с. 260–263; 7; 8; 9]

Условия квазистационарности

Квазистационарные поля – это поля, которые с течением времени изменяются, но **изменяются медленно**. На такие поля налагаются следующие условия:

1. Если в системе, которая создает поля, изменения в распределении токов и зарядов происходят с периодом T , то должно выполняться условие

$$T \gg \tau = l/c, \quad (5.1)$$

где τ – время запаздывания, т.е. время, на величину которого изменение полей в точке наблюдения запаздывает по отношению к времени изменения в распределении зарядов и токов. При этом l – расстояние от системы токов и зарядов до точки наблюдения, c – скорость распространения электромагнитного возмущения. Т.е. время запаздывания должно быть пренебрежимо малым по сравнению с периодом изменений в системе токов и зарядов.



БрГУ имени А.С. Пушкина

Главная

Содержание



Вернуться

Тесты

Тема 5. Квазистационарное электромагнитное поле

2. Изменение полей и токов должно быть настолько медленным, чтобы плотность тока смещения $\partial\vec{D}/\partial t$ была по абсолютной величине пренебрежимо мала по сравнению с плотностью тока проводимости:

$$|\vec{j}| \gg |\partial\vec{D}/\partial t|, \quad (5.2)$$

3. Величины, характеризующие свойства вещества, т.е. $\varepsilon, \lambda, \mu$, должны быть такими же, как и в постоянных полях.

Всем этим условиям удовлетворяют токи низких частот. В физике такие токи принято называть переменными.

Явление электромагнитной индукции. Обобщенная формулировка закона электромагнитной индукции

Рассмотрим проводящий контур с подвижной проводящей перемычкой длиной l ([рис. 5.1](#)), находящийся в однородном магнитном поле $\vec{B}$, которое перпендикулярно к плоскости контура и направлено за рисунок.



БрГУ имени А.С. Пушкина

Главная

Содержание



Вернуться

Тесты

Тема 5. Квазистационарное электромагнитное поле

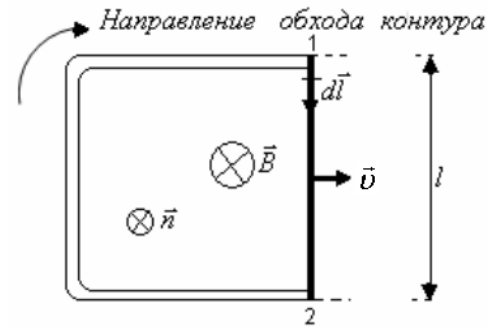


Рис. 5.1.

Пусть перемычка движется со скоростью $\vec{v}$. С той же скоростью станут перемещаться относительно поля и носители тока в перемычке – электроны. На каждый электрон начнет действовать направленная вдоль перемычки сила Лоренца (учтено, что заряд электрона равен $-e_0$):

$$\vec{F}_L = -\frac{e_0}{c} [\vec{v}, \vec{B}]. \quad (5.3)$$

Действие этой силы эквивалентно действию на электрон электрического поля, напряженность которого равна

$$\vec{E}_{\text{стор}} = \frac{\vec{F}_M}{-e_0} = \frac{1}{c} [\vec{v}, \vec{B}]. \quad (5.4)$$



БрГУ имени А.С. Пушкина

Главная

Содержание



Вернуться

Тесты

Тема 5. Квазистационарное электромагнитное поле

Исходя из определения ЭДС (3.10), с учетом (5.4) получаем (учитывая также, что на [рис. 5.1](#) $\vec{v} \neq 0$ лишь на участке 1-2)

$$\varepsilon_i = \oint_{1 \rightarrow 2} \vec{E}_{\text{стор}} d\vec{l} = \frac{1}{c} \oint_{1 \rightarrow 2} [\vec{v}, \vec{B}] \cdot d\vec{l} = \frac{1}{c} [\vec{v}, \vec{B}] \cdot \vec{l}. \quad (5.5)$$

Направление обхода выбираем по часовой стрелке, в результате чего направление обхода, вектор элемента контура $d\vec{l}$ и нормаль к контуру образуют правовинтовую систему ([рис. 5.2](#)). Вынесем в (5.5) за знак интеграла векторное произведение $[\vec{v}, \vec{B}]$. Поскольку интегрирование ведется по длине перемычки, в результате получаем:

$$\varepsilon_i = \frac{1}{c} [\vec{v}, \vec{B}] \int_{1 \rightarrow 2} d\vec{l} = \frac{1}{c} [\vec{v}, \vec{B}] \cdot \vec{l}. \quad (5.6)$$

где $\vec{l}$ – вектор, показанный на [рис. 5.2](#).



БрГУ имени А.С. Пушкина

Главная

Содержание



Вернуться

Тесты

Тема 5. Квазистационарное электромагнитное поле

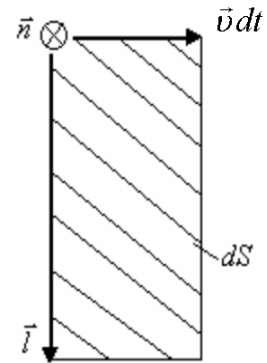


Рис. 5.2

В полученном смешанном произведении осуществим циклическую перестановку сомножителей, после чего умножим и разделим его на dt :

$$\varepsilon_i = \frac{\vec{B}[\vec{l}, \vec{v}dt]}{cdt}. \quad (5.7)$$

Из [рис. 5.2](#) видно, что

$$[\vec{l}, \vec{v}dt] = -\vec{n}dS, \quad (5.8)$$



БрГУ имени А.С. Пушкина

Главная

Содержание



Вернуться

Тесты

Тема 5. Квазистационарное электромагнитное поле

где dS – приращение площади контура за время dt . Подставляя (5.8) в (5.7), получаем:

$$\varepsilon_i = -\frac{\vec{B} \cdot \vec{n} dS}{cdt}. \quad (5.9)$$

Введем понятие магнитного потока. Магнитный поток $d\Phi$ вектора магнитной индукции $\vec{B}$ через элементарную площадку dS (рис. 5.3) определяется скалярным произведением векторов $\vec{B}$ и $d\vec{S}$.

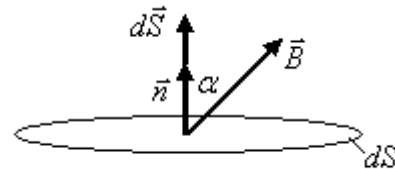


Рис. 5.3

$$d\Phi = \vec{B} \cdot d\vec{S} = \vec{B} \cdot \vec{n} \cdot dS. \quad (5.10)$$

Магнитный поток через конечную поверхность S определяется интегралом:



БрГУ имени А.С. Пушкина

Главная

Содержание



Вернуться

Тесты

Тема 5. Квазистационарное электромагнитное поле

$$\Phi = \int_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = \int_S \vec{B} \cdot \vec{n} dS. \quad (5.11)$$

Подставляя (5.10) в (5.9), получаем:

$$\varepsilon_i = -\frac{1}{c} \frac{d\Phi}{dt}. \quad (5.12)$$

Таким образом, причина возникновения индукционного тока – появление электродвижущей силы под влиянием изменяющегося потока магнитной индукции. ЭДС индукции в контуре с точностью до множителя $-1/c$ равна скорости изменения магнитного потока, пронизывающего этот контур. Индукционный ток всегда направлен так, чтобы противодействовать изменению магнитного потока, вызвавшего этот ток (**правило Ленца**).

Эксперименты показывают, что соотношение (5.12) выполняется независимо от того, каким образом происходит изменение магнитного потока – вследствие изменения площади контура, вследствие изменения угла между $\vec{n}$ и $\vec{B}$ на [рис. 5.3](#) или вследствие изменения самого магнитного поля.

Сопоставляя формулы (5.5) (для замкнутого контура произвольной формы) и (5.12), можно записать:



БрГУ имени А.С. Пушкина

Главная

Содержание



Вернуться

Тесты

Тема 5. Квазистационарное электромагнитное поле

$$\oint_L \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\frac{1}{c} \frac{d\Phi}{dt}. \quad (5.13)$$

Формула (5.13) отражает следующую **обобщенную формулировку закона электромагнитной индукции**:

При наличии изменяющегося магнитного поля скорость изменения магнитного потока через произвольную поверхность S с точностью до множителя $-1/c$ равна циркуляции вектора напряженности электрического поля вдоль замкнутого контура, стягивающего данную поверхность, причем возникновение электрического поля обусловлено изменением магнитного поля.

Соотношение (5.13) выполняется независимо от наличия замкнутого проводника. Изменение магнитного поля всегда вызывает появление вихревого электрического поля не только в проводящей среде, но и в любой другой среде и даже в вакууме, где в отсутствие электрических зарядов существование электрического тока невозможно. Наличие проводника лишь позволяет регистрировать появление электрического поля по возникающему в проводнике электрическому току.



БрГУ имени А.С. Пушкина

Главная

Содержание



Вернуться

Тесты

Тема 5. Квазистационарное электромагнитное поле

5.2. Закон электромагнитной индукции в дифференциальной форме. Полная система дифференциальных уравнений первого порядка квазистационарного электромагнитного поля

Литература: [[1](#), с. 200–225; [3](#), с. 263–266; [4](#), с. 297–298; [7](#); [8](#); [9](#)]

Закон электромагнитной индукции в дифференциальной форме

Переписывая правую часть ([5.13](#)) с учетом ([5.11](#)), получим:

$$\oint_L \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\frac{1}{c} \frac{d}{dt} \int_S \vec{B} \cdot \vec{n} dS. \quad (5.14)$$

Применяя к левой части ([5.14](#)) [теорему Стокса \(2.40\)](#), получаем:

$$\int_S \vec{n} \cdot \text{rot} \vec{E} dS = -\frac{1}{c} \frac{d}{dt} \int_S \vec{B} \cdot \vec{n} dS. \quad (5.15)$$



БрГУ имени А.С. Пушкина

Главная

Содержание



Вернуться

Тесты

Тема 5. Квазистационарное электромагнитное поле

Интегрирование ведется по произвольной поверхности S . Поскольку в (5.15) отсутствует контур, то соотношение (5.15) справедливо при любом выборе поверхности S . Если считать ее недеформируемой, то производную по времени в (5.15) можно внести под знак интеграла:

$$\int_S \vec{n} \cdot \text{rot} \vec{E} dS = -\frac{1}{c} \int_S \frac{d\vec{B}}{dt} \cdot \vec{n} dS. \quad (5.16)$$

Полная производная по времени, стоящая в правой части (5.16), подчеркивает, что $d\vec{B}/dt$ есть скорость полного изменения вектора $\vec{B}$. Это изменение вызвано как нестационарностью вектора $\vec{B}$, так и перемещением поверхности в пространстве. Если поверхность неподвижна, то в (5.16) изменение вектора $\vec{B}$ есть его изменение в данной фиксированной точке пространства только из-за нестационарности магнитного поля. Следовательно, полную производную по времени в (5.16) надо заменить на частную:

$$\int_S \vec{n} \cdot \text{rot} \vec{E} dS = -\frac{1}{c} \int_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot \vec{n} dS. \quad (5.17)$$

В силу того, что выбор поверхности S произволен, можно записать:



БрГУ имени А.С. Пушкина

Главная

Содержание



Вернуться

Тесты

Тема 5. Квазистационарное электромагнитное поле

$$\operatorname{rot} \vec{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}. \quad (5.18)$$

Это и есть **закон электромагнитной индукции в дифференциальной форме**. Он устанавливает связь между величиной переменного магнитного поля и возникающего при этом электрического поля в данной точке пространства. Возникающее электрическое поле при этом является не потенциальным, а вихревым. Знак «минус» в правой части (5.18) говорит о том, что вихревое электрическое поле составляет левовинтовую систему с вектором $\partial \vec{B} / \partial t$.

Полная система дифференциальных уравнений первого порядка квазистационарного электромагнитного поля

Перед выводом полной системы дифференциальных уравнений первого порядка квазистационарного электромагнитного поля сделаем ряд замечаний:

1. В случае нестационарных полей (в том числе квазистационарных) электрическое и магнитное поля неразрывно связаны друг с другом; следовательно, система уравнений для квазистационарного поля должна включать в себя уравнения и для электрического, и для магнитного полей.



БрГУ имени А.С. Пушкина

Главная

Содержание



Вернуться

Тесты

Тема 5. Квазистационарное электромагнитное поле

2. Квазистационарное электромагнитное поле отличается от электростатического тем, что учитывает закон электромагнитной индукции. Поскольку в такой ситуации $\text{rot}\vec{E} \neq \vec{0}$, квазистационарное электрическое поле не является потенциальным.

3. Квазистационарное магнитное поле в каждый данный момент времени не отличается от стационарного, за исключением того, что оно порождает вихревое электрическое поле. Это утверждение справедливо только для электромагнитных полей низких частот, когда можно пренебречь током смещения по сравнению с током проводимости (см. условие (5.2)).

Полная система уравнений Максвелла для квазистационарного электромагнитного поля, в соответствии с (4.59), (4.27), (5.18), (2.20) имеет вид

$$\text{rot}\vec{H} = \frac{4\pi}{c} \vec{j}, \text{div}\vec{B} = 0, \text{rot}\vec{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, \text{div}\vec{D} = 4\pi\rho. \quad (5.19)$$

Систему (5.19) необходимо дополнить уравнениями связи (4.58), (2.21), (3.24):

$$\mu\vec{H} = \vec{B}, \vec{D} = \varepsilon\vec{E}, \vec{j} = \lambda(\vec{E} + \vec{E}_{\text{стор}}). \quad (5.20)$$

Согласно одному из условий квазистационарности, характеристики среды $\varepsilon, \lambda, \mu$ остаются такими же, как и в стационарных полях.



БрГУ имени А.С. Пушкина

Главная

Содержание



Вернуться

Тесты

Тема 5. Квазистационарное электромагнитное поле

Покажем, что второе и третье уравнения в (5.19) не являются независимыми. Возьмем дивергенцию от обеих частей третьего уравнения и выполним несложные преобразования:

$$\operatorname{div} \operatorname{rot} \vec{E} = -\frac{1}{c} \operatorname{div} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \Rightarrow 0 = -\frac{1}{c} \operatorname{div} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \Rightarrow -\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \operatorname{div} \vec{B} = 0. \quad (5.21)$$

Таким образом, в любой точке пространства $\vec{B}$ не зависит от времени. Если сделать физически оправданное предположение, что в отсутствие токов и магнетиков для каждой точки $\vec{B} = \vec{0}$ (и, следовательно, $\operatorname{div} \vec{B} = 0$), то тогда получается, что $\operatorname{div} \vec{B} = 0$ для любых возможных значений $\vec{B}$. Отсюда следует, что 2-е уравнение в (5.19) играет роль дополнения к третьему.

Непотенциальное квазистационарное электрическое поле не может быть выражено только через градиент скалярного потенциала φ , но может быть выражено через скалярный потенциал φ и векторный потенциал $\vec{A}$. Учитывая, что $\vec{B} = \operatorname{rot} \vec{A}$, перепишем (5.18) следующим образом:

$$\operatorname{rot} \vec{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \operatorname{rot} \vec{A}. \quad (5.22)$$

После несложных преобразований получаем



БрГУ имени А.С. Пушкина

Главная

Содержание



Вернуться

Тесты

Тема 5. Квазистационарное электромагнитное поле

$$\operatorname{rot}\left(\vec{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}\right) = \vec{0}. \quad (5.23)$$

Отсюда следует, что вектор $\vec{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$ является потенциальным и поэтому может быть представлен как градиент от некоторой потенциальной функции. Таким образом,

$$\vec{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = -\operatorname{grad} \varphi, \quad (5.24)$$

где φ – скалярный потенциал электромагнитного поля. Тогда для напряженности квазистационарного электрического поля получаем

$$\vec{E} = -\operatorname{grad} \varphi - \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}. \quad (5.25)$$

Второе слагаемое в (5.25) учитывает закон электромагнитной индукции.

В квазистационарном случае уравнение непрерывности имеет вид



БрГУ имени А.С. Пушкина

Главная

Содержание



Вернуться

Тесты

Тема 5. Квазистационарное электромагнитное поле

$$\operatorname{div} \vec{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0, \quad (5.26)$$

т.е. такой же вид, как и для постоянного электрического тока. Выражая плотность электрического заряда ρ из четвертого уравнения ([5.19](#)) и подставляя в ([5.26](#)), после несложных преобразований получаем:

$$\operatorname{div} \left(\vec{j} + \frac{1}{4\pi} \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \right) = 0, \quad (5.27)$$

С учетом условия ([5.2](#)) приближенно получаем, что

$$\operatorname{div} \vec{j} \approx 0, \quad (5.28)$$

а это эквивалентно аналогичному условию для стационарного электрического тока ([3.37](#)).



БрГУ имени А.С. Пушкина

Главная

Содержание



Вернуться

Тесты

Тема 6. Переменное электромагнитное поле

Тема 6. Переменное электромагнитное поле

6.1. Гипотеза Максвелла, ток смещения. Полная система уравнений Максвелла

Литература: [1, с. 230–251; 3, с. 331–339; 5, с. 296–304, 308–315; 6, с. 98–99, 108–110, 292–304; 7; 8; 9]

Гипотеза Максвелла, ток смещения

Как было выяснено ранее, уравнение непрерывности (3.36) в случае стационарных полей переходит в (3.37)

$$\operatorname{div} \vec{j} = 0,$$

т.к.

$$\frac{d\rho}{dt} = 0,$$

а в случае квазистационарных полей переходит в (5.28)



БрГУ имени А.С. Пушкина

Главная

Содержание



Вернуться

Тесты

Тема 6. Переменное электромагнитное поле

$$\operatorname{div} \vec{j} \approx 0,$$

т.к. выполняется условие [\(5.2\)](#)

$$|\vec{j}| \gg |\partial \vec{D} / \partial t|.$$

В обоих случаях линии токов являются замкнутыми.

В случае быстропеременных полей, когда величиной $\frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$ нельзя пренебречь по сравнению с плотностью тока $\vec{j}$, необходимо исходить из [уравнения непрерывности](#) в самом общем виде [\(3.36\)](#)

$$\operatorname{div} \vec{j} = -\frac{d\rho}{dt}.$$

Уравнение [\(3.36\)](#) показывает, что линии тока (вектор $\vec{j}$) в общем случае не являются замкнутыми, т.е. обрываются в тех точках проводника, на которых происходит накопление заряда. Например, для переменного тока обрыв линий происходит на обкладках конденсатора.



БрГУ имени А.С. Пушкина

Главная

Содержание



Вернуться

Тесты

Тема 6. Переменное электромагнитное поле

Здесь следует отметить важное обстоятельство: [уравнение непрерывности](#) в виде [\(3.37\)](#) или [\(5.28\)](#) несовместно с одним из уравнений для стационарного и квазистационарного полей, а именно, уравнения [\(4.59\)](#)

$$\operatorname{rot} \vec{H} = \frac{4\pi}{c} \vec{j}.$$

Действительно, если взять дивергенцию от обеих частей [\(4.59\)](#), то, в силу [\(4.26\)](#), получим

$$\frac{4\pi}{c} \operatorname{div} \vec{j} = \operatorname{div} \operatorname{rot} \vec{H} \equiv 0, \quad (6.1)$$

что вновь приведет нас к уравнениям [\(3.37\)](#) и [\(5.28\)](#).

Следовательно, уравнение [\(6.1\)](#) несправедливо в общем случае переменных полей, его необходимо дополнить (видоизменить). Для устранения этого противоречия Максвелл ввел в рассмотрение токи [смещения](#) с плотностью

$$\vec{j}_{см} = \frac{1}{4\pi} \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \quad (6.2)$$



БрГУ имени А.С. Пушкина

Главная

Содержание



Вернуться

Тесты

Тема 6. Переменное электромагнитное поле

и предположил, что $\text{rot}\vec{H}$ пропорционален не току проводимости, а полному току, который равен сумме токов проводимости и тока [смещения](#). Таким образом, уравнение [\(4.59\)](#) принимает вид:

$$\text{rot}\vec{H} = \frac{4\pi}{c}(\vec{j} + \vec{j}_{\text{см}}). \quad (6.3)$$

Подставляя [\(6.2\)](#) в [\(6.3\)](#), получаем:

$$\text{rot}\vec{H} = \frac{4\pi}{c}\vec{j} + \frac{1}{c}\frac{\partial\vec{D}}{\partial t}. \quad (6.4)$$

Для проверки совместимости [\(6.4\)](#) с [\(3.36\)](#) возьмем дивергенцию от обеих частей [\(6.4\)](#). С учетом [\(4.26\)](#) и [\(2.20\)](#), получаем:

$$0 = \frac{4\pi}{c}\text{div}\vec{j} + \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\text{div}\vec{D} \Rightarrow \frac{4\pi}{c}\text{div}\vec{j} + \frac{4\pi}{c}\frac{d\rho}{dt} = 0. \quad (6.5)$$

Из [\(6.5\)](#) легко получить [\(3.36\)](#), а это значит, что

$$\text{div}(\vec{j} + \vec{j}_{\text{см}}) = \text{div}(\vec{j}_{\text{полн}}) = 0. \quad (6.6)$$



БрГУ имени А.С. Пушкина

Главная

Содержание



Вернуться

Тесты

Тема 6. Переменное электромагнитное поле

Уравнение (6.6) показывает, что линии полного тока являются либо замкнутыми, либо уходят в бесконечность. Т.е. там, где обрываются линии тока проводимости, к ним непосредственно примыкают линии тока [смещения](#), что делает линии полного тока замкнутыми все равно.

Заметим, что устранить указанное противоречие с уравнением (4.59) можно и другими способами, однако эксперименты показали, что **идея Максвелла о существовании тока [смещения](#) справедлива**. В частности, на это указывает распространение электромагнитного поля в виде [электромагнитных волн](#) в вакууме и диэлектриках.

Физический смысл тока смещения

Из определения тока смещения (6.2) видно, что он равен скорости изменения поля. Т.е. в отличие от тока проводимости, он может существовать и в непроводящих средах. В частности, в вакууме ток проводимости отсутствует, $\vec{H}$ заменяется на $\vec{B}$ (согласно (4.58) при $\mu = 1$), а $\vec{D}$ заменяется на $\vec{E}$ (согласно (2.21), (2.22) при $\varepsilon = 1$). В этом случае уравнение (6.4) принимает вид:

$$\operatorname{rot} \vec{B} = \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}. \quad (6.7)$$

Это уравнение сходно по виду с уравнением (5.18)



БрГУ имени А.С. Пушкина

Главная

Содержание



Вернуться

Тесты

Тема 6. Переменное электромагнитное поле

$$\operatorname{rot} \vec{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}.$$

Из сравнения (6.7) и (5.18) видно, что точно так же, как изменяющееся магнитное поле может породить вихревое электрическое, изменяющееся электрическое поле порождает магнитное (всегда вихревое). Именно поэтому **величина** $\frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$ **называется током смещения**. В образовании магнитного поля она играет роль, сходную с током проводимости.

Видно, что в (6.7) и (5.18) правые части входят с разными знаками, т.е. магнитное поле образует правовинтовую систему с $\frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$, а $\vec{E}$ – левовинтовую с $\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$.

Выясним, в чем сходство и различие токов проводимости и смещения. Единственное их сходство в том, что они одинаково порождают магнитное поле, т.е. равные по величине токи проводимости и смещения порождают одинаковое магнитное поле. В остальном их физическая сущность различна. Если ток проводимости может существовать лишь в проводящих средах, то ток смещения – в любых. В вакууме он определяет скорость изменения вектора напряженности электрического поля, т.е. вместо (6.2) можно записать:



БрГУ имени А.С. Пушкина

Главная

Содержание



Вернуться

Тесты

Тема 6. Переменное электромагнитное поле

$$\vec{j}_{cm} = \frac{1}{4\pi} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}. \quad (6.8)$$

Полная система уравнений Максвелла

Из сказанного выше следует, что в уравнение (4.59) для квазистационарных полей нужно добавить слагаемое, учитывающее существование токов смещения (6.2), тем самым заменяя уравнение (4.59) на уравнение (6.4). Следовательно, вместо (5.19) и (5.20) получим полную систему дифференциальных уравнений первого порядка для произвольных полей и токов:

$$\left\{ \begin{array}{l} \operatorname{rot} \vec{H} = \frac{4\pi}{c} \vec{j} + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}, \\ \operatorname{div} \vec{D} = 4\pi\rho, \\ \operatorname{rot} \vec{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, \\ \operatorname{div} \vec{B} = 0, \\ \vec{D} = \varepsilon \vec{E}, \\ \mu \vec{H} = \vec{B}, \\ \vec{j} = \lambda (\vec{E} + \vec{E}_{cm}). \end{array} \right. \quad (6.9)$$



БрГУ имени А.С. Пушкина

Главная

Содержание



Вернуться

Тесты

Тема 6. Переменное электромагнитное поле

Граничные условия выписывать не будем. Отметим, что в законе Ома, который записан в дифференциальной форме, в качестве второго слагаемого в скобках в правой части вместо напряженности поля сторонних сил стоит напряженность, соответствующая току смещения.

Система (6.9) справедлива при следующих предположениях:

1. Все материальные тела, находящиеся в поле, неподвижны. 2. Величины, характеризующие свойства среды, считаются заданными и остаются постоянными, т.е. в каждой точке пространства не зависят от времени и от величины поля. 3. В поле отсутствуют сегнетоэлектрики, ферромагнетики, сегнетомагнетики и анизотропные диэлектрики и магнетики.

Из (6.9) вытекают все ранее рассмотренные нами частные случаи полей: квазистационарные, магнито- и электростатические. Система (6.9) есть наиболее общая система уравнений макроэлектродинамики. Именно она называется **системой уравнений Максвелла**. **Она не выводится, а постулируется на основании основных опытных законов для электромагнитных полей:** закона [Кулона](#), [Ампера](#), [электромагнитной индукции Фарадея](#), [Ома](#), идеи о существовании тока смещения. В этом смысле она играет роль постулатов, как постулат, аналогичный законам Ньютона, законам термодинамики. Система (6.9) непосредственно на опыте не проверяется, но ее справедливость подтверждается экспериментальной проверкой следствий, вытекающих из нее.

Система (6.9) является полной, т.к. в принципе позволяет решить прямую и обратную задачу электродинамики. **Прямая задача заключается в определении параметров электромагнитного поля по известным зарядам и токам. Обратная задача заключается в определении зарядов и токов по известным параметрам поля, которое этими зарядами и токами создается.**



БрГУ имени А.С. Пушкина

Главная

Содержание



Вернуться

Тесты

Тема 6. Переменное электромагнитное поле

В [п. 5.2](#) мы показали, что третье и четвертое уравнения, входящие в систему ([6.9](#)), не являются независимыми (четвертое уравнение играет роль дополнительного условия к третьему). Покажем теперь, что и первая пара уравнений, входящих в систему ([6.9](#)), не являются независимыми, т.к. второе уравнение играет роль дополнительного условия к первому. Применим операцию div к первому уравнению:

$$div \operatorname{rot} \vec{H} = \frac{4\pi}{c} div \vec{j} + \frac{1}{c} div \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}. \quad (6.10)$$

С учетом ([4.26](#)) получаем:

$$\frac{4\pi}{c} div \vec{j} = -\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} div \vec{D}. \quad (6.11)$$

Подставляя правую часть ([3.36](#)) в левую часть ([6.11](#)), после необходимых сокращений получаем уравнение ([2.20](#)), которое одновременно является вторым уравнением системы ([6.9](#)).



БрГУ имени А.С. Пушкина

Главная

Содержание



Вернуться

Тесты

Тема 6. Переменное электромагнитное поле

6.2. Уравнения второго порядка для потенциалов электромагнитного поля. Условие калибровки Лоренца

Литература: [6, с. 153–155; 7; 8; 9]

Вывод уравнений второго порядка для потенциалов электромагнитного поля

Решение [уравнений Максвелла](#) – задача сложная, однако с их помощью можно получить уравнения второго порядка для потенциалов электромагнитного поля, которые в отдельных случаях поддаются анализу.

Рассмотрим случай однородной среды. Она удовлетворяет двум условиям:

1. Среда заполняет весь объем полного поля. 2. Значения ε , μ , λ не зависят от пространственных координат и времени.

Кроме того, будем дополнительно считать, что отсутствуют поверхностные заряды и токи.

Сначала получим уравнение 2-го порядка для векторного потенциала $\vec{A}$.

Рассмотрим уравнение ([6.4](#))

$$\text{rot} \vec{H} = \frac{4\pi}{c} \vec{j} + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$$



БрГУ имени А.С. Пушкина

Главная

Содержание



Вернуться

Тесты

Тема 6. Переменное электромагнитное поле

с учетом дополнительных связей ([2.21](#)) и ([4.58](#))

$$\vec{D} = \varepsilon \vec{E}, \quad \mu \vec{H} = \vec{B}.$$

В нашем случае ε и μ не зависят от пространственных координат, поэтому при подстановке ([2.21](#)) и ([4.58](#)) в ([6.4](#)) их можно вынести из-под дифференциальных операторов. Тогда после несложных преобразований получаем:

$$\operatorname{rot} \vec{B} = \frac{4\pi\mu}{c} \vec{j} + \frac{\varepsilon\mu}{c} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}. \quad (6.12)$$

Подставляя в правую часть ([6.12](#)) выражение для вектора $\vec{E}$ из уравнения ([5.25](#)),

$$\vec{E} = -\operatorname{grad} \left(\varphi + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \right),$$

а в левую часть ([6.12](#)) выражение для вектора $\vec{B}$ из уравнения ([4.23](#)), получаем:



БрГУ имени А.С. Пушкина

Главная

Содержание



Вернуться

Тесты

Тема 6. Переменное электромагнитное поле

$$\operatorname{rot} \operatorname{rot} \vec{A} = \frac{4\pi\mu}{c} \vec{j} + \frac{\varepsilon\mu}{c} \frac{\partial}{\partial t} \left(-\operatorname{grad} \varphi - \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \right). \quad (6.13)$$

Преобразуя левую часть (6.13) с учетом формулы (4.62)

$$\operatorname{rot} \operatorname{rot} \vec{A} = \operatorname{grad} \operatorname{div} \vec{A} - \Delta \vec{A},$$

после несложных преобразований получим

$$\Delta \vec{A} - \frac{\varepsilon\mu}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} = -\frac{4\pi\mu}{c} \vec{j} + \operatorname{grad} \left(\operatorname{div} \vec{A} + \frac{\varepsilon\mu}{c} \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right). \quad (6.14)$$

Введем так называемую **калибровку Лоренца**

$$\operatorname{div} \vec{A} + \frac{\varepsilon\mu}{c} \frac{\partial \varphi}{\partial t} = 0. \quad (6.15)$$

Благодаря (6.15) уравнение (6.14) упрощается:



БрГУ имени А.С. Пушкина

Главная

Содержание



Вернуться

Тесты

Тема 6. Переменное электромагнитное поле

$$\Delta \vec{A} - \frac{\epsilon \mu}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} = -\frac{4\pi \mu}{c} \vec{j}. \quad (6.16)$$

Теперь получим уравнение 2-го порядка для скалярного потенциала φ .

Подставляя (5.25) в (2.21), получаем:

$$\vec{D} = \epsilon \vec{E} = -\epsilon \left(\text{grad} \varphi + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \right). \quad (6.17)$$

Подставляя правую часть (6.17) в левую часть (2.20)

$$\text{div} \vec{D} = 4\pi \rho, \quad (6.18)$$

после несложных преобразований получим:

$$-\text{div} \text{grad} \varphi - \frac{1}{c} \text{div} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = \frac{4\pi}{\epsilon} \rho. \quad (6.19)$$

Учтем соотношение



БрГУ имени А.С. Пушкина

Главная

Содержание



Вернуться

Тесты

Тема 6. Переменное электромагнитное поле

$$\operatorname{div} \operatorname{grad} \varphi = \Delta \varphi, \quad (6.20)$$

а также выполним преобразование 2-го слагаемого в левой части (6.19) с учетом (6.15):

$$\operatorname{div} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \operatorname{div} \vec{A} = \frac{\partial}{\partial t} \left(-\frac{\varepsilon \mu}{c} \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right) = -\frac{\varepsilon \mu}{c} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2}. \quad (6.21)$$

Подставляя (6.20) и (6.21) в (6.19), получаем:

$$\Delta \varphi - \frac{\varepsilon \mu}{c^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = -\frac{4\pi \rho}{\varepsilon}. \quad (6.22)$$

Уравнения (6.16) и (6.22) с условием калибровки Лоренца (6.15) при заданных начальных и граничных условиях позволяют, в принципе, найти потенциалы $\vec{A}$ и φ , а следовательно, и векторы $\vec{E}$ и $\vec{B}$.

Введем обозначение



БрГУ имени А.С. Пушкина

Главная

Содержание



Вернуться

Тесты

Тема 6. Переменное электромагнитное поле

$$v = \frac{c}{\sqrt{\epsilon\mu}}. \quad (6.23)$$

Подставляя (6.23) в (6.22) и (6.16), получаем:

$$\Delta \vec{A} - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} = -\frac{4\pi\mu}{c} \vec{j}, \quad (6.24)$$

$$\Delta \varphi - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = -\frac{4\pi}{\epsilon} \rho. \quad (6.25)$$

Уравнения (6.24) и (6.25) называются **уравнениями Д'Аламбера**.



БрГУ имени А.С. Пушкина

Главная

Содержание



Вернуться

Тесты

Тема 6. Переменное электромагнитное поле

6.3. Энергия и поток электромагнитного поля. Вектор Пойнтинга

Литература: [3, с. 346–353; 6, с. 111–112; 7; 8; 9]

Энергия электромагнитного поля

Система уравнений Максвелла напрямую экспериментально не проверяется, т.к. она постулируется, и в пространстве векторы $\vec{E}$ и $\vec{B}$ в случае произвольного электромагнитного поля не могут быть измерены.

Для проверки справедливости можно использовать закон сохранения энергии. Смысл данного подхода заключается в первоначальном получении энергии как функции от значений векторов $\vec{E}$ и $\vec{B}$: $W = f(\vec{E}, \vec{B})$. Тогда можно рассчитать изменение, которое переходит в другие виды энергии, которые подвергаются экспериментальному измерению. Из сравнения расчета и эксперимента можно делать вывод о верности формулы для энергии, а значит, и о справедливости самой системы Максвелла. Можно утверждать, что система Максвелла лишь тогда обретает физический смысл, когда известна формула $\Delta W(\vec{E}, \vec{B})$.

Рассмотрим электромагнитное поле, находящееся в некотором объеме V . Под действием сил поля возникают токи и происходит выделение джоулева тепла. Мы рассматриваем электродинамику неподвижных сред, поэтому вся энергия поля будет расходоваться на выделение джоулева тепла.



БрГУ имени А.С. Пушкина

Главная

Содержание



Вернуться

Тесты

Тема 6. Переменное электромагнитное поле

Кроме того, будем считать, что другие источники энергии, кроме электромагнитного поля, отсутствуют.

Мощность Q выделившегося в объеме V тепла, согласно (3.28), равна

$$Q = \int_V \vec{j} \cdot \vec{E} dV. \quad (6.26)$$

Воспользуемся уравнением (6.4)

$$\text{rot} \vec{H} = \frac{4\pi}{c} \vec{j} + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}.$$

Из него легко получить выражение для плотности тока:

$$\vec{j} = \frac{c}{4\pi} \text{rot} \vec{H} - \frac{1}{4\pi} \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}. \quad (6.27)$$

Подставив (6.27) в (6.26), получим



БрГУ имени А.С. Пушкина

Главная

Содержание



Вернуться

Тесты

Тема 6. Переменное электромагнитное поле

$$Q = \int_V \frac{c\vec{E}}{4\pi} \cdot \left(\text{rot}\vec{H}dV - \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} dV \right). \quad (6.28)$$

Преобразуем (6.28), воспользовавшись известной из векторного анализа формулой

$$\text{div}[\vec{E}, \vec{H}] = \vec{H} \cdot \text{rot}\vec{E} - \vec{E} \cdot \text{rot}\vec{H}. \quad (6.29)$$

Из (6.29) с учетом (5.18) получим:

$$\vec{E} \cdot \text{rot}\vec{H} = \vec{H} \cdot \text{rot}\vec{E} - \text{div}[\vec{E}, \vec{H}] = -\frac{\vec{H}}{c} \cdot \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} - \text{div}[\vec{E}, \vec{H}]. \quad (6.30)$$

Преобразуя (6.28) с учетом (6.30), получаем:

$$\begin{aligned} Q &= \frac{c}{4\pi} \int_V \left(-\frac{1}{c} \vec{H} \cdot \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} - \text{div}[\vec{E}, \vec{H}] \right) dV - \frac{1}{4\pi} \int_V \vec{E} \cdot \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} dV = \\ &= -\frac{c}{4\pi} \int_V \left(\frac{1}{c} \vec{H} \cdot \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} + \text{div}[\vec{E}, \vec{H}] + \frac{1}{c} \vec{E} \cdot \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \right) dV, \end{aligned} \quad (6.31)$$



БрГУ имени А.С. Пушкина

Главная

Содержание



Вернуться

Тесты

Тема 6. Переменное электромагнитное поле

Выполним следующие преобразования:

$$\vec{H} \cdot \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} (\vec{H} \cdot \vec{B}), \quad \vec{E} \cdot \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} (\vec{E} \cdot \vec{D}). \quad (6.32)$$

Подставим (6.32) в (6.31) и применим к интегралу в (6.31), содержащему дивергенцию, теорему Остроградского-Гаусса:

$$Q = -\frac{1}{8\pi} \frac{\partial}{\partial t} \int_V ((\vec{H} \cdot \vec{B}) + (\vec{E} \cdot \vec{D})) dV - \frac{c}{4\pi} \oint_S [\vec{E}, \vec{H}] \cdot \vec{n} dS. \quad (6.33)$$

При интегрировании по объему полного поля второй интеграл в (6.33) обращается в ноль. В результате (6.33) переписется:

$$Q = -\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{8\pi} \right) \int_V ((\vec{H} \cdot \vec{B}) + (\vec{E} \cdot \vec{D})) dV. \quad (6.34)$$



БрГУ имени А.С. Пушкина

Главная

Содержание



Вернуться

Тесты

Тема 6. Переменное электромагнитное поле

Слева в (6.34) стоит количество джоулева тепла, выделившегося в объеме полного поля, т.к. никаких других источников энергии в этом объеме, кроме энергии электромагнитного поля, согласно рассматриваемой нами модели, не существует. Величине, стоящей под знаком производной в (6.34) мы должны придать смысл электромагнитной энергии. Оговоримся также, что втекания и вытекания электромагнитной энергии за пределы объема полного поля быть не может, следовательно, всем величинам, стоящим справа, нужно придать смысл убыли энергии электромагнитного поля. Поэтому энергия, локализованная в объеме dV , согласно (6.34), равна

$$dW = \frac{1}{8\pi} \int_V ((\vec{H} \cdot \vec{B}) + (\vec{E} \cdot \vec{D})) dV. \quad (6.35)$$

Следовательно, плотность энергии определяется выражением

$$w = \frac{dW}{dV} = \frac{(\vec{H} \cdot \vec{B})}{8\pi} + \frac{(\vec{E} \cdot \vec{D})}{8\pi}, \quad (6.36)$$

а энергия электромагнитного поля в произвольном объеме – выражением



БрГУ имени А.С. Пушкина

Главная

Содержание



Вернуться

Тесты

Тема 6. Переменное электромагнитное поле

$$W = \frac{1}{8\pi} \int_V ((\vec{H} \cdot \vec{B}) + (\vec{E} \cdot \vec{D})) dV. \quad (6.37)$$

Поток электромагнитного поля. Вектор Пойнтинга

Вернемся к формуле (6.33). Q есть мощность джоулева тепла, выделяемого в конечном объеме. Энергия электромагнитного поля в этом объеме определяется через (6.37). При этом (6.33) может быть расписано:

$$Q = -\frac{\partial W}{\partial t} - \frac{c}{4\pi} \oint_S [\vec{E}, \vec{H}] \cdot \vec{n} dS. \quad (6.38)$$

Соотношение (6.38) показывает, что в конечном объеме убыль энергии поля может происходить как за счет выделения джоулева тепла, так и за счет вытекания этой энергии через поверхность S , ограничивающую этот объем. Следовательно, интегралу в (6.38) необходимо придать смысл потока электромагнитной энергии через поверхность S :

$$\vec{\Pi} = \frac{c}{4\pi} [\vec{E}, \vec{H}]. \quad (6.39)$$



БрГУ имени А.С. Пушкина

Главная

Содержание



Вернуться

Тесты

Тема 6. Переменное электромагнитное поле

следовательно, (6.38) с учетом (6.39) перепишется:

$$Q = -\frac{\partial W}{\partial t} - \frac{c}{4\pi} \oint_S [\vec{E}, \vec{H}] \cdot \vec{n} dS = -\frac{\partial W}{\partial t} - \oint_S \vec{\Pi} \cdot \vec{n} dS. \quad (6.40)$$

Интеграл в (6.40) представляет собой поток вектора $\vec{\Pi}$ через замкнутую поверхность.

Таким образом, поток электромагнитной энергии через некоторую поверхность есть поток вектора $\vec{\Pi}$ (6.39) через эту поверхность. Вектор $\vec{\Pi}$ называется **вектором Пойнтинга**. По своему смыслу он равен плотности потока электромагнитной энергии в данной точке, т.е. потока электромагнитной энергии, переносимой в единицу времени через единицу площади, расположенную перпендикулярно вектору Пойнтинга.



БрГУ имени А.С. Пушкина

Главная

Содержание



Вернуться

Тесты

Тема 7. Излучение и распространение электромагнитных волн

Тема 7. Излучение и распространение электромагнитных волн

7.1. Общие решения уравнений Даламбера. Запаздывающие потенциалы

Литература: [[1](#), с. 308–316; [6](#), с. 220–222; [7](#); [8](#); [9](#)]

Перепишем уравнения Д'Аламбера ([6.24](#)) и ([6.25](#)) для скалярного и векторного потенциалов электромагнитного поля, обозначая одной точкой первую производную по времени, а двумя точками – вторую производную:

$$\Delta \vec{A} - \frac{1}{v^2} \ddot{\vec{A}} = -\frac{4\pi\mu}{c} \vec{j}, \quad (7.1)$$

$$\Delta \varphi - \frac{1}{v^2} \ddot{\varphi} = -\frac{4\pi}{\varepsilon} \rho. \quad (7.2)$$

Уравнения ([7.1](#)) и ([7.2](#)) можно объединить в общее уравнение Д'Аламбера:

$$\Delta \Phi(r, t) - \frac{1}{v^2} \ddot{\Phi}(r, t) = -\frac{4\pi}{\varepsilon} \rho. \quad (7.3)$$

Как известно из теории дифференциальных уравнений, решение уравнения ([7.3](#)) выглядит как



БрГУ имени А.С. Пушкина

Главная

Содержание



Вернуться

Тесты

Тема 7. Излучение и распространение электромагнитных волн

$$\Phi(r, t) = \int_{V'} \frac{f\left(\vec{r}', t \pm \frac{|\vec{r} - \vec{r}'|}{v}\right)}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dV', \quad (7.4)$$

где $\vec{r}'$ – радиус-вектор элемента объема интегрирования dV' , а интегрирование ведется по всему объему V' , где $\Phi \neq 0$; $\vec{r}$ – радиус-вектор точки, в которой определена функция Φ . Функция $\Phi(r, t)$ имеет 2 важных свойства:

1. Значение функции $\Phi(r, t)$ в момент времени t определяется значением функции $f(\vec{r}', t \pm \frac{|\vec{r} - \vec{r}'|}{v})$, которая определена для других значений пространственных и временных аргументов.

2. Значение подынтегральной функции в момент времени t в точке с радиус-вектором $\vec{r}'$ совпадает со значениями этой функции в момент времени $t \pm \Delta t$ в точке с координатами $\vec{r}' \pm \Delta \vec{r}$, где

$$\Delta \vec{r} = \vec{v} \Delta t, \quad \Delta t = \frac{|\vec{r} - \vec{r}'|}{v}. \quad (7.5)$$



БрГУ имени А.С. Пушкина

Главная

Содержание



Вернуться

Тесты

Тема 7. Излучение и распространение электромагнитных волн

Уравнение (7.5) показывает, что определенное значение величины f распространяется со скоростью $\vec{v}$ в направлении $\vec{r} - \vec{r}'$. Это означает, что функция f описывает волну, распространяющуюся со скоростью $\vec{v}$. Таким образом, решение (7.4) уравнения (7.3) представляет собой суперпозицию волн, исходящих из тех точек (и сходящихся в те точки), в которых $f \neq 0$. Т.к. уравнения Д'Аламбера (7.1) и (7.2) имеют вид (7.3), то для них на основе (7.4) сразу можно записать решения. Так, если в (7.4) положить

$$f = \frac{\vec{j}\mu}{c}, \quad (7.6)$$

то тогда на основе (7.1) получаем

$$\vec{A}(r, t) = \frac{\mu}{c} \int_{V'} \frac{\vec{j}\left(\vec{r}', t \pm \frac{|\vec{r} - \vec{r}'|}{v}\right)}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dV', \quad (7.7)$$

а если положить в (7.4)



БрГУ имени А.С. Пушкина

Главная

Содержание



Вернуться

Тесты

Тема 7. Излучение и распространение электромагнитных волн

$$f = \frac{\rho}{\varepsilon}, \quad (7.8)$$

то на основе (7.2) получаем

$$\varphi = \frac{1}{\varepsilon} \int_{V'} \frac{\rho\left(\vec{r}', t \pm \frac{|\vec{r} - \vec{r}'|}{v}\right)}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dV'. \quad (7.9)$$

Как уже говорилось, значения потенциалов поля в точке наблюдения в момент времени t определяются значениями функций источника поля в некоторый другой момент времени. Возьмем сначала в (7.7), (7.9) знак «минус». Значения $\vec{A}$ и φ в момент времени t определяются значениями $\vec{j}$ и ρ в некоторый предшествующий момент времени $t - \frac{|\vec{r} - \vec{r}'|}{v}$. Время $\frac{|\vec{r} - \vec{r}'|}{v}$ называется временем запаздывания, решения (7.7) и (7.9), в которых присутствует только знак «минус» перед $\frac{|\vec{r} - \vec{r}'|}{v}$, – решениями с учетом запаздывания, а потенциалы – **запаздывающими**. Эти решения имеют ясный физический смысл: характер поля в точке наблюдения определяется распределением источников



БрГУ имени А.С. Пушкина

Главная

Содержание



Вернуться

Тесты

Тема 7. Излучение и распространение электромагнитных волн

поля в некоторый предшествующий момент времени, причем время запаздывания определяется расстоянием от источников поля и скоростью распространения электромагнитного возмущения

$$v = \frac{c}{\sqrt{\epsilon\mu}}. \quad (7.10)$$

Уберем теперь в (7.7) и (7.9) перед $\frac{|\vec{r} - \vec{r}'|}{v}$ знак «минус» и оставим только знак «плюс». Это соответствует тому, что характер поля в момент времени t определяется состоянием источников поля в некоторый последующий момент времени. Решения Д'Аламбера в таком виде называются решениями с учетом опережения, а сами потенциалы – **опережающими**. Они не имеют ярко выраженного физического смысла и в дальнейшем нами использоваться не будут. Их происхождение объясняется тем, что уравнения электродинамики являются симметричными относительно прошлого и будущего, т.е. их вид не меняется при замене t на $-t$, следовательно, их решение также должно быть симметричным относительно изменения знака времени.

Электромагнитное поле, создаваемое некоторой системой произвольно движущихся зарядов, имеет вид, определяемый уравнениями (7.7) и (7.9). Изменение поля в точке наблюдения, обусловленное изменениями в распределении создающих его токов и зарядов, происходит с запаздыванием. Скорость распространения электромагнитного возмущения в среде определяется по формуле (7.10), а в вакууме она равна c . Вид этого возмущения имеет характер волн. Таким



БрГУ имени А.С. Пушкина

Главная

Содержание



Вернуться

Тесты

Тема 7. Излучение и распространение электромагнитных волн

образом, переменные электромагнитные поля существуют в пространстве в виде волн, распространяющихся с конечной скоростью.



БрГУ имени А.С. Пушкина

Главная

Содержание



Вернуться

Тесты

Тема 7. Излучение и распространение электромагнитных волн

7.2. Дипольное излучение. Сферические электромагнитные волны и их свойства

Литература: [1, с. 329–332; 6, с. 239–243; 7; 8; 9]

Дипольное излучение (вычисление потенциалов $\vec{A}$ и φ)

Общие формулы для запаздывающих потенциалов весьма сложны, и в самом общем виде потенциалы не вычисляются. Это обусловлено тем обстоятельством, что время запаздывания, определяемое по формуле (7.5), является различным для каждого элемента объема V' излучающей системы. Следовательно, значения $\vec{j}$ и ρ для каждого из элементов объема V' берутся в различные моменты времени. Поэтому, за исключением простейших случаев, из общих решений для $\vec{A}$ и φ невозможно получить их конкретных выражений. Однако в том случае, когда точка наблюдения находится на достаточно большом расстоянии от излучающей системы, т.е. когда выполняется условие

$$|\vec{r}| \gg |\vec{l}'|, \quad (7.11)$$

где $\vec{l}'$ – линейные размеры системы, общие решения для $\vec{A}$ и φ значительно упрощаются.

Для вакуума ($\varepsilon = \mu = 1, v = c$) запаздывающее решение (7.9) имеет вид:



БрГУ имени А.С. Пушкина

Главная

Содержание



Вернуться

Тесты

Тема 7. Излучение и распространение электромагнитных волн

$$\varphi = \int_{V'} \frac{\rho\left(\vec{r}', t - \frac{|\vec{r} - \vec{r}'|}{c}\right)}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dV'. \quad (7.12)$$

Введем обозначение (см. [рис. 7.1](#))

$$\vec{R} = \vec{r} - \vec{r}'. \quad (7.13)$$

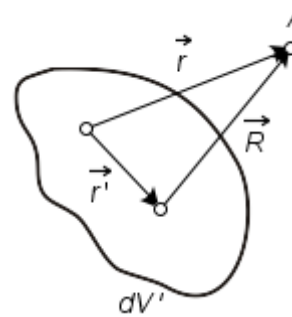


Рис. 7.1

Для абсолютного значения вектора $\vec{R}$ из (7.13) получаем:



БрГУ имени А.С. Пушкина

Главная

Содержание



Вернуться

Тесты

Тема 7. Излучение и распространение электромагнитных волн

$$R = \sqrt{r^2 - 2\vec{r} \cdot \vec{r}' + r'^2} = r \left(1 - \frac{2\vec{r} \cdot \vec{r}'}{r^2} + \frac{\vec{r}'^2}{r^2} \right)^{1/2}. \quad (7.14)$$

Пренебрегая последним слагаемым в скобках, приближенно получим

$$R \approx r \left(1 - \frac{1}{2} \cdot \frac{2\vec{r} \cdot \vec{r}'}{r^2} \right) = r - \frac{\vec{r} \cdot \vec{r}'}{r} = r + \Delta r. \quad (7.15)$$

Следовательно,

$$\Delta r = -\frac{\vec{r} \cdot \vec{r}'}{r}. \quad (7.16)$$

В разложении (7.16) мы ограничились членами первого порядка малости, пренебрегая слагаемым $\frac{\vec{r}'^2}{r^2}$.

В соответствии с (7.14), представим подынтегральную функцию, входящую в (7.12), в виде



БрГУ имени А.С. Пушкина

Главная

Содержание



Вернуться

Тесты

Тема 7. Излучение и распространение электромагнитных волн

$$\frac{\rho\left(\vec{r}', t - \frac{|\vec{r} - \vec{r}'|}{c}\right)}{|\vec{r} - \vec{r}'|} = \frac{\rho\left(\vec{r}', t - \frac{R}{c}\right)}{R} = f(R). \quad (7.17)$$

В соответствии с (7.15), запишем общий вид разложения $f(R)$ в ряд Тейлора в линейном приближении:

$$f(R) = f(r + \Delta r) \approx f(r) + f'(r)\Delta r. \quad (7.18)$$

Переписывая (7.18) в обозначениях (7.17) и (7.16), получаем:

$$\frac{\rho\left(\vec{r}', t - \frac{R}{c}\right)}{R} \approx \frac{\rho\left(\vec{r}', t - \frac{r}{c}\right)}{r} - \frac{\vec{r} \cdot \vec{r}'}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\rho\left(\vec{r}', t - \frac{r}{c}\right)}{r} \right). \quad (7.19)$$

В разложении (7.19) можно ограничиться линейными членами относительно $\frac{\vec{r}'}{r}$ в том случае, когда коэффициенты при высших степенях этого отношения достаточно малы, и это имеет место лишь в том случае, если скорости перемещения зарядов внутри излучающей системы



БрГУ имени А.С. Пушкина

Главная

Содержание



Вернуться

Тесты

Тема 7. Излучение и распространение электромагнитных волн

$$u \ll c. \quad (7.20)$$

Введем обозначение

$$\tau = t - \frac{r}{c}, \quad (7.21)$$

откуда следует, что

$$r = ct - c\tau, \quad dr = -cd\tau. \quad (7.22)$$

Переписывая (7.19) с учетом (7.21) и (7.22), получаем:

$$\begin{aligned} \frac{\rho\left(\vec{r}', t - \frac{R}{c}\right)}{R} &= \frac{\rho(\vec{r}', \tau)}{r} - \frac{\vec{r} \cdot \vec{r}'}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\rho(\vec{r}', \tau)}{r} \right) = \frac{\rho(\vec{r}', \tau)}{r} + \frac{\vec{r} \cdot \vec{r}'}{cr} \cdot \frac{\partial}{\partial \tau} \left(\frac{\rho(\vec{r}', \tau)}{r} \right) = \\ &= \frac{\rho(\vec{r}', \tau)}{r} + \frac{\vec{r} \cdot \vec{r}'}{cr} \cdot \left(\frac{\partial \rho(\vec{r}', \tau)}{\partial \tau} \frac{1}{r} + \rho(\vec{r}', \tau) \frac{\partial}{\partial \tau} \left(\frac{1}{r} \right) \right) = \\ &= \frac{\rho(\vec{r}', \tau)}{r} + \frac{\vec{r} \cdot \vec{r}' \dot{\rho}}{cr^2} + \frac{\vec{r}' \cdot \vec{r}}{r^3} \rho \approx \frac{\rho(\vec{r}', \tau)}{r} + \frac{\vec{r} \cdot \vec{r}'}{cr^2} \dot{\rho}(\vec{r}', \tau). \end{aligned} \quad (7.23)$$



БрГУ имени А.С. Пушкина

Главная

Содержание



Вернуться

Тесты

Тема 7. Излучение и распространение электромагнитных волн

В (7.23) мы пренебрегли членами второго порядка малости, а также ввели обозначение

$$\dot{\rho} = \frac{\partial \rho}{\partial \tau}. \quad (7.24)$$

Учитывая обозначение (7.13) и подставляя (7.23) в (7.12), получаем:

$$\varphi = \frac{1}{r} \int_{V'} \rho(\vec{r}', \tau) dV' + \frac{\vec{r}}{cr^2} \int_{V'} \vec{r}' \dot{\rho}(\vec{r}', \tau) dV'. \quad (7.25)$$

В первом слагаемом в правой части (7.25) мы вынесли $\frac{1}{r}$ из-под знака интеграла, т.к. интегрирование проводится не по r .

В (7.25) имеется существенное упрощение по сравнению с (7.12). Оно заключается в том, что время запаздывания (7.21) берется одинаковым для всех элементов объема dV' излучающей системы. Следовательно, интеграл в первом слагаемом (7.25) представляет собой полный заряд системы. Если эта система электрически нейтральна, то



БрГУ имени А.С. Пушкина

Главная

Содержание



Вернуться

Тесты

Тема 7. Излучение и распространение электромагнитных волн

$$\int_{V'} \rho(\vec{r}', \tau) dV' = 0, \quad (7.26)$$

откуда следует, что

$$\phi = \frac{\vec{r}}{cr^2} \int_{V'} \dot{\rho}(\vec{r}', \tau) dV'. \quad (7.27)$$

Аналогичные рассуждения и преобразования для векторного потенциала в случае вакуума (т.е. при $\mu = 1$) приводят нас к следующему результату:

$$\vec{A} = \frac{1}{cr} \int_{V'} \vec{j}(\vec{r}', \tau) dV'. \quad (7.28)$$

С помощью уравнения непрерывности ([3.36](#)) можно показать, что

$$\int_{V'} \vec{r}' \dot{\rho}(\vec{r}', \tau) dV' = \int_{V'} \vec{j}(\vec{r}', \tau) dV'. \quad (7.29)$$



БрГУ имени А.С. Пушкина

Главная

Содержание



Вернуться

Тесты

Тема 7. Излучение и распространение электромагнитных волн

Сравнивая (7.27) и (7.28) с учетом (7.29), видим, что между φ и $\vec{A}$ существует связь:

$$\varphi = \vec{n} \cdot \vec{A}, \quad (7.30)$$

где $\vec{n}$ – единичный вектор направления $\vec{r}$, т.е.

$$\vec{n} = \frac{\vec{r}}{r}. \quad (7.31)$$

Формулы (7.27) и (7.28) можно переписать короче, если обозначить через

$$\vec{p} = \int_{V'} \vec{r}' \rho(\vec{r}', \tau) dV' = \vec{p}(\tau) \quad (7.32)$$

дипольный момент электрически нейтральной системы. Тогда из (7.27) и (7.32) для скалярного потенциала получаем:

$$\varphi(\vec{r}, t) = \frac{\vec{r}}{cr^2} \cdot \frac{\partial}{\partial \tau} \int_{V'} \vec{r}' \rho(\vec{r}', \tau) dV' = \frac{\vec{r}}{cr^2} \cdot \frac{\partial \vec{p}(\tau)}{\partial \tau} = \frac{\vec{r}}{cr^2} \cdot \dot{\vec{p}}(\tau). \quad (7.33)$$



Тема 7. Излучение и распространение электромагнитных волн

Для векторного потенциала из (7.30), (7.31) и (7.33) получаем:

$$\vec{A}(\vec{r}, t) = \frac{\dot{\vec{p}}(\tau)}{cr}, \quad (7.34)$$

откуда следует, что

$$\dot{\vec{p}}(\tau) = \vec{A}(\vec{r}, t)cr. \quad (7.35)$$

Для первой производной векторного потенциала по τ из (7.34) получаем:

$$\dot{\vec{A}} = \frac{\ddot{\vec{p}}(\tau)}{cr}. \quad (7.36)$$

Из (7.33) и (7.34) видно, что при рассматриваемых приближениях (7.11) и (7.20) потенциалы поля нейтральной системы зарядов определяются значением производной по времени от ее дипольного момента. Следовательно, **такое приближение при вычислении потенциалов**

БрГУ имени А.С. Пушкина

Главная

Содержание



Вернуться

Тесты



БрГУ имени А.С. Пушкина

Главная

Содержание



Вернуться

Тесты

Тема 7. Излучение и распространение электромагнитных волн

называется дипольным. При изменении дипольного момента системы в окружающем ее пространстве возникает электромагнитное поле.

Если заряды движутся неравномерно, то φ и $\vec{A}$ зависят от времени, т.е. система неравномерно движущихся зарядов является источником переменного электромагнитного поля, потенциалы которого вдали от системы убывают пропорционально $\frac{1}{r}$.

Дипольное излучение (вычисление векторов поля). Сферические электромагнитные волны и их свойства

Зная значения потенциалов φ и $\vec{A}$, можно найти векторы поля.

Начнем с нахождения [вектора индукции магнитного поля](#). Воспользовавшись соотношением (4.23), из (7.34) получаем:

$$\vec{B} = \frac{1}{c} \text{rot} \left(\frac{\dot{\vec{p}}(\tau)}{r} \right). \quad (7.37)$$

В известном из векторного анализа соотношении (см. также (4.14))



БрГУ имени А.С. Пушкина

Главная

Содержание



Вернуться

Тесты

Тема 7. Излучение и распространение электромагнитных волн

$$\operatorname{rot}(\psi \vec{G}) = \psi \operatorname{rot} \vec{G} + [\operatorname{grad} \psi, \vec{G}] \quad (7.38)$$

положим (по аналогии с (4.15) и (4.65))

$$\psi = \frac{1}{r}, \quad \dot{\vec{p}}(\tau) = \vec{G}. \quad (7.39)$$

По аналогии с выводом формулы (4.16), можно (7.37) переписать с учетом (7.38) и (7.39):

$$\vec{B} = \frac{1}{cr} \operatorname{rot} \dot{\vec{p}}(\tau) + \frac{1}{c} \left[\operatorname{grad} \left(\frac{1}{r} \right), \dot{\vec{p}}(\tau) \right]. \quad (7.40)$$

В (7.37) и (7.40) подразумевается дифференцирование по координатам точки наблюдения. Следовательно, как и в (4.12), получаем

$$\operatorname{grad} \frac{1}{r} = -\frac{\vec{r}}{r^3}. \quad (7.41)$$

Учитывая (7.41), вторым слагаемым в (7.40) можно пренебречь, и тогда



БрГУ имени А.С. Пушкина

Главная

Содержание



Вернуться

Тесты

Тема 7. Излучение и распространение электромагнитных волн

$$\vec{B} \cong \frac{1}{cr} \operatorname{rot} \dot{\vec{p}}(\tau). \quad (7.42)$$

Из векторного анализа известно, что при вычислении $\operatorname{rot} \vec{D}(u)$, являющейся функцией скалярного аргумента u , справедливо равенство:

$$\operatorname{rot} \vec{D}(u) = \left[\operatorname{grad} u, \frac{\partial \vec{D}}{\partial u} \right]. \quad (7.43)$$

Из [\(7.43\)](#) следует, что

$$\operatorname{rot} \dot{\vec{p}}(\tau) = [\operatorname{grad} \tau, \ddot{\vec{p}}]. \quad (7.44)$$

Подставляя [\(7.44\)](#) в [\(7.42\)](#), получаем:

$$\vec{B} = \frac{1}{cr} [\operatorname{grad} \tau, \ddot{\vec{p}}(\tau)]. \quad (7.45)$$



БрГУ имени А.С. Пушкина

Главная

Содержание



Вернуться

Тесты

Тема 7. Излучение и распространение электромагнитных волн

Соотношение (7.45) можно переписать в другом виде, если учесть, что, согласно (7.21),

$$\text{grad } \tau = \text{grad} \left(t - \frac{r}{c} \right) = -\frac{1}{c} \text{grad } r = -\frac{\vec{r}}{cr} = -\frac{1}{c} \vec{n}, \quad (7.46)$$

где $\vec{n}$ – единичный вектор (7.30), направленный в точку наблюдения. С учетом (7.46) можно переписать (7.45):

$$\vec{B} = \frac{1}{c^2 r} [\ddot{\vec{p}}(\tau), \vec{n}]. \quad (7.47)$$

Вектор напряженности электрического поля найдем, опираясь на соотношение (5.25), которое с учетом (7.21) можно переписать как

$$\vec{E} = -\text{grad } \varphi - \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}}{\partial \tau} = -\text{grad } \varphi - \frac{1}{c} \dot{\vec{A}}. \quad (7.48)$$

Из определения градиента, а также соотношений (7.46) и (7.30) следует, что



БрГУ имени А.С. Пушкина

Главная

Содержание



Вернуться

Тесты

Тема 7. Излучение и распространение электромагнитных волн

$$\text{grad } \varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial \tau} \text{grad } \tau = -\dot{\varphi} \frac{1}{c} \vec{n} = -(\vec{n} \cdot \vec{A}) \frac{1}{c} \vec{n}. \quad (7.49)$$

Подставляя (7.49) в (7.48), после несложных, преобразований, учитывающих единичность вектора $\vec{n}$, а также формулу для двойного векторного произведения, получаем:

$$\vec{E} = \frac{1}{c} \left(\vec{n} (\vec{n} \cdot \dot{\vec{A}}) - \dot{\vec{A}} \right) = \frac{1}{c} \left(\vec{n} (\vec{n} \cdot \dot{\vec{A}}) - \dot{\vec{A}} (\vec{n} \cdot \vec{n}) \right) = \frac{1}{c} \left[[\dot{\vec{A}}, \vec{n}] \vec{n} \right]. \quad (7.50)$$

Подставляя (7.36) в (7.50), получаем:

$$\vec{E} = \frac{1}{c^2 r} \left[[\ddot{\vec{p}}(\tau), \vec{n}] \vec{n} \right]. \quad (7.51)$$

Сравнивая (7.47) и (7.51), видим, что

$$\vec{E} = [\vec{B}, \vec{n}]. \quad (7.52)$$

Уравнения (7.47), (7.51) и (7.52) показывают, что



БрГУ имени А.С. Пушкина

Главная

Содержание



Вернуться

Тесты

Тема 7. Излучение и распространение электромагнитных волн

$$\vec{E} \perp \vec{B} \perp \vec{n}, |\vec{E}| = |\vec{B}|. \quad (7.53)$$

Таким образом, векторы $\vec{E}, \vec{B}, \vec{n}$ образуют тройку взаимно ортогональных векторов, т.е. электромагнитная волна поперечная, следовательно, $\vec{E} \perp \vec{B}$, а $\vec{E}$ и $\vec{B}$ перпендикулярны направлению распространения волны в каждой точке.

Из (7.47) и (7.51) видно также, что $\vec{B}$ и $\vec{E}$ зависят от пространственных координат и времени по закону

$$\begin{cases} |\vec{B}| = \frac{1}{r} f(\vec{r}) = \frac{1}{r} f\left(t - \frac{r}{c}\right), \\ |\vec{E}| = \frac{1}{r} f(\vec{r}) = \frac{1}{r} f\left(t - \frac{r}{c}\right). \end{cases} \quad (7.54)$$

Как было показано в п. 7.2 ранее, выражения вида (7.54) описывают волновой процесс – волну, исходящую из точки $r = 0$. При этом поверхности равных значений Φ и $\frac{1}{r} f\left(t - \frac{r}{c}\right)$, т.е. поверхности равной фазы, суть поверхности сфер $r = \text{const}$. Поэтому волну, описываемую функцией (7.54), называют **сферической волной**. Область пространства, в которой электромагнитное поле описывается сферическими волнами, называют волновой зоной.



БрГУ имени А.С. Пушкина

Главная

Содержание



Вернуться

Тесты

Тема 7. Излучение и распространение электромагнитных волн

Из (7.47) и (7.51) можно извлечь важный вывод. Обозначим через θ угол между направлением на точку наблюдения и вектором $\ddot{\vec{r}}$ (см. [рис. 7.2](#)).

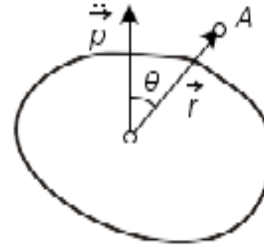


Рис. 7.2

Тогда по закону векторного произведения из (7.47) и (7.51) следует, что

$$|\vec{E}| = |\vec{B}| = \frac{1}{c^2 r} \ddot{r} \sin \theta. \quad (7.55)$$

При фиксированных значениях r и $\ddot{r}$ максимум в (7.55) достигается при $\theta = \pi/2$, а при $\theta = 0$ получается ноль.

Вычислим поток энергии $\vec{\Pi}$ (6.39) в произвольной точке волновой зоны в случае вакуума. Подставляя (7.51) и (7.52) в (6.39), получаем:



БрГУ имени А.С. Пушкина

Главная

Содержание



Вернуться

Тесты

Тема 7. Излучение и распространение электромагнитных волн

$$\vec{\Pi} = \frac{c}{4\pi} [\vec{E}, \vec{H}] = \frac{c}{4\pi} [\vec{E}, \vec{B}] = \frac{c}{4\pi} B^2 \vec{n} = \frac{c}{4\pi} \cdot \frac{1}{c^4 r^2} \ddot{p}^2 \sin^2 \theta \cdot \vec{n}. \quad (7.56)$$

После несложных преобразований в (7.56) получаем:

$$\vec{\Pi} = \frac{\vec{n}}{4\pi c^3 r^2} \ddot{p}^2 \sin^2 \theta. \quad (7.57)$$

Видно, что поток электромагнитного излучения пропорционален квадрату дипольного момента; направлен по радиус-вектору от излучающей системы и также максимален в направлении $\theta = \pi/2$, а в направлении $\theta = 0$ энергия вообще не излучается. В пределах телесного угла $d\Omega$ интенсивность электромагнитного излучения равна, согласно (6.40) и (7.57),

$$dJ = \vec{\Pi} \cdot d\vec{S} = \Pi r^2 d\Omega = \frac{\ddot{p}^2 \sin^2 \theta r^2 d\Omega}{4\pi c^3 r^2} = \frac{\ddot{p}^2 \sin^2 \theta d\Omega}{4\pi c^3}. \quad (7.58)$$

тогда полная интенсивность излучения может быть получена интегрированием результата (7.58) по полному телесному углу:



БрГУ имени А.С. Пушкина

Главная

Содержание



Вернуться

Тесты

Тема 7. Излучение и распространение электромагнитных волн

$$J = \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \frac{\ddot{p}^2 \sin^2 \theta}{4\pi c^3} \sin \theta d\theta d\varphi = \frac{2\ddot{p}^2}{3c^3}. \quad (7.59)$$

Используя взаимосвязь между интенсивностью излучения и скоростью убыли полной энергии

$$J = -\frac{dW}{dt}, \quad (7.60)$$

можно найти полную энергию W излучающей системы по формуле

$$W = -\int_0^t J dt = \int_t^0 J dt. \quad (7.61)$$



БрГУ имени А.С. Пушкина

Главная

Содержание



Вернуться

Тесты

Тема 7. Излучение и распространение электромагнитных волн

7.3. Излучение ускоренно движущегося точечного заряда. Линейный гармонический осциллятор

Литература: [1, с. 340–341; 6, с. 266–270; 7; 8; 9]

Излучение ускоренно движущегося точечного заряда

Применим полученные ранее формулы для дипольного излучения к исследованию характера излучения произвольно движущегося заряда.

Из анализа общих соотношений для запаздывающих потенциалов электромагнитного поля можно показать, что они применимы несмотря на то, что одиночный заряд не является нейтральной системой. Если положить дипольный момент

$$\vec{p} = q\vec{r}, \quad (7.62)$$

где $\vec{r}$ – вектор, соединяющий заряд с точкой наблюдения, то формулы, полученные для дипольного излучения, дают правильный результат для одиночного заряда.

Посчитаем энергию заряда q , движущегося с ускорением a . Из (7.62) следует, что

$$\ddot{\vec{p}} = q\ddot{\vec{r}} = qa. \quad (7.63)$$



БрГУ имени А.С. Пушкина

Главная

Содержание



Вернуться

Тесты

Тема 7. Излучение и распространение электромагнитных волн

Тогда вектор Пойнтинга, согласно (7.57) и (7.63), равен

$$\vec{\Pi} = \frac{c}{4\pi} B^2 \vec{n} = \frac{c}{4\pi} \cdot \frac{\ddot{p}^2 \sin^2 \theta}{c^4 r^2} \vec{n} = \frac{q^2 a^2 \sin^2 \theta}{4\pi c^3 r^2} \vec{n}, \quad (7.64)$$

где θ – угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{n}$.

Интенсивность излучения системы – это поток энергии через замкнутую поверхность, охватывающую систему:

$$J = \oint_S \vec{\Pi} \cdot \vec{n} dS = -\frac{dW}{dt}. \quad (7.65)$$

Подставляя (7.64) в (7.65) и переходя, как и в (7.59), к интегрированию по полному телесному углу, получаем:

$$J = \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \frac{q^2 a^2 \sin^2 \theta}{4\pi c^3 r^2} r^2 \sin \theta d\theta d\varphi = \frac{q^2 a^2 \cdot 2\pi}{4\pi c^3} \cdot \frac{4}{3}. \quad (7.66)$$



БрГУ имени А.С. Пушкина

Главная

Содержание



Вернуться

Тесты

Тема 7. Излучение и распространение электромагнитных волн

После несложных преобразований окончательно получаем:

$$J = \frac{2}{3} \frac{q^2 a^2}{c^3}. \quad (7.67)$$

Таким образом, интенсивность электромагнитной энергии, излучаемой движущимся зарядом, отлична от нуля лишь в том случае, если $\vec{a} \neq \vec{0}$, т.е. электромагнитную энергию излучают только ускоренно движущиеся заряды.

Линейный гармонический осциллятор

В качестве примера, иллюстрирующего применение формулы (7.67), рассмотрим **излучение заряда**, колеблющегося по гармоническому закону – классический осциллятор. Пусть радиус-вектор зависит от времени по закону

$$\vec{r} = \vec{r}_0 \cos(\omega t + \alpha), \quad (7.68)$$

где частота ω связана с периодом T соотношением



БрГУ имени А.С. Пушкина

Главная

Содержание



Вернуться

Тесты

Тема 7. Излучение и распространение электромагнитных волн

$$\omega = \frac{2\pi}{T}. \quad (7.69)$$

Тогда для ускорения получим

$$\ddot{\vec{r}} = -\omega^2 \vec{r}_0 \cos(\omega t + \alpha) = -\omega^2 \vec{r}. \quad (7.70)$$

Для нахождения интенсивности излучения, которая приходится на полный телесный угол 4π , подставим (7.70) в (7.67):

$$J = \frac{2}{3} \frac{q^2 \omega^4 r_0^2 \cos^2(\omega t + \alpha)}{c^3}. \quad (7.71)$$

Найдем среднюю интенсивность излучения за период, для чего надо усреднить (7.71) по соответствующему временному промежутку:

$$\langle J \rangle_T = \frac{1}{T} \int_0^T \frac{2}{3} \frac{q^2 \omega^4 r_0^2 \cos^2(\omega t + \alpha)}{c^3} dt = \frac{2}{3} \frac{\omega^4 r_0^2 q^2}{c^3 T} \cdot I_T, \quad (7.72)$$



БрГУ имени А.С. Пушкина

Главная

Содержание



Вернуться

Тесты

Тема 7. Излучение и распространение электромагнитных волн

где интеграл I_T равен

$$\begin{aligned} I_T &= \int_0^T \cos^2(\omega t + \alpha) dt = \int_0^T \frac{1 + \cos(2(\omega t + \alpha))}{2} dt = \frac{T}{2} + \frac{1}{4\omega} \cdot \sin(2(\omega t + \alpha)) \Big|_0^T = \\ &= \frac{T}{2} + \frac{1}{4\omega} (\sin 2\alpha - \sin 2\alpha) = \frac{T}{2}. \end{aligned} \quad (7.73)$$

Подставляя (7.73) в (7.72), получаем:

$$\langle J \rangle_T = \frac{2\omega^4 r_0^2 q^2}{3 \cdot 2c^3} = \frac{\omega^4 r_0^2 q^2}{3c^3} \sim \omega^4. \quad (7.74)$$

Таким образом, **средняя интенсивность излучения линейного гармонического осциллятора за период пропорциональна четвертой степени частоты излучения.**



БрГУ имени А.С. Пушкина

Главная

Содержание



Вернуться

Тесты

Тема 7. Излучение и распространение электромагнитных волн

7.4. Плоские электромагнитные волны и их свойства

Литература: [1, с. 329–332; 3, с. 585–587; 4, с. 560–561; 6, с. 153–165; 7; 8; 9]

Плоские электромагнитные волны

В случае, когда система произвольно движущихся токов и [зарядов](#) имеет размеры, значительно меньшие, чем расстояния от точек наблюдения, то можно считать, что в далекой от излучателя области фронт электромагнитной волны имеет сферическую форму, а ее амплитуда A убывает пропорционально $1/r$. Ясно, что если **сферическую волну рассмотреть на большом расстоянии от излучающей системы в ограниченной области пространства**, то с достаточной степенью точности можно считать волну плоской, т.е. фронт волны рассматривать как плоскость.

Далее будем рассматривать **монохроматические волны**. Это волны, все характеристики которых в каждой точке пространства меняются по синусоидальному закону с одной **определенной частотой**. Дифференциальные уравнения в частных производных для потенциалов в отсутствие токов и [зарядов](#) в вакууме по сравнению с (7.1) и (7.2) приобретают вид:

$$\Delta \vec{A} - \frac{1}{c^2} \ddot{\vec{A}} = 0, \quad (7.75)$$



БрГУ имени А.С. Пушкина

Главная

Содержание



Вернуться

Тесты

Тема 7. Излучение и распространение электромагнитных волн

$$\Delta\varphi - \frac{1}{c^2} \ddot{\varphi} = 0. \quad (7.76)$$

С учетом калибровки Лоренца ([6.15](#))

$$\operatorname{div} \vec{A} + \frac{1}{c} \frac{\partial \varphi}{\partial t} = 0,$$

вначале для простоты рассмотрим одно измерение с координатой x . Тогда ([7.75](#)) и ([7.76](#)) примут вид:

$$\frac{\partial^2 A}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 A}{\partial t^2} = 0, \quad (7.77)$$

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \ddot{\varphi} = 0. \quad (7.78)$$

Решение ищем в виде в виде плоских волн:

$$\vec{A} = \vec{A}_0(x) e^{-i\omega t}, \quad \varphi = \varphi_0(x) e^{-i\omega t}. \quad (7.79)$$



БрГУ имени А.С. Пушкина

Главная

Содержание



Вернуться

Тесты

Тема 7. Излучение и распространение электромагнитных волн

Заметим, что в (7.79), как и во всех далее встречающихся величинах, в которые входит мнимая единица, физический смысл имеют только вещественные части.

Подставляя (7.79) в (7.77) и (7.78), получаем обыкновенные дифференциальные уравнения для амплитуд:

$$\begin{cases} \frac{d^2 \vec{A}_0(x)}{dx^2} + \frac{\omega^2}{c^2} \vec{A}_0(x) = 0, \\ \frac{d^2 \varphi_0(x)}{dx^2} + \frac{\omega^2}{c^2} \varphi_0(x) = 0. \end{cases} \quad (7.80)$$

Решения уравнений (7.80) имеют вид:

$$\begin{cases} \vec{A}_0(x) = \vec{A}_1 e^{ikx} + \vec{A}_2 e^{-ikx}, \\ \varphi_0(x) = \varphi_1 e^{ikx} + \varphi_2 e^{-ikx}, \end{cases} \quad (7.81)$$

где A_1 , A_2 , φ_1 , φ_2 – амплитудные коэффициенты, а



БрГУ имени А.С. Пушкина

Главная

Содержание



Вернуться

Тесты

Тема 7. Излучение и распространение электромагнитных волн

$$k = \frac{\omega}{c}. \quad (7.82)$$

Подставляя (7.81) в (7.79), получаем:

$$\begin{cases} \vec{A}(x, t) = \vec{A}_1 e^{-i(\omega t - kx)} + \vec{A}_2 e^{-i(\omega t + kx)}, \\ \varphi(x, t) = \varphi_1 e^{-i(\omega t - kx)} + \varphi_2 e^{-i(\omega t + kx)}. \end{cases} \quad (7.83)$$

В (7.83) рассмотрим только составляющие положительного направления распространения волны (первые слагаемые в правых частях):

$$\vec{A}(x, t) = \vec{A}_1 e^{-i(\omega t - kx)}, \quad (7.84)$$

$$\varphi(x, t) = \varphi_1 e^{-i(\omega t - kx)}. \quad (7.85)$$

Из (7.84) и (7.85) следует, что уравнение фронта имеет вид:

$$\omega t - kx = \text{const}. \quad (7.86)$$



БрГУ имени А.С. Пушкина

Главная

Содержание



Вернуться

Тесты

Тема 7. Излучение и распространение электромагнитных волн

Таким образом, фронт волны есть плоскость, перпендикулярная оси Ox . В соответствии с (7.82), введем в рассмотрение волновой вектор

$$\vec{k} = \frac{\omega}{c} \vec{k}_0, \quad (7.87)$$

где $\vec{k}_0$ – единичный вектор направления распространения волны. Для того, чтобы распространить полученный результат на произвольный 3-мерный случай, т.к. фронт волны есть плоскость, то из соображений симметрии можно утверждать, что во всех точках фронта значения $\vec{A}$ и φ одинаковы. При обобщении на 3-мерный случай запишем в соответствии с [рис. 7.3](#):

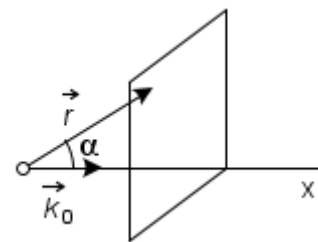


Рис. 7.3

$$kx = kr \cos \alpha = \vec{k} \cdot \vec{r}. \quad (7.88)$$



БрГУ имени А.С. Пушкина

Главная

Содержание



Вернуться

Тесты

Тема 7. Излучение и распространение электромагнитных волн

Подставляя (7.88) в (7.84) и (7.85), получаем:

$$\vec{A}(\vec{r}, t) = \vec{A}_0 e^{-i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r})}, \quad (7.89)$$

$$\varphi(\vec{r}, t) = \varphi_0 e^{-i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r})}. \quad (7.90)$$

Условия (7.89) и (7.90) связаны калибровкой Лоренца (6.15). Подставляя (7.89) и (7.90) в (6.15), получаем:

$$i\vec{k} \cdot \vec{A}_0 e^{-i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r})} - \frac{1}{c} i\omega \varphi_0 e^{-i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r})} = 0, \quad (7.91)$$

$$-i\vec{k} \cdot \vec{A}_0 + \frac{i\omega}{c} \varphi_0 = 0. \quad (7.92)$$

Подставляя (7.87) в (7.92), после несложных преобразований получаем:

$$\varphi_0 = \vec{k}_0 \cdot \vec{A}_0. \quad (7.93)$$

Подставляя (7.93) в (7.90), получаем:



БрГУ имени А.С. Пушкина

Главная

Содержание



Вернуться

Тесты

Тема 7. Излучение и распространение электромагнитных волн

$$\varphi(\vec{r}, t) = \vec{k}_0 \cdot \vec{A}_0 e^{-i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r})}. \quad (7.94)$$

Теперь можно приступить к нахождению выражений для векторов $\vec{E}$ и $\vec{B}$. Подставляя (7.89) и (7.94) в (5.25), получим выражение для вектора напряженности электрического поля:

$$\vec{E} = -\vec{\nabla} \varphi - \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = -i\vec{k}(\vec{k}_0 \cdot \vec{A}_0) e^{-i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r})} + \frac{1}{c} \vec{A}_0 i\omega e^{-i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r})}. \quad (7.95)$$

Подставляя (7.87) в (7.95), после несложных преобразований получаем:

$$\vec{E} = -\frac{i\omega}{c} (\vec{k}_0(\vec{k}_0 \cdot \vec{A}_0) - \vec{A}_0) e^{-i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r})}. \quad (7.96)$$

Далее, как и при выводе формулы (7.50) для сферических электромагнитных волн, учитываем единичность вектора $\vec{k}_0$, а также формулу для двойного векторного произведения. В результате из (7.96) получаем:



БрГУ имени А.С. Пушкина

Главная

Содержание



Вернуться

Тесты

Тема 7. Излучение и распространение электромагнитных волн

$$\vec{E} = -\frac{i\omega}{c}(\vec{k}_0(\vec{k}_0 \cdot \vec{A}_0) - \vec{A}_0(\vec{k}_0 \cdot \vec{k}_0))e^{-i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r})} = -\frac{i\omega}{c}[[\vec{A}_0, \vec{k}_0], \vec{k}_0]e^{-i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r})}. \quad (7.97)$$

С другой стороны, в общем виде

$$\vec{E} = \vec{E}_0 e^{-i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r})}. \quad (7.98)$$

Сравнивая (7.97) и (7.98), делаем вывод, что в нашем случае

$$\vec{E}_0 = -\frac{i\omega}{c}[[\vec{A}_0, \vec{k}_0], \vec{k}_0]. \quad (7.99)$$

Таким образом, амплитуда $\vec{E}_0$ является, вообще говоря, комплексной.

Теперь, подставляя (7.89) в (4.23), с учетом (7.87) получим выражение для вектора индукции магнитного поля:

$$\vec{B} = \text{rot } \vec{A} = i[\vec{k}, \vec{A}_0]e^{-i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r})} = -\frac{i\omega}{c}[\vec{A}_0, \vec{k}_0]e^{-i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r})}. \quad (7.100)$$



БрГУ имени А.С. Пушкина

Главная

Содержание



Вернуться

Тесты

Тема 7. Излучение и распространение электромагнитных волн

С другой стороны, в общем виде

$$\vec{B} = \vec{B}_0 e^{-i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r})}. \quad (7.101)$$

Сравнивая (7.100) и (7.101), делаем вывод, что в нашем случае

$$\vec{B}_0 = -\frac{i\omega}{c} [\vec{A}_0, \vec{k}_0]. \quad (7.102)$$

Свойства плоских электромагнитных волн

Сравнивая (7.99) и (7.102), делаем вывод, что

$$\vec{E}_0 = [\vec{B}_0, \vec{k}_0]. \quad (7.103)$$

С учетом (7.98), (7.101) и (7.103) делаем вывод, аналогичный (7.52) для сферических волн:

$$\vec{E} = [\vec{B}, \vec{k}_0]. \quad (7.104)$$



БрГУ имени А.С. Пушкина

Главная

Содержание



Вернуться

Тесты

Тема 7. Излучение и распространение электромагнитных волн

Из (7.102) – (7.104) следует вывод, аналогичный (7.53) для сферических волн:

$$\vec{E} \perp \vec{B} \perp \vec{k}_0, |\vec{E}| = |\vec{B}|. \quad (7.105)$$

Таким образом, основные свойства плоской волны аналогичны основным свойствам сферической волны:

1. Плоская волна, как и сферическая, является поперечной. 2. Модули векторов поля равны между собой. 3. Колебания в каждой точке происходят без сдвига фаз между этими векторами.

Вычислим вектор Пойнтинга, т.е. плотность потока энергии, переносимой плоской волной, в случае вакуума. Учтем, что векторное произведение векторов $\vec{E}$ и $\vec{B}$ совпадает, согласно (7.105), с $\vec{k}$ по направлению, т.е. с направлением распространения волны, которая, в свою очередь, совпадает с вектором скорости. Тогда, с учетом (7.104) и выражения для плотности энергии электромагнитного поля (6.37), можно переписать (6.39) следующим образом:

$$\vec{\Pi} = \frac{c}{4\pi} [\vec{E}, \vec{B}] = \frac{\vec{c}}{4\pi} \vec{E}^2 = \frac{\vec{c}}{4\pi} \left(\frac{E^2 + B^2}{2} \right) = \frac{1}{8\pi} (E^2 + B^2) \vec{c} = w_{\text{эмм}} \vec{c}. \quad (7.106)$$

Формула (7.106) имеет очевидный смысл: скорость переноса энергии электромагнитного поля плоской волной в вакууме равна c .



БрГУ имени А.С. Пушкина

Главная

Содержание



Вернуться

Тесты

Тема 7. Излучение и распространение электромагнитных волн

7.5. Волновой пакет. Фазовая и групповая скорость волн

Литература: [6, с. 184–186; 7; 8; 9]

Амплитуда группы волн

Рассмотренная нами в п. 7.4 плоская монохроматическая волна является идеализацией реальных волн, т.к. она бесконечна в пространстве и времени. В уравнении (7.98) никакие ограничения на $\vec{k}$ и $\vec{r}$ не накладываются.

Реальные же волновые процессы не являются строго монохроматическими. Это происходит, например, из-за наличия естественной ширины энергетических уровней электронов в атоме вследствие соотношения неопределенностей Гейзенберга

$$\Delta E \cdot \Delta t \sim \hbar. \quad (7.107)$$

При переходе электрона с одного уровня на другой излучается цуг (группа волн) с близкими частотами (от $\omega_0 - \Delta\omega$ до $\omega_0 + \Delta\omega$). ω_0 – несущая частота. В случае дискретного спектра, согласно принципу суперпозиции, из (7.98) следует, что



БрГУ имени А.С. Пушкина

Главная

Содержание



Вернуться

Тесты

Тема 7. Излучение и распространение электромагнитных волн

$$E = \sum_i E_{0i} e^{i(\omega_{0i}t - \vec{k}_i \cdot \vec{r}_i)} . \quad (7.108)$$

Если же спектр непрерывный, то вместо (7.108) получаем:

$$E = \int_{\omega_0 - \Delta\omega}^{\omega_0 + \Delta\omega} E_0 e^{i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r})} d\omega . \quad (7.109)$$

Если в (7.109) предположить, что амплитуды всех волн группы одинаковы, то получим:

$$E = E_0 \int_{\omega_0 - \Delta\omega}^{\omega_0 + \Delta\omega} e^{i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r})} d\omega . \quad (7.110)$$

Перейдем в (7.110) к одномерному случаю:

$$E = E_0 \int_{\omega_0 - \Delta\omega}^{\omega_0 + \Delta\omega} e^{i(\omega t - kx)} d\omega . \quad (7.111)$$



БрГУ имени А.С. Пушкина

Главная

Содержание



Вернуться

Тесты

Тема 7. Излучение и распространение электромагнитных волн

Будем теперь приближенно считать, что волновое число k есть просто линейная функция частоты. Дело в том, что в общем случае,

$$k = \frac{\omega}{c} \sqrt{\varepsilon\mu}, \quad \varepsilon = \varepsilon(\omega), \quad \mu = \mu(\omega). \quad (7.112)$$

Требуемое приближение допустимо тогда, когда зависимостью выражения $\sqrt{\varepsilon\mu}$ от ω в (7.112) можно пренебречь. Тогда можем написать:

$$\omega = \omega_0 + (\omega - \omega_0), \quad (7.113)$$

$$k \cong k_0 + \left(\frac{dk}{d\omega} \right)_{\omega=\omega_0} (\omega - \omega_0), \quad k_0 = k(\omega_0). \quad (7.114)$$

В (7.113) и (7.114) мы ограничились величинами первого порядка малости относительно $\omega - \omega_0$. Важность такого приближения будет разъяснена в конце данного параграфа. Подставляя (7.112) с учетом (7.113) и (7.114) в (7.111), то получим



БрГУ имени А.С. Пушкина

Главная

Содержание



Вернуться

Тесты

Тема 7. Излучение и распространение электромагнитных волн

$$\begin{aligned} E &= E_0 \int_{\omega_0 - \Delta\omega}^{\omega_0 + \Delta\omega} e^{i\left\{(\omega_0 + (\omega - \omega_0))t - \left(k_0 + \left(\frac{dk}{d\omega}\right)_{\omega=\omega_0}(\omega - \omega_0)\right)x\right\}} d\omega = \\ &= E_0 \int_{\omega_0 - \Delta\omega}^{\omega_0 + \Delta\omega} \exp\{i(\omega_0 t - k_0 x)\} \cdot \exp\left\{i(\omega - \omega_0)t + \left[\left(\frac{dk}{d\omega}\right)_{\omega=\omega_0}(\omega - \omega_0)\right]x\right\} d\omega. \end{aligned} \quad (7.115)$$

Совершая в (7.115) замену переменной

$$u = \omega - \omega_0, \quad (7.116)$$

получаем:



БрГУ имени А.С. Пушкина

Главная

Содержание



Вернуться

Тесты

Тема 7. Излучение и распространение электромагнитных волн

$$\begin{aligned} E &= E_0 e^{i(\omega_0 t - k_0 x)} \int_{-\Delta\omega}^{\Delta\omega} \exp \left\{ iu \left[t - \left(\frac{dk}{d\omega} \right)_{\omega=\omega_0} \right] x \right\} du = \\ &= \frac{E_0 e^{i(\omega_0 t - k_0 x)}}{i \left(t - \left(\frac{dk}{d\omega} \right)_{\omega=\omega_0} \right) x} \exp \left\{ iu \left[t - \left(\frac{dk}{d\omega} \right)_{\omega=\omega_0} \right] x \right\} \bigg|_{-\Delta\omega}^{\Delta\omega} = \\ &= \frac{2 \sin \left[\left(t - \left(\frac{dk}{d\omega} \right)_{\omega=\omega_0} \right) x \Delta\omega \right]}{t - \left(\frac{dk}{d\omega} \right)_{\omega=\omega_0} x} E_0 e^{i(\omega_0 t - k_0 x)}. \end{aligned} \quad (7.117)$$

Фазовая и групповая скорости группы волн

Из (7.117) видно, что при наложении волн с близкими частотами возникает волновое образование с амплитудой



БрГУ имени А.С. Пушкина

Главная

Содержание



Вернуться

Тесты

Тема 7. Излучение и распространение электромагнитных волн

$$\tilde{E} = \frac{2E_0 \sin \left[\Delta\omega \left(t - \left(\frac{dk}{d\omega} \right)_{\omega_0} x \right) \right]}{t - \frac{x}{v_g}}, \quad (7.118)$$

где величина

$$v_g = \left(\frac{d\omega}{dk} \right)_{k_0} \quad (7.119)$$

есть скорость распространения амплитуды волнового образования ([7.117](#)). Она называется **групповой скоростью**. Ее следует отличать от скорости распространения поверхности равной фазы, т.е. от **фазовой скорости**

$$v = \frac{\omega}{k}. \quad (7.120)$$



БрГУ имени А.С. Пушкина

Главная

Содержание



Вернуться

Тесты

Тема 7. Излучение и распространение электромагнитных волн

В отличие от случая распространения поверхности равной фазы, амплитуда ([7.118](#)) группы волн с близкими частотами сосредоточена в узком интервале $(-\pi, \pi)$. **За пределами этого интервала интерференция волн группы приводит к их взаимному гашению.**

Найдем пространственные размеры вдоль оси x для области, лежащей в интервале значений аргумента $(-\pi, \pi)$. Фиксируя в аргументе синуса ([7.118](#)) значение момента времени и значение пространственной координаты начала интервала

$$t = t_0, \quad x = x_0, \quad (7.121)$$

а также обозначая пространственную длину интервала через Δx , запишем для требуемой разности аргументов

$$\Delta\omega\left(t_0 - \frac{x_0}{v_g}\right) - \Delta\omega\left(t_0 - \frac{x_0 + \Delta x}{v_g}\right) = \pi - (-\pi). \quad (7.122)$$

Из ([7.122](#)) после несложных преобразований получаем:

$$\Delta x = \frac{2\pi v_g}{\Delta\omega}. \quad (7.123)$$



БрГУ имени А.С. Пушкина

Главная

Содержание



Вернуться

Тесты

Тема 7. Излучение и распространение электромагнитных волн

Волновой пакет

Из (7.123) видно, что с уменьшением интервала частот волн увеличиваются пространственные размеры волнового образования. **Волновое образование из волн с близкими частотами, амплитуда которого имеет ограниченные пространственные размеры и распространяется с групповой скоростью, называется волновым пакетом.**

Фазовая скорость может быть больше c , а групповая не превышает c , т.к. энергия пропорциональна квадрату (7.118), причем (7.118) перемещается с групповой скоростью (7.119).

Выполним разложение, обратное (7.114):

$$\omega \cong \omega_0 + \left(\frac{d\omega}{dk} \right)_{k_0} (k - k_0) + \dots \quad (7.124)$$

Из (7.124) и (7.119) следует, что

$$\Delta\omega \cong v_g \Delta k. \quad (7.125)$$

Подставляя (7.125) в (7.123), после несложных преобразований получим



БрГУ имени А.С. Пушкина

Главная

Содержание



Вернуться

Тесты

Тема 7. Излучение и распространение электромагнитных волн

$$\Delta x \Delta k = 2\pi. \quad (7.126)$$

Выражение (7.126) показывает, что чем меньше интервал волновых чисел (или частот), тем больше пространственные размеры пакета. В пределе $\Delta k \rightarrow 0$ из (7.126) следует, что $\Delta x \rightarrow \infty$, а это соответствует монохроматической волне.

Заключительные замечания

Отметим, что все результаты в данном параграфе были получены нами в двух приближениях:

1. Амплитуды всех волн пакета одинаковы.
2. В разложении (7.114) мы ограничились двумя первыми слагаемыми.

Первое приближение не принципиально, т.к. можно построить и волновой пакет с разными амплитудами, т.е. вместо формулы (7.110) в качестве исходной формулы брать (7.109), просто все последующие математические выкладки будут более громоздкими, а сделанные выводы качественно не изменятся.

Со вторым приближением ситуация более сложная. Разложение (7.114) строго выполнимо лишь в том случае, когда волновое число есть линейная функция частоты, т.е. когда $\sqrt{\varepsilon\mu}$ в (7.112) не зависит от частоты ω . Зависимости $\varepsilon = \varepsilon(\omega)$ и $\mu = \mu(\omega)$ в (7.112) приводят к дисперсии. Величины



БрГУ имени А.С. Пушкина

Главная

Содержание



Вернуться

Тесты

Тема 7. Излучение и распространение электромагнитных волн

ε и μ не зависят от ω только в вакууме. Следовательно, **наши выводы справедливы только для вакуума**. В случае среды необходимо учесть в разложении (7.114) члены более высокого порядка малости. Это приводит к тому, что **форма пакета становится изменяющейся – пакет деформируется и постепенно расползается**.



БрГУ имени А.С. Пушкина

Главная

Содержание



Вернуться

Тесты

Содержание практических занятий

Содержание практических занятий

1. Элементы векторного анализа. Электростатическая [теорема Гаусса](#)

Литература: [2, с. 6–8; 10, с. 1–2]

Контрольные вопросы:

1. Сформулируйте электростатическую [теорему Гаусса](#): а) в дифференциальной форме; б) в интегральной форме.
2. Запишите полную систему дифференциальных уравнений первого порядка с граничными условиями для электростатического поля в вакууме.
3. Пусть пространственное распределение электрических [зарядов](#) считается известным. Предложите основные способы нахождения [напряженности электростатического поля](#), создаваемого этими зарядами.
4. Перечислите основные формулы векторного анализа, используемые в электродинамике, и дайте их математическое обоснование.

Задачи:



БрГУ имени А.С. Пушкина

Главная

Содержание



Вернуться

Тесты

Содержание практических занятий

1.1. Бесконечная плоская плита толщиной $2a$ равномерно заряжена по объему с [плотностью электрического заряда](#) ρ . Найти [напряженность](#) E электростатического поля, создаваемого такой плитой, как функцию от x , где x – расстояние от плоскости симметрии плиты до точки наблюдения.

1.2. Радиус заряженного шара равен R . Найти [напряженность](#) E электростатического поля, создаваемого шаром, как функцию от r , где r – расстояние от центра шара до точки наблюдения. Рассмотреть случаи, когда шар заряжен: а) равномерно (при этом считать, что полный [электрический заряд](#) шара равен q); б) с [плотностью электрического заряда](#) $\rho(r) = \alpha r$ (α – известная константа); в) с [плотностью электрического заряда](#) $\rho(r) = \alpha/r^2$ (α – известная константа).

1.3. Пространство между двумя концентрическими сферами, радиусы которых R_1 и R_2 ($R_1 < R_2$), заряжено с объемной [плотностью электрического заряда](#) $\rho(r) = \alpha/r$, где α – известная константа, r – расстояние от центра симметрии системы до точки наблюдения. Найти [напряженность](#) E электростатического поля, создаваемого заряженной системой, как функцию от r .

1.4. Внутри шара, равномерно заряженного по объему с [плотностью электрического заряда](#) ρ , имеется незаряженная шарообразная полость, центр которой отстоит от центра шара на расстоянии a . Найти величину и направление [напряженности электростатического поля](#) E в указанной полости.

1.5. Радиус заряженного бесконечного кругового цилиндра равен R . Найти напряженность E электростатического поля, создаваемого цилиндром, как функцию от r , где r – расстояние от оси симметрии цилиндра до точки наблюдения. Рассмотреть случаи, когда цилиндр заряжен: а)



БрГУ имени А.С. Пушкина

Главная

Содержание



Вернуться

Тесты

Содержание практических занятий

равномерно с [плотностью электрического заряда](#) $\rho = \text{const}$; б) с [плотностью электрического заряда](#) $\rho(r) = \alpha r$, где α – известная константа.

1.6. [Заряд](#) электрона распределен в атоме водорода, находящемся в нормальном состоянии, с плотностью $\rho(r) = -\frac{q_0}{\pi a^3} \exp\left(-\frac{2r}{a}\right)$, где a – радиус первой борховской орбиты, r – расстояние от центра атома до точки наблюдения, q_0 – элементарный заряд. Найти: 1) [напряженность](#) E_e электрического поля электронного заряда как функцию от r (считая, что поле является электростатическим); 2) полную [напряженность](#) E поля в атоме как функцию от r , считая, что протонный заряд сосредоточен в начале координат.

1.7. Доказать справедливость следующих соотношений векторного анализа:

а) $\text{rotgrad}\phi = \vec{0}$;

б) $\text{divrot}\vec{a} = 0$;

в) $\text{divgrad}\phi = \Delta\phi$;

г) $\text{grad}(\phi\psi) = \phi\text{grad}\psi + \psi\text{grad}\phi$;

д) $\text{div}(\phi\vec{a}) = \phi\text{div}\vec{a} + \vec{a} \cdot \text{grad}\phi$;

е) $\text{rot}(\phi\vec{a}) = \phi\text{rot}\vec{a} + [\text{grad}\phi, \vec{a}]$;

ж) $\text{graddiv}\vec{a} = \text{rotrot}\vec{a} + \Delta\vec{a}$;



БрГУ имени А.С. Пушкина

Главная

Содержание



Вернуться

Тесты

Содержание практических занятий

$$3) \operatorname{div}[\vec{a}, \vec{b}] = \vec{b} \cdot \operatorname{rot} \vec{a} - \vec{a} \cdot \operatorname{rot} \vec{b}.$$

2. Потенциал электростатического поля. Уравнение Пуассона и Лапласа

Литература: [2, с. 8; 10, с. 3–4]

Контрольные вопросы:

1. Сформулируйте критерий потенциальности электростатического поля: а) в дифференциальной форме; б) в интегральной форме.
2. Дайте обоснование требований, накладываемых на потенциал электростатического поля (непрерывность, конечность, нормировка).
3. Запишите уравнение, отображающее связь потенциала и напряженности электростатического поля. Укажите, к какому типу относится данное уравнение: а) по признаку линейности (линейное или нелинейное); б) по наличию тех или иных математических операций (алгебраическое, обыкновенное дифференциальное, дифференциальное в частных производных, интегральное, интегро-дифференциальное и т.д.)
4. Перечислите и запишите основные уравнения второго порядка для потенциала электростатического поля.



БрГУ имени А.С. Пушкина

Главная

Содержание



Вернуться

Тесты

Содержание практических занятий

5. Пусть пространственное распределение электрических зарядов считается известным. Предложите основные способы нахождения [потенциала электростатического поля](#), создаваемого этими зарядами.

Задачи:

2.1. Бесконечная плоская плита толщиной $2a$ равномерно заряжена по объему с [плотностью электрического заряда](#) ρ . Найти [потенциал](#) φ электростатического поля, создаваемого такой плитой, как функцию от x , где x – расстояние от плоскости симметрии плиты до точки наблюдения. Добиться одинаковых результатов при использовании разных подходов: I) через [теорему Гаусса](#) и [уравнение связи потенциала и напряженности поля](#); II) через интегрирование [уравнений Лапласа и Пуассона](#).

2.2. Радиус заряженного шара равен R . Найти [потенциал](#) φ электростатического поля, создаваемого шаром, как функцию от r , где r – расстояние от центра шара до точки наблюдения. Добиться одинаковых результатов при использовании разных подходов: I) через [теорему Гаусса](#) и [уравнение связи потенциала и напряженности поля](#); II) через интегрирование [уравнений Лапласа и Пуассона](#). Рассмотреть случаи, когда шар заряжен: а) равномерно (при этом считать, что полный [электрический заряд](#) шара равен q); б) с [плотностью электрического заряда](#) $\rho(r) = \alpha r$ (α – известная константа); в) с [плотностью электрического заряда](#) $\rho(r) = \alpha / r^2$ (α – известная константа).



БрГУ имени А.С. Пушкина

Главная

Содержание



Вернуться

Тесты

Содержание практических занятий

2.3. Пространство между двумя концентрическими сферами, радиусы которых R_1 и R_2 ($R_1 < R_2$), заряжено с объемной [плотностью электрического заряда](#) $\rho(r) = \alpha/r$, где α – известная константа, r – расстояние от центра симметрии системы до точки наблюдения. Найти [потенциал](#) φ электростатического поля, создаваемого заряженной системой, как функции от r , причем добиться одинаковых результатов при использовании разных подходов: I) через [теорему Гаусса](#) и [уравнение связи потенциала и напряженности поля](#); II) через интегрирование [уравнений Лапласа и Пуассона](#).

2.4. Радиус заряженного бесконечного кругового цилиндра равен R . Найти [потенциал](#) φ электростатического поля, создаваемого цилиндром, как функцию от r , где r – расстояние от оси симметрии цилиндра до точки наблюдения. Добиться одинаковых результатов при использовании разных подходов: I) через [теорему Гаусса](#) и [уравнение связи потенциала и напряженности поля](#); II) через интегрирование [уравнений Лапласа и Пуассона](#). Рассмотреть случаи, когда цилиндр заряжен: а) равномерно с [плотностью электрического заряда](#) $\rho = \text{const}$; б) с [плотностью электрического заряда](#) $\rho(r) = \alpha r$, где α – известная константа.

2.5. [Электрический заряд](#) распределен в пространстве по периодическому закону $\rho(x, y, z) = \rho_0 \cos \alpha x \cos \beta y \cos \gamma z$ (где $\rho_0, \alpha, \beta, \gamma$ – некоторые константы), образуя бесконечную пространственную периодическую решетку. Найти [потенциал](#) φ электростатического поля, создаваемого [электрическим зарядом](#), как функцию от координат x, y, z .



БрГУ имени А.С. Пушкина

Главная

Содержание



Вернуться

Тесты

Содержание практических занятий

2.6. Заряд электрона распределен в атоме водорода, находящемся в нормальном состоянии, с плотностью $\rho(r) = -\frac{q_0}{\pi a^3} \exp\left(-\frac{2r}{a}\right)$, где a – радиус первой боровской орбиты, r – расстояние от центра атома до точки наблюдения, q_0 – элементарный заряд. Найти: 1) потенциал φ_e электрического поля электронного заряда как функции от r (считая, что поле является электростатическим); 2) полный потенциал φ поля в атоме как функции от r , считая, что протонный заряд сосредоточен в начале координат.

2.7. Распределение объемного электрического заряда в пространстве является сферически-симметричным, т.е. зависит только от r , где r – расстояние от центра симметрии системы до точки наблюдения. При этом потенциал электростатического поля зависит от r по формуле $\varphi(r) = \frac{q_0}{r} \left(\exp\left(-\frac{2r}{a}\right) - 1 \right) + \frac{q_0}{a} \exp\left(-\frac{2r}{a}\right)$, где q_0, a – некоторые константы. Найти плотность электрического заряда ρ как функцию от r .

3. Энергия взаимодействия зарядов. Энергия электростатического поля. Постоянный электрический ток

Литература: [2, с. 9; 10, с. 5–6]



БрГУ имени А.С. Пушкина

Главная

Содержание



Вернуться

Тесты

Содержание практических занятий

Контрольные вопросы:

1. Дайте определение взаимной энергии системы [электрических зарядов](#). Запишите выражения для собственной энергии системы [электрических зарядов](#) во внешнем электростатическом поле для случаев, когда электрические заряды являются: а) точечными; б) непрерывно распределенными.
2. Дайте определение полной энергии системы [электрических зарядов](#). Запишите выражения для полной энергии системы [электрических зарядов](#).
3. Дайте определение и запишите выражение для энергии электростатического поля.
4. Сформулируйте закон сохранения [электрического заряда](#).
5. Запишите уравнение непрерывности с пояснением всех входящих в него величин и математических операций.
6. Дайте определение постоянного электрического тока. Запишите условие стационарности в дифференциальной и интегральной форме.
7. Перечислите основные свойства электрического поля, создаваемого постоянным электрическим током.
8. Сформулируйте и запишите [закон Ома](#): а) в интегральной форме; б) в дифференциальной форме.
9. Сформулируйте и запишите закон Джоуля–Ленца: а) в интегральной форме; б) в дифференциальной форме.

Задачи:



БрГУ имени А.С. Пушкина

Главная

Содержание



Вернуться

Тесты

Содержание практических занятий

3.1. В каждом из двух заряженных шаров электрический заряд распределен сферически симметричным образом. Радиусы шаров равны R_1 и R_2 , полные электрические заряды шаров равны q_1 и q_2 , расстояние между центрами шаров равно a , причем $a > R_1 + R_2$. Вычислить: 1) электростатическую энергию взаимодействия шаров; 2) силу электростатического взаимодействия шаров.

3.2. Электрический заряд электронного облака в атоме водорода распределен с плотностью $\rho(r) = -\frac{q_0}{\pi a^3} \exp\left(-\frac{2r}{a}\right)$, где a – радиус первой боровской орбиты, q_0 – элементарный заряд, r – расстояние от ядра атома до точки наблюдения. Найти энергию взаимодействия электронного облака с ядром.

3.3. В некотором приближении можно считать, что электронные облака обоих электронов в атоме гелия имеют одинаковый вид и характеризуются объемной плотностью $\rho(r) = -\frac{8q_0}{\pi a^3} \exp\left(-\frac{4r}{a}\right)$, где a – радиус первой боровской орбиты, q_0 – элементарный заряд, r – расстояние от ядра атома до точки наблюдения. Найти энергию взаимодействия электронов в атоме гелия.

3.4. Шар радиуса R равномерно заряжен по объему с плотностью ρ . Вычислить энергию электростатического поля шара.



БрГУ имени А.С. Пушкина

Главная

Содержание



Вернуться

Тесты

Содержание практических занятий

3.5. Радиус сферы равен R , полный [электрический заряд](#) сферы равен q и равномерно распределен по ее поверхности. Вычислить энергию электростатического поля сферы.

3.6. Шар радиуса R заряжен по объему с плотностью $\rho(r) = \alpha r$, где α – известная константа, r – расстояние от центра шара до точки наблюдения. Вычислить энергию электростатического поля шара.

3.7. Бесконечный круговой цилиндр радиуса R заряжен по объему с [плотностью](#) $\rho(r) = \alpha r$, где α – известная константа, r – расстояние от оси симметрии цилиндра до точки наблюдения. Вычислить энергию электростатического поля, приходящуюся на единицу длины цилиндра, заключенную внутри цилиндра.

3.8. Три проводника с достаточно малыми одинаковыми сечениями соединены последовательно, образуя замкнутую цепь. Длины проводников l_1, l_2, l_3 . удельные проводимости $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$. По проводнику, длина которого l_1 , равномерно распределена сторонняя э.д.с. $\mathcal{E}_0$. Используя величины, данные в условии, получить выражения для: 1) [плотности электрического тока](#) в цепи; 2) напряженностей электрического поля в каждом из проводников.

3.9. Пространство между обкладками сферического конденсатора заполнено однородным диэлектриком с удельной проводимостью λ . Радиусы обкладок R_1 и R_2 , на обкладки подана разность потенциалов U . Используя величины, данные в условии, получить выражение для силы тока утечки I .



БрГУ имени А.С. Пушкина

Главная

Содержание



Вернуться

Тесты

Содержание практических занятий

3.10. В пространство между обкладками плоского конденсатора вставлены две плоскопараллельные пластинки, плотно прилегающие друг к другу и к обкладкам. Пластинки имеют толщины h_1 и h_2 , удельные проводимости λ_1 и λ_2 , диэлектрические проницаемости ε_1 и ε_2 . На обкладки конденсатора подается разность потенциалов U . Используя величины, данные в условии, получить выражения для:

- 1) [плотности электрического тока](#) в пластинках;
- 2) напряженности электрического поля в пластинках.

3.11. Заземление осуществляется с помощью идеально проводящего шара радиуса a , утопленного в землю, удельная проводимость которой λ_1 . Слой земли радиуса b , концентрический с шаром и прилегающий к нему, имеет искусственно повышенную проводимость λ_2 . Используя величины, данные в условии, получить выражение для сопротивления R такого заземлителя.

4. [Закон полного тока](#). Уравнения II порядка постоянного магнитного поля

Литература: [2, с. 11–13; 10, с. 7–8]

Контрольные вопросы:

1. Сформулируйте и запишите [закон Био-Савара-Лапласа](#).
2. Сформулируйте и запишите закон Ампера.
3. Сформулируйте и запишите [закон полного тока](#).



БрГУ имени А.С. Пушкина

Главная

Содержание



Вернуться

Тесты

Содержание практических занятий

4. Запишите и поясните формулы для нахождения [индукции магнитного поля](#), создаваемого линейным и объемным электрическим током.
5. Запишите полную систему дифференциальных уравнений первого порядка магнитостатики вакуума с граничными условиями с пояснением всех величин и математических операций, входящих в уравнения.
6. Дайте определение векторного потенциала магнитного поля и поясните связь этого потенциала с вектором индукции магнитного поля.
7. Запишите уравнения второго порядка для векторного потенциала постоянного магнитного поля с пояснением всех математических операций, входящих в уравнения.
8. Пусть пространственное распределение электрических токов считается известным. Предложите основные способы нахождения: а) индукции магнитного поля, создаваемого этими токами; б) векторного потенциала магнитного поля, создаваемого этими токами.

Задачи:

Примечание: во всех задачах считать, что магнитная проницаемость среды $\mu = 1$.

4.1. По проводнику, имеющему форму окружности радиуса R , протекает электрический ток, сила которого равна I . Пусть x – расстояние от центра окружности до некоторой точки на прямой,



БрГУ имени А.С. Пушкина

Главная

Содержание



Вернуться

Тесты

Содержание практических занятий

проходящей через центр окружности перпендикулярно плоскости, в которой находится проводник.

Определить [индукцию магнитного поля](#) B на указанной прямой как функцию от x .

4.2. В бесконечном цилиндрическом проводнике радиуса R течет электрический ток, [плотность](#) которого $j(r) = a/r$, где r – расстояние от оси проводника до точки наблюдения. Найти [индукцию магнитного поля](#) B внутри и снаружи проводника как функцию от r . Добиться одинаковых ответов при использовании разных подходов: I) через [закон полного тока](#); II) через [векторный потенциал](#) путем интегрирования уравнений [Лапласа](#) и [Пуассона](#).

4.3. Внутри тонкой проводящей цилиндрической оболочки радиуса b находится коаксиальный с ней сплошной цилиндрический проводник радиуса a . По этим проводникам текут постоянные электрические токи одинаковой величины I . Найти [индукцию магнитного поля](#) B во всех точках пространства как функцию от r , где r – расстояние от общей оси симметрии цилиндров до точки наблюдения. Рассмотреть случаи, когда токи текут: а) в одинаковых направлениях; б) в противоположных направлениях.

4.4. В бесконечно длинном цилиндрическом проводнике вырезана цилиндрическая полость. [Плотность электрического тока](#) в проводнике $j = const$. Оси полости и проводника параллельны и расстояние между ними h . Определить [индукцию магнитного поля](#) B в полости.

4.5. По бесконечному полому цилиндрическому проводнику, внутренний радиус которого a , внешний – b , течет равномерно распределенный по сечению электрический ток, сила которого равна I . Найти [векторный потенциал](#) $\vec{A}$ и [индукцию магнитного поля](#) $\vec{B}$, создаваемые этим током, как



БрГУ имени А.С. Пушкина

Главная

Содержание



Вернуться

Тесты

Содержание практических занятий

функции от r , где r – расстояние от оси симметрии проводника до точки наблюдения. Добиться одинаковых ответов при использовании разных подходов: I) через [закон полного тока](#); II) через интегрирование уравнений [Лапласа](#) и [Пуассона](#).

4.6. По бесконечной плоскости течет электрический ток с [плотностью](#) i , одинаковой во всех точках плоскости. Найти [индукцию магнитного поля](#) B , создаваемого плоскостью.

4.7. По двум бесконечным параллельным плоскостям текут поверхностные электрические токи с одинаковой [плотностью](#) i . Найти [индукцию магнитного поля](#) B , создаваемого данной системой токов. Рассмотреть случаи, когда токи текут: а) в одинаковых направлениях; б) в противоположных направлениях.

4.8. Однородный электрический ток [плотности](#) j течет внутри неограниченной пластины толщиной $2d$ параллельно ее поверхности. Найти [индукцию магнитного поля](#) B , создаваемого этим током, как функцию расстояния x от средней плоскости пластины. Добиться одинаковых ответов при использовании разных подходов: I) через [закон полного тока](#); II) через [векторный потенциал](#) путем интегрирования уравнений [Лапласа](#) и [Пуассона](#).

4.9. Электрический ток, сила которого равна I , течет по густой намотке тороида малого поперечного сечения. Определить [индукцию магнитного поля](#) B , создаваемого этим током. Рассмотреть случаи: а) радиус средней линии тороида R конечен, общее число витков в намотке равно N ; б) $R \rightarrow \infty$ (случай бесконечного цилиндрического соленоида), число витков на единицу длины равно n .

4.10. По двум бесконечным прямолинейным проводникам, расстояние между которыми d , текут в противоположных направлениях токи силой I . Вычислить [векторный потенциал](#) $\vec{A}$ этой системы.



БрГУ имени А.С. Пушкина

Главная

Содержание



Вернуться

Тесты

Содержание практических занятий

4.11. Показать, что постоянное однородное магнитное поле, [индукция](#) которого $\vec{B}$, можно описывать [векторным потенциалом](#) $\vec{A} = \frac{1}{2} [\vec{B}, \vec{r}]$.

5. Энергия магнитного поля. [Явление электромагнитной индукции](#)

Литература: [2, с. 14–15; [10](#), с. 9–10]

Контрольные вопросы:

1. Запишите и поясните формулы для плотности энергии магнитного поля и для энергии магнитного поля в конечном объеме
2. Сформулируйте и запишите [условия квазистационарности](#) переменного электромагнитного процесса.
3. Сформулируйте и запишите [закон электромагнитной индукции](#): а) в интегральной форме; б) в дифференциальной форме.
4. Запишите полную систему дифференциальных уравнений квазистационарного электромагнитного поля с пояснением всех величин и математических операций, входящих в уравнения.



БрГУ имени А.С. Пушкина

Главная

Содержание



Вернуться

Тесты

Содержание практических занятий

5. Перечислите основные сходства и дайте пояснение основным различиям между квазистационарным электромагнитным полем и стационарными полями – электрическим и магнитным.

Задачи:

5.1. Вычислить энергию магнитного поля, заключенную внутри бесконечного цилиндрического проводника радиуса R с током I и приходящуюся на единицу длины проводника. Ток равномерно распределен по сечению проводника.

5.2. Внутри тонкой проводящей цилиндрической оболочки радиуса b находится коаксиальный с ней сплошной цилиндрический проводник радиуса a . По этим проводникам в противоположных направлениях текут постоянные электрические токи одинаковой величины I . Найти энергию магнитного поля B , приходящуюся на единицу длины системы данных токов.

5.3. Переменное электромагнитное поле, частота которого $\omega = 2\pi \cdot 10^6 \text{ с}^{-1}$, распространяется в среде, диэлектрическая и магнитная проницаемость которой равны $\varepsilon = \mu = 1$, удельная проводимость $\lambda = 10^{-6} \text{ Ом}^{-1}\text{м}^{-1}$ ($9 \text{ Ом} = 10^{-11} \text{ СГС}_R$), а линейные размеры $L = 300 \text{ см}$. Можно ли считать такой процесс квазистационарным?



БрГУ имени А.С. Пушкина

Главная

Содержание



Вернуться

Тесты

Содержание практических занятий

5.4. Изолированный металлический диск радиуса a вращается равномерно с угловой скоростью ω , располагаясь перпендикулярно однородному магнитному полю, [индукция](#) которого B . Найти разность потенциалов U между центром и краем диска.

5.5. Непроводящее кольцо массой m , несущее равномерно распределенный заряд q , находится на гладком горизонтальном столе. Система находится в однородном вертикальном магнитном поле с [индукцией](#) B , которое в какой-то момент времени выключается. Найти: 1) установившуюся угловую скорость кольца ω ; 2) силу эквивалентного тока, соответствующую установившемуся вращению I .

5.6. Прямой провод с сопротивлением R_l на единицу длины согнут под углом 2α . Перемычка из такого же провода, расположенная перпендикулярно к биссектрисе угла, образует с согнутым проводом замкнутый треугольный контур. Контур помещен в однородное магнитное поле B , перпендикулярное к его плоскости. При этом v – постоянная скорость, с которой движется перемычка, x – расстояние от вершины угла до отрезка, измеренное вдоль биссектрисы. Найти: 1) величину и направление э.д.с. индукции $\mathcal{E}$ в контуре как функцию от x ; 2) силу тока I , текущего в контуре.

5.7. По двум медным шинам, установленным под углом α к горизонту, скользит под действием силы тяжести брусок массы m . В окружающем пространстве создано однородное магнитное поле с [индукцией](#) B , перпендикулярное к плоскости, в которой перемещается брусок. Вверху шины закорочены сопротивлением R . Коэффициент трения между поверхностями шин и бруска равен k ($k < \tan \alpha$), расстояние между шинами l . Найти установившееся значение скорости бруска.



БрГУ имени А.С. Пушкина

Главная

Содержание



Вернуться

Тесты

Содержание практических занятий

5.8. По двум медным шинам, установленным под углом β к горизонту, скользит под действием силы тяжести брусок массы m . В окружающем пространстве создано однородное магнитное поле с индукцией B , перпендикулярное к плоскости, в которой перемещается брусок. Вверху к концам шин подключен конденсатор емкостью C_0 , омическое сопротивление цепи равно нулю. Коэффициент трения между поверхностями шин и бруска равен k ($k < \operatorname{tg} \alpha$), расстояние между шинами l . Найти ускорение a , с которым движется брусок.

6. Переменное электромагнитное поле. Уравнения Максвелла.

Электромагнитные волны

Литература: [2, с. 15–16; 10, с. 11–12]

Контрольные вопросы:

1. Перечислите основные сходства и дайте пояснение основным различиям между квазистационарным и быстропеременным электромагнитным полем.
2. Запишите уравнения Максвелла и граничные условия для векторов $\vec{E}, \vec{B}, \vec{D}$ и $\vec{H}$ с пояснением смысла всех величин и математических операций, входящих в уравнения.



БрГУ имени А.С. Пушкина

Главная

Содержание



Вернуться

Тесты

Содержание практических занятий

3. Запишите уравнения второго порядка для потенциалов переменного электромагнитного поля с пояснением смысла всех величин и математических операций, входящих в уравнения.
4. Запишите и поясните формулы для напряженности $\vec{E}$ и [индукции](#) $\vec{B}$ электромагнитного излучения в волновой зоне.
5. Запишите формулу для интенсивности дипольного излучения с пояснением смысла всех величин, входящих в формулу.
6. Запишите формулу для интенсивности излучения ускоренно движущегося точечного заряда с пояснением смысла всех величин, входящих в формулу.
7. Дайте определения пространственные размеров волнового пакета и групповой скорости волн. Запишите соответствующие определяющие формулы.

Задачи:

6.1. [Электромагнитная волна](#), излучаемая переменным электрическим диполем ($\vec{P} = \vec{P}_0 \sin \omega t$), распространяется в вакууме. Амплитуда напряженности электрического поля в волновой зоне на луче, перпендикулярном к оси диполя, на расстоянии r от него равна E_0 . Вычислить энергию, излучаемую диполем в единицу времени во всех направлениях (т.е. среднюю за период интенсивность излучения I).



БрГУ имени А.С. Пушкина

Главная

Содержание



Вернуться

Тесты

Содержание практических занятий

6.2. Нерелятивистская частица с массой m и зарядом e движется по круговой орбите под действием кулоновских сил. Найти интенсивность I излучения частицы, выраженную через кинетическую энергию E_k частицы.

6.3. В Резерфордской модели атома водорода начальный радиус орбиты электрона (радиус атома) $r_0 = 0.5 \cdot 10^{-8}$ см, а электрон в атоме движется и излучает по законам классической электродинамики. Оценить время τ , в течение которого смог бы просуществовать электрон в такой модели.

6.4. [Плоскополяризованная волна](#) падает нормально на поверхность немагнитной среды, имеющей диэлектрическую проницаемость ε и электрическую проводимость λ . Найти коэффициент отражения волны ρ : а) в общем случае; б) в предельном случае хорошего проводника ($\varepsilon \ll \frac{4\pi\lambda}{\omega}$).

6.5. [Волновой пакет](#) образован наложением электромагнитных волн, длины которых лежат в интервале от $\lambda_0 - \Delta\lambda$ до $\lambda_0 + \Delta\lambda$. Диэлектрическая проницаемость среды равна $\varepsilon = 1 - \frac{4\pi n_0 e^2}{m\omega}$,

причем $\frac{4\pi n_0 e^2}{m\omega} \ll 1$. Определить: 1) групповую скорость v_g волнового пакета; 2) пространственные размеры Δx волнового пакета.



БрГУ имени А.С. Пушкина

Главная

Содержание



Вернуться

Тесты

Ответы к задачам

Ответы к задачам

1.1.	Область	Ее пределы	Напряженность E
	1	$0 \leq x \leq a$	$E_1(x) = 4\pi\rho x$
	2	$a \leq x < +\infty$	$E_2(x) = 4\pi\rho a$



БрГУ имени А.С. Пушкина

Главная

Содержание



Вернуться

Тесты

Ответы к задачам

1.2.	а	Область	Ее пределы	Напряженность E
		1	$0 < r \leq R$	$E_1(r) = \frac{qr}{R^3}$
		2	$R \leq r < +\infty$	$E_2(r) = \frac{q}{r^2}$
	б	Область	Ее пределы	Напряженность E
		1	$0 < r \leq R$	$E_1(r) = \pi\alpha r^2$
		2	$R \leq r < +\infty$	$E_2(r) = \frac{\pi\alpha R^4}{r^2}$
	в	Область	Ее пределы	Напряженность E
		1	$0 < r \leq R$	$E_1(r) = \frac{4\pi\alpha}{r}$
		2	$R \leq r < +\infty$	$E_2(r) = \frac{4\pi\alpha R}{r^2}$



БрГУ имени А.С. Пушкина

Главная

Содержание



Вернуться

Тесты

Ответы к задачам

1.3.	Область	Ее пределы	Напряженность E
	1	$0 \leq r \leq R_1$	$E_1 = 0$
	2	$R_1 \leq r \leq R_2$	$E_2(r) = \frac{2\pi\alpha}{r^2}(r^2 - R_1^2)$
	3	$R_2 \leq r < +\infty$	$E_3(r) = \frac{2\pi\alpha}{r^2}(R_2^2 - R_1^2)$

1.4.	$\vec{E} = 4\pi\rho\vec{r}/3$			
1.5.	а	Область	Ее пределы	Напряженность E
		1	$0 < r \leq R$	$E_1(r) = 2\pi\rho r$
		2	$R \leq r < +\infty$	$E_2(r) = \frac{2\pi\rho R^2}{r}$
	б	Область	Ее пределы	Напряженность E
		1	$0 < r \leq R$	$E_1(r) = \frac{4\pi\alpha r^2}{3}$
		2	$R \leq r < +\infty$	$E_2(r) = \frac{4\pi\alpha R^3}{3r}$



БрГУ имени А.С. Пушкина

Главная

Содержание



Вернуться

Тесты

Ответы к задачам

1.6.	Система	Напряженность E
	Электронное облако	$E_e(r) = \left(\frac{q_0}{r^2} \left(\frac{2r}{a} + 1 \right) + \frac{2q_0}{a^2} \right) \exp\left(-\frac{2r}{a} \right)$
	Весь атом	$E(r) = \frac{q_0}{r^2} \left(1 + \frac{2r}{a} + \frac{2r^2}{a^2} \right) \exp\left(-\frac{2r}{a} \right)$

1.7.	Пример	Какую часть формулы рекомендуется подробно расписать сначала	Какие действия рекомендуется выполнить после этого
	а	левую	преобразовать левую часть и получить содержимое правой части
	б	левую	
	в	обе	
	г	обе	Любой из 3 вариантов: 1) преобразовать левую часть получить содержимое правой части; 2) преобразовать правую часть получить содержимое левой части; 3) преобразовать обе части к какому-либо одинаковому промежуточному результату
	д	обе	
	е	обе	
	ж	обе	
	з	обе	



БрГУ имени А.С. Пушкина

Главная

Содержание



Вернуться

Тесты

Ответы к задачам

2.1.	Область	Ее пределы	Потенциал φ
	1	$0 \leq x \leq a$	$\varphi_1(x) = -2\pi\rho x^2$
	2	$a \leq x < +\infty$	$\varphi_2(x) = 2\pi\rho a(a - 2x)$



БрГУ имени А.С. Пушкина

Главная

Содержание



Вернуться

Тесты

Ответы к задачам

2.2.	а	Область	Ее пределы	Потенциал φ
		1	$0 < r \leq R$	$\varphi_1(r) = \frac{q}{2R} \left(3 - \frac{r^2}{R^2} \right)$
		2	$R \leq r < +\infty$	$\varphi_2(r) = \frac{q}{r}$
	б	Область	Ее пределы	Потенциал φ
		1	$0 < r \leq R$	$\varphi_1(r) = -\frac{\pi\alpha r^3}{3} + \frac{4\pi\alpha R^3}{3}$
		2	$R \leq r < +\infty$	$\varphi_2(r) = \frac{\pi\alpha R^4}{r}$
	в	Область	Ее пределы	Потенциал φ
		1	$0 < r \leq R$	$\varphi_1(r) = 4\pi\alpha \left(\ln \frac{R}{r} + 1 \right)$
		2	$R \leq r < +\infty$	$\varphi_2(r) = \frac{4\pi\alpha R}{r}$



БрГУ имени А.С. Пушкина

Главная

Содержание



Вернуться

Тесты

Ответы к задачам

2.3.	Область	Ее пределы	Потенциал φ
	1	$0 \leq r \leq R_1$	$\varphi_1 = 4\pi\alpha(R_2 - R_1)$
	2	$R_1 \leq r \leq R_2$	$\varphi_2(r) = 2\pi\alpha\left(2R_2 - r - \frac{R_1^2}{r}\right)$
	3	$R_2 \leq r < +\infty$	$\varphi_3(r) = \frac{2\pi\alpha}{r}(R_2^2 - R_1^2)$

2.4.	а	Область	Ее пределы	Потенциал φ
		1	$0 < r \leq R$	$\varphi_1(r) = -\pi\rho r^2$
		2	$R \leq r < +\infty$	$\varphi_2(r) = -\pi\rho R^2\left(2\ln\frac{r}{R} + 1\right)$
	б	Область	Ее пределы	Потенциал φ
		1	$0 < r \leq R$	$\varphi_1(r) = -\frac{4\pi\alpha r^3}{9}$
		2	$R \leq r < +\infty$	$\varphi_2(r) = -\frac{4\pi\alpha R^3}{9}\left(3\ln\frac{r}{R} + 1\right)$



БрГУ имени А.С. Пушкина

Главная

Содержание



Вернуться

Тесты

Ответы к задачам

2.5.	$\varphi(x, y, z) = \frac{4\pi\rho_0}{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2} \cos\alpha x \cos\beta y \cos\gamma z$	
2.6.	Система	Потенциал φ
	Электронное облако	$\varphi_e(r) = \left(\frac{q_0}{r} + \frac{q_0}{a} \right) \exp\left(-\frac{2r}{a} \right) - \frac{q_0}{r}$
	Весь атом	$\varphi(r) = q_0 \left(\frac{1}{r} + \frac{1}{a} \right) \exp\left(-\frac{2r}{a} \right)$
2.7.	$\rho(r) = -\frac{q_0}{\pi a^3} \exp\left(-\frac{2r}{a} \right)$	



БрГУ имени А.С. Пушкина

Главная

Содержание



Вернуться

Тесты

Ответы к задачам

3.1.	1) $W = \frac{q_1 q_2}{a}$; 2) $F = \frac{q_1 q_2}{a^2}$.
3.2.	$W = -\frac{q_0^2}{a}$
3.3.	$W = \frac{5q_0^2}{4a}$
3.4.	$W = \frac{3q^2}{5R}$
3.5.	$W = \frac{q^2}{2R}$
3.6.	$W = \frac{4\pi^2 \alpha^2 R^7}{7}$
3.7.	$W = \frac{2\pi^2 \alpha^2 R^6}{27}$
3.8.	1) $j = \varepsilon_0 \left(\frac{l_1}{\lambda_1} + \frac{l_2}{\lambda_2} + \frac{l_3}{\lambda_3} \right)^{-1}$; 2) $E_1 = \frac{j}{\lambda_1} - \frac{\varepsilon_0}{l_1}$, $E_2 = \frac{j}{\lambda_2}$, $E_3 = \frac{j}{\lambda_3}$.



БрГУ имени А.С. Пушкина

Главная

Содержание



Вернуться

Тесты

Ответы к задачам

3.9.	$I = \frac{4\pi\lambda UR_1R_2}{R_2 - R_1}$
3.10.	1) $j = \frac{\lambda_1\lambda_2U}{\lambda_2h_1 + \lambda_1h_2}$; 2) $E_1 = \frac{\lambda_2U}{\lambda_2h_1 + \lambda_1h_2}$, $E_2 = \frac{\lambda_1U}{\lambda_2h_1 + \lambda_1h_2}$.
3.11.	$R = \frac{1}{4\pi\lambda_2}\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right) + \frac{1}{4\pi\lambda_1b}$

4.1.	$B = \frac{2\pi R^2}{c(R^2 + x^2)^{3/2}}$		
4.2.	Область	Ее пределы	Индукция B
	1	$0 \leq r \leq R$	$B_1 = \frac{4\pi a}{c}$
	2	$R \leq r < +\infty$	$B_2(r) = \frac{4\pi aR}{cr}$



БрГУ имени А.С. Пушкина

Главная

Содержание



Вернуться

Тесты

Ответы к задачам

4.3.	а	Область	Ее пределы	Индукция B
		1	$0 \leq r \leq a$	$B_1(r) = \frac{2Ir}{ca^2}$
		2	$a \leq r < b$	$B_2(r) = \frac{2I}{cr}$
		3	$b < r < +\infty$	$B_3(r) = \frac{4I}{cr}$
	б	Область	Ее пределы	Индукция B
		1	$0 \leq r \leq a$	$B_1(r) = \frac{2Ir}{ca^2}$
		2	$a \leq r < b$	$B_2(r) = \frac{2I}{cr}$
		3	$b < r < +\infty$	$B_3 = 0$



БрГУ имени А.С. Пушкина

Главная

Содержание



Вернуться

Тесты

Ответы к задачам

4.4.	$\vec{B} = \frac{2\pi}{c} [\vec{j}, \vec{h}]$			
4.5.	Область	Ее пределы	Индукция B	Векторный потенциал A
	1	$0 \leq r \leq a$	$B_1 = 0$	$A_1 = C_1$
	2	$a \leq r \leq b$	$B_2(r) =$ $= \frac{2I}{c(b^2 - a^2)} \left(r - \frac{a^2}{r} \right)$	$A_2(r) =$ $= \frac{2Ia^2}{c(b^2 - a^2)} \left(\ln \frac{r}{a} - \frac{r^2}{2a^2} \right) + C_2$
	3	$b \leq r < +\infty$	$B_3(r) = \frac{2I}{cr}$	$A_3(r) = \frac{2I}{c} \ln \frac{b}{r} + C_3$
4.6.	$B = \frac{2\pi i}{c}$			



БрГУ имени А.С. Пушкина

Главная

Содержание



Вернуться

Тесты

Ответы к задачам

4.7.	а	Область	Индукция B
		между плоскостями	$B = 0$
		снаружи	$B = \frac{4\pi i}{c}$
	б	Область	Индукция B
		между плоскостями	$B = \frac{4\pi i}{c}$
		снаружи	$B = 0$

4.8.	Область	Ее пределы	Индукция B
	1	$0 \leq x \leq d$	$B_1(x) = \frac{4\pi j x}{c}$
	2	$d \leq x < +\infty$	$B_2 = \frac{4\pi j d}{c}$

4.9.	а	$B = \frac{2IN}{cR}$
	б	$B = \frac{4\pi In}{c}$



БрГУ имени А.С. Пушкина

Главная

Содержание



Вернуться

Тесты

Ответы к задачам

4.10.	$A = \frac{2I}{c} \ln \frac{r_2}{r_1}$
4.11.	Необходимо убедиться, что <i>rot</i> правой части исходного соотношения равен $\vec{B}$

5.1.	$W = \frac{I^2}{4c^2}$
5.2.	$W = \frac{I^2}{4c^2} \left(1 + 4 \ln \frac{b}{a} \right)$
5.3.	Нельзя
5.4.	$U = \frac{a^2 \omega B}{2c}$
5.5.	1) $\omega = \frac{qB}{2mc}$; 2) $I = \frac{q^2 B}{4\pi mc}$.
5.6.	1) $\varepsilon = -\frac{2Bvtg\alpha}{c}x$; 2) $I = \frac{Bv\sin\alpha}{cR_1(1+\sin\alpha)}$.
5.7.	$v = \frac{c^2 Rmg(\sin\alpha - k\cos\alpha)}{B^2 l^2}$



БрГУ имени А.С. Пушкина

Главная

Содержание



Вернуться

Тесты

Ответы к задачам

6.1.	$I = \frac{1}{3} c E_0^2 r^2.$	
6.2.	$I = \frac{32 E_k^4}{3 c^3 m^2 e^2}.$	
6.3.	$\tau = \frac{m^2 c^3 r_0^3}{4 e^4} \sim 10^{-11} \text{ с}.$	
6.4.	а	$\rho = \frac{(1-s_+)^2 + s_-^2}{(1+s_+)^2 + s_-^2}, \quad s_{\pm} = \sqrt{\frac{\varepsilon}{2}} \left(\sqrt{1 + \left(\frac{4\pi\lambda}{\varepsilon\omega} \right)^2} \pm 1 \right)^{1/2}.$
	б	$\rho = 1 - 2\sqrt{\frac{\omega}{2\pi\lambda}}.$
6.5.	1) $v_g = c \left(1 + \frac{\lambda_0^2 n_0 e^2}{2\pi m c^2} \right)^{-1}$; 2) $\Delta x = \frac{\lambda_0^2}{\Delta\lambda} \left(1 + \frac{\lambda_0^2 n_0 e^2}{2\pi m c^2} \right)^{-1}.$	



БрГУ имени А.С. Пушкина

Главная

Содержание



Вернуться

Тесты

Тесты

Тесты

[Тест по теме 1](#)

[Тест по теме 2](#)

[Тест по теме 3](#)

[Тест по теме 4](#)

[Тест по теме 5](#)

[Тест по теме 6](#)

[Тест по теме 7](#)



БрГУ имени А.С. Пушкина

Главная

Содержание



Вернуться

Тесты

Список литературы

Список литературы

Основная

1. Гершензон, Е. М. Электродинамика : Учеб. пособие для пед. вузов по спец. 032200 - Физика / Е. М. Гершензон, Н. Н. Малов, А. Н. Мансуров. - М. : Академия, 2002. – 352 с. : рис., табл. – (Высшее образование).
2. Теоретическая физика. Основы теории относительности. Электродинамика: Практикум / Сост. В.А. Плетюхов, М.А. Иванов. – Брест: БрГУ им. А.С. Пушкина, 2003. – 24 с.

Дополнительная

3. Сивухин, Д. В. Общий курс физики: учеб. пособие для вузов : в 5 т. / Д. В. Сивухин. – 5-е изд., стереот. – М. : ФИЗМАТЛИТ, 2006. – Т. III. Электричество. – 656 с.
4. Калашников, С. Г. Электричество / С. Г. Калашников. – 6-е изд., стереот. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2003. – 624 с.
5. Исаков, А. Я. Электродинамика. Руководство по самостоятельной работе. / А. Я. Исаков, В. В. Исакова. – Петропавловск-Камчатский: КамчатГТУ, 2008. – 330 с.
6. Ландау, Л. Д. Теоретическая физика: учеб. пособие для вузов: в 10 т. / Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц. – 8-е изд., стереот. – М. : ФИЗМАТЛИТ, 2001. – Т. II : Теория поля. – 536 с.



БрГУ имени А.С. Пушкина

Главная

Содержание



Вернуться

Тесты

Список литературы

7. УМЦ КЭФ: Курс общей физики проф. Д.А.Паршина [Электронный ресурс]. – Режим доступа: <http://lms.physics.spbstu.ru/course/index.php?categoryid=12> – Дата доступа: 19.01.2017.
8. УМЦ КЭФ: Курс общей физики проф. В.К.Иванова [Электронный ресурс]. – Режим доступа: <http://lms.physics.spbstu.ru/course/index.php?categoryid=38> – Дата доступа: 19.01.2017.
9. УМЦ КЭФ: Курс общей физики доцента А.Э.Васильева [Электронный ресурс]. – Режим доступа: <http://lms.physics.spbstu.ru/course/index.php?categoryid=35> – Дата доступа: 19.01.2017.
10. Шапошникова Т. С. Тестовые задания по электродинамике. Учебно-методическое пособие. Под ред. Царевского С.Л. / Т. С. Шапошникова, С. Л. Царевский. – Казань. 2009. – 12 с.