Учреждение образования
«Брестский государственный университет имени А.С. Пушкина»
Физико-математический факультет

О.В. Матысик
В.Ф. Савчук

ОСНОВЫ МАТРИЧНОГО АНАЛИЗА

Электронный курс лекций
для студентов специальности
1-31 03 03-01 «Прикладная математика»
физико-математического факультета

БрГУ имени А.С. Пушкина
2016

Рецензенты:

Заведующий кафедрой информатики и прикладной математики
Брестского государственного технического университета
кандидат технических наук, доцент
С.И. Парфомук

Доцент кафедры алгебры, геометрии и математического моделирования
Брестского государственного университета имени А.С. Пушкина
кандидат физико-математических наук
Д.В. Грицук

Матысик, О.В.

Основы матричного анализа : электрон. курс лекций для студ. спец-ти 1-31 03 03-01 «Прикладная математика» физ.-мат. фак. / О.В. Матысик, В. Ф. Савчук ; Брест. гос. ун-т им. А.С. Пушкина, каф. ПМТП. – Брест : электрон. издание БрГУ, 2016. – 122 с.

Электронный курс лекций написан в соответствии с базовой программой по курсу «Основы матричного анализа» и ставит своей целью облегчить самостоятельную работу студентов с теоретическим материалом при подготовке к лекциям, практическим занятиям и к экзамену.

Предназначен для студентов специальности 1-31 03 03-01 «Прикладная математика» физико-математического факультета.

Оглавление

Предисловие 5
1. Миноры и алгебраические дополнения матрицы. Формула Бине-Коши 6
2. Преобразование матриц. Матрицы специального вида 9
2.1 Преобразование матриц 9
2.2 Матрицы специального вида 14
2.2.1 Диагональные матрицы 14
2.2.2 Скалярные матрицы 15
2.2.3 Блочно-диагональные матрицы 15
2.2.4 Треугольные матрицы 16
2.2.5 Блочно-треугольные матрицы 16
2.2.6 Матрицы перестановок 17
2.2.7 Циркулянтные матрицы 17
2.2.8 Матрицы вида H и F 18
2.2.9 Матрицы Вандермонда 18
2.2.10 Нормальные матрицы 19
3. Псевдообратная матрица 20
3.1 Скелетное разложение матрицы 20
3.2 Определение псевдообратной матрицы 21
3.3 Нормальное псевдорешение СЛАУ 24
4. Собственные векторы и собственные значения матрицы 26
5. Характеристический многочлен матрицы 29
6. Подобие матриц 32
7. Матрицы над кольцом многочленов 36
8. Единственность канонической формы 39
9. Матрицы, обратимые над кольцом многочленов 44
10. Элементарные делители матрицы 46

11. Собственные векторы и собственные значения матрицы 48
12. Критерий подобия матриц 54
13. Жорданова нормальная форма матрицы над полем 57
14. Минимальный многочлен матрицы 63
15. Фробениуса нормальная форма матрицы 68
16. Пучки матриц 72
17. Матричные уравнения $AX = XB, AX = XA, AX - XB = C$ 73
18. Функции от матриц 81
19. Свойства функции от матриц 86
20. Интерполяционный многочлен Лагранжа-Сильвестра 88
21. Простые и дефектные матрицы 94
22. Симметрическая, кососимметрическая, эрмитова, ортогональная, унитарная и нильпотентная матрицы 102
23. Свойства эрмитовых матриц 103
24. Идемпотентные и инволютивные матрицы. Неотрицательные и неприводимые матрицы. Теорема Перрона-Фробениуса 105
25. Определённые, примитивные, импримитивные и стохастические матрицы. Осцилляционные и вполнеположительные матрицы 109
26. Векторные и матричные нормы 112
27. Оценка действительных и мнимых частей собственных значений. Локализационные круги Гершгорина. Теорема Фань Цзы. 116

Вопросы для самоконтроля 119
Тесты для самостоятельной работы 121
ЛИТЕРАТУРА 122

ПРЕДИСЛОВИЕ

Настоящий электронный курс лекций предназначен для студентов специальности 1-31 03 03-01 «Прикладная математика» физико-математического факультета. Он написан в соответствии с базовой программой по курсу «Основы матричного анализа», утверждённой проректором по учебной работе БрГУ имени А.С. Пушкина.

В электронном издании излагается теоретический материал, содержащий вопросы: миноры и алгебраические дополнения матрицы, преобразование матриц, матрицы специального вида, псевдообратная матрица, характеристический многочлен матрицы, матрицы над кольцом многочленов, матричные многочлены, жорданова и фробениусова нормальные формы матрицы, матричные уравнения $AX = XB$, $AX = XA, AX - XB = C$, функции от матриц, интерполяционный многочлен Лагранжа-Сильвестра, векторные и матричные нормы, локализационные круги Гершгорина, теорема Фань Цзы. Теоретический материал иллюстрируется примерами решения задач. Курс лекций ставит своей целью облегчить самостоятельную работу студентов с теоретическим материалом при подготовке к лекциям, практическим занятиям и к зачёту.

Авторы.

1. Миноры и алгебраические дополнения матрицы. Формула Бине-Коши

Пусть дан определитель $D = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$.

Определение 1.1. *Минором M_{ij} элемента a_{ij} определителя D называется определитель, полученный из D вычёркиванием i-й строки и j-ого столбца.*

Определение 1.2. *Алгебраическим дополнением A_{ij} элемента a_{ij} определителя D называется число $A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$.*

Если определитель квадратной матрицы не равен 0, то матрица называется невырожденной (неособой, неособенной).

Матрица A^{-1} называется обратной к матрице A, если $A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = E$, где E – единичная матрица.

Для всякой невырожденной матрицы существует обратная:

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{bmatrix}$$

Второй способ нахождения обратной матрицы: $[A|E] \to [E|A^{-1}]$.

Рассмотрим $M_{m,n}(P)$ – пространство матриц формата $m \times n$ над полем P. Пусть дана матрица $A \in M_{m,n}(P)$.

Определение 1.3. *Вычеркнем из этой матрицы строки $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$ и столбцы $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_k$. Из дважды вычеркнутых элементов составим матрицу k-ого порядка. Её определитель называется минором k-ого порядка для матрицы A и обозначается*

$$A\begin{pmatrix}\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k \\ \beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_k\end{pmatrix}.$$

Пример 1.1. *Дана матрица A:*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 4 & 5 & 6 & 0 \\ 7 & 8 & 9 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Вычислим следующие миноры матрицы A.

$$A\begin{pmatrix}1 & 2 \\ 3 & 4\end{pmatrix} = \begin{vmatrix}3 & 1 \\ 6 & 0\end{vmatrix} = -6$$

$$A\begin{pmatrix}2 & 4 \\ 1 & 2\end{pmatrix} = \begin{vmatrix}4 & 5 \\ 1 & 0\end{vmatrix} = -5$$

$$A\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4\end{pmatrix} = \begin{vmatrix}2 & 3 & 1 \\ 5 & 6 & 0 \\ 8 & 9 & 1\end{vmatrix} = \begin{vmatrix}2 & 3 & 1 \\ 5 & 6 & 0 \\ 6 & 6 & 0\end{vmatrix} = \begin{vmatrix}5 & 6 \\ 6 & 6\end{vmatrix} = -6$$

Определение 1.4. *Алгебраическим дополнением минора (k-ого порядка) квадратной матрицы называется определитель из элементов невычеркнутых строк и столбцов матрицы, взятый со знаком $(-1)\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_k + \beta_1 + \beta_2 + \cdots + \beta_k$.*

Определение 1.5. *Миноры матрицы, у которых индексы строк и столбцов совпадают (т.е. $\alpha_i = \beta_i, i = \overline{1, k}$), называются главными.*

Справедлива

Теорема 1.1. *(Формула Бине-Коши для вычисления определителя):*
Пусть $A \in M_{m,n}(P)$, $B \in M_{n,m}(P)$ где $m \leq n$, тогда $C = A\ B \in M_{m,n}(P)$ и имеет место формула:

$$detC = \sum_{1\le k_1<k_2<\dots<k_m\le n} A\begin{pmatrix}1 & 2 & \dots & m\\ k_1 & k_2 & \dots & k_m\end{pmatrix}\cdot B\begin{pmatrix}k_1 & k_2 & \dots & k_m\\ 1 & 2 & \dots & m\end{pmatrix},$$

т.е. $detC$ при $m \le n$ есть сумма произведений всех возможных миноров порядка m в A на соотвествующие миноры B того же порядка.

Пример 1.2. *Даны матрицы*

$$A = \begin{bmatrix}1 & 0 & 2\\ -1 & 1 & 0\end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix}1 & -1\\ 0 & 1\\ 2 & 1\end{bmatrix}.$$

Найти $\det(AB)$.

Решение

Имеем $C = AB = \begin{bmatrix}5 & 1\\ -1 & 2\end{bmatrix}$. Тогда $detC = \begin{bmatrix}5 & 1\\ -1 & 2\end{bmatrix} = 10+1 = 11.$
А по формуле Бине-Коши:

$$detC = A\begin{pmatrix}1 & 2\\ 1 & 2\end{pmatrix}B\begin{pmatrix}1 & 2\\ 1 & 2\end{pmatrix} + A\begin{pmatrix}1 & 2\\ 1 & 3\end{pmatrix}B\begin{pmatrix}1 & 3\\ 1 & 2\end{pmatrix} + A\begin{pmatrix}1 & 2\\ 2 & 3\end{pmatrix}B\begin{pmatrix}2 & 3\\ 1 & 2\end{pmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix}1 & 0\\ -1 & 1\end{vmatrix}\begin{vmatrix}1 & -1\\ 0 & 1\end{vmatrix} + \begin{vmatrix}1 & 2\\ -1 & 0\end{vmatrix}\begin{vmatrix}1 & -1\\ 2 & 1\end{vmatrix} + \begin{vmatrix}0 & 2\\ 1 & 0\end{vmatrix}\begin{vmatrix}0 & 1\\ 2 & 1\end{vmatrix} = 11.$$

Нетрудно проверить, что если $C = AB$, то $detC = detA \cdot detB$ (это верно для квадратных матриц).

2. Преобразование матриц. Матрицы специального вида

2.1 Преобразование матриц

I. Чтобы переставить i-ю и j-ю строки матрицы, достаточно её умножить слева на матрицу:

$$C = \begin{array}{cc} & \begin{array}{cccccccc} & & & i & j & & & \end{array} \\ \begin{array}{c} \\ \\ i \\ j \\ \\ \\ \\ \end{array} & \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \dots & & & & & & & \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 1 & \dots & 0 \\ \dots & & & & & & & \\ 0 & 0 & \dots & 1 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \dots & & & & & & & \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

Пример 2.1.

$$\underset{4\times 4}{\begin{array}{cc} & \begin{array}{cccc} & 2 & 3 & \end{array} \\ \begin{array}{c} \\ 2 \\ 3 \\ \\ \end{array} & \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{array}} \underset{4\times 5}{\begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 & 5 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 3 & 4 & 5 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 & 3 \end{bmatrix}} = \underset{4\times 5}{\begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 & 5 & 1 \\ 3 & 4 & 5 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 1 & 3 \end{bmatrix}}$$

$$\underset{3\times 3}{\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc} 1 & 2 & \end{array} \\ \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ \\ \end{array} & \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{array}} \underset{3\times 4}{\begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 1 & 3 & 1 \\ 3 & 2 & 2 & 2 \end{bmatrix}} = \underset{3\times 4}{\begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 2 & 2 & 2 \end{bmatrix}}$$

$$
\begin{array}{c}
\begin{array}{cc}
 & \begin{array}{cccc} & 2 & 4 & \end{array} \\
\begin{array}{c} \\ 2 \\ 4 \\ \end{array} & \underset{4 \times 4}{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}}
\end{array}
\end{array}
\underset{4 \times 4}{\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 2 & 3 & 3 & 3 \\ 1 & 3 & 2 & 5 \end{bmatrix}} = \underset{4 \times 4}{\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 2 & 5 \\ 2 & 3 & 3 & 3 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \end{bmatrix}}
$$

II. Чтобы умножить матрицу на скаляр C, достаточно умножить её на матрицу:

$$
K = \begin{bmatrix} C & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & C & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & C \end{bmatrix}.
$$

Пример 2.2.

$$
\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 5 & 6 \\ 2 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 10 & 12 \\ 4 & 2 & 2 \\ 4 & 0 & 6 \end{bmatrix}.
$$

$$
\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 & 2 \\ 2 & 3 & 7 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 9 & 12 & 6 \\ 6 & 9 & 21 & 3 \end{bmatrix}.
$$

III. При умножении матрицы A на матрицу $\begin{bmatrix} d_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & d_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & d_n \end{bmatrix}$ слева – все строки матрицы A умножаются соответственно на $d_1, d_2, \dots, d_n$. Если же умножить матрицу A на эту матрицу справа, то все столбцы матрицы A соответственно умножаются на $d_1, d_2, \dots, d_n$.

Пример 2.3.

$$1)\ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 8 \end{bmatrix},$$

$$2)\ \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 6 \\ 2 & 8 \end{bmatrix}.$$

IV. Чтобы умножить i-ую строку матицы на $c \in P$ и прибавить к j-ой строке этой же матрицы, достаточно матрицу слева умножить на матрицу

$$M = \begin{array}{cc} & \begin{array}{cccccccc} & & & i & j & & & \end{array} \\ \begin{array}{c} \\ \\ i \\ j \\ \\ \\ \\ \end{array} & \begin{bmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 & \ldots & 0 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & 1 & \ldots & 0 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & c & \ldots & 1 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & \ldots & 0 & \ldots & 1 \end{bmatrix} \end{array}.$$

Пример 2.4. *В матрице* $\begin{bmatrix} a & a \\ b & b \\ c & c \\ d & d \end{bmatrix}$ *2-ую строку умножить на 2 и прибавить к 3-ей строке.*

Решение

$$\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&2&1&0\\0&0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a&a\\b&b\\c&c\\d&d\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a&a\\b&b\\2b+c&2b+c\\d&d\end{bmatrix}.$$
$$4\times 4 \qquad 4\times 2 \qquad\qquad 4\times 2$$

Пусть дана матрица $A=\begin{bmatrix}a_{11}&a_{12}&\dots&a_{1n}\\a_{21}&a_{22}&\dots&a_{2n}\\\dots&\dots&\dots&\dots\\a_{n1}&a_{n2}&\dots&a_{nn}\end{bmatrix}$,

тогда $A^T=\begin{bmatrix}a_{11}&a_{21}&\dots&a_{n1}\\a_{12}&a_{22}&\dots&a_{n2}\\\dots&\dots&\dots&\dots\\a_{1n}&a_{2n}&\dots&a_{nn}\end{bmatrix}$ – транспонированная для матрицы A,

$A^V=\begin{bmatrix}A_{11}&A_{21}&\dots&A_{n1}\\A_{12}&A_{22}&\dots&A_{n2}\\\dots&\dots&\dots&\dots\\A_{1n}&A_{2n}&\dots&A_{nn}\end{bmatrix}$ – присоединённая для матрицы A.

Справедлива формула $A^{-1}=\dfrac{1}{|A|}A^V$.

Чтобы получить для матрицы A *сопряжённую матрицу* A^* надо запомнить: A^* получена из матрицы A транспонированием последней и заменой элементов из A на им сопряжённые.

Пример 2.5. *Если* $A=\begin{bmatrix}2-i&i\\1&0\\1+i&2i\end{bmatrix}$, *то* $A^*=\begin{bmatrix}2+i&1&1-i\\-i&0&-2i\end{bmatrix}$.

Очевидно, что если $a_{ij} \in R$, *то* $A^* = A^T$. *Не трудно проверить, что:*

$$(AB)^* = B^* A^*, \ (AB)^T = B^T A^T.$$

V. *Блочные матрицы.*

Пусть даны матрицы $A = \left[\begin{array}{c:cc} 2 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & 2 \end{array}\right]$, $B = \left[\begin{array}{cccc} 3 & -7 & -7 & 2 \\ \hdashline -2 & 1 & 4 & 0 \\ 0 & 2 & 4 & 0 \end{array}\right]$.

Введём обозначения $A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} B_{11} \\ B_{21} \end{bmatrix}$.

Тогда $AB = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B_{11} \\ B_{21} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11}B_{11} + A_{12}B_{22} \end{bmatrix}$,

$$A_{11}B_{11} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & -7 & -7 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & -14 & -14 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$A_{11}B_{11} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & 1 & 4 & 0 \\ 0 & 2 & 4 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 7 & 16 & 0 \\ 2 & 3 & 4 & 0 \end{bmatrix},$$

поэтому $AB = \begin{bmatrix} 4 & -7 & 2 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 0 \end{bmatrix}$

Разбиение матриц на блоки не совсем произвольно: *оно должно быть согласовано, в смысле, что должно быть определено умножение, т.е. число столбцов-блоков матрицы A должно быть равным числу строк-блоков матрицы B.*

Блочное умножение особенно выгодно, когда матрицы содержат много нулевых или единичных блоков:

$$\left[\begin{array}{cc:cc} 1 & 2 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ \hdashline 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \left[\begin{array}{cc:cc} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \hdashline 1 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right] = \begin{bmatrix} A_{11} & 0 \\ 0 & E \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & E \\ B_{21} & B_{22} \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & A_{11} \\ B_{21} & B_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

2.2 Матрицы специального вида

Некоторые из таких матриц часто встречаются в экономике, математической физике, технике и обладают важными свойствами. Следовательно, надо их перечислить и ввести специальную терминологию.

2.2.1 Диагональные матрицы

Диагональные матрицы (квадратные) обозначаются $D = [d_{ij}], d_{ij} = \delta\alpha_{ij}$, где $\delta = \begin{cases} 0, & i \neq j \\ 1, & i = j \end{cases}$ – символ Кроннекера. Следовательно,

$$D = \begin{bmatrix} \alpha_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \alpha_{22} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \alpha_{nn} \end{bmatrix}.$$

Определитель диагональной матрицы равен произведению диагональных элементов.

Диагональная матрица будет невырожденной, если на главной диагонали нет нулей, и тогда для неё существует обратная диагональная матрица.

Произведение 2-ух диагональных матриц есть диагональная матрица, следовательно, множество диагональных матриц замкнуто по $< \cdot >$.

Умножение диагональных матриц коммутативно, то есть любые две диагональные матрицы перестановочны: $D_1 D_2 = D_2 D_1$.

Единичная матрица тоже диагональная матрица. Следовательно, множество диагональных матриц n-ого порядка образует абелеву мультипликативную группу.

2.2.2 Скалярные матрицы

Определение 2.1. *Матрица A называется скалярной, если*

$$A = \alpha E = \begin{bmatrix} \alpha & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \alpha & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \alpha \end{bmatrix}, \alpha \in P.$$

Для скалярных матриц справедливо:

$$\alpha E + \beta E = (\alpha + \beta)E, \alpha E \cdot \beta E = (\alpha\beta)E.$$

2.2.3 Блочно-диагональные матрицы

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & A_{22} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & A_{SS} \end{bmatrix},$$

где $A_{ll}, l = \overline{1, S}$ – квадратные матрицы, A – квазидиагональная (они квадратные!).

Пример 2.6.

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A = diag(A_{11}, A_{22}, \dots, A_{ss}) : detA = \prod_{i=1}^{S} detA_{ii}, rangA = \sum_{i=1}^{S} rangA_{ii}.$$

2.2.4 Треугольные матрицы

Определение 2.2. *Матрица A называется верхней треугольной, если в ней элементы $a_{ij} = 0$, если $i > j$*

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}.$$

Определение 2.3. *Матрица A называется нижней треугольной, если транспонированная к ней – верхняя треугольная матрица.*

Определитель треугольной матрицы равен произведению диагональных элементов.

Произведение треугольных матриц не коммутативно, т. е. треугольные матрицы не коммутированы (не перестановочны).

2.2.5 Блочно-треугольные матрицы

$$\begin{bmatrix} A_{11} & * & \dots & * \\ 0 & A_{22} & \dots & * \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & A_{SS} \end{bmatrix} \text{ – верхняя,}$$

$$\begin{bmatrix} A_{11} & 0 & \dots & 0 \\ * & A_{22} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ * & * & \dots & A_{SS} \end{bmatrix} \text{ – нижняя,}$$

здесь * – любые числа.

2.2.6 Матрицы перестановок

Матрица перестановок P состоит из 1 и 0. Место для 1 определяется подстановкой.

Пример 2.7. *Пусть дана подстановка* $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 5 & 1 & 4 \end{pmatrix}$, *тогда*

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, detP = \pm 1.$$

Произведение двух матриц перестановок есть матрица перестановок (множество этих матриц замкнуто по $< \cdot >$). E – тоже матрица перестановок. Обратная для матрицы перестановок тоже матрица перестановок, поэтому множество матриц перестановок n-ого порядка образует мультипликативную группу.

2.2.7 Циркулянтные матрицы

Это матрицы вида: $A = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & \dots & a_{n-1} & a_n \\ a_n & a_1 & a_2 & \dots & a_{n-2} & a_{n-1} \\ a_{n-1} & a_n & a_1 & \dots & a_{n-3} & a_{n-2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_2 & a_3 & a_4 & \dots & a_n & a_1 \end{bmatrix}.$

Матрица C – основной циркулянт:

$$C = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}.$$

И тогда циркулянтная матрица A запишется в виде:

$$A = \sum_{k=0}^{n-1} a_{k+1} C^k = a_1 C^0 + a_2 C + a_3 C^2 + \ldots + a_n C^{n-1},$$

где $C^0 = E$. Множество этих матриц замкнуто по $< \cdot >$.

2.2.8 Матрицы вида H и F

$$H = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ldots & 0 & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \end{bmatrix}, F = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

У матриц H^2 и F^2 единицы во втором верхнем и нижнем косом ряду соответственно, поэтому нетрудно проверить, что $H^n = F^n = 0$ (нулевая матрица).

Если же у нас $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$, то

$$f(H) = \begin{bmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & \ldots & a_{n-3} & a_{n-2} & a_{n-1} & 0 \\ 0 & a_0 & a_1 & \ldots & a_{n-4} & a_{n-3} & a_{n-2} & a_{n-1} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & a_0 \end{bmatrix}.$$

2.2.9 Матрицы Вандермонда

$$W(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \begin{bmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & x_1^3 & \ldots & x_1^{n-2} & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & x_2^2 & x_2^3 & \ldots & x_2^{n-2} & x_2^{n-1} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 1 & x_n & x_n^2 & x_n^3 & \ldots & x_n^{n-2} & x_n^{n-1} \end{bmatrix}.$$

Тогда

$$detW(x_1, x_2, \dots, x_n) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & x_2 - x_1 & x_2^2 - x_1 x_2 & \dots & x_2^{n-1} - x_1 x_2^{n-2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & x_n - x_1 & x_n^2 - x_1 x_n & \dots & x_n^{n-1} - x_1 x_n^{n-2} \end{bmatrix} =$$

$= \{$из каждой строки вынесем$\}=$

$$= (x_2 - x_1)(x_3 - x_1) \cdot \dots \cdot (x_n - x_1) \begin{vmatrix} 1 & x_2 & x_2^2 & \dots & x_2^{n-2} \\ 1 & x_3 & x_3^2 & \dots & x_3^{n-2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \dots & x_n^n - 2 \end{vmatrix} = \prod_{i=2, j=1, i>j}^{n, n-1} (x_i - x_j).$$

Пример 2.8. $detW(1, 3, 5, 6, 4) = 2 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 1 \cdot 1 \cdot (-1) \cdot (-2) = 1440.$

2.2.10 Нормальные матрицы

$A \in M_{m,n}(Z)$ и $\alpha_{ij} = \begin{cases} > 0, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases}, i = \overline{1, m}; j = \overline{1, n}$ $\quad \dfrac{\alpha_{ii}}{\alpha_{i-1,i-1}} (i = \overline{2, p}).$

3. Псевдообратная матрица

Если прямоугольная или квадратная матрица A вырождена, то не существует A^{-1}. Однако ниже будет показано, что для $\forall A \in C_{m,n} \exists A^{+}$(псевдообратная), которая обладает некоторыми свойствами обратной матрицы и имеет важные применения при решении СЛАУ. Если A – квадратная и невырожденная, то $A^{+} = A^{-1}$.

3.1 Скелетное разложение матрицы

Лемма 3.1. *Для* $\forall A \in P_{m,n}(C_{m,n}$ *или* $R_{m,n}$ *верно* $rangA^{*}A = rangA, rangAA^{*} = = rangA$.

Теорема 3.1. *(о скелетном разложении матрицы). Пусть* $A \in P_{m,n}$, $rangA = r > 0$, *тогда существуют матрицы* $B \in P_{m,r}, C \in P_{r,n}$, *такие, что* $A = B \cdot C$ *и* $rangB = rangC = r$.

Доказательство

Выберем произвольные r линейно зависимых столбцов матрицы A и объявим их столбцами матрицы $B = (B_1, B_2, \ldots, B_r), B_1, B_2, \ldots, B_r$ линейно независимы и образуют базис системы столбцов матрицы $A = (A_1, A_2, \ldots, A_n)$. Тогда $A_i = c_{1i}B_1 + c_{2i}B_2 + \ldots + c_{ri}B_r, i = \overline{1, n}$.

$$\text{Значит, } (A_1, A_2, \ldots, A_n) = (B_1, B_2, \ldots, B_r)\begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \ldots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \ldots & c_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ c_{r1} & c_{r2} & \ldots & c_{rn} \end{bmatrix}.$$

Таким образом, мы получим $A = B \cdot C$, где – матрица перехода от базиса $(B_1, B_2, \ldots, B_r)$ к системе векторов $(A_1, A_2, \ldots, A_n)$. Значит $rangC = rang(A_1, A_2, \ldots, A_n) = rangA = r$. Теорема 3.1 доказана.

Замечание 3.1. *Скелетное разложение матрицы определено в общем случае неоднозначно.*

Замечание 3.2. *Если для* $A \in P_{m,n}$ $rangA = n(rangA = m)$, *то в качестве матрицы удобно взять саму* $A(E_{m,m})$, *а в качестве* C – $E_{n,n}(A)$.

3.2 Определение псевдообратной матрицы

Определение 3.1. *Пусть $A \in P_{m,n}$, тогда псевдообратной для матрицы A называется матрица $A^+ \in P_{n,m}$ такая, что будут выполняться следующие равенства:*

$$AA^+A = A, A^+AA^+ = A^+,$$

$$(A^+A)^* = A^+A, (AA^+)^* = AA^+.$$

Теорема 3.2. *Для $\forall A \in P_{m,n}$ существует псевдообратная матрица A^+.*

Доказательство

Рассмотрим произвольное скелетное разложение матрицы $A : A = B \cdot C$. Заметим, что $B^*B \in P_{r,r}$ (см. теорему 3.1), $rangB^*B = rangB = r$ (см. лемму 3.1), следовательно, B^*B – невырожденная и, значит, существует $(B^*B)^{-1}$. Аналогично, $CC^* \in P_{r,r}, rangCC^* = rangC = r \Longrightarrow \exists (CC^*)^{-1}$.

Покажем, что матрица $A^+ = C^*(CC^*)^{-1}(BB^*)^{-1}B^*$ является псевдообратной для A. Для этого проверим условия из определения 3.1:

$$AA^+A = BCC^*(CC^*)^{-1}(B^*B)^{-1}B^*BC = BC = A,$$

$$A^+AA^+ = C^*(CC^*)^{-1}(B^*B)^{-1}B^*BCC^*(CC^*)^{-1}(B^*B)^{-1}B^* =$$

$$= C^*(CC^*)^{-1}(B^*B)^{-1}B^* = A^+,$$

$$(A^+A)^* = (C^*(CC^*)^{-1}(B^*B)^{-1}B^*BC)^* = (C^*((CC^*)^{-1}C)^* =$$

$$= ((CC^*)^{-1}C)^*C = C^*((CC^*)^{-1})^*C = C^*(CC^*)^{-1}C =$$

$$= C^*(CC^*)^{-1}(B^*B)^{-1}B^*BC = A^+BC = A^+A.$$

Аналогично доказывается: $(AA^+)^* = AA^+$. Теорема 3.2 доказана.

Следствие 3.1. *Если столбцы* $A \in P_{m,n}$ *линейно независимы, то* $A^+ = (A^*A)^{-1}A^*$; *если строки* $A \in P_{m,n}$ *линейно независимы, то* $A^+ = A^*(AA^*)^{-1}$.

Доказательство

Пусть столбцы A линейно независимы, значит, $rangA = n \implies B = A$, $C = E_{n,n}$, $A = BC = AE_{n,n}$ (см. замечание 3.2). Тогда

$$A^+ = E^*_{n,n}(E_{n,n} \cdot E^*_{n,n})^{-1}(A^*A)^{-1}A^* = (A^*A)^{-1}A^*.$$

Утверждение про строки доказывается аналогично. Следствие 3.1 доказано.

Замечание 3.3. *Теорема 3.2 даёт нам способ вычисления* A^+ *для* $\forall A \neq 0$, *но не отвечает на вопрос о существовании и единственности* A^+ *(ведь скелетное разложение матрицы определено неоднозначно).*

Теорема 3.3. *Для* $\forall A \in P_{m,n}$ *матрица* A^+ *определена однозначно.*

Доказательство

Пусть для некоторой A существуют две A_1^+ и A_2^+ (псевдообратные матрицы). Тогда из определения 3.1 выполняется:

$$AA_1^+A = AA_2^+A = A;$$

$$A_1^+ = A_1^+AA_1^+ = A_1^+(AA_1^+)^* = A_1^+(A_1^+)^*A^*,$$

$$\text{аналогично} A_2^+ = A_2^+(A_2^+)^*A^*,$$

$$A_1^+ = A_1^+AA_1^+ = (A_1^+A)^*A_1^+ = A^*(A_1^+)^*A_1^+,$$

$$\text{аналогично} A_2^+ = A^*(A_2^+)^*A_2^+.$$

Введем новые матрицы:

$$B_{n,m} = A_2^+ - A_1^+,$$

$$C_{n,n} = A_2^+(A_2^+)^* - A_1^+(A_1^+)^*,$$

$$D_{m,m} = (A_2^+)^* A_2^+ - (A_1^+)^* A_1^+.$$

Заметим, что

$$ABA = AA_2^+A - AA_1^+A = A - A = 0_{m,n}, \ \ B = CA^* = A^*D.$$

Тогда

$$(BA)^*(BA) = A^*B^*BA = A^*(A^*D)^*BA = A^*D^*ABA = 0_{n,n}.$$

Согласно лемме 3.1:

$$rang(BA)^*(BA) = 0 \Longrightarrow rang(BA) = 0 \Longrightarrow BA = 0_{n,n}.$$

Рассмотрим

$$BB^* = B(CA^*)^* = BAC^* = 0_{n,n} \Longrightarrow rangBB^* = rangB = 0 \Longrightarrow B = 0_{n,m}.$$

Значит $A_2^+ - A_1^+ = 0 \Longrightarrow A_2^+ = A_1^+$. Теорема 3.3 доказана.

Следствие 3.2. *Если A – квадратная и невырожденная, то $A^+ = A^{-1}$.*

Доказательство

Пусть $A \in P_{n,n}$ и $detA \neq 0$, тогда (см. следствие 3.1)

$$A^+ = (A^*A)^{-1}A^* = \{\exists A^{-1}\} = A^{-1}(A^*)^{-1}A^* = A^{-1},$$

причём A^+ определена однозначно. Следствие 3.2 доказано.

Свойства псевдообратной матрицы:

1) $(A^+)^* = (A^*)^+$;
2) $(A^+)^+ = A$;
3) $(A^+A)^2 = A^+A$;
4) $(AA^+)^2 = AA^+$.

3.3 Нормальное псевдорешение СЛАУ

Пусть есть система m линейных уравнений с n неизвестными, которой соответствует матричное уравнение

$$AX = B,$$

где $A \in P_{m,n}, X \in P_{n,1}, B \in P_{m,1}$.

Определение 3.2. *Столбец $Y = B - AX$ называется невязкой столбца X.*

Если X – решение системы, то $Y = 0$, если же система несовместна, попытаемся найти столбец X_0, длина невязки которого минимальна.

Определение 3.3. *Такой столбец X_0 называется псевдорешением системы $AX = B$. Псевдорешение минимальной длины называется нормальным псевдорешением системы $AX = B$.*

Теорема 3.4. *Нормальное псевдорешение системы $AX = B$ всегда существует и единственно, и вычисляется по формуле*

$$X_0 = A^+B.$$

Доказательство

Надо показать, что $|B - AX_0| \leq |B - AX|, \forall X \in P_{n,1}$, тогда X_0 – псевдорешение, кроме того, $|X_0| \leq |X|, \forall X \in P_{n,1}$, такого, что $|B - AX_0| \leq |B - AX|$.

Рассмотрим $\forall X \in P_{n,1}$:

$B - AX = B - AX_0 + AX_0 - AX = B - AX_0 + A(X_0 - X) = T + S$, где $T = B - AX_0, S = (X_0 - X)$.

Рассмотрим

$$|B - AX|^2 = (B - AX, B - AX) = (T + S, T + S) = (T + S)^*(T + S) =$$

$$= T^*T + T^*S + S^*T + S^*S = |T|^2 + T^*S + S^*T + |S|^2.$$

В свою очередь

$$T * S = (B - AX_0)^* A(X_0 - X) = (B - AA^+B)^* A(X_0 - X) =$$

$$= ((E_{m,m} - AA^+)B)^* A(X_0 - X) = B^*(E_{m,m} - AA^+)^* A(X_0 - X) =$$

$$= B^*(E_{m,m} - AA^+)A(X_0 - X) = B^*(A - AA^+A)(X_0 - X) =$$

$$= B^*(A - A)(X_0 - X) = 0_{1,1}.$$

Но тогда $S^*T = (T^*S)^* = 0^*_{1,1} = 0_{1,1}$. Таким образом

$$|B - AX|^2 = |T|^2 + |S|^2 = |B - AX_0|^2 + |A(X_0 - X)|^2,$$

следовательно $|B - AX_0| \leq |B - AX|, \forall X \in P_{n,1}$, т. е. показали, что $X_0 = A^+B$ – псевдорешение уравнения $AX = B$.

Докажем, что псевдорешение $X_0 = A^+B$ – нормальное. Пусть X – столбец, такой, что $|B - AX_0| = |B - AX|$. Тогда $A(X_0 - X) = 0_{m,1}$, пусть $Z = X - X_0 \Longrightarrow X = X_0 + Z \Longrightarrow AZ = 0_{m,1}$. Поэтому

$$|X|^2 = (X_0 + Z, X_0 + Z) = (X_0 + Z)^*(X_0 + Z) = X_0^*X_0 + X_0^*Z +$$

$$+ Z^*X_0 + Z^*Z = |X_0|^2 + X_0^*Z + Z^*X_0 + |Z|^2,$$

но $X_0^*Z = (A^+B)^*Z = (A^+AA^+B)^*Z = (A^+B)^*(A^+A)^*Z = 0_{1,1}$ (так как $AZ = 0$), следовательно $Z^*X_0 = (X_0^*Z)^* = 0^*_{1,1} = 0_{1,1}$.

Получили, что

$$|X|^2 = |X_0|^2 + |Z|^2 \Longrightarrow |X_0| \leq |X|.$$

Следовательно $X_0 = A^+B$ – нормальное псевдорешение системы $AX = B$. Теорема 3.4 доказана.

4. Собственные векторы и собственные значения матрицы

Пусть дана матрица $A \in M_{n,n}(C)$.

Определение 4.1. *Вектор $x \neq \overline{0}, x \in C^n$ называется собственным вектором матрицы A, если $Ax = \lambda x, \lambda \in C, \lambda$ – собственное значение, соответствующее вектору x.*

Теорема 4.1. *Если x – собственный вектор, соответствующий собственному значению λ матрицы A, то для $\forall a \in C, ax$ – собственный вектор, соответствующий собственному значению λ матрицы A.*

Доказательство

Дано, что $Ax = \lambda x$, получим $aAx = a\lambda x$ или $A(ax) = \lambda(ax)$, т. е. ax – собственный вектор матрицы A, соответствующий собственному значению λ.
Теорема 4.1 доказана.

Теорема 4.2. *Пусть $P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_0 \in C[x]$, тогда если x – собственный вектор матрицы A соответствующий собственному значению $\lambda \in C$, то x – собственный вектор матрицы $P(A)$, соответствующий собственному значению $P(\lambda)$.*

Доказательство

Дано, что $Ax = \lambda x, x \neq \overline{0}$.

$$P(A) = a_n A^n + a_{n-1}A^{n-1} + \ldots + a_0 E,$$

тогда

$$P(A)x = a_n A^n x + a_{n-1}A^{n-1}x + \ldots + a_0 Ex = \{Ax = \lambda x, A(Ax) = A(\lambda x), A^2 x =$$

$$\lambda(Ax) = \lambda(\lambda x) = \lambda^2 x \text{ и т.д.}\} = a_n\lambda^n x + a_{n-1}\lambda^{n-1}x + \ldots + a_0 x =$$

$$(a_n\lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \ldots + a_0)x = P(\lambda)x.$$

Значит, x – собственный вектор матрицы $P(A)$, соответствующий собственному значению $P(\lambda)$. Теорема 4.2 доказана.

Определение 4.2. *Множество собственных значений матрицы A называется её спектром и обозначается $SpA, \sigma(A)$.*

Определение 4.3. *Спектральный радиус (ρ) – это максимальный из модулей собственных значений λ_i, т. е. $\rho = max\{|\lambda_i||\lambda_i \in SpA\}$.*

Теорема 4.3. *Матрица A вырождена тогда и только тогда, когда $0 \in Sp(A)$.*

Доказательство

Необходимость: Дано, что матрица A вырождена. Доказать, что $0 \in Sp(A)$.

Так как матрица A вырождена, следовательно, $detA = 0$, тогда однородная система $Ax = 0$ имеет ненулевое решение. Следовательно, $x \neq \overline{0}$, а значит, $Ax = 0$. Следовательно, 0 – собственное значение матрицы A, и, значит, $0 \in Sp(A)$.

Достаточность: $0 \in Sp(A)$ доказать, что A вырождена.

Так как $0 \in Sp(A)$, $\{0$ – собственное значение А$\}$, то $Ax = 0 \cdot x, x \neq \overline{0}$. Следовательно, система $Ax = 0$ имеет ненулевое решение. Следовательно, $detA = 0$, и матрица A вырождена. Теорема 4.3 доказана.

Теорема 4.4. *Собственные векторы матрицы A относящиеся к различным собственным значениям, линейно независимы.*

Доказательство

Пусть $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$ – различные собственные значения матрицы A, а $x_1, x_2, \ldots, x_k$ – соответствующие им собственные векторы.

Доказательство проведём методом математической индукции по числу векторов.

Если в системе $x_1, x_2, \ldots, x_k$ только один вектор, то она линейно независима, так как собственный вектор $x \neq \overline{0}$ и $ax = \overline{0}$ при $a = 0$. Следовательно, для $k = 1$ теорема доказана.

Предположим, что для $k = s$ $x_1, x_2, \ldots, x_s$ – линейно независимы. Рассмотрим случай $k = s + 1$ и составим линейную комбинацию:

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_sx_s + a_{s+1}x_{s+1} = \overline{0}. \tag{4.1}$$

Умножим (4.1) слева на матрицу A:

$$a_1Ax_1 + a_2Ax_2 + \ldots + a_sAx_s + a_{s+1}Ax_{s+1} = A \cdot \overline{0}.$$

Следовательно

$$a_1\lambda_1x_1 + a_2\lambda_2x_2 + \ldots + a_s\lambda_sx_s + a_{s+1}\lambda_{s+1}x_{s+1} = \overline{0}. \tag{4.2}$$

Умножим (4.1) на λ_{s+1} и вычтем полученное произведение из равенства (4.2): $a_1(\lambda_1 - \lambda_{s+1})x_1 + a_2(\lambda_2 - \lambda_{s+1})x_2 + \ldots + a_s(\lambda_s - \lambda_{s+1})x_s = \overline{0}$.
По условию теоремы λ_i различны и векторы $x_1, x_2, \ldots, x_s$ – линейно независимы. Следовательно $a_1 = a_2 = \ldots = a_s = 0$. Из (4.1) следует $\lambda_{s+1}x_{s+1} = \overline{0}$, но $x_{s+1} \neq \overline{0}$. Следовательно $\lambda_{s+1} = 0$. Получим, что равенство (4.1) выполняется тогда и только тогда, когда все $a_i = 0$ и векторы $x_1, x_2, \ldots, x_s, x_{s+1}$ – линейно независимы. Теорема 4.4 доказана.

5. Характеристический многочлен матрицы

Собственный вектор $x \neq \overline{0}$ получается из уравнения $Ax = \lambda x$. Эта система однородная и имеет ненулевые решения тогда и только тогда, когда $|A - \lambda E| = 0$.

Определение 5.1. *Уравнение* $|A - \lambda E| = 0$ *называется* <u>*характеристическим уравнением матрицы*</u> A.

Из этого уравнения находятся собственные значения матрицы A.

Определение 5.2. *Определитель* $P_A(\lambda) = |A - \lambda E|$ *называется* <u>*характеристическим многочленом матрицы* A</u>.

Получили уравнение n-ой степени $|A - \lambda E| = 0$, которое по основной теореме алгебры имеет ровно n корней.

Имеем, что λ_i – собственные значения матрицы A являются корнями многочлена $P_A(\lambda)$ и наоборот.

В дальнейшем будем рассматривать в качестве характеристического многочлена определитель $|\lambda E - A|$, так как у него такие же корни, что и у $|A - \lambda E|$ но в то же время старший коэффициент положителен. Итак,

$$P_A(x) = |xE - A| = (x - \lambda_1)(x - \lambda_2)\ldots(x - \lambda_n) = \{\text{по теореме Виетта}\} =$$
$$= x^n - (\lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_n)x^{n-1} + (\lambda_2\lambda_2 + \lambda_1\lambda_3 + \ldots + \lambda_{n-1}\lambda_n)x^{n-2} - \ldots$$
$$+(-1)^n\lambda_1\lambda_2\cdot\ldots\cdot\lambda_n =$$
$$= x^n - \delta_1(\lambda_1,\ldots,\lambda_n)x^{n-1} + \delta_2(\lambda_1,\ldots,\lambda_n)x^{n-2} - \ldots + (-1)^n\delta_n(\lambda_1,\ldots,\lambda_n).$$

Главный минор k-ого порядка матрицы A – это минор

$$A\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \ldots & a_k \\ a_1 & a_2 & \ldots & a_k \end{pmatrix},$$

полученный вычеркиванием из матрицы A одинаковых по номеру строк и столбцов.

Обозначим через

$$E_k = \sum_{(a_1,a_2,\ldots,a_k)\in\{1,2,\ldots,n\}} \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \ldots & a_k \\ a_1 & a_2 & \ldots & a_k \end{pmatrix}, \quad E_n = detA, E_1 = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$$ – след матрицы или трек (trA) $\to$ суммирование миноров первого порядка: $A\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} = a_{11}, \ldots$.

Справедлива

Теорема 5.1. *(второй способ вычисления характеристического многочлена)*

$$P_A(x) = x^n - E_1x^{n-1} + E_2x^{n-2} - \ldots + (-1)^n E_n,$$

где $E_1 = trA, E_n = detA, E_k = \sum_{(a_a,a_2,\ldots,a_k)\in\{1,2,\ldots,n\}} A\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \ldots & a_k \\ a_1 & a_2 & \ldots & a_k \end{pmatrix}$.

Пример 5.1. *Вычислить характеристический многочлен матрицы*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Решение:

$E_1 = rtA = 1 + 1 + 1 + 1 = 4$

$$E_4 = detA = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = -1$$

Найдем $E_3 = A\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} + A\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix} + A\begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} + A\begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$,

$$A\begin{pmatrix}1&2&3\\1&2&3\end{pmatrix}=\begin{vmatrix}1&1&0\\1&1&1\\0&1&1\end{vmatrix}=-1,\ A\begin{pmatrix}1&2&4\\1&2&4\end{pmatrix}=\begin{vmatrix}1&1&0\\1&1&0\\0&0&1\end{vmatrix}=0,$$

$$A\begin{pmatrix}2&3&4\\2&3&4\end{pmatrix}=\begin{vmatrix}1&1&0\\1&1&1\\0&1&1\end{vmatrix}=-1,\ A\begin{pmatrix}1&3&4\\1&3&4\end{pmatrix}=\begin{vmatrix}1&0&0\\0&1&1\\0&1&1\end{vmatrix}=0\Rightarrow$$

$E_3=-1+0-1+0=-2.$

Найдём

$$E_2=A\begin{pmatrix}1&2\\1&2\end{pmatrix}+A\begin{pmatrix}1&3\\1&3\end{pmatrix}+A\begin{pmatrix}1&4\\1&4\end{pmatrix}+A\begin{pmatrix}2&3\\2&3\end{pmatrix}+A\begin{pmatrix}2&4\\2&4\end{pmatrix}+A\begin{pmatrix}3&4\\3&4\end{pmatrix},$$

$$A\begin{pmatrix}1&2\\1&2\end{pmatrix}=\begin{vmatrix}1&1\\1&1\end{vmatrix}=0,\ A\begin{pmatrix}1&3\\1&3\end{pmatrix}=\begin{vmatrix}1&0\\0&1\end{vmatrix}=1,\ A\begin{pmatrix}1&4\\1&4\end{pmatrix}=\begin{vmatrix}1&0\\0&1\end{vmatrix}=1,$$

$$A\begin{pmatrix}2&3\\2&3\end{pmatrix}=\begin{vmatrix}1&1\\1&1\end{vmatrix}=0,\ A\begin{pmatrix}2&4\\2&4\end{pmatrix}=\begin{vmatrix}1&0\\0&1\end{vmatrix}=1,\ A\begin{pmatrix}3&4\\3&4\end{pmatrix}=\begin{vmatrix}1&1\\1&1\end{vmatrix}=0\Rightarrow$$

$E_2=3.$

Тогда, получим $P_A(x)=x^4-4x^3+3x^2+2x-1.$

Проверка:

$$P_A(x)=\begin{vmatrix}x-1&-1&0&0\\-1&x-1&-1&0\\0&-1&x-1&-1\\0&0&-1&x-1\end{vmatrix}$$ $\to$ вычислить определитель и сравнить с полученным выше результатом.

6. Подобие матриц

Определение 6.1. *Квадратичные матрицы $A, B \in M_{n,n}(C)$ подобны, если существует невырожденная матрица $T \in M_{n,n}(C)$, что $B = T^{-1}AT$ (T – трансформирующая матрица). Обозначают $A \approx B$.*

Отношения подобия – отношение эквивалентности на $M_{n,n}(C)$, так как оно рефлексивно ($A \approx A : A = E^{-1)}AE$), симметрично ($A \approx B \Rightarrow B \approx A : B = T^{-1}AT \Rightarrow \Rightarrow TBT^{-1} = A$, $T^{-1} = S \Rightarrow A = S^{-1}BS$) и транзитивно ($A \approx B \wedge B \approx C \Rightarrow \Rightarrow A \approx C : B = T^{-1}ATИC = S^{-1}BS \Rightarrow C = S^{-1}[T^{-1}AT]S = (S^{-1}T^{-1})A(TS) = = (TS)^{-1}A(TS)\{S^{-1}T^{-1} = (TS)^{-1} \Leftrightarrow S^{-1}T^{-1}(TS) = (TS)^{-1}(TS) \Leftrightarrow E = E\}$)

Отношение эквивалентности множество всех матриц n-го порядка $M_{n,n}(C)$ разбивается на не пересекающиеся классы эквивалентности, т.е. классы подобных матриц, которые однозначно определяются любыми своим представителем. Если матрицу рассматривать как линейный оператор, то класс подобных матриц – это матрицы одного и того же оператора в различных базисах.

Теорема 6.1. *Характеристические многочлены подобных матриц равны.*

Доказательство

Дано $A \approx B$, доказать: $P_A(x) = P_B(x)$.
Имеем $B = T^{-1}AT$, где T – трансформированная матрица.
$P_B(x) = |xE - B| = |xE - T^{-1}AT| =$
$= \{$т.к. x - число, E - перестановочная с любой матрицей$\} =$
$= |T^{-1}(xE)T - T^{-1}AT| = |T^{-1}(xE - A)T| = |T^{-1}||xE - A||T| =$
$= |T^{-1}||T||xE - A| = |T^{-1}T||xE - A| = |xE - A| = P_A(x)$.
Теорема 6.1 доказана.

Следствие 6.1. *Характеристические числа (собственные значения) подобных матриц равны.*

Собственные значения – корни характеристического многочлена, а так как $P_A(x) = P_B(x) \Rightarrow$ их корни равны. Однако, если собственные значения равны, это ещё не значит, что матрицы подобны, т.е. теорема 6.1 – необходимое условие, но не достаточное.

Пример 6.1. *Даны матрицы* $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

Имеем $P_A(x) = |xE - A| = \begin{vmatrix} x & -1 \\ 0 & x \end{vmatrix} = x^2, P_B(x) = |xE - B| = \begin{vmatrix} x & 0 \\ 0 & x \end{vmatrix} = x^2 \Rightarrow$ *их корни равны, но нетрудно проверить, что* $A \not\approx B$.

Определение 6.2. *Квадратичная матрица A называется диагонализуемой, если она подобна диагональной матрице.*

Теорема 6.2. *Квадратичная матрица A диагонализуема тогда и только тогда, когда существует n линейно независимых векторов, каждый из которых является собственным вектором для матрицы A.*

Доказательство

Необходимость:

Пусть $S^{-1}AS = D,\ D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{bmatrix}$, т.е. $A \approx D \Rightarrow AS = SD$.

$SD = [x^{(1)}x^{(2)}\dots x^{(n)}]D$, где $x^{(i)}, i = \overline{1,n}$ – столбцы матрицы $S \Rightarrow SD = [\lambda_1 x^{(1)} \lambda_2 x^{(2)} \dots \lambda_n x^{(n)}]$.

$AS = A[x^{(1)}x^{(2)}\dots x^{(n)}] = [Ax^{(1)}Ax^{(2)}\dots Ax^{(n)}] \Rightarrow$ т.к. $AS = SD \Rightarrow Ax^{(1)} = \lambda_1 x^{(1)}, \dots, Ax^{(n)} = \lambda_n x^{(n)} \Rightarrow$

получим, что $x^{(1)}, x^{(2)}, \ldots, x^{(n)}$ – собственные векторы матрицы A, которые отвечают собственным значениям $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$. И поскольку матрица S невырождена $(detS \neq 0)$, то эти столбцы линейно независимы.

Достаточность:

Дано, что $x_1, x_2, \ldots, x_n$ линейно независимые собственные векторы, отвечающие собственным значениям $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ матрицы A, т.е.

$$\begin{gathered} Ax_1 = \lambda_1 x_1, \\ Ax_2 = \lambda_2 x_2, \\ \ldots \\ Ax_n = \lambda_n x_n, \end{gathered}$$

значит $[Ax_1 Ax_2 \ldots Ax_n] = [x_1 \ldots x_n] \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_n \end{bmatrix}$ {по аналогии: $[Ax_1 Ax_2 \ldots Ax_n] = [x_1 \ldots x_n] M^A_{(x)}$ – матрица оператора A в базисе (x)} $\Rightarrow$ в базисе $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ линейный оператор с матрицы A будет иметь матрицу $\begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_n \end{bmatrix} \Rightarrow A \approx$ диагональной матрице. Или по-другому, $A[x_1 x_2 \ldots x_n] = [x_1 x_2 \ldots x_n]D$, а отсюда $A = T^{-1}DT$, где $T^{-1} = [x_1 x_2 \ldots x_n]$. Теорема 6.2 доказана.

Следствие 6.2. *Если матрица A имеет простой спектр (все собственные значения различны), то матрица A диагонализуема.*

Обозначим $M^{(\lambda_1)} = \{x \in C^n | Ax = \lambda_1 x\}$ – множество собственных векторов, отвечающих собственному значению λ_1 – это подпространство.

Следствие 6.3. *Матрица $A \in M_{n,n}(C)$ диагонализуема, если $dimM^{(\lambda_1)} + dimM^{(\lambda_2)} + \ldots + dimM^{(\lambda_k)} = n$.*

Следствие 6.4. *Пусть* $C = \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{bmatrix}$ *– блочно-диагональная матрица. Она диагонализуема тогда и только тогда, когда матрицы* A *и* B *диагонализуемы.*

Следствие 6.5. *Пусть* A *– диагонализуемая матрица.* $f(x) = a_n x^n + \ldots + a_1 x + a_0$ *– произвольный многочлен, тогда* $f(A)$ *тоже диагонализуемая матрица.*

Доказательство

$D = S^{-1}AS, A = SDS^{-1}$. *Следовательно,* $f(A) = Sf(D)S^{-1}$. *Действительно это так, поскольку нетрудно проверить, что* $(SDS^{-1})^n = SD^nS^{-1}$.
Следствие 6.5 доказано.

Определение 6.3. *Матрицы* $A, B \in M_{n,n}(C)$ *называются одновременно диагонализуемыми, если существует* S *– трансформирующая матрица из* $M_{n,n}(C)$, *что* $S^{-1}AS$ *и* $S^{-1}BS$ *диагональны (т.е.* A *и* B *подобны диагональным).*

Пусть A и B одновременно диагонализуемые. Покажем, что $AB = BA$ (т.е. A и B перестановочны). Имеем

$$S^{-1}AS = D_1,\ S^{-1}BA = D_2,$$

где D_1, D_2 – диагональные матрицы,S – трансформирующая. Отсюда $A = SD_1S^{-1}$, $B = SD_2S^{-1}$. Тогда

$$AB = (SD_1S^{-1})(SD_2S^{-1}) = S(D_1D_2)S^{-1},$$

$$BA = (SD_2S^{-1})(SD_1S^{-1}) = S(D_2D_1)S^{-1},$$

$D_1D_2 = D_2D_1$, так как D_1 и D_2 – диагональные $\Rightarrow AB = BA$, обратное тоже верно.
Поэтому справедлива

Теорема 6.3. $AB{=}BA$ *тогда и только тогда, когда матрицы* A *и* B *одновременно диагонализуемы.*

7. Матрицы над кольцом многочленов

Пусть дано некоторое кольцо многочленов $P[x]$.

Определение 7.1. *Матрицы с элементами многочленами называются многочленными (полиномиальными) матрицами:* $A(x), B(x), \ldots$.

Действия над такими матрицами аналогичны действиям над обычными матрицами. Над многочленными матрицами выполняются:
1) сложение,
2) умножение,
3) вычитание,
4) умножение матрицы на элемент из $P[x]$.

Определение 7.2. *Элементарными преобразованиями строк (столбцов) полиномиальной матрицы $A(x)$ называются следующие преобразования:*

1) умножение любой строки (столбца) матрицы на скаляр $a \in P, a \neq 0$;

2) умножение любой строки (столбца) матрицы на $f(x) \in P[x]$ и прибавление этого произведения к другой строке (столбцу);

3) перестановка строк (столбцов) матрицы местами.

Определение 7.3. *Полиномиальная матрица $B(x)$, полученная из полиномиальной матрицы $A(x)$ с помощью элементарных преобразований, называется эквивалентной полиномиальной матрицы $A(x)$, и тогда пишут $A(x) \sim B(x)$.*

Нетрудно показать, что отношение $\sim$ на множестве $M_{n,n}(C)$ есть отношение эквивалентности.

Определение 7.4. *Полиномиальная матрица*

$$K(x) = diag(f_1(x), f_2(x), \ldots, f_n(x))$$

называется <u>*матрицей канонического вида,*</u> *если:*

1) $f_i(x)$, $\forall i = \overline{1, n-1}$ *является делителем* $f_{i+1}(x)$,

2) старшие коэффициенты у многочленов $f_i(x), \forall i = \overline{1, n}$ *равны 1.*

$f_i(x)$ – *называются* <u>*инвариантными множителями матрицы канонического вида*</u> <u>$K(x)$</u>.

Пример 7.1. $K(x) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & f(x) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

Если полиномиальная матрица $A(x) \sim K(x)$, то $K(x)$ является *матрицей канонического вида для матрицы* $A(x)$.

Теорема 7.1. *Любая квадратная полиномиальная матрица* $A(x) \neq 0$ *эквивалентна некоторой канонической матрице, т.е. конечным числом элементарных преобразований она приведется к канонической матрице.*

Пример 7.2. *Привести к каноническому виду матрицу*

$$A(x) = \begin{bmatrix} x^2 & x^2 - x & 3x^2 \\ x^2 - x & 3x^2 - x & x^3 + 4x^2 - 3x \\ x^2 + x & x^2 + x & 3x^2 + 3x \end{bmatrix}.$$

Решение:

$$A(x) = \begin{bmatrix} x^2 & x^2 - x & 3x^2 \\ x^2 - x & 3x^2 - x & x^3 + 4x^2 - 3x \\ x^2 + x & x^2 + x & 3x^2 + 3x \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} x^2 & x^2 - x & 3x^2 \\ -x & 2x^2 & x^3 + x^2 - 3x \\ x & 2x & x^3 + x^2 \end{bmatrix} \sim$$

$$\begin{bmatrix} x & 2x & 3x \\ -x & 2x^2 & x^3+x^2-3x \\ x^2 & x^2-x & 3x^2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} x & 2x & 3x \\ 0 & 2x^2+2x & x^3+x^2 \\ 0 & -x^2-x & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} x & 0 & x \\ 0 & x^2+x & 0 \\ 0 & 2x^2+2x & x^3+x^2 \end{bmatrix} \sim$$

$$\begin{bmatrix} x & 0 & 0 \\ 0 & x^2+x & 0 \\ 0 & 0 & x^3+x^2 \end{bmatrix} = K(x) \Rightarrow f_1(x) = x,\ \ f_2(x) = x^2+x,\ \ f_3(x) = x^3+x^2,$$

$A(x) \sim diag(x, x^2+x, x^3+x^2)$, т.е. матрицу $A(x)$ привели к каноническому виду.

Пример 7.3. *Привести к канонической форме матрицу*

$$B(x) = \begin{bmatrix} x & x+1 & 0 \\ x+2 & x-1 & x \\ x-1 & x-1 & x \end{bmatrix}.$$

Решение:

$$B(x) = \begin{bmatrix} x & x+1 & 0 \\ x+2 & x-1 & x \\ x-1 & x-1 & x \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} x & x+1 & 0 \\ -2 & -1 & x \\ -1 & -1 & x \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & -x \\ 2 & -1 & x \\ x & x+1 & 0 \end{bmatrix} \sim$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -x \\ 0 & -3 & 3x \\ 0 & 1 & x^2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 3x \\ 0 & 1 & x^2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & x \\ 0 & 1 & x^2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & x \\ 0 & 1 & x^2+x \end{bmatrix} \sim$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -x \\ 0 & 0 & x^2+x \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & x^2+x \end{bmatrix} = K(x) \Rightarrow B(x) \sim diag(1, 1, x^2+x).$$

8. Единственность канонической формы

Пусть дана полиномиальная матрица $A(x) \neq 0$ n-ого порядка. Обозначим через $d_1(x)$ – наиболее общий делитель миноров 1-ого порядка полиномиальной матрицы $A(x)$. Через $d_2(x)$ – НОД миноров 2-ого порядка полиномиальной матрицы $A(x)$ и т.д.; $d_n(x)$ – НОД миноров n-ого порядка полиномиальной матрицы $A(x)$, очевидно, что $d_n(x) = det A(x)$.

Будем считать все $d_i(x), i = \overline{1, n}$ нормированными, т. е. их старшие коэффициенты равны 1. Если наивысший порядок миноров равен $r \neq 0$, то считаем, что $d_{r+1}(x) = d_{r+2}(x) = \ldots = d_n(x) = 0$.

Определение 8.1. *Система $d_1(x), d_2(x), \ldots, d_n(x)$ называется системой НОД миноров полиномиальной матрицы $A(x)$.*

Теорема 8.1. *Система НОД миноров полиномиальной матрицы $A(x)$ над кольцом $P[x]$ не изменяется при элементарных преобразованиях.*

Доказательство

Рассмотрим, например, элементарные преобразования строк. Пусть строка $A(x)$ умножается на отличный от нуля элемент $a \in P$. Тогда те миноры, через которые проходит эта строка, умножаются на a, а остальные не меняются. Но НОД системы многочленов не изменится, если некоторые из них умножить на отличное от нуля число.

Пусть теперь к i-ой строке полиномиальной матрицы $A(x)$ прибавляется её j-ая строка, $j \neq i$, умноженная на многочлен $\varphi(x) \in P[x]$; получившуюся после этого преобразования матрицу обозначим через $\overline{A}(x)$, а НОД всех её миноров k-ого порядка, взятый со старшим коэффициентом 1, – через $\overline{d_k}(x)$. Посмотрим, что происходит при указанном преобразовании с минорами k-ого порядка полиномиальной матрицы $A(x)$.

Не будут меняться те миноры, через которые i-ая строка не проходит. Не меняются и те, через которые проходят i-ая и j-ая строки, так как определитель не меняется от прибавления к одной его строке кратного другой его строки. Возьмём, наконец, любой из тех миноров k-ого порядка полиномиальной матрицы $A(x)$, через который проходит i-ая строка, но не проходит j-ая строка; обозначим его M, а соответствующий ему минор полиномиальной матрицы $\overline{A}(x) - \overline{M}$:

$$M = \begin{vmatrix} \dots & \dots & \dots \\ f_{iv_1} & \dots & f_{iv_k} \\ \dots & \dots & \dots \end{vmatrix}, \ \overline{M} = \begin{vmatrix} \dots & \dots & \dots \\ f_{iv_1} + f_{jv_1}\varphi(x) & \dots & f_{iv_k} + f_{jv_k}\varphi(x) \\ \dots & \dots & \dots \end{vmatrix},$$

где не выписанные строки у обоих миноров одинаковы.
По свойству определителей:

$$\overline{M} = M + \varphi(x) \cdot \begin{vmatrix} \dots & \dots & \dots \\ f_{iv_1} & \dots & f_{jv_k} \\ \dots & \dots & \dots \end{vmatrix} = M + \varphi(x)N,$$

где N – минор полиномиальной матрицы $A(x)$, получившийся из минора M заменой i-ой строки матрицы $A(x)$ соответствующими элементами её j-ой строки.

$M/d_k(x) \wedge N/d_k(x)$ (они k-ого порядка из $A(x)$). Следовательно, $\overline{M}/d_k(x)$, значит, все миноры k-ого порядка полиномиальной матрицы $\overline{A}(x)$ делятся на $d_k(x)$, а поэтому, $d_k(x)$ – их ОД, следовательно, $\overline{d_k}(x)/d_k(x)$.

Можно аналогично совершить над $\overline{A}(x)$ обратное элементарное преобразование того же типа и получить $A(x)$. Следовательно, доказать, что $d_k(x)/\overline{d_k}(x)$. Так как у $d_k(x)$ и $\overline{d_k}(x)$ старшие коэффициенты равны 1, то $d_k(x) = \overline{d_k}(x)$. Теорема 8.1 доказать.

Следствие 8.1. *Системы НОД миноров эквивалентных матриц совпадают.*

Теорема 8.2. *Инвариантные множители полиномиальной матрицы над $P[x]$ однозначно определяются системой НОД миноров этой матрицы:*

$$d_k(x) = f_1(x) \cdot f_2(x) \cdot \ldots \cdot f_k(x),\ \ k = \overline{1, n}.$$

Следствие 8.2. *Всякая полиномиальная матрица имеет единственную каноническую форму.*

Следствие 8.3. *Две полиномиальные матрицы эквивалентны тогда и только тогда, когда совпадают системы НОД миноров этих матриц.*

Следствие 8.4. *Две полиномиальные матрицы эквивалентны тогда и только тогда, когда совпадают системы их инвариантных множителей.*

Пример 8.1. *Привести к каноническому виду матрицу:*

$$A(X) = \begin{bmatrix} x(x-1) & 0 & 0 \\ 0 & x(x-2) & 0 \\ 0 & 0 & (x-1)(x-2) \end{bmatrix}.$$

Решение:

Очевидно, что

$$d_1(x) = 1 \Rightarrow f_1(x) = 1$$

$$d_3(x) : det A(x) = x^2(x-1)^2(x-2) \Rightarrow d_3(x) = x^2(x-1)(x-2)^2.$$

$$d_2(x) : A\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} x(x-1) & 0 \\ 0 & x(x-2) \end{bmatrix} = x^2(x-1)(x-2),$$

$$A\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} x(x-1) & 0 \\ 0 & (x-1)(x-2) \end{vmatrix} = x(x-1)^2(x-2),$$

$$A\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} x(x-2) & 0 \\ 0 & (x-1)(x-2) \end{vmatrix} = x(x-1)(x-2)^2.$$

А вот
$A\begin{pmatrix}1&2\\1&3\end{pmatrix}=A\begin{pmatrix}1&2\\2&3\end{pmatrix}=A\begin{pmatrix}1&3\\1&2\end{pmatrix}=A\begin{pmatrix}1&3\\2&3\end{pmatrix}=A\begin{pmatrix}2&3\\1&2\end{pmatrix}=A\begin{pmatrix}2&3\\1&3\end{pmatrix}=0\Rightarrow$
$\Rightarrow d_2(x)=x(x-1)(x-2)$.

Значит,

$$f_2(x)=\frac{d_2(x)}{d_1(x)}=x(x-1)(x-2),$$

$$f_3(x)=\frac{d_3(x)}{d_2(x)}=x(x-1)(x-2).$$

Следовательно, $K(x)=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&x(x-1)(x-2)&0\\0&0&x(x-1)(x-2)\end{bmatrix}$,
т.е. $A(x)\sim diag(1,x(x-1)(x-2),x(x-1)(x-2))$.

Пример 8.2. *Привести к каноническому виду матрицу:*

$$B(X)=\begin{bmatrix}x&x+1&x-1\\x^2+1&x-1&x\\1&x-2&x+1\end{bmatrix}.$$

Решение:

Очевидно, что

$$d_1(x)=1\Rightarrow f_1(x)=1$$

$d_3(x):detB(x)=\begin{vmatrix}x&x+1&x-1\\x^2+1&x-1&x\\1&x-2&x+1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}x&2&x-1\\x^2+1&-1&x\\1&-3&x+1\end{vmatrix}=$

$$= \begin{bmatrix} 2x^2+x+2 & 0 & 3x-1 \\ x^2+1 & -1 & x \\ -3x^2-2 & 0 & -2x+1 \end{bmatrix} = (-1)(-1)^4 \begin{bmatrix} 2x^2+x+2 & 3x-1 \\ -3x^2-2 & -2x+1 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} 2x^2+x+2 & 0 & 3x-1 \\ x^2+1 & 1 & x \\ -3x^2-2 & 0 & -2x+1 \end{vmatrix} = (-1)(-1)^4 \begin{vmatrix} x^2+x+2 & 3x-1 \\ -3x^2-2 & -2x+1 \end{vmatrix} =$$

$$= (5x^2-3x+3)x \Rightarrow d_3(x) = x^3 - \frac{3}{5}x^2 + \frac{3}{5}x$$

$d_2(x)$ – делитель $d_3(x) \Rightarrow d_2(x) : 1,\ x, x^2 - \dfrac{3}{5}x + \dfrac{3}{5}, d_3(x)$.

Рассмотрим $B\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} x+1 & x-1 \\ x-1 & x \end{vmatrix} = 3x-1$, а значит, $d_2(x) = 1$.

Итак,

$$f_2(x) = \frac{d_2(x)}{d_1(x)} = 1, f_3(x) = \frac{d_3(x)}{d_2(x)} = x^3 - \frac{3}{5}x^2 + \frac{3}{5}x \Rightarrow$$

$$\Rightarrow B(x) \sim diag(1, 1, x^3 - \frac{3}{5}x^2 + \frac{3}{5}x).$$

9. Матрицы, обратимые над кольцом многочленов

Если полиномиальная матрица $A(x) \neq 0$, то $A^{-1} = \dfrac{1}{detA} \cdot A^{v}$. При нахождении A^{-1} мы сталкиваемся с обратимостью элементов кольца $P[x] \Rightarrow \dfrac{1}{detA} \in P[x]$. Обратимыми в $P[x]$ являются лишь ненулевые элементы поля.

Теорема 9.1. *Полиномиальная матрица $A(x)$ обратима тогда и только тогда, когда $detA(x) \in P$ и $detA(x) \neq 0$.*

Определение 9.1. *Матрица называется элементарной, если она матрица одного из видов*

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}$$ *где $a \neq 0$ находится в любом месте на главной диагонали;*

$$Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ f(x) & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix},$$ *$f(x)$ может занимать любое место среди нулей.*

Теорема 9.2. *Для произвольной полиномиальной матрицы $A(x)$ n-го порядка равносильны следующие утверждения:*

1) $A(x)$ – обратима над $P[x]$,

2) $detA(x) \neq 0, detA(x) \in P$,

3) $A(x) \sim E$,

4) $A(x)$ – есть произведение элементарных матриц.

Доказательство

1) Полиномиальная матрица $A(x)$ обратима $\Rightarrow$ A^{-1}, т.е. $detA \neq 0$ и $detA \in P$. Значит из 1) следует 2).

2) $detA \neq 0$ и $detA \in P \Rightarrow A(x)$ обратима, т.е. из 2) следует 1).

3) Из 2) $\Rightarrow d_n(x) = 1(d_n(x) = detA(x)$, делённому на его старший коэффициент). Но $d_n(x) = f_1(x)f_2(x)\dots f_n(x)$, где $f_i(x) = 1, i = \overline{1,n}$ – инвариантные множители матрицы $A(x)$. Отсюда $f_i(x) = 1, i = \overline{1,n}$, т.е. E – каноническая форма $A(x)$ и $A(x) \sim E$.

4) A(x) $= P_1(x)P_2(x) \cdot \dots \cdot P_k(x) \cdot Q_1(x)Q_2(x) \cdot \dots \cdot Q_s(x)$. Значит, $detA(x) = detP_1(x) \cdot \dots \cdot detP_k(x) \cdot detQ_1(x) \cdot \dots \cdot detQ_s(x) \neq 0 \Rightarrow detA(x) \in P$

Итак, из 4) следует 2), из 2) следует 3), из 2) следует 1).
Теорема 9.2 доказана.

Теорема 9.3. *Полиномиальные матрицы $A(x)$ и $B(x)$ n-го порядка эквивалентны тогда и только тогда, когда существуют невырожденные и обратимые матрицы $C(x)$ и $K(x)$ n-го порядка, что $B(x) = C(x)A(x)K(x)$.*

Доказательство

$A(x) \sim B(x) \Rightarrow$ по теореме 9.2 (п. 3, 4)
$\Rightarrow A(x) = P_1(x)P_2(x) \cdot \dots \cdot P_k(x) \cdot B(x) \cdot Q_1(x)Q_2(x) \cdot \dots \cdot Q_s(x)$.
Поэтому

$$C(x) = \prod_{i=1}^{k} P_i(x), K(x) = \prod_{j=1}^{s} Q_j(x) -$$

обратимые и невырожденные матрицы. Теорема 9.3 доказана.

10. Элементарные делители матрицы

Определение 10.1. *Пусть $f(x)$ многочлен положительной степени над полем P, старший коэффициент которого равен 1, а $f(x)=\rho_1^{a_1}(x)\cdot\ldots\cdot\rho_s^{a_s}(x)$ – его каноническое разложение, где $\rho_i(x), i=\overline{1,s}$ – неприводимые многочлены над P, то многочлены $\rho_i^{a_i}(x), i=\overline{1,s}$ называются элементарными делителями многочлена $f(x)$.*

Определение 10.2. *Элементарными делителями полиномиальной матрицы $A(x)$ называются элементарные делители инвариантных множителей её матрицы канонического вида, причём каждый элементарный делитель записывается столько раз, во сколько инвариантных множителей он входит*

СЭД – система элементарных делителей.

Пример 10.1. *Найти СЭД $A(x)$, если*

$$A(x)\sim diag(1, x-1, (x-1)(x-2), (x-1)^2(x-2), 0).$$

Решение:

СЭД: $x-1, x-1, (x-1)^2, x-2, x-2$.

Пример 10.2. *Найти СЭД над полями Q и R матрицы* $A(x)=\begin{bmatrix} x^2-1 & x+1 \\ x+1 & x^2+2x+1\end{bmatrix}$.

Решение:

Так как $x^2+2x+1=(x+1)^2$, то $d_1(x)=x+1 \Rightarrow f_1(x)=x+1$.

$$d_2(x): detA(x)=\begin{vmatrix}(x-1)(x+1) & x+1 \\ x+1 & (x+1)^2\end{vmatrix}=(x+1)^2\begin{vmatrix}x-1 & 1 \\ 1 & x+1\end{vmatrix}=$$

$$=(x+1)^2(x-2)\Rightarrow d_2(x)=(x+1)^2(x^2-2)\Rightarrow$$

$$f_2(x) = (x+1)(x^2-2).$$

$f_2(x)$ не приведим над $Q \Rightarrow$ над $Q A(x) \sim diag(x+1, (x+1)(x^2-2))$ и здесь СЭД: $x+1, x+1, x^2-2$;
а вот над $R: A(x) \sim diag(x+1, (x+1)(x-\sqrt{2})(x+\sqrt{2}))$ и

$$\text{СЭД:} x+1, x+1, x-\sqrt{2}, x+\sqrt{2}.$$

Теорема 10.1. *Порядок, ранг и СЭД полиномиальной матрицы $A(x)$ однозначно определяют её инвариантные множители и, следовательно, саму матрицу с точностью до эквивалентности.*

Доказательство

Пусть полиномиальная матрица $A(x)$ n-го порядка и $rang A(x) = r$. Так как $rang A(x) = r$, то $f_{r+1}(x) = \ldots = f_n(x) = 0 \Rightarrow$ миноры $r+1$ порядка и выше равны 0. Поскольку $f_r(x)$ должен делиться на $f_i(x), i = \overline{1, r-1}$, то элементарные делители инвариантных множителей должны ходить в $f_r(x)$ в самой высокой степени. Значит, $f_r(x)$ равно произведению элементарных делителей, взятых в наивысшей степени. Из СЭД вычеркиваем элементарные делители высшей степени, тогда так как $f_{r-1}(x)/f_{r-2}(x)/\ldots/f_1(x) \Rightarrow f_{r-1}(x)$ должен содержать оставшиеся после вычеркивания ЭД наивысшей степени и т.д. Если мы вычеркиваем все ЭД, то в качестве оставшихся инвариантных множителей возьмём 1. Т.е. СЭД, ранг и порядок матрицы однозначно определяет матрицу канонического вида $K(x)$, как эквивалент полиномиальной матрицы $A(x)$. Теорема 10.1 доказана.

Теорема 10.2. *СЭД произвольной диагональной матрицы над $P[x]$ равна объединению СЭД её диагональных элементов, причём каждый элементарный делитель учитывается столько раз, во сколько диагональных элементов он входит.*

Теорема 10.3. *СЭД блочно-диагональной матрицы равен объединению СЭД её блоков.*

Пример 10.3. *Найти матрицу, если её СЭД такова:* $x+1, x+1, (x+1)^2$, $x-1, (x-1)^2$ *и* $r=4, n=5$.

Решение:

$$f_5(x) = 0$$

$$f_4(x) = (x+1)^2(x-1)^2$$

$$f_3(x) = (x+1)(x-1) \Rightarrow$$

$$f_2(x) = x+1$$

$$f_1(x) = 1$$

$$K(x) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & x+1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & (x+1)(x-1) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & (x+1)^2(x-1)^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

11. Собственные векторы и собственные значения матрицы

Определение 11.1. *Матричным многочленом от переменной* x *порядка* n *над полем* P *называется многочлен*

$$A_m x^m + A_{m-1}x^{m-1} + \cdots + A_1 x + A_0, \qquad (11.1)$$

где $A_0, \ldots, A_m$ *– матрицы* n*-го порядка над полем* P*, которые называются коэффициентами этого многочлена. Если* A_m *– ненулевая матрица, то* m *называется степенью многочлена (11.1),* $A_m x^m$ *его старшим членом.*

Умножив матрицы A_i на x_i, $i = \overline{0, m}$, а затем сложив полученные матрицы, видим, что всякий матричный многочлен (11.1) можно записать виде матрицы порядка n над $P[x]$. Так, к примеру

$$\begin{bmatrix} 4 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} x^3 + \begin{bmatrix} 0 & -3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} x^2 + \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4x^3 + x & -3x^2 + 2x + 1 \\ -x^3 & x^3 + x^2 - 2x \end{bmatrix}.$$

Обратно, всякую полиномиальную матрицу $A(x)$ порядка n над $P[x]$ можно представить в виде матричного многочлена порядка n над полем P (11.1). Например,

$$A(x) = \begin{bmatrix} x^3 + 2x^2 - x + 1 & x + 1 & 2 & 0 \\ 2x - 1 & 3x + 5 & x + 7 & -x \\ x^3 - 7x + 2 & x^2 - 5x & x^2 & -x^2 \\ x^2 + 1 & x^2 - 1 & -2x + 5 & x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} x^3 +$$

$$+ \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} x^2 + \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 1 & -1 \\ -7 & -5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 1 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 \\ -1 & 5 & 7 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 5 & 0 \end{bmatrix} -$$

матричный многочлен 4-го порядка и 3-ей степени.

Поэтому матричные многочлены являются лишь особым видом записи многочленных матриц.

Из определения равенства матриц следует условие равенства матричных многочленов одинаковых порядков: *матричные многочлены равны, если их степени одинаковы и коэффициенты при одинаковых степенях переменной x равны.* Складываются и перемножаются матричные многочлены по обычным правилам.

Очевидно, степень суммы матричных многочленов не выше максимума степени слагаемых. На примерах можно убедиться, что степень произведения двух матричных многочленов может быть меньше суммы степеней сомножителей. Однако, если старший коэффициент хотя бы одного из двух перемножаемых многочленов обратим, то степень произведения точно равна сумме степеней сомножителей.

Мы можем построить теорию матричных многочленов – аналог теории многочленов над числовым полем, но существуют сложности:

1) умножение матриц некоммутативно;

2) есть делители нуля.

Однако мы можем при построении теории делимости матричных многочленов ввести понятие левого и правого деления. В этом случае имеют место теоремы и схемы Горнера.

Пусть $A(x), B(x)$ – матричные многочлены n-го порядка над полем P.

Теорема 11.1. *Пусть $A(x)$ – произвольный матричный многочлен, а $B(x) = xE - C$ – матричный двучлен 1-ой степени. Тогда существует единственная пара матриц $(Q_1(x), R_1)$ порядка n над $P[x]$, таких что $A(x) = B(x)Q_1(x) + R_1$, где R_1 – матрица с элементами из поля P (постоянная матрица).*

В этом случае говорят о делении на $xE - C$ слева с остатком.

Теорема 11.2. *Пусть $A(x)$ – произвольный матричный многочлен, а $B(x) = xE - C$ – матричный двучлен 1-ой степени, тогда существует единственная пара матриц $(Q_2(x), R_2)$ порядка n над $P[x]$, таких что $A(x) = Q_2(x)B(x) + R_2$, где R_2 – постоянная матрица.*

А в этом случае говорят о делении на $xE - C$ *справа с остатком.*

Матрицы $Q_1(x)$ и R_1 ($Q_2(x)$ и R_2) называются соответственно *частным и остатком* при делении матрицы $A(x)$ на $B(x)$ слева (справа).

Более того, можно доказать:

$$R_1 = C^m A_m + C^{m-1} A_{m-1} + \cdots + C A_1 + A_0,$$

$$R_2 = A_m C_m + A_{m-1} C^{m-1} + \cdots + A_1 C + A_0.$$

Эти формулы аналогичны формуле $r = f(a)$ для остатка от деления обычного многочлена $f(x)$ на $x - a$ (теорема Безу).

Пример 11.1. *Разделить полиномиальную матрицу*

$$A(x) = \begin{bmatrix} -2x^2+5x+3 & -x^2+3x+2 & -x+6 \\ -3x^2+7x+11 & -3x^2+9x+1 & -2x+8 \\ -x^2+2x+8 & -2x^2+5x+3 & -x+4 \end{bmatrix}$$

слева и справа на $Ex - B$, где $B = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 3 \end{bmatrix}$.

Решение:

$$A(x) = \begin{bmatrix} -2 & -1 & 0 \\ -3 & -3 & 0 \\ -1 & -2 & 0 \end{bmatrix} x^2 + \begin{bmatrix} 5 & 3 & -1 \\ 7 & 9 & -2 \\ 2 & 5 & -1 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 3 & 2 & 6 \\ 11 & 1 & 8 \\ 8 & 3 & 4 \end{bmatrix} = A_2x^2 + A_1x + A_0$$

а) Разделим слева на $Ex - B$:
Составим схему Горнера:

	A_2	A_1	A_0
B	A_2	$BA_2 + A_1 = A_1'$	$BA_1' + A_0 = A_0'$

$$A(x) = (xE - B)(A_2x + A_1') + A_0'.$$

$$A_1' = BA_2 + A_1 = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & -1 & 0 \\ -3 & -3 & 0 \\ -1 & -2 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 5 & 3 & -1 \\ 7 & 9 & -2 \\ 2 & 5 & -1 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} -6 & -3 & 0 \\ -9 & -9 & 0 \\ -4 & -9 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 5 & 3 & -1 \\ 7 & 9 & -2 \\ 2 & 5 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & -1 \\ -2 & 0 & -2 \\ -2 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$A_0' = BA_1' + A_0 = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 & -1 \\ -2 & 0 & -2 \\ -2 & 0 & -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 & 2 & 6 \\ 11 & 1 & 8 \\ 8 & 3 & 4 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} -2 & 0 & -3 \\ -8 & 0 & -6 \\ -6 & 0 & -3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 & 2 & 6 \\ 11 & 1 & 8 \\ 8 & 3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

Тогда

$$A(x) = (xE - B)\left(\begin{bmatrix} -2 & -1 & 0 \\ -3 & -3 & 0 \\ -1 & -2 & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} -1 & 0 & -1 \\ -2 & 0 & -2 \\ -2 & 0 & -1 \end{bmatrix} \right) + \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix} =$$

$$= (xE - B) \begin{bmatrix} 2x - 1 & -x & -1 \\ -3x - 2 & -3x & -2 \\ -x - 2 & -2x & -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix} =$$

$$= (xE - B)Q_1(x) + R_1$$

б) Разделим справа на $Ex - B$:
Схема Горнера:

	A_2	A_1	A_0
B	A_2	$A_2B + A_1 = A_1'$	$A_1'B + A_0 = A_0'$

$$A(x) = (A_2x + A_1')(xE - B) + A_0'.$$

$$A_1' = A_2B + A_1 = \begin{bmatrix} -2 & -1 & 0 \\ -3 & -3 & 0 \\ -1 & -2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 5 & 3 & -1 \\ 7 & 9 & -2 \\ 2 & 5 & -1 \end{bmatrix} =$$

$$
= \begin{bmatrix} -6 & -3 & 0 \\ -12 & -6 & -3 \\ -6 & -3 & -3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 5 & 3 & -1 \\ 7 & 9 & -2 \\ 2 & 5 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & -1 \\ -5 & 3 & -5 \\ -4 & 2 & -4 \end{bmatrix}.
$$

$$
A_0' = A_1'B + A_0 = \begin{bmatrix} -1 & 0 & -1 \\ -5 & 3 & -5 \\ -4 & 2 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 & 2 & 6 \\ 11 & 1 & 8 \\ 8 & 3 & 4 \end{bmatrix} =
$$

$$
= \begin{bmatrix} -4 & 0 & -2 \\ -14 & 3 & -4 \\ -12 & 2 & -4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 & 2 & 6 \\ 11 & 1 & 8 \\ 8 & 3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 4 \\ -3 & 4 & 4 \\ -4 & 5 & 0 \end{bmatrix}.
$$

Тогда

$$
A(x) = \left(\begin{bmatrix} -2 & -1 & 0 \\ -3 & -3 & 0 \\ -1 & -2 & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} -1 & 0 & -1 \\ -5 & 3 & -5 \\ -4 & 2 & -4 \end{bmatrix} \right) (xE - B) + \begin{bmatrix} -1 & 2 & 4 \\ -3 & 4 & 4 \\ -4 & 5 & 0 \end{bmatrix} =
$$

$$
= \begin{bmatrix} -2x-1 & -x & -1 \\ -3x-5 & -3x+3 & -5 \\ -x-4 & -2x+2 & -4 \end{bmatrix} (xE - B) + \begin{bmatrix} -1 & 2 & 4 \\ -3 & 4 & 4 \\ -4 & 5 & 0 \end{bmatrix} = Q_2(x)(xE - B) + R_2
$$

12. Критерий подобия матриц

Теорема 12.1. *Пусть A и B – квадратные матрицы порядка n над полем P. Их характеристические матрицы $xE - A$ и $xE - B$ эквивалентны над $P[x]$ тогда и только тогда, когда существует невырожденная матрица Q порядка порядкаn над полем P такая, что*

$$(xE - B) = Q^{-1}(xE - A)Q. \tag{12.1}$$

Теорема 12.2. *(критерий подобия матриц). Матрицы A и B над полем P одного порядка подобны тогда и только тогда когда их характеристические матрицы эквивалентны.*

Доказательство:

Необходимость: Пусть $A \approx B \Rightarrow$ существует невырожденная матрица Q над полем P, что $B = Q^{-1}AQ$. Тогда $xE - B = xE - Q^{-1}AQ$. Но $xE = Q^{-1}(xE)Q \Rightarrow$ $\Rightarrow xE - B = Q^{-1}(xE)Q - Q^{-1}AQ = Q^{-1}(xE - A)Q$. И, значит, по теореме 12.1 $xE - B \sim xE - A$.

Достаточность: Пусть $xE - A \sim xE - B$, тогда, согласно теореме 12.1, верно равенство (12.1), из которого следует

$$B = Q^{-1}AQ. \tag{12.2}$$

Теорема 12.2 доказана.

Следствие 12.1. *Пусть A и B – квадратные матрицы одного и того же порядка над полем P. Тогда равносильны следующие утверждения:*

1) A и B подобны над P;

2) системы НОД миноров матриц $xE - B$ и $xE - A$ совпадают;

3) системы инвариантных множителей матриц $xE - A$ и $xE - B$ совпадают;

4) системы элементарных делителей матриц $xE - A$ и $xE - B$ совпадают.

Таким образом, вопрос о подобии матриц A и B одного и того же порядка можно решить так: составляем их характеристические матрицы и приводим их к канонической форме. Если эти формы совпадают, то $A \approx B$, если различны, то A и B не подобны.

Если $A \approx B$, то верно (12.2), и говорят, что Q трансформирует матрицу A в матрицу B, и называют Q – трансформирующей матрицей.

Часто необходимо установить не только подобие матриц, но и найти трансформирующую матрицу Q.

Способ: из $B = Q^{-1}AQ \Rightarrow AQ \Rightarrow$ получим n^2 уравнений с n^2 переменными $\Rightarrow$ решаем её. Если решений бесконечно много, то выбираем одно из них и составляем матрицу Q (если $detQ \neq 0$, то Q – трансформирующая).

Пример 12.1. *Доказать, что* $A \approx B$, *если*

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & -5 \\ 2 & 6 & -10 \\ 2 & 2 & -3 \end{bmatrix}, \ B = \begin{bmatrix} 6 & 20 & -34 \\ 6 & 32 & -51 \\ 4 & 20 & -32 \end{bmatrix}.$$

Решение:

Составим характеристические матрицы:

$$xE - A = \begin{bmatrix} x-3 & -2 & 5 \\ -2 & x-6 & 10 \\ -1 & -2 & x+3 \end{bmatrix}, \ xE - B = \begin{bmatrix} x-6 & -20 & 34 \\ -6 & x-32 & 51 \\ -4 & -20 & x+32 \end{bmatrix}.$$

Найдём систему НОД миноров матрицы $xE - A$:

$$d_3(x) = det(xE - A) = \begin{vmatrix} 0 & -2x+4 & x^2-4 \\ 0 & x-2 & -2x+4 \\ -1 & -2 & x+3 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} -2x+4 & x^2-4 \\ x-2 & -2x+4 \end{vmatrix} =$$

$$= -(x-2)^2 \begin{vmatrix} -2 & x+2 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = -(x-2)^2(4-x-2) = (x-2)^3.$$

$d_2(x)$ – делитель $d_3(x) \Rightarrow d_2(x) : 1, x-2, (x-2)^2, (x-2)^3$.

Рассмотрим $M\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} -2 & 5 \\ x-6 & 10 \end{vmatrix} = -5(x-2) \Rightarrow d_2(x)$ не может быть $(x-2)^2$ и $(x-2)^3$.

Нетрудно проверить, что и все остальные миноры 2-ого порядка делятся на $(x-2) \Rightarrow d_2(x) = x-2$.

Очевидно, что $d_1(x) = 1$. Итак,

$f_1(x) = 1, f_2(x) = x-2, f_3 = \dfrac{d_3(x)}{d_2(x)} = (x-2)^2.$

Составим систему НОД миноров матрицы $xE - B$:

$$d_3(x) = \begin{vmatrix} 0 & -20x+40 & x^2+26x-56 \\ 0 & 2x-4 & -3x+6 \\ -4 & -20 & x+32 \end{vmatrix} =$$

$$= (-4)\begin{vmatrix} -20x+40 & x^2+26x-56 \\ 2x-4 & -3x+6 \end{vmatrix} = \{\text{нормируем}\} =$$

$$= x^3 - 6x^2 + 12x - 8 = (x-2)^3.$$

Также нетрудно проверить, что $d_2(x) = x-2$ и $d_1(x) = 1 \Rightarrow f_1(x) = 1, f_2(x) = x-2$ и $f_3(x) = \dfrac{d_3(x)}{d_2(x)} = (x-2)^2$.

А значит, $xE - B \sim \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & x-2 & 0 \\ 0 & 0 & (x-2)^2 \end{vmatrix}$. Таким образом, $A \approx B$.

13. Жорданова нормальная форма матрицы над полем

В этом разделе рассматривается следующая задача: в классе подобных матриц выбрать матрицу, имеющую, по возможности, более простой вид. Самым простым видом представляется диагональный, однако не каждая матрица подобна диагональной. Существует несколько вариантов решения этой задачи. Рассмотрим два из них: жорданову нормальную форму и фробениуса нормальную форму.

Определение 13.1. *Клеткой Жордано n-го порядка, отвечающей собственному значению a, называется матрица:*

$$J_n(a) = \begin{bmatrix} a & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & a & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & a \end{bmatrix} \quad a \in P. \tag{13.1}$$

Очевидно, что $J_n(a) = aE_n + H_n$.

Все диагональные элементы клетки $J_n(a)$ равны a, выше диагонали параллельно ей расположена полоса $1, \dots, 1$, все другие элементы клетки равны 0. Например, $J_1(2) = 2, J_2(2) = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}, J_3(2) = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$.

Иногда вместо клетки (13.1) рассматривают нижнюю жорданову клетку: $aE_n + F_n$.

Определение 13.2. *Клеточно-диагональная матрица*

$$J = diag(J_{n_1}(a_1), J_{n_2}(a)2), \dots, J_{n_m}(a_m)), \tag{13.2}$$

где $J_{n_i}(a_i), i = \overline{1,m}$ – клетки Жордана, называется матрицей Жордана.

Заметим, что $n_i(i = \overline{1,m})$, а также a_i не обязательно различны. При этом $m \geq 1$, т.е. жорданова клетка принадлежит к числу жордановых матриц.

Пример 13.1.

$$J = diag(J_2(3), J_1(0), J_3(2)) = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

Диагональные матрицы являются частным случаем жордановых матриц: это будут те жордановы матрицы, у которых все жордановы клетки имеют порядок, равный 1.

Определение 13.3. *Если A – произвольная квадратная матрица над полем P и J – подобная ей матрица Жордана ($A \approx J$), то J называется жордановой нормальной формой матрицы A. Если для матрицы A существует жорданова нормальная форма, то говорят, что A приводится к жордановой нормальной форме (ЖНФ).*

Лемма 13.1. *Характеристическая матрица клетки Жордана (13.1) имеет только один элементарный делитель $(x-a)^n$.*

Доказательство

Характеристическая матрица клетки Жордана (13.1) имеет вид:

$$J_n(a_n) - xE = \begin{bmatrix} a-x & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & a-x & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a-x & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a-x & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & a-x \end{bmatrix}. \qquad (13.3)$$

Тогда $det(J_n(a) - xE) = (a-x)^n, \Rightarrow d_n(x) = (x-a)^n$.

Среди миноров n–*1*-ого порядка матрицы (13.3) рассмотрим минор M, полученный вычёркиванием первого столбца и последней строки: $M = 1 \Rightarrow d_{n-1}(x) = 1$. Из соотношений

$$d_{n-1}(x) = f_1(x) \cdot \ldots \cdot f_{n-1}(x) = 1,$$

$$d_n(x) = f_1(x) \cdot \ldots \cdot f_{n-1}(x) f_n(x) = (x-a)^n$$

вытекает, что

$$f_1(x) = \dots = f_{n-1}(x) = 1, f_n(x) = (x-a)^n.$$

Значит, матрица (13.3) имеет единственный элементарный делитель $(x-a)^n$. Лемма 13.1 доказана.

Следствие 13.1. *Элементарными делителями характеристической матрицы для матрицы Жордана (13.2) являются многочлены $(x-a_i)^{n_i}, i = \overline{1,m}$ и только они. При этом учитываются все повторения многочленов.*

Действительно, характеристическая матрица для матрицы Жордана (13.2) – клеточно-диагональная матрица. Поэтому, по теореме 10.3 СЭД блочно-диагональной (клеточно-диагональной) матрицы равна объединению СЭД её блоков (клеток). Поэтому имеем, что СЭД матрицы Жордана (13.2) состоит из элементарных делителей $(x-a_i)^{n_i}$ характеристических матриц отдельных клеток Жордана $J_{n_i}(a_i), i = \overline{1,m}$.

Теорема 13.1. *Матрица A порядка n над полем P приводится к ЖНФ тогда и только тогда, когда $P_A(x)$ имеет в поле P ровно n корней с учётом их кратностей, т.е. разлагается над этим полем в произведение многочленов первой степени. ЖНФ матрицы A определяется однозначно с точностью до порядка следования клеток Жордана на главной диагонали.*

Доказательство

Необходимость: Пусть матрица A порядка n над полем P приводится к ЖНФ J над полем P. На диагонали матрицы J расположены корни $P_j(x)$, и только они. Следовательно, $P_j(x)$ имеет n коней в поле P. $A \approx J$, значит, имеет тот же характеристический многочлен $P_j(x)$ (по следствию 12.1).

Достаточность: Пусть $P_A(x)$ имеет n корней в поле P и, следовательно, разлагается над P на множители 1-ой степени:

$$P_A(x) = |xE - A| = (x - a_1)(x - a_2)\dots(x - a_n).$$

Тогда $d_n(x) = (x-a_1)(x-a_2)\dots(x-a_n)$. Заметим, что произведение элементарных делителей матрицы $xE - A$ равно произведению всех её инвариантных множителей, то есть равно $d_n(x)$. Значит, каждый элементарный делитель матрицы $xE - A$ делит $P_A(x)$ и является степенью неприводимого над P многочлена. Таким образом, этот делитель имеет вид $(x - a)^k$.

Пусть $(x - a_i)^{n_i}, i = \overline{1, m}$ – СЭД $xE - A$, J – матрица Жордана (13.2), соответствующая этой системе. Порядок J равен сумме степеней элементарных делителей, т.е. степени их произведения, равного $d_n(x)$. Следственно, J – матрица n-го порядка. СЭД матриц $xE - A$ и $xE - J$ совпадают, следовательно $A \approx J$, J – ЖНФ матрицы A.

СЭД определяет матрицу Жордана с точностью до последовательности расположения диагональных клеток: число этих клеток равно числу элементарных делителей, каждому элементарному делителю вида $(x - a)^m$ соответствует клетка $J_m(a)$. Теорема 13.2 доказана.

Следствие 13.2. *Любая квадратная матрица над полем C приводится к ЖНФ.*

В доказательстве теоремы содержится алгоритм построения ЖНФ произвольной матрицы A:

1) составляем характеристическую матрицу;
2) приводим её к каноническому виду;
3) находим СЭД матрицы $xE - A$.

Если хотя бы один из них не является многочленом вида $(x-a)^k$, то ЖНФ не существует (над фиксированным полем). В противном случае для каждого элементарного делителя вида $(x-a)^k$ нужно записать клетку Жордана $J_k(a)$. Клеточно-диагональная матрица, составленная из этих клеток, расположенных на главной диагонали в произвольной последовательности, является ЖНФ матрицы A.

Пример 13.2. *Привести к ЖНФ матрицу*

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 6 & -3 & 2 \\ 8 & -6 & 5 \end{bmatrix}.$$

Решение:

$$xE - A = \begin{bmatrix} x-3 & 1 & 0 \\ -6 & x+3 & -2 \\ -8 & 6 & x-5 \end{bmatrix}.$$

Очевидно, что $d_1(x) = 1$. Найдём $d_2(x)$.

Рассмотрим $M\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ x+3 & -2 \end{vmatrix} = -2 \Rightarrow d_2(x) = 1.$

Найдём

$$d_3(x) = det(xE - A) = (x-3)(-1)^2 \begin{vmatrix} x+3 & -2 \\ 6 & x-5 \end{vmatrix} + (-1)^3 \begin{vmatrix} -6 & -2 \\ -8 & x-5 \end{vmatrix} =$$

$$= (x-3)(x^2-2x-3)-(14-6x) = x^3-5x^2+3x+9-14x+6x =$$

$$= x^3-5x^2+9x-5.$$

Подбором находим один из корней: $x = 1$.
$\Rightarrow d_3(x) = (x-1)(x^2-4x+5)$(а это и есть $P_A(x)$).

Итак, $f_1(x) = f_2(x) = 1, f_3(x) = (x-1)(x^2-4x+5)$,
$\Rightarrow xE - A \sim diag\,(1, 1, (x-1)(x^2-4x+5))$.

В поле R многочлен x^2-4x+5 корней не имеет, следовательно, над R не существует ЖНФ матрицы A.

Над C у многочлена x^2-4x+5 два корня:
$D = 16 - 20 = -4 = 4i^2$
$x_{1/2} = \dfrac{4 \pm 2i}{2} = 2 \pm i$.

Таким образом, $f_3(x) = (x-1)(x-2-i)(x-2+i)$ над C. Тогда СЭД матрицы $xE - A : x-1, x-(2+i), x-(2-i)$.

Значит, $J = diag(1, 2+i, 2-i) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2+i & 0 \\ 0 & 0 & 2-i \end{bmatrix}$ – ЖНФ матрицы A.

Заметим, что так как элементарные делители матрицы $xE - A$ оказались 1-й степени, то матрица J диагональная.

14. Минимальный многочлен матрицы

Определение 14.1. *Многочлен $f(x)$ называется* *<u>аннулирующим</u>* *для матрицы A, если $f(A) = 0$.*

Теорема 14.1. *Для любой матрицы A существует аннулирующий многочлен.*

<u>Доказательство</u>

Рассмотрим систему матриц:

$$E, A, A^{2^2}, \dots, A^{n^2}, \tag{14.1}$$

где A – матрица n-го порядка. Система (14.1) при $n \geq 2$ всегда линейно зависима, поэтому существует $a_0, a_1, \dots, a_{n^2} \in P$, не все из которых равны 0, такие, что $a_0E + a_1A + \dots + a_{n^2}A^{n^2} = 0$. Тогда в качестве аннулирующего многочлена возьмём $f(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_{n^2}x^{n^2}$ (если не n^2, то $f(x)$ – нулевой многочлен). Теорема 14.1 доказана.

Определение 14.2. *Аннулирующий многочлен для квадратной матрицы A называется* *<u>минимальным</u>*, *если он удовлетворяет следующим условиям:*

1) его степень минимальна из всех степеней аннулирующих многочленов;

2) старший коэффициент равен 1.

Обозначим его $m_A(x)$.

Теорема 14.2. *Минимальный многочлен для матрицы A определён однозначно.*

<u>Доказательство</u>

Предположим противное, что для матрицы A существуют два минимальных многочлена $m_A(x)$ и $l_A(x)$, т.е. $m_A(x) = 0, l_A(x) = 0$ и они удовлетворяют условиям 1) и 2) из определения 14.2.

Составим $S_A(x) = m_A(x) - l_A(x)$, но $S_A(A) = m_A(A) - l_A(A) = 0$, т.е $S_A(x)$ – аннулирующий многочлен степени ниже минимального $(degS_A(x) < degm_A(x)(degl_A(x))$, то получили противоречие, следовательно, $S_A(x)$ – нулевой многочлен, и $m_A(x) = l_A(x)$. Теорема 14.2 доказана.

Теорема 14.3. *Если A подобна B ($A \approx B$), то множество аннулирующих многочленов матрицы A совпадает с множеством аннулирующих многочленов матрицы B, в частности, минимальные многочлены совпадают.*

Доказательство

$A \approx B$, следовательно, существует T – трансформирующая, что $B = T^{-1}AT$.

Пусть $f(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n$ – аннулирующий для матрицы A, следовательно, $f(A) = 0$. Тогда

$$f(B) = a_0E + a_1T^{-1}AT + a_2(T^{-1}AT)^2 + \cdots$$
$$+a_n(T^{-1}AT)^n = T^{-1}a_0ET + T^{-1}a_1AT + T^{-1}(a_2A^2)T + \cdots + T^{-1}(a_nA^n)T =$$
$$= T^{-1}(a_0E + a_1A + \cdots + a_nA^n)T = T^{-1}f(A)T = 0.$$

Очевидно, верно и обратное: каждый аннулирующий многочлен для матрицы B будет аннулирующим и для матрицы A.

Так как минимальные многочлены определяются однозначно, то они будут совпадать. Теорема 14.3 доказана.

Теорема 14.4. *Любой многочлен $f(x)$ из кольца $P[x]$ является аннулирующим для матрицы A тогда и только тогда, когда он делится на минимальный многочлен.*

Доказательство

Разделим $f(x)$ на $m_A(x)$: $f(x) = m_A(x)g(x) + r(x)$, где $r(x) = 0$ или $deg r(x) < deg m_A(x)$.

$$f(A) = m_A(A)g(A) + r(A) \Rightarrow f(A) = r(A).$$

Поэтому $f(A) = 0$ тогда и только тогда, когда $r(A) = 0$.

Если же $r(x) \neq 0$, то $m_A(x)$ не является минимальным. Значит, $(r(x) \neq 0) \equiv 0 \Rightarrow$
$\Rightarrow r(x) = 0 \Rightarrow f(x) = m_A(x)g(x) \Rightarrow f(x)/m_a(x)$.

Теорема 14.4 доказана.

Теорема 14.5. *Минимальный многочлен блочно-диагональной матрицы равен НОК минимальных многочленов её блоков.*

Доказательство

$$A = diag(A_1, A_2, \dots, A_k), f(A) = diag(f(A_1), \dots, f(A_k)),$$

где $f(A) = 0 \Leftrightarrow f(A_i) = 0, i = \overline{1, k}$. Это же имеет место и для минимальных многочленов. Теорема 14.5 доказана.

Теорема 14.6. *Минимальный многочлен клетки Жордана $J_n(a)$ равен $(x-a)^n$.*

Доказательство

Составим матрицу

$$J_n(a) - aE = J_n(0) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} = H$$

$H^n = 0 \Rightarrow (J_n(a) - aE)^n = 0 \Rightarrow (x-a)^n$ аннулирующий многочлен для $J_n(a)$. $((x-a)^n = 0$ при $x = J_n(a))$.

Если $k < n$, то $(J_n(a) - aE)^k = H^k \neq 0, \Rightarrow (x-a)^n$ – минимальный многочлен для $J_n(a)$. Теорема 14.6 доказана.

Теорема 14.7. *Минимальный многочлен для матрицы A равен последнему инвариантному множителю её характеристической матрицы.*

Доказательство

Случай 1. Пусть характеристический многочлен $|xE - A|$ имеет n корней, считая и кратные. По теореме 13.1 матрица A приводится к ЖНФ, т.е. $A \sim diag(J_{n_1}(a_1), \ldots, J_{n_m}(a_m))$. По теореме 14.3 минимальные многочлены подобных матриц совпадают, т.е. $m_A(x) = m_j(x)$. Тогда, по теореме 14.5 её минимальный многочлен равен НОК минимальных многочленов её блоков. По теореме 14.6 минимальный многочлен клетки Жордана равен $(x-a)^n$: для $J_{n_1}(a_1)$ минимальный многочлен – $(x-a_1)^{n_1}$ и т.д. Чтобы найти минимальный многочлен матрицы J надо найти НОК минимальных многочленов клеток Жордана

$$\Rightarrow m_j(x) = (x-a_1)^{n_1} \cdot \ldots \cdot (x-a_m)^{n_m} = m_A(x).$$

Докажем, что $m_A(x) = f_n(x)$. Для этого выпишем СЭД матрицы $xE - A$: $(x-a_1)^{k_1}, (x-a_2)^{k_2}, \ldots, (x-a_m)^{k_m}$, где $1 \le k_i \le n_i, i = \overline{1,m}$. Так как инвариантный множитель $f_n(x)$ делится на все предыдущие инвариантные множители, то он содержит инвариантные делители наивысшей степени, т.е. $f_n(x) = (x-a_1)^{n_1} \cdot \ldots \cdot (x-a_m)^{n_m}$ и $\Rightarrow f_n(x) = m_A(x)$.

Случай 2. $P_A(x)$ имеет меньше чем n корней в поле P. Тогда рассмотрим P' – расширение P, где $P_A(x)$ имеет ровно n корней, и рассуждения сведутся к случаю 1, так как последний инвариантный множитель (минимальный многочлен) не зависит от поля, над которым его рассматриваем.

Теорема 14.7 доказана.

Теорема 14.8. *(Гамильтона-Кэли). Характеристический многочлен $P_A(x)$ является аннулирующим многочленом для матрицы A, т.е. $P_A(A) = 0$.*

Следствие 14.1. *Все корни $P_A(x)$ являются корнями $m_A(x)$, только другой кратности.*

Пример 14.1. *Найти минимальный многочлен матрицы* $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$.

Решение:

$$xE - A = \begin{bmatrix} x-3 & -1 & 1 \\ 0 & x-2 & 0 \\ -1 & -1 & x-1 \end{bmatrix} \Rightarrow d_1(x) = 1 \Rightarrow f_1(x) = 1$$

$$d_3(x) : det(xE - A) = (x-2)(-1)^4 \begin{vmatrix} x-3 & 1 \\ -1 & x-1 \end{vmatrix} = (x-2)^3 \Rightarrow d_3(x) = (x-2)^3.$$

Нетрудно проверить, что $d_2(x) = (x-2)$. Поэтому $m_A(x) = f_3(x) = \dfrac{d_3(x)}{d_2(x)} = (x-2)^2$.

Теорема 14.9. *(условие диагонализуемости матрицы). Для того, чтобы матрица A была диагонализуема, необходимо и достаточно, чтобы её минимальный многочлен имел в поле P (над которым рассматриваем A) столько корней, какова его степень, причём среди них не должно быть кратных.*

(См. пример 13.2).

15. Фробениуса нормальная форма матрицы

Определение 15.1. *Пусть дан многочлен ненулевой степени* $g(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_{n-1}x^{n-1} + x^n \in P[x]$. *Клеткой Фробениуса, сопровождающей* $g(x)$ *называется матрица:*

$$Fg = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & -a_0 \\ 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 & -a_1 \\ 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 & -a_2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & -a_{n-2} \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 & -a_{n-1} \end{bmatrix}.$$

Например, матрицы 1, $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ являются клетками Фробениуса, сопровождающие соответственно многочлены: $x - 1, x^2 - 1, x^3$.

Определение 15.2. *Пусть* $g_1(x), g_2(x), \ldots, g_m(x)$ *– система многочленов, обладающая свойством:* $g_i(x)/g_{i-1}(x)$ *для* $i = \overline{2, m}$, *причём многочлены* $g_k, k = \overline{1, m}$ *ненулевой степени со старшими коэффициентами равными 1, тогда матрица* $F = diag(Fg_1, Fg_2, \ldots, Fg_m)$ *называется матрицей Фробениуса, сопровождающая многочлены* $g_1(x), g_2(x), \ldots, g_m(x)$. *Здесь* Fg_k *– клетки Фробениуса* $(k = \overline{1, m})$, *сопровождающие соответственно многочлены* $g_k, k = \overline{1, m}$.

Если квадратная матрица $A \approx F$, то F называется фробениусовой нормальной формой (ФНФ) матрицы A.

Теорема 15.1. *Пусть* $F = diag(Fg_1, \ldots, Fg_m)$ *– матрица Фробениуса порядка* n, *сопровождающая многочлены* $g_1(x), g_2(x), \ldots, g_m(x)$, *то система инвариантных множителей матрицы* $xE - F$ *будет:*

$$\underbrace{1, 1, \ldots, 1}_{n-m}, g_1(x), g_2(x), \ldots, g_m(x).$$

Замечание 15.1. *Верно утверждение, обратное теореме 15.1.*

Теорема 15.2. *Для любой квадратной матрицы A существует единственная фробениуса нормальная форма над полем P.*

Замечание 15.2. *Клетка $Fg = L^T(g)$, где $L(g)$ – клетка, соответствующая первой естественной нормальной форме: $L = diag(L(g_1), L(g_2), \ldots, L(g_m))$.*

Пример 15.1. *Записать ФНФ для* $A = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 6 & -3 & 2 \\ 8 & -6 & 5 \end{bmatrix}$.

Решение:

$$xE - A = \begin{bmatrix} x-3 & 1 & 0 \\ -6 & x+3 & -2 \\ -8 & 6 & x-5 \end{bmatrix}, d_1(x) = 1$$

$d_3(x) : det(xE - A) = (x-3)\begin{vmatrix} x+3 & -2 \\ 6 & x-5 \end{vmatrix} + 1(-1)^3 \begin{vmatrix} -6 & -2 \\ -8 & x-5 \end{vmatrix} =$
$= (x-3)(x^2-2x-3) = (-6x+30-16) = x^3 - 5x^2 + 9x - 5 \Rightarrow$
$\Rightarrow$ {проверим деление «уголком»} $d_3(x) = (x-1)(x^2-4x+5)$.

$d_2(x)$: Рассмотрим $M\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ x-3 & -2 \end{vmatrix} = -2 \Rightarrow d_2(x) = 1$

$f_1(x) = f_2(x) = 1$, $f_3(x) = -5 + 9x - 5x^2 + x^3 \Rightarrow g(x) = f_3(x)$.

Значит, клетка Фробениуса $Fg = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 5 \\ 1 & 0 & -9 \\ 0 & 1 & 5 \end{bmatrix}$ является ФНФ матрицы A.

Пример 15.2. *Пусть матрица $A \in M_{10}(R)$ и её характеристическая матрица имеет инвариантные множители:*

$$f_1(x) = f_2(x) = \cdots = f_7(x) = 1, f_8(x) = x+1, f_9(x) = x^3+1,$$

$$f_{10}(x) = (x^3+1)^2.$$

Записать ФНФ матрицы A.

Решение:

$$f_9(x) = x^3+1 = 1 + 0\cdot x + 0\cdot x^2 + x^3$$

$$f_{10}(x) = (x^3+1)^2 = x^6 + 2x^3 + 1 = 1 + 0\cdot x + 0\cdot x^2 + 2\cdot x^3 +$$

$$+0\cdot x^4 + 0\cdot x^5 + 1\cdot x^6$$

по теореме 15.1 у $xE - F$ такие же инвариантные множители, так как $xE - F \sim xE - A$, и, следовательно $g_i(x) = f_i(x) \neq 1$.

$$F = diag\left(-1, \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}\right) =$$

$$= \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$ – ФНФ для матрицы A.

16. Пучки матриц

Определение 16.1. *Прямоугольная матрица $A + xB$, где $A, B \in P_{m,n}$ называется пучком прямоугольных матриц A и B.*

Определение 16.2. *Два пучка прямоугольных матриц $A+xB$ и A_1+xB_1 одних и тех же размеров $m \times n$, связанные равенством:*

$$P(A + xB)Q = A_1 + xB_1$$

в котором P и Q – постоянные невырожденные квадратные матрицы соответственно порядков m и n, называются эквивалентными.

Все пучки матриц $A + xB$ подразделяются на два основных типа: регулярные и сингулярные.

Определение 16.3. *Пучок матриц $A + xB$ называется регулярным, если $A, B \in P_{n,n}$ и $\det(A + xB) \neq 0$.*

Определение 16.4. *Пучок матриц $A+xB$ называется сингулярным, если A, B разного порядка или одинакового порядка, но $\det(A + xB) = 0$.*

Теорема 16.1. *Два пучка квадратных матриц одного и того же порядка $A+xB$ и $A_1 + xB_1$, у которых $\det B \neq 0$ и $\det B_1 \neq 0$ являются эквивалентными тогда и только тогда, когда эти пучки имеют одни и те же элементарные делители в поле P.*

17. Матричные уравнения $AX = XB, AX = XA, AX - XB = C$

I. Рассмотрим матричное уравнение $AX = XB$, где $A \in C_{m,m}$, $B \in C_{n,n}$, $X \in C_{m,n}$. Пусть для матрицы A СЭД:

$$(\lambda - \lambda_1)^{p_1}, (\lambda - \lambda_2)^{p_2}, \ldots, (\lambda - \lambda_u)^{p_u}, p_1 + \cdots + p_u = m;$$

а для B СЭД:

$$(\lambda - \mu_1)^{q_1}, (\lambda - \mu_2)^{q_2}, \ldots (\lambda - \mu_\vartheta)^{q_\vartheta}, q_1 + \cdots + q_\vartheta = n.$$

Пусть $\tilde{A}$ – ЖНФ A, $\tilde{B}$ – ЖНФ B, а U и ϑ соответственно трансформирующие матрицы для A и B : $\tilde{A} = U^{-1}AU, \tilde{B} = \vartheta^{-1}B\vartheta$ (так как $A \approx \tilde{A}, B \approx \tilde{B}$).

Тогда $\tilde{A} = diag(J_{p_1}(\lambda_1), \ldots, J_{p_u}(\lambda_u)), \tilde{B} = diag(J_{q_1}(\mu_1), \ldots, J_{q_\vartheta}(\mu_\vartheta))$. Здесь $J_{p_i}(\lambda_i)$, $i = \overline{1, u}$ – жордановы клетки матрицы $A, J_{q_i}(\mu_i), i = \overline{1, \vartheta}$ – жордановы клетки матрицы B.

Подставив в уравнение $AX = XB$ матрицы $\tilde{A}$ и $\tilde{B}$, получим $U\tilde{A}U^{-1}X = X\vartheta\tilde{B}\vartheta^{-1}$, $\tilde{A}U^{-1}X\vartheta = U^{-1}X\vartheta\tilde{B}$.

Обозначив $\tilde{X} = U^{-1}X\vartheta(+)$, имеем $\tilde{A}\tilde{X} = \tilde{X}\tilde{B}(*)$. Если нам удается решить $(*)$, то мы легко решим уравнение $AX = XB$, используя $(+)$. Матрица $\tilde{X}$ разбивается на блоки: $\tilde{X} = (X_{\alpha\beta})$, где $X_{\alpha\beta} \in C_{p_\alpha, q_\beta}, \alpha = \overline{1, u}, \beta = \overline{1, \vartheta}$ (в соответствии с блочно-диагональным видом матриц $\tilde{A}$ и $\tilde{B}$). Тогда уравнение $\tilde{A}\tilde{X} = \tilde{X}\tilde{B}$ распадается на $u \cdot \vartheta$ матричных уравнений:

$$J_{p_\alpha} \cdot X_{\alpha\beta} = X_{\alpha\beta}J_{q\beta}, \alpha = \overline{1, u}, \beta = \overline{1, \vartheta},$$

$$(\lambda_\alpha E_{p_\alpha} + H_{p_\alpha})X_{\alpha\beta} = X_{\alpha\beta}(\mu_\beta E_{q_\beta} + H_{q_\beta}),$$

$$(\mu_\beta - \lambda_\alpha)X_{\alpha\beta} = H_{p_\alpha}X_{\alpha\beta} - X_{\alpha\beta}H_{q_\beta}, \alpha = \overline{1, u}, \beta = \overline{1, \vartheta}. \qquad (17.1)$$

<u>*Возможны два случая:*</u>

1) $\mu_\beta \neq \lambda_\alpha$, тогда $X_{\alpha\beta} = 0$.

2) $\mu_\beta = \lambda_\alpha$, тогда $H_{p_\alpha} X_{\alpha\beta} = X_{\alpha\beta} H_{q_\beta}$.

Напомним, что в матрицах H_{p_α} и H_{q_β} элементы первой наддиагонали равны 1, а остальные – 0. Отсюда

2.1) $p_\alpha = q_\beta$, тогда

$$X_{\alpha\beta} = \begin{bmatrix} a_1 a_2 a_3 & \cdots & a_{p_\alpha - 1} & a_{p_\alpha} \\ 0 a_1 a_2 & \cdots & a_{p_\alpha - 2} & a_{p_\alpha - 1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 000 & \cdots & a_1 & a_2 \\ 000 & \cdots & 0 & a_1 \end{bmatrix} = T_{p_\alpha}, a_i \in C.$$

2.2) $p_\alpha < q_\beta$, тогда $X_{\alpha\beta} = \begin{bmatrix} 0 & T_{p_\alpha} \end{bmatrix}$, где нулевой блок имеет размер $p_\alpha \times (q_\beta - p_\alpha)$.

2.3) $p_\alpha > q_\beta$, тогда $X_{\alpha\beta} = \begin{bmatrix} T_{q_\beta} \\ 0 \end{bmatrix}$, где нулевой блок имеет размер $(p_\alpha - q_\beta) \times q_\beta$.

Про матрицы 2.1–2.3 говорят, что они имеют *правильную верхнюю треугольную форму*. Количество произвольных параметров в них равно $\min\{p_\alpha, q_\beta\}$.

Пример 17.1.

$$1)\ p_\alpha = q_\beta = 4 \to X_{\alpha\beta} = \begin{bmatrix} a & b & c & d \\ 0 & a & b & c \\ 0 & 0 & a & b \\ 0 & 0 & 0 & a \end{bmatrix}.$$

$$2)\ p_\alpha = 3,\ q_\beta = 5 \to X_{\alpha\beta} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & a & b & c \\ 0 & 0 & 0 & a & b \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a \end{bmatrix}.$$

$$3)\ p_\alpha = 5,\ \ q_\beta = 3 \to X_{\alpha\beta} = \begin{bmatrix} a & b & c \\ 0 & a & b \\ 0 & 0 & a \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

$$4)\ p_\alpha = q_\beta = 1 \to X_{\alpha\beta} = \left[a\right].$$

Справедлива

Теорема 17.1. *Общее решение уравнения* $AX = XB$, *где* $A \in C_{m,m}$, $B \in C_{n,n}$, $A = U\tilde{A}U^{-1} = U diag(J_{p_1}(\lambda_1), \cdots, J_{p_u}(\lambda_u))U^{-1}$, $p_1 + \cdots + p_u = m$, $B = \vartheta\tilde{B}\vartheta^{-1} = \vartheta diag(J_{q_1}(\mu_1), \cdots, J_{q_\vartheta}(\mu_\vartheta))\vartheta^{-1}$, $q_1 + \cdots + q_\vartheta = n$, *может быть найдено по формуле:*

$$X = UX_{\tilde{A}\tilde{B}}\vartheta^{-1}.$$

Здесь $X_{\tilde{A}\tilde{B}}$ *– общее решение уравнения* $\tilde{A}\tilde{X} = \tilde{X}\tilde{B}$, *причём* $X_{\tilde{A}\tilde{B}} = (X_{\alpha\beta}); \alpha = \overline{1,u}$, $\beta = \overline{1,\vartheta}; X_{\alpha\beta} \in C_{p_\alpha, q_\beta}$. *Если* $\mu_\beta \neq \lambda_\alpha$, *то* $X_{\alpha\beta} = 0$; *если* $\mu_\beta = \lambda_\alpha$, *то* $X_{\alpha\beta}$ *– произвольная правильная верхняя треугольная матрица.* $N = \sum\limits_{\alpha=1}^{u}\sum\limits_{\beta=1}^{\vartheta}\sigma_{\alpha\beta}$ *– количество параметров в матрице* X, *где* $\sigma_{\alpha\beta} = \deg\left(\text{НОД}\{(\lambda-\lambda_\alpha)^{p_\alpha}, (\lambda-\mu_\beta)^{q_\beta}\}\right)$, $\alpha = \overline{1,u}$ $\beta = \overline{1,\vartheta}$.

Следствие 17.1. *Если матрицы* A *и* B *не имеют одинаковых собственных значений, то уравнение* $AX = XB$ *имеет только нулевое решение.*

II. Пусть дана $A \in C_{m,m}$ и необходимо найти все матрицы $X \in C_{m,m}$, перестановочные с матрицей A. Для этого нам надо найти общее решение уравнения $AX = XA$. Так как $AX = XA$ – частный случай уравнения $AX = XB$, то для его решения воспользуемся теоремой 17.1 и сформулируем новую теорему.

Теорема 17.2. *Общее решение уравнения* $AX = XA, A \in C_{m,m}, A = U\tilde{A}U^{-1} = U diag(J_{p_1}(\lambda_1), \cdots, J_{p_u}(\lambda_u))U^{-1}, p_1 + \cdots + p_u = m$, *может быть найдено по формуле:*

$$X = UX_{\tilde{A}}U^{-1}.$$

Здесь $X_{\tilde{A}}$ *– общее решение уравнения* $\tilde{A}\tilde{X} = \tilde{X}\tilde{A}$. $X_{\tilde{A}} = (X_{\alpha\beta}); \alpha, \beta = \overline{1, u}, X_{\alpha\beta} \in C_{p_\alpha, q_\beta}$. *Если* $\lambda_\alpha \neq \lambda_\beta$, *то* $X_{\alpha\beta} = 0$; *если* $\lambda_\alpha = \lambda_\beta$, *то* $X_{\alpha\beta}$ *– произвольная правильная верхняя треугольная матрица. Матрица* X *зависит от* N *произвольных параметров:* $N = \sum\limits_{\alpha,\beta=1}^{u} \sigma_{\alpha\beta}$, *где* $\sigma_{\alpha\beta} = \deg\left(\text{НОД}\{(\lambda - \lambda_\alpha)^{p_\alpha}, (\lambda - \lambda_\beta)^{p_\beta}\}\right)$, $\alpha, \beta = \overline{1, u}$.

III. Пусть дано уравнение $AX - XB = C$, где $B \in C_{n,n}, A \in C_{m,m}, C \in C_{m,n}, X \in C_{m,n}$. Если матрицы A и B не имеют одинаковых собственных значений, то уравнение $AX - XB = C$ имеет единственное решение. Если же матрицы A и B имеют одинаковые собственные значения, то в зависимости от матрицы C возможны *два варианта:*

1) уравнение решения не имеет;

2) $X = X_0 + X_{\tilde{A}\tilde{B}}$, где X_0 – произвольное частное решение уравнения $AX - XB = C$, а $X_{\tilde{A}\tilde{B}}$ – общее решение уравнения $AX - XB = 0$.

Определение 17.1. *Вектор* y *называется присоединённым к собственному вектору* u *линейного оператора* $\phi : C^n \to C^n$, *если*

$$\phi(y) = \lambda_0 y + u \tag{17.2}$$

(отсюда $(A - \lambda_0 E)y = u$, *где* A *– матрица линейного оператора* ϕ*).*

Пример 17.2. *Пусть линейный оператор* ϕ *в некотором базисе пространства* V_3 *над полем* C *задан матрицей* $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & 2 & -3 \end{bmatrix}$. *Построить в этом пространстве жорданов базис для оператора* ϕ.

Решение:

Найдем собственные значения и координатные столбцы базисов подпространств собственных векторов данного оператора

а) $\det(A-\lambda E)=0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} -\lambda & 1 & -1 \\ 1 & -\lambda & -1 \\ 2 & 2 & -3-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 1+\lambda & -\lambda-1 & -1 \\ (\lambda+1)(\lambda+2) & -1-\lambda & -3-\lambda \end{vmatrix} = 0$

$\Leftrightarrow (\lambda+1)^2 \begin{vmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \\ \lambda+2 & -1 & -3-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow (\lambda+1)^2(-1+\lambda+2)=0 \Leftrightarrow (\lambda+1)^3=0 \Rightarrow$

$\lambda=-1$ – трёхкратное собственное значение оператора $\phi (Sp\phi = \{-1,-1,-1\})$.

б) $(A+E)X=0 \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & -2 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \Rightarrow rang(A+E)=1 \Rightarrow \dim M(-1) =$

$= 3-1=2 \Rightarrow B(M(-1))=(u_1,u_2)$.

Имеем x_1 – базисная переменная, x_2, x_3 – свободные переменные $\Rightarrow x_1=-x_2+x_3$ и $\overline{x}=(x_1,x_2,x_3)=(-x_2+x_3,x_2,x_3)=x_2(-1,1,0)+x_3(1,0,1)=x_2u_1+x_3u_2$.

Нетрудно проверить, что уравнения $(A-\lambda E)Y = u_1(u_2)$ (см. (17.2)), из которых можно определить присоединённый вектор y неразрешимы. Тогда получим условие, из которого можно определить собственный вектор, для которого существует присоединённый вектор: так как $M(-1)=\{(\beta-\lambda,\lambda,\beta)\in C^3\}$, то из (17.2)

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & \beta-\alpha \\ 1 & 1 & -1 & \alpha \\ 2 & 2 & -2 & \beta \end{array}\right] \to (A-\lambda E)Y = u_{\text{общ}}. \tag{17.3}$$

Очевидно, что (17.3) разрешима $\Leftrightarrow \beta=2\alpha \Rightarrow \begin{cases} e_1=(1,1,2) \\ a=1 \end{cases}$. Тогда из $[A+E]Y =$

$= e_1 \to \begin{bmatrix} 1-1|1 \end{bmatrix} \Rightarrow \overline{y}=(1-y_2+y_3,y_2,y_3) \left(\text{пусть} \begin{cases} y_2=2 \\ y_3=1 \end{cases}\right) \Rightarrow e_2=(0,2,1)$ –

присоединённый к e_1, а в качестве $e_3 = u_1 = (-1, 1, 0)$. Итак, (e) – жорданов базис $(A = U\tilde{A}U^{-1}$, где $U = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$, а $\tilde{A} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$ – ЖНФ $A)$.

Пример 17.3. *Решить:* $\begin{bmatrix} 2 & 6 & -15 \\ 1 & 1 & -5 \\ 1 & 2 & -6 \end{bmatrix} X = X \begin{bmatrix} -3 & 2 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$.

Решение:

1) Найдём ЖНФ $\tilde{A}$ для A и трансформирующую матрицу $U : A = U\tilde{A}U^{-1}$.

а) $\det(A - \lambda E) = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} 2-\lambda & 6 & -15 \\ 1 & 1-\lambda & -5 \\ 1 & 2 & -6-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} 0 & 2\lambda+2 & (\lambda-2)(-6-\lambda) \\ 0 & -1-\lambda & 1+\lambda \\ 1 & 2 & -6-\lambda \end{vmatrix} =$

$= 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} 2(\lambda+1) & -(\lambda+6)(\lambda-2) \\ -(\lambda+1) & \lambda+1 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow (\lambda+1)^3 = 0 \Rightarrow SpA = \{-1, -1, -1\} \Rightarrow$

$\Rightarrow d_3(\lambda) = (\lambda+1)^3,\ d_1(\lambda) = 1$. Нетрудно проверить, что $d_2(\lambda) = \lambda + 1 \Rightarrow (A - \lambda E) \sim diag\,(1, \lambda+1, (\lambda+1)^2)) \Rightarrow$ СЭД для $A : (\lambda+1)^2, \lambda+1$.

Следовательно, $\tilde{A} = diag(J_2(-1), J_1(-1)) = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$

б) Построим $M(-1)$ – собственное подпространство.

$(A + E)X = 0 \Rightarrow [A + E] = \begin{bmatrix} 3 & 6 & -15 \\ 1 & 2 & -5 \\ 1 & 2 & -5 \end{bmatrix} \Leftrightarrow [1\ 2\ -5] \Rightarrow rang(A + E) = 1 \Rightarrow$

$\dim M(-1) = 2 \Rightarrow B(M(-1)) = (u_1, u_2)$,

$x_1 + 2x_2 - 5x_3 = 0 \to x_1 = 5x_3 - 2x_2 \to \overline{x} = (5x_3 - 2x_2, x_2, x_3)$, т.е.

$$M(-1) = \{(5\beta - 2\alpha, \alpha, \beta) \in C^3\}.$$

Поэтому $\overline{x} = x_2(-2,1,0) + x_3(5,0,1)$, но поскольку $\dim M(-1) = 2 < 3 \Rightarrow$ необходимо искать присоединённый вектор y для построения жорданова базиса:

$$[A+E]Y = u_1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \Rightarrow \text{неразрешима},$$

$$[A+E]Y = u_2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \Rightarrow \text{неразрешима}.$$

Следовательно, для u_1 и u_2 – нельзя найти присоединённый вектор. Поэтому будем искать условие, при котором у собственного вектора существует присоединённый: $\left[\begin{array}{ccc|c} 3 & 6 & -15 & 5\beta - 2\alpha \\ 1 & 2 & -5 & \alpha \\ 1 & 2 & -5 & \beta \end{array}\right] \Rightarrow$ при $\alpha = \beta$ система будет иметь решение. Пусть $\alpha = 1$, тогда собственный вектор $e_1 = (3,1,1)$. Из уравнения $[A+E]Y = e_1 \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 3 & 6 & -15 & 3 \\ 1 & 2 & -5 & 1 \\ 1 & 2 & -5 & 1 \end{array}\right] \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -5 & 1 \end{array}\right] \rightarrow x_1 + 2x_2 - 5x_3 = 1$ имеем $\overline{x} = (1 + 5x_3 - 2x_2, x_2, x_3)$.

Поэтому в качестве присоединённого к e_1 можно взять $e_2 = (1,0,0)$, а в качестве второго собственного вектора возьмем $e_3 = u_1 = (-2,1,0)$. Получаем жорданов базис:

$$e_1 = (3,1,1),\ e_2 = (1,0,0),\ e_3 = (-2,1,0).$$

Отсюда следует, что $\begin{bmatrix} 3 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

2) Найдём ЖНФ $\tilde{B}$ и трансформирующую матрицу $\vartheta : B = \vartheta \tilde{B} \vartheta^{-1}$.

а) $\det(B - \lambda E) = 0 \Leftrightarrow \lambda^2 + 5\lambda + 4 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \lambda = -4 \\ \lambda = -1 \end{array}\right. \Rightarrow SpB = \{-4, -1\}$.

Очевидно, что для $\lambda E - B : d_1(\lambda) = 1, d_2(\lambda) = (\lambda + 4)(\lambda + 1)$.

Поэтому СЭД для $B : \lambda + 1, \lambda + 4$.

Кафедра ПМ и ТП

Следовательно, $\tilde{B} = diag(J_1(-1), J_1(-4)) = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -4 \end{bmatrix}$.

б) Построим $M(-1)$:

$$[B+E]X = 0 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} -2 & 2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} X = 0 \Rightarrow [1, -1] \Rightarrow rang(B+E) = 1 \Rightarrow \dim M(-1) =$$

$= 2 - 1 = 1 \Rightarrow B(M(-1)) = u_1$, тогда $x_1 = x_2 \Rightarrow \overline{x} = (x_2, x_2) = x_2(1,1) = x_2 u_1$.

Построим $M(-4)$:

$[B+4E]X = 0 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} X = 0 \Rightarrow [1, 2] \Rightarrow rang(B+4E) = 1 \Rightarrow$

$\dim M(-4) = 2 - 1 = 1 \Rightarrow B(M(-4)) = u_2$, тогда

$x_1 + 2x_2 = 0 \Rightarrow x = (-2x_2, x_2) = x_2(-2, 1) = x_2 u_2$.

Так как $\dim M(-1) + \dim M(-4) = 2$; то $e_1 = u_1, e_2 = u_2$ – жорданов базис, следовательно, $\vartheta = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \vartheta^{-1} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$.

Далее $X = UX_{\tilde{A}\tilde{B}}\vartheta^{-1}$ и СЭД $A \to (\lambda+1)^2, \lambda+1$, СЭД $B \to \lambda+1, \lambda+4$.

$$\left.\begin{array}{l} (p_\alpha, q_\beta) = \underset{\lambda=-1,\mu=-1}{(2,1)} \to X_{11} = \begin{bmatrix} a \\ 0 \end{bmatrix} \in C_{2,1} \\ (p_\alpha, q_\beta) = \underset{\lambda=-1,\mu=-4}{(2,1)} \to X_{12} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \in C_{2,1} \\ (p_\alpha, q_\beta) = \underset{\lambda=-1,\mu=-1}{(1,1)} \to X_{21} = \begin{bmatrix} b \end{bmatrix} \in C_{1,1} \\ (p_\alpha, q_\beta) = \underset{\lambda=-1,\mu=-4}{(1,1)} \to X_{22} = \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix} \in C_{1,1} \end{array}\right) \Rightarrow X_{\tilde{A}\tilde{B}} = (X_{\alpha\beta}) = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & 0 \\ b & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow X = UX_{\tilde{A}\tilde{B}}\vartheta^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & 0 \\ b & 0 \end{bmatrix} \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 3a-2b & 0 \\ a+b & 0 \\ a & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} =$$

$$\frac{1}{3}\begin{bmatrix} 3a-2b & 6a-4b \\ a+b & 2a+2b \\ a & 2a \end{bmatrix}, \ a, b \in C.$$

18. Функции от матриц

Пусть $f(x)$ – некоторая функция скалярного аргумента, а $A \in M_n(C)$. Нужно найти $f(A)$, т. е. нужно распространить $f(x)$ на матричное значение аргумента. В случае, когда $f(x)$ – многочлен, решение задачи известно. Поэтому требуется определить $f(A)$ для произвольной функции $f(x)$.

Пусть $m_A(x)$ – минимальный многочлен матрицы A и пусть $m_A(x) = (x-\lambda_1)^{m_2} \times \times (x-\lambda_2)^{m_2} \cdot \ldots \cdot (x-\lambda_s)^{m_s}$, $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_s$ – различные собственные значения матрицы A, и $m_1 + m_2 + \cdots + m_s = m$.

Рассмотрим две функции $g(x)$ и $h(x)$ – многочлены, такие что $g(A) = h(A)$. Обозначим через

$$d(x) = g(x) - h(x) \Rightarrow d(A) = g(A) - h(A) = 0.$$

Поэтому $d(x)$ – аннулирующий многочлен для матрицы A. А всякий аннулирующий многочлен делится на минимальный:

$$d(x)/m_A(x) \Rightarrow d(x) = m_A(x)q(x).$$

Пусть $SpA = \{\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_s\}$, тогда

$$d(\lambda_1) = 0, d(\lambda_2) = 0, \cdots, d(\lambda_s) = 0,$$

$$d'(\lambda_1) = 0, d'(\lambda_2) = 0, \cdots, d'(\lambda_s) = 0,$$

$$\ldots \qquad \ldots \qquad \ldots \qquad \ldots$$

$$d^{(m_1-1)}(\lambda_1) = 0, d^{(m_2-1)}(\lambda_2) = 0, \cdots, d^{(m_s-1)}(\lambda_s) = 0.$$

Получили, что

$$g(\lambda_k) = h(\lambda_k),$$

Кафедра ПМ и ТП

$$g'(\lambda_k) = h'(\lambda_k), \tag{18.1}$$
$$\dots$$
$$g^{(m_k-1)}(\lambda_k) = h^{(m_k-1)}(\lambda_k), \text{где } k = \overline{1, s}.$$

Таким образом, мы получили следующее:

Если многочлены $g(x)$ и $h(x)$ принимают одинаковые значения при $x = A$, т.е. $g(A) = h(A)$, то они принимают одинаковые значения на спектре матрицы A(18.1) Более того, и их производные до порядка $m_k - 1$ включительно тоже принимают одинаковые значения на спектре матрицы A.

Верно и обратное: *Если функции $h(x)$ и $g(x)$ и их производные до порядка $m_k - 1$ включительно принимают одинаковые значения на спектре матрицы A, то $g(A) = h(A)$.*

Определение 18.1. *Пусть $f(x)$ – произвольная функция. Условимся m чисел таких, что $f(\lambda_k), f'(\lambda_k), \dots, f^{(m_k-1)}(\lambda_k)$ называть значениями функции $f(x)$ на спектре матрицы A.*

Таким образом, $f(SpA) = \{(f(\lambda_k), f'(\lambda_k), \dots, f^{(m_k-1)}(\lambda_k)|k = \overline{1, s})\}$.

Если $f(x)$ не определена на спектре A, то не определено и $f(A)$.

Итак, мы показали, что если $g(A) = h(A)$, то $g(SpA) = h(SpA)$, и наоборот.

Потребуем, чтобы значение произвольной функции от матрицы A подчинялось тому же принципу, что и для многочлена, т. е. чтобы $f(SpA)$ полностью определяло бы $f(A)$. И функции, принимающие одинаковые значения на SpA, имели бы одно и то же значение, равное $f(A)$. Тогда очевидно, что для определения $f(A)$ в общем случае достаточно найти многочлен $g(x)$, который принимал бы те же значения на спектре A, что и функция $f(x)$, тогда $f(A) = g(A)$.

Определение 18.2. *Говорят, что $f(x)$ определена на спектре A, если определены все значения $f'(\lambda_k), f''(\lambda_k), \dots, k = \overline{1, s}$.*

Определение 18.3. *Если функция $f(x)$ определена на SpA, то значение $f(A)$ определяется, как значение некоторого многочлена $g(x)$ при $x = A$, который принимает те же значения на SpA, что и $f(x)$.*

Среди многочленов из кольца $C[x]$, которые принимают одинаковые значения с функцией $f(x)$ на SpA, существует многочлен степени $\leq m-1$ с такими же свойствами ($\deg g(x) < \deg m_A(x)$).

$$g(x) = m_A(x)q(x) + r(x), \ \deg r < m$$

$$g(A) = m_A(A)q(A) + r(A) \Rightarrow g(A) = r(A) \to f(A) = r(A).$$

Если спектр A простой, то $m_A(x) = (x-\lambda_1)(x-\lambda_2)\cdot$
$ldots \cdot (x-\lambda_n)$, то $f(SpA) = \{(f(\lambda_1), f(\lambda_2), \ldots, f(\lambda_n))\}$.

Определение 18.4. *Многочлен $g(x)$ из определения 18.3 называется интерполяционным многочленом Лагранжа-Сильвестра.*

Пример 18.1. *Найти интерполяционный многочлен Лагранжа-Сильвестра для матрицы* $H = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}$
и вычислить $\sin H$.

Решение:

Известно, что $H^n = 0$. Составим $P_H(x)$.

$$xE - H = \begin{bmatrix} x & -1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & x & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & x & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & x \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$P_H(x) = x^n \Rightarrow \lambda_i = 0 \Rightarrow SpH = \underbrace{\{0, 0, \cdots, 0\}}_{n}$.

Можно по-другому: $H = J_n(0)$ – клетка Жордана, а у клетки Жордана минимальный многочлен $m_{J_n(a)}(x) = (x-a)^n$, у нас $a = 0$.

Запишем значение $f(x)$ на спектре матрицы H :

$f(SpA) = \{f(0), f'(0), f''(0), \ldots, f^{(n-1)}(0)\}$.

Составим интерполяционный многочлен Лагранжа-Сильвестра:

$$r(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{f^{(n-1)}(0)}{(n-1)!}x^{n-1},$$

используя интерполяционные условия:

$$r(0) = f(0)$$
$$r'(0) = f'(0)$$
$$r''(0) = f''(0) \ldots r^{(n-1)} = f^{(n-1)}(0),$$

т. е. $r(SpH) = f(SpH)$ и $\Rightarrow r(H) = f(H)$.

Пусть $f(x) = \sin x$ и $n = 4$, тогда

$$H = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

Значит, $f(SpH) = \{f(0), f'(0), f''(0), f'''(0)\} = \{\sin 0, \cos 0, -\sin 0, -\cos 0\} = \{0, 1, 0, -1\}$.

Поэтому, $r(x) = x - \dfrac{x^3}{3!} = x - \dfrac{x}{6}$.

Таким образом,

$$\sin H = H - \frac{H^3}{6} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} - \frac{1}{6}\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{6} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

19. Свойства функции от матриц

Свойство 19.1. *Если $A \in M_n(C), f(x) \in C[x]$ и $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ – собственные значения матрицы (среди них могут быть и кратные), тогда собственными значениями для матрицы $f(A)$ являются числа $f(\lambda_1), f(\lambda_2), \dots, f(\lambda_n)$.*

Доказательство:

Пусть

$$P_A(x) = |XE - A| = (x - \lambda_1)(x - \lambda_2) \cdot \ldots \cdot (x - \lambda_n) = c(x)$$

$$f(x) = a_s(x - x_1)(x - x_2) \cdot \ldots \cdot (x - x_s).$$

Построим $f(A)$:

$$f(A) = a_s(A - x_1E)(A - x_2E) \cdot \ldots \cdot (A - x_sE).$$

Отсюда

$$\begin{gathered}
|f(A)| = a_s^n|A - x_1E||A - x_2E| \cdot \ldots \cdot |A - x_sE| = \\
= a_s^n(-1)^{ns}|x_1E - A||x_2E - A| \cdot \ldots \cdot |x_sE - A| = \\
= a_s^n(-1)^{ns}c(x_1)x(x_2) \cdot \ldots \cdot c(x_s) = \\
= a_s^n(-1)^{ns}(x_1 - \lambda_1)(x_1 - \lambda_2) \cdot \ldots \cdot (x_1 - \lambda_n)(x_2 - \lambda_1)(x_2 - \lambda_2) \cdot \ldots \cdot (x_2 - \lambda_n) \cdot \\
\cdot \ldots \cdot (x_s - \lambda_1)(x_s - \lambda_2) \cdot \ldots \cdot (x_s - \lambda_n) = \\
= a_s(\lambda_1 - x_1)(\lambda_1 - x_2) \cdot \ldots \cdot (\lambda_1 - x_s)a_s(\lambda_2 - x_1)(\lambda_2 - x_2) \cdot \ldots \cdot (\lambda_2 - x_s) \cdot \ldots \cdot \\
\cdot a_s(\lambda_n - x_1)(\lambda_n - x_2) \cdot \ldots \cdot (\lambda_n - x_s) = f(\lambda_1)f(\lambda_2) \cdot \ldots \cdot f(\lambda_n) \qquad (19.1)
\end{gathered}$$

Равенство (19.1) справедливо для любого многочлена $f(x)$.

Применим (19.1) к $g(x) = \lambda - f(x)$, тогда $g(A) = \lambda E - f(A)$ и $|g(A)| = |\lambda E - f(A)| = (\lambda - f(\lambda_1))(\lambda - f(\lambda_2)) \cdot \ldots \cdot (\lambda - f(\lambda_n)) = g(\lambda_1) \cdot \ldots \cdot g(\lambda_n)$, где $g(A)$ – характеристическая матрица для $f(A)$. Это значит, что $f(\lambda_1), f(\lambda_2), \ldots, f(\lambda_n)$ – собственные значения для матрицы $f(A)$. Свойство 19.1 доказано.

Свойство 19.2. *Матрица $A \in M_n(C)$ и $f(x)$ – произвольная функция, определённая на SpA, тогда если $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ – собственные значения матрицы A, то $f(\lambda_1), f(\lambda_2), \ldots, f(\lambda_n)$ – собственные значения матрицы $f(A)$.*

Доказательство:

Так как $f(x)$ определена на SpA, то существует интерполяционный многочлен $r(x)$, такой, что

$$r(A) = f(A) \tag{19.2}$$

и $r(x)$ принимает те же значения на SpA, что и $f(x)$, т.е.

$$r(\lambda_i) = f(\lambda_i), i = \overline{i, n}, \tag{19.3}$$

но $r(x)$ – многочлен, и для него в свойстве 19.1 доказано, что если $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ – собственные значения матрицы A, то $r(\lambda_1), r(\lambda_2), \ldots, r(\lambda_n)$ – собственные значения матрицы $r(A)$.

Из (19.2) и (19.3) следует, что $f(\lambda_1), f(\lambda_2), \ldots, f(\lambda_n)$ – собственные значения матрицы $f(A)$. Свойство 19.2 доказано.

Свойство 19.3. *Если $A \approx B$ и $f(x)$ – функция, определённая на SpA или на SpB, то собственные значения матриц $f(A)$ и $f(B)$ совпадают и $f(B) = T^{-1}f(A)T$.*

Свойство 19.4. *Если матрица A – блочно-диагональная, т.е. $A = diag(A_1, A_2, \ldots, A_k)$ и $f(x)$ – функция, определённая на SpA, то $f(A) = diag(f(A_1), f(A_2), \ldots, f(A_k))$.*

Следствие 19.1. *Если $A = diag(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n), f(x)$ определёна на SpA, то $f(A) = diag(f(\alpha_1), f(\alpha_2), \ldots, f(\alpha_n))$.*

20. Интерполяционный многочлен Лагранжа-Сильвестра

Случай 1:

Пусть характеристический многочлен матрицы A, равный $|xE - A|$ имеет n различных корней:

$$P_A(x) = (x - \lambda_1)(x - \lambda_2) \cdot \ldots \cdot (x - \lambda_n) = m_A(x).$$

Построим базисные многочлены:

$$l_k(x) = \frac{\prod_{i=1}^{n}(x - \lambda_i)}{\prod_{i=1}^{n}(\lambda_k - \lambda_i)}, i \neq k$$

$$l_k(\lambda_i) = \begin{cases} 1, & i = k \\ 0, & i \neq k \end{cases}$$

С помощью этих базисных многочленов строим интерполяционный многочлен Лагранжа-Сильвестра

$$r(x) = \sum_{k=1}^{n} f(\lambda_k) l_k(x)$$

$$deg r(x) \leq n - 1$$

и

$$r(\lambda_1) = f(\lambda_1) = \sum_{k=1}^{n} f(\lambda_k) l_k(\lambda_1)$$

$$r(\lambda_n) = f(\lambda_n)$$

Пример 20.1. *Построить интерполяционный многочлен Лагранжа-Сильвестра для матрицы:*

$$A = \begin{bmatrix} 5 & -3 & 2 \\ 6 & -4 & 4 \\ 4 & -4 & 5 \end{bmatrix}$$

и найти lnA.

Решение:

$$P_A(x) = \begin{vmatrix} x-5 & -3 & -2 \\ -6 & x+4 & -4 \\ -4 & 4 & x-5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x-2 & 3 & -2 \\ x-2 & x+4 & -4 \\ 0 & 4 & x-5 \end{vmatrix}$$

$$= (x-2)\begin{vmatrix} 1 & 3 & -2 \\ x & x+4 & -4 \\ 0 & 4 & x-5 \end{vmatrix} = (x-2)\begin{vmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 0 & x+1 & -2 \\ 0 & 4 & x-5 \end{vmatrix}$$

$$= (x-2)\begin{vmatrix} x+1 & -2 \\ 4 & x-5 \end{vmatrix} = (x-2)(x^2-4x-5+8)$$

$$= (x-2)(x-1)(x-3)$$

$\Rightarrow \lambda_1 = 1, \lambda_2 = 2, \lambda_3 = 3$

Тогда

$$l_1(x) = \frac{(x-\lambda_2)(x-\lambda_3)}{(\lambda_1-\lambda_2)(\lambda_1-\lambda_2)} = \frac{(x-2)(x-3)}{2}$$

$$l_2(x) = \frac{(x-\lambda_1)(x-\lambda_3)}{(\lambda_2-\lambda_1)(\lambda_2-\lambda_3)} = \frac{(x-1)(x-3)}{-1}$$

$$l_3(x) = \frac{(x-\lambda_1)(x-\lambda_2)}{(\lambda_2-\lambda_1)(\lambda_3-\lambda_2)} = \frac{(x-1)(x-2)}{2}$$

Пусть $f(x)$ функция определенная на SpA,

$$r(x) = \sum_{k=1}^{3} f(\lambda_k) l_k(x) = \frac{1}{2}(x-2)(x-3)f(1) - (x-1)(x-3)f(2) + \frac{1}{2}(x-1)(x-2)f(3).$$

Пусть $f(x) = ln(x)$, очевидно: $ln(1), ln(2), ln(3)$ – имеют смысл.

Тогда $r(x) = -(x-1)(x-3)ln(2) + \dfrac{1}{2}(x-1)(x-2)ln(3)$ поэтому

$$f(A) = r(A) = -(A-E)(A-3E)ln(2) + \frac{1}{2}(A-E)(A-2E)ln(3) =$$

$$(A-E)(3E-A)ln(2) + \frac{1}{2}(A-E)(A-2E)ln(3) =$$

$$\begin{bmatrix} 4 & -3 & 2 \\ 6 & -5 & 4 \\ 4 & -4 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & 3 & -2 \\ -6 & 7 & -4 \\ -4 & 4 & -2 \end{bmatrix} ln(2) + \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 4 & -3 & 2 \\ 6 & -5 & 4 \\ 4 & -4 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & -3 & 2 \\ 6 & -6 & 4 \\ 4 & -4 & 3 \end{bmatrix} ln(3) =$$

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} ln(2) + \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 2 & -2 & 2 \\ 4 & -4 & 4 \\ 4 & -4 & 4 \end{bmatrix} ln(3).$$

Следовательно,

$$lnA = f(A) = \begin{bmatrix} 2ln(2) + ln(3) & -ln(2) - ln(3) & ln(3) \\ 2ln(2) + 2ln(3) & -ln(2) - 2ln(3) & 2ln(3) \\ 2ln(3) & -2ln(3) & 2ln(3) \end{bmatrix}$$

Случай 2:

Когда характеристический многочлен матрицы A имеет кратные корни, а минимальный многочлен их не имеет. В этом случае поступают, как и в случае 1.

Случай 3: (самый общий):

Пусть $m_A(x) = (x-\lambda_1)^{m_1}(x-\lambda_2)^{m_2} \cdot \ldots \cdot (x-\lambda_s)^{m_s}$, где $deg m_A(x) = m = m_1 + m_2 + \ldots + m_s$. Мы знаем, что в этом случае $deg r(x) < m$. Пусть $f(x)$ определёна на SpA, т. е. определены следующие значения:

$$f(\lambda_1), f'(\lambda_1), \ldots, f^{(m_1-1)}(\lambda_1);$$

$$f(\lambda_2), f'(\lambda_2, \ldots, f^{(m_2-1)}(\lambda_2);$$

$$\ldots$$

$$f(\lambda_s), f'(\lambda_s), \ldots, f^{(m_s-1)}(\lambda_s);$$

Кроме того:

$$r(\lambda_i) = f(\lambda_i),$$

$$r'(\lambda_i) = f'(\lambda_i),$$

$$\ldots$$

$$r^{(m_i-1)}(\lambda_i) = f^{(m_i-1)}(\lambda_i), i = \overline{1, s},$$

т.е. $r(SpA) = f(SpA)$.

Составим дробно-рациональную функцию $\dfrac{r(x)}{m_A(x)}$ и разложим её на простейшие дроби:

$$\frac{r(x)}{m_A(x)} = \sum_{k=1}^{s} \left(\frac{a_{1k}}{(x-\lambda_k)} + \frac{a_{2k}}{(x-\lambda_k)^2} + \cdots + \frac{a_{m_k k}}{(x-\lambda_k)^{m_k}} \right) \tag{20.1}$$

Умножим (20.1) на $(x-\lambda_k)^{m_k}$, получим

$$\frac{r(x)}{m_k(x)} = a_{1k}(x-\lambda_k)^{m_k-1} + a_{2k}(x-\lambda_k)^{m_k-2} + \cdots + a_{m_k k} + p(x)(x-\lambda_k)^{m_k}. \tag{20.2}$$

Тогда имеем $\dfrac{r(\lambda_k)}{m_k(\lambda_k)} = a_{m_k k}$.

Чтобы найти следующий коэффициент, надо найти производную от левой и правой части равенства (20.2) и т.д.

Пример 20.2. *Найти $f(A)$, где $A = \begin{bmatrix} 6 & -1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$, а $f(x) = e^{tx}, t \in C$.*

Решение:

Найдем $m_A(x)$ (это последний инвариантный множитель матрицы $xE - A$)

$xE - A = \begin{bmatrix} x-6 & 1 \\ -3 & x-2 \end{bmatrix}$

$\Rightarrow d_2(x) = x^2 - 8x + 15 = (x-3)(x-5), d_1(x) = 1.$

Поэтому, $f_2(x) = m_A(x) = (x-3)(x-5)$.

Проверим, определена ли $f(x)$ на SpA :

$f(3) = e^{3t} = r(3), f(5) = e^{5t} = r(5),$

$$\frac{r(x)}{m_A(x)} = \frac{r(x)}{(x-3)(x-5)} = \frac{\alpha}{x-3} + \frac{\beta}{x-5}. \tag{20.3}$$

Домножим (20.3) на $x-3$: $\dfrac{r(x)}{x-5} = \alpha + \dfrac{\beta(x-3)}{x-5}$. Подставим $x-3$, получим $\dfrac{r(3)}{-2} = \alpha \Rightarrow r(3) = -2a.$

Значит, $\alpha = \dfrac{r(3)}{-2} = -\dfrac{1}{2}e^{3t}$.

Домножим (20.3) на $x-5$: $\dfrac{r(x)}{x-3} = \alpha(x-5) + \beta$, подставим $x = 5 \Rightarrow \dfrac{r(5)}{2} = \beta \Rightarrow$ $r(5) = 2\beta$. Значит, $\beta = \dfrac{r(5)}{2} = \dfrac{1}{2}e^{5t}$.

Таким образом,

$$r(x) = \alpha(x-5) + \beta(x-3) = (\alpha+\beta)x + (-5\alpha-3\beta) = \frac{1}{2}(e^{5t}-e^{3t})x + \frac{5}{2}e^{3t} - \frac{3}{2}e^{5t}.$$

Поэтому

$$e^{tA} = r(A) = \frac{1}{2}(e^{5t}-e^{3t})A + \left(\frac{5}{2}e^{3t} - \frac{3}{2}e^{5t}\right)E$$

$$= \begin{bmatrix} 3e^{5t}-3e^{3t} & -\frac{1}{2}e^{5t}+\frac{1}{2}e^{3t} \\ \frac{3}{2}e^{5t}-\frac{3}{2}e^{3t} & e^{5t}-e^{3t} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{5}{2}e^{3t}-\frac{3}{2}e^{5t} & 0 \\ 0 & \frac{5}{2}e^{3t}-\frac{3}{2}e^{5t} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{3}{2}e^{5t}-\frac{1}{2}e^{3t} & \frac{1}{2}e^{3t}-\frac{1}{2}e^{5t} \\ \frac{3}{2}e^{5t}-\frac{3}{2}e^{3t} & \frac{1}{2}e^{5t}+\frac{3}{2}e^{3t} \end{bmatrix}$$

21. Простые и дефектные матрицы

Пусть $A \in M_n(C)$. Так как C – алгебраически замкнуто, то в нём всякий многочлен n-ой степени имеет ровно n корней $\Rightarrow$

$$m_A(x) = (x - \lambda_1)(x - \lambda_2) \cdot \ldots \cdot (x - \lambda_n) = (x - \lambda_1)^{k_1}(x - \lambda_2)^{k_2} \cdot \ldots \cdot (x - \lambda_s)^{k_s}$$

где $k_1 + k_2 + \cdots + k_s = deg m_A(x), k_i$ – алгебраическая кратность собственных значений $\lambda_i, i = \overline{1, s}$.

Рассмотрим $R^{(\lambda_i)}$ – множество собственных векторов, соответствующих собственному значению λ_i. Если к $R^{(\lambda_i)}$ присоединить нуль-вектор, то $R^{(\lambda_i)} + \overline{0}$ – линейное пространство собственных векторов, соответствующих собственному значению λ_i.

Чтобы найти множество собственных векторов, составляем систему:

$$[A - \lambda_i E]\overline{x} = \overline{0}.$$

Если $rang[A - \lambda_i E] = n - \alpha_i$, то $dim R^{(\lambda_i)} = \alpha_i$, где α_i – геометрическая кратность собственных значений λ_i.

Доказано в практике, что $\alpha_i \leq k_i$, т.е. геометрическая кратность собственных значений не превышает его алгебраической кратности.

Определение 21.1. *Матрица $A \in M_n(C)$ называется простой, если геометрическая кратность каждого его собственного значения совпадает с его алгебраической кратностью. В этом случае матрица A диагонализуема.*

Не простая $A \in M_n(C)$ называется дефектной.

При этом существуют $x_1, x_2, \ldots, x_n$ – линейно независимые векторы, где $X = [x_1, x_2, \ldots, x_n]$, что $AX = XD(D = diag(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n))$. Отсюда $A = XDX^{-1} = (X^{-1})^{-1}DX^{-1} \Rightarrow A \approx D$.

Значит, A – проста тогда и только тогда, когда она подобна диагональной матрице.

Покажем, что у матрицы A и A^T собственные значения совпадают:

$P_{A^T} = |xE - A^T| = |(xE)^T - A^T| = |xE - A|^T = |xE - A| = P_A(X)$, а значит, у характеристических многочленов этих матриц одинаковые корни, что требовалось доказать.

Так как собственные значения матриц A и A^T совпадают, то если A – проста, то и A^T проста, а, значит, $\exists y_1, y_2, \ldots, y_n$ – система линейно независимых векторов у матрицы A^T таких, что

$$A^T y_i = \lambda_i y_i, i = \overline{1,n} \tag{21.1}$$

Транспонируем равенство (21.1):

$$(A^T y_i)^T = (\lambda_i y_i)^T,$$

$$y_i^T A = \lambda_i y_i^T, \tag{21.2}$$

так как $(AB)^T = B^T A^T$.

Здесь y_i^T – левые собственные векторы матрицы A (правые собственные векторы x_i получаются из уравнения $Ax_i = \lambda_i x_i$).

Имеем $Y = [y_1, y_2, \ldots, y_n], Y^T = \begin{bmatrix} y_1^T \\ y_2^T \\ \cdots \\ y_n^T \end{bmatrix}$.

$$Y^T A = DY^T, \tag{21.3}$$

$D = diag(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)$.

Вспомним, что $AX = XD \Rightarrow$

$$X^{-1} A = DX^{-1}. \tag{21.4}$$

Сравнив (21.3) и (21.4), получим: $Y^T = X^{-1}$ или

$$Y^T X = E, \tag{21.5}$$

$$\begin{bmatrix} y_1^T \\ y_2^T \\ \dots \\ y_n^T \end{bmatrix} [x_1 x_2 \dots x_n] = E \Rightarrow y_i^t x_j = \delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j, \\ 0, & i \neq j. \end{cases} \tag{21.6}$$

Определение 21.2. *Системы векторов $y_1, y_2, \dots, y_n$ и $x_1, x_2, \dots, x_n$, удовлетворяющие условию (21.6) называются квази-би-ортогональными.*

Теорема 21.1. *Матрица A – проста тогда и только тогда, когда системы правых и левых собственных векторов этой матрицы квази-би-ортогональны.*

Для простых матриц справедлива спектральная теорема.

Теорема 21.2. *Пусть $A \in M_n(C)$ – простая и $p(x) \in C[x]$. Тогда если $x_1, x_2, \dots, x_n$ и $y_1, y_2, \dots, y_n$ – системы правых и левых собственных векторов матрицы A, то*

$$p(A) = \sum_{i=1}^{n} p(\lambda_i) G_i,$$

где G_i – сопутствующие матрицы для матрицы A, заданные равенствами: $G_i = x_i y_i^T$.

Свойства матриц G_i :

1) $\sum_{i=1}^{n} G_i = E$;
2) $G_i G_j = 0, i \neq j, i, j = \overline{1, n}$;
3) $G_i^2 = G_i, i = \overline{1, n}$.

Стоит обратить внимание, что в некоторых случаях теорему 21.1 можно использовать и для произвольных функций, но не всегда.

Пример 21.1. *Показать, что матрица* $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ *простая. Найти сопутствующие ей матрицы и используя спектральную теорему найти* A^{20}, *т.е.* $p(x) = x^{20}$.

Решение:

$$xE - A = \begin{bmatrix} x-1 & -1 \\ 0 & x-2 \end{bmatrix} \Rightarrow d_1(x) = 1, d_2(x) = (x-1)(x-2) \Rightarrow f_2(x) =$$

$$m_A(x) = (x-1)(x-2) \Rightarrow SpA = \{1,2\} k_1 = k_2 = 1, \alpha_1 = \alpha_2 = 1 \Rightarrow A - \text{проста}.$$

Найдем систему правых собственных векторов:

$$Ax_i = \lambda_i x_i \Rightarrow [\lambda_i E - A]X = 0, X = \begin{bmatrix} x_1' \\ x_2' \end{bmatrix}$$

1) $\lambda_1 = 1$

$\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1' \\ x_2' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

$-x_2' = 0, x_1'$ – любые

$\Rightarrow x_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$

2) $\lambda_2 = 2$

$\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1' \\ x_2' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

пусть $x_1' = x_2' = 1$

$\Rightarrow x_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

Найдем систему левых собственных векторов:

$A^T y_i = \lambda_i y_i, A^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \Rightarrow [\lambda_i E - A^T] = \begin{bmatrix} \lambda_i - 1 & 0 \\ -1 & \lambda_i - 2 \end{bmatrix}.$

Имеем $[\lambda_i E - A^T]Y = 0, Y = \begin{bmatrix} y_1' \\ y_2' \end{bmatrix}$

1) $\lambda_1 = 1$

$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1' \\ y_2' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

2) $\lambda_2 = 2$

$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1' \\ y_2' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

$y_1' = -y_2'$ $\qquad$ $y_1' = 0, y_2'$ – любое

$\Rightarrow y_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$ $\qquad$ $\Rightarrow y_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

$x_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, x_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, y_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}, y_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \rightarrow$ удовлетворяют условию (21.6) так как $y_i^T x_i = 1, y_i^T x_j = 0$.

Тогда $G_1 = x_1 y_1^T = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, G_2 = x_2 y_2^T = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.

Таким образом,

$p(A) = p(1)G_1 + p(2)G_2 = A^{20} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + 2^{20} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 2^{20} \\ 0 & 2^{20} \end{bmatrix} =$
$= \begin{bmatrix} 1 & -1 + 2^{20} \\ 0 & 2^{20} \end{bmatrix}$

Оказывается, что спектральная теорема в некоторой степени обобщается для произвольной функции $f(x)$, определенной на спектре произвольной матрицы (необязательно простой).

Теорема 21.3. *(о спектральном разложении) Пусть для* $A \in M_n(C)$ $m_A(x) = (x-\lambda_1)(x-\lambda_2)\cdot\ldots\cdot(x-\lambda_n) = (x-\lambda_1)^{k_1}(x-\lambda_2)^{k_2}\cdot\ldots\cdot(x-\lambda_s)^{k_s}$ *и* $f(x)$ *произвольная функция, определенная на* SpA; $f_k^{(j)}$ *– значения j-ой производной при* $x = \lambda_k$ $(j = \overline{1, m_k}, k = \overline{1, s})$. *Тогда существуют независимые от* $f(x)$ *матрицы* z_{kj}, *что имеет место разложение*

$$f(A) = \sum_{k=1}^{s} \sum_{j=1}^{m_k} f_k^{(j-1)} z_{kj},$$

где z_{kj} *– линейно независимы и перестановочны с матрицей* A.

z_{kj} *называются* <u>*компонентными*</u> *матрицами.*

1) $\sum_{k=1}^{s} Z_{k1} = E$.
2) $(Z_{kj})^2 = Z_{kj} \Leftrightarrow j = 1$ (идемпотентные).
3) $Z_{k1} \cdot Z_{kr} = Z_{kr}, r = \overline{1, m_k}$.
4) $Z_{kp} \cdot Z_{er} = 0$, при $k \neq e$.

Пример 21.2. *Найти $f(A)$ по теореме 21.2, где*

$$A = \begin{bmatrix} 6 & 2 & 2 \\ -2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \text{ и } f(x) = lnx.$$

Решение:

$$xE - A = \begin{bmatrix} x-6 & -2 & -2 \\ 2 & x-2 & 0 \\ 0 & 0 & x-2 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$d_1(x) = 1,$$

$$d_3(x) = (x-2)\begin{vmatrix} x-6 & -2 \\ 2 & x-2 \end{vmatrix} = (x-2)(x-4)^2.$$

$$d_2(x) = 1,$$

так как $M\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = 4 \Rightarrow f_3(x) = m_A(x) = (x-2)(x-4)^2$.
Значит, $SpA = \{2, 4, 4\}$. По теореме 21.2:

$$f(A) = f(2)Z_{11} + f(4)Z_{21} + f'(4)Z_{22}$$

Пусть $f(x)=1 \Rightarrow f(A)=E \Rightarrow$ по теореме 21.2 $f(2)=f(4)=1,\ f'(x)=f'(4)=0$.

Значит, $E=Z_{11}+Z_{21}$.

Пусть $f(x)=x-4: f(2)=-2, f(4)=0, f'(4)=1 \Rightarrow f(x)=x-4$ определена на SpA.

$f(A)=f(2)Z_{11}+f(4)Z_{21}+f'(4)Z_{22}$ – спектральное разложение для $f(A)$, где $f(x)=x-4 f(A)=A-4E=-2Z_{11}+Z_{22}$.

Пусть $f(x)=(x-4)^2$, тогда $f(A)=4Z_{11}=(A-4E)^2$. Получили систему уравнений относительно компонентных матриц:

$$\begin{cases} Z_{11}+Z_{21}=E \\ -2Z_{11}+Z_{22}=A-4E \Rightarrow \\ 4Z_{11}=(A-4E)^2 \end{cases}$$

$$Z_{11}=\frac{1}{4}(A-4E)^2=\frac{1}{4}\begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 \\ -2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}^2=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}^2=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$Z_{22}=A-4E+2Z_{11}=\begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 \\ -2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 \\ -2 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$Z_{21}=E-Z_{11}=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow$ для произвольной функции $f(x)$, определенной на SpA выполняется:

$$f(A)=f(2)\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}+f(4)\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}+f'(4)\begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 \\ -2 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Пусть теперь

$f(x)=lnx : f(2)=ln2, f(4)=ln4, f'(4)=\dfrac{1}{4} \Rightarrow f(x)=lnx$ определена на SpA.

Таким образом,

$$f(A) = lnA = ln2 \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} + 2ln2 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 \\ -2 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 2ln2 + \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 2ln2 - \frac{1}{2} & ln2 - \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & ln2 \end{bmatrix}.$$

Кафедра ПМ и ТП

22. Симметрическая, кососимметрическая, эрмитова, ортогональная, унитарная и нильпотентная матрицы

Определение 22.1. *Матрица* $A \in M_n(C)$ *называется* *симметрической*, *если* $A = A^T$ *или* $a_{ij} = a_{ji}, i = \overline{1,n}, j = \overline{1,n}$.

Определение 22.2. *Матрица* $A \in M_n(C)$ *называется* *кососимметрической*, *если* $A = -A^T$ *(т.е.* $a_{ij} = -a_{ij}$ *при* $i \neq j$*) и* $a_{ij} = 0$ *при* $i = j$.

Кососимметрическая матрица нечётного порядка вырождена.

Определение 22.3. *Матрица* $A \in M_n(C)$ *называется* *эрмитовой* *(самосопряжённой), если* $A = A^*$, *т.е.* $a_{ij} = \overline{a_{ji}}$.

Всякая симметрическая матрица с действительными элементами – эрмитова.

Определение 22.4. *Матрица* $A \in M_n(C)$ *называется* *ортогональной*, *если* $AA^T = E = A^T A$.

Т.е. $A^T = A^{-1}, (detA)^2 = 1, detA = \pm 1$, таким образом, ортогональная матрица – матрица, у которой столбцы (или строки) ортонормированные векторы.

Определение 22.5. *Матрица* $A \in M_n(C)$ *называется* *унитарной*, *если* $AA^* = E$.

Доказано, что если X – произвольная невырожденная матрица, то всегда существует невырожденная верхняя треугольная матрица T и унитарная матрица U, что выполняется $X = UT$.

Определение 22.6. *Матрица* $A \in M_n(C)$ *называется* *нильпотентной*, *если* $A^k = 0, k \in N. k_{min} \in N$ – *показатель нильпотентности* *матрицы* A.

23. Свойства эрмитовых матриц

Свойство 23.1. *Собственные значения эрмитовой матрицы действительны.*

Доказательство

Пусть $A = A^*$,

$$Ax = \lambda x, \tag{23.1}$$

Применим сопряжение к (23.1)

$$x^* A^* = \overline{\lambda} x^*, \tag{23.2}$$

Из (23.1) имеем $x^* A x = x^* \lambda x = \lambda x^* x$.
Из (23.2) $x^* A^* x = \overline{\lambda} x^* x \Rightarrow \lambda x^* x = \overline{\lambda} x^* x \Rightarrow (\lambda - \overline{\lambda}) X^* x = 0$. Так как $\overline{x}$ – собственный вектор, то $x \neq \overline{0} \Rightarrow \lambda = \overline{\lambda} \Rightarrow \lambda$ – действительное число. Свойство 23.1 доказано.

Следствие 23.1. *Собственные значения симметрической действительной матрицы действительны.*

Свойство 23.2. *Правые собственные векторы эрмитовой матрицы, соответствующие различным собственным значениям, ортогональны.*

Доказательство

Пусть $A = A^*, \lambda_1 \neq \lambda_2 (\lambda_1 \in R), Ax = \lambda_1 x \Rightarrow y^* A x = y^* \lambda_1 x = \lambda_1 y^* x . Ay = \lambda_2 y \Rightarrow y^* A^* = \overline{\lambda_2} y^* \Rightarrow y^* A x = \overline{\lambda_2} y^* x$.

Отсюда $\lambda_1 y^* x = \overline{\lambda_2} y^* x \Rightarrow (\lambda_1 - \overline{\lambda_2}) y^* x = 0 \Rightarrow y^* x = 0 \Rightarrow y \perp x$ (так как $(x, y) = x^T y$ в R и $(x, y) = x^* y$ в C).
Свойство 23.2 доказано.

Свойство 23.3. *Матрица $A \in M_n(C)$ является эрмитовой тогда и только тогда, когда $(Ax, y) = (x, Ay)$.*

Доказательство

В $C : (Ax, y) = (Ax)^*y = (x^*A^*)y = (x^*A)y = \{A = A^*\} = (x^*)Ay = (x, Ay)$.
Свойство 23.3 доказано.

Свойство 23.4. *Любая эрмитова матрица проста.*

Определение 23.1. *Матрицы A и B называются унитарно подобными, если существует унитарная матрица U такая, что $B = U^*AU$.*

Свойство 23.5. *Любая эрмитова матрица унитарно подобна диагональной матрице её собственных значений.*

Следствие 23.2. *Любая симметрическая действительная матрица ортогонально подобна диагональной матрице её собственных значений, если существует ортогональная матрица $F : F^{-1}AF = D$.*

Свойство 23.6. ***(Теорема Шура-Теплица)*** *Любая матрица $A \in M_n(C)$ унитарно подобна верхней треугольной матрице T: существует унитарная матрица U, что $A = U^*TU$.*

24. Идемпотентные и инволютивные матрицы. Неотрицательные и неприводимые матрицы. Теорема Перрона-Фробениуса

Определение 24.1. *Матрица P называется идемпотентной, если $P^2 = P$.*

Теорема 24.1. *Если P идемпотентна, то*
а) $E - P$ – идемпотентна,
б) $lm(E-P) = kerP = \{x \in C^n | Px = 0\}$,
в) $ker(E-P) = lmP$, где lmP и $KerP$ образ и ядро линейного оператора матрицы P.

<u>Доказательство</u>

а) $(E-P)(E-P) = E \cdot E - \overline{EP - PE} + P^2 = E - 2P + P = E - P.$

б) Покажем, что собственные значения у идемпотентной матрицы равны либо 1, либо 0.

$Px = \lambda x, P^2x = \lambda Px \Rightarrow Px = \lambda(\lambda x) = \lambda^2 x \Rightarrow \lambda x = \lambda^2 x \Rightarrow (\lambda - \lambda^2)x = 0$

$\Rightarrow \lambda - \lambda^2 = 0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l}\lambda = 0\\ \lambda = 1\end{array}\right.$

$lm(E-P) = \{y \in C^n | \exists x \in C^n y = (E-P)x\}$,

$\forall y \in lm(E-P))\exists x \in C^n y = (E-P)x = x - Px, Py = Px - P^2x = 0 \Rightarrow$

$y \in KerP \Rightarrow lm(E-P) \subset KerP$

С другой стороны,

$(\forall x \in KerP)Px = 0 \Rightarrow x - Px = x \Rightarrow (E-P)x = x \Rightarrow x \in lm(E-P) \Rightarrow$

$KerP \subset lm(E-P)$

и $\Rightarrow lm(E-P) = KerP.$

в) доказывается аналогично.

Теорема 24.1 доказана.

Определение 24.2. *Матрица P называется <u>инволютивной</u>, если $P^2 = E$.*

Определение 24.3. *Матрица $A \in M_{m,n}(R)$ называется неотрицательной, если каждый её элемент неотрицателен. Обозначается $A \geq 0$.*

Условимся: $A \geq B (A > B)$, если $a_{ij} \geq b_{ij} (a_{ij} > b_{ij})$ для всех $i = \overline{1, m}, j = \overline{1, n}$.

Пусть P – некоторая матрица перестановок, тогда $P^T \cdot P = E \Rightarrow P$ – ортогональна.

Если $A \in M_n(R)$, то $P^T AP$ – матрица, полученная перестановкой элементов матрицы A, причём строки и столбцы в матрице A переставляются соответственно.

Пример 24.1. $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}, P = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$, *тогда*

$$P^T AP = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{22} & a_{23} & a_{21} \\ a_{32} & a_{33} & a_{31} \\ a_{12} & a_{13} & a_{11} \end{bmatrix}.$$

Определение 24.4. *При $n \geq 2 A \in M_n(R)$ называется приводимой (разложимой), если существует такая матрица перестановок P, что*

$$P^T AP = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ 0 & A_{22} \end{bmatrix}, \tag{24.1}$$

где A_{11}, A_{12}, A_{22} – квадратные матрицы порядка, меньшего чем n.

Если же такой матрицы P не существует, то A – *неприводима*. (По-другому может или нет A перестановкой рядов стать вида (24.1)).

Очевидно, что если $A \geq 0$, то $A^m \geq 0, \forall m \in N$.

Лемма 24.1. *Если $A \in M_n(R)$ неотрицательна и неприводима, то $(E + A)^{n-1} > 0$.*

Доказательство

Рассмотрим некоторый вектор $y \geq 0$, $y_i \geq 0$, $i = \overline{1, n}$ и обозначим $z = (E + A)y = y + Ay$.

Так как $A \geq 0$, то $Ay \geq 0$ и z имеет по крайней мере столько же ненулевых (и, значит, положительных) элементов, что и y.

Если y ещё не положителен, то докажем, что z будет иметь, по крайней мере, на один ненулевой элемент больше, чем y.

Допустим противное: векторы z и y имеют одни и теже нелевые координаты. Не нарушая общности рассуждений запишем:

$$y = \begin{bmatrix} u \\ 0 \end{bmatrix}, z = \begin{bmatrix} v \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{matrix} u > 0 \\ v > 0 \end{matrix}.$$

Если A разбить на блоки:

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}, z = \begin{bmatrix} u \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} A_{11}u \\ A_{21}u \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u + A_{11}u \\ A_{21}u \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v \\ 0 \end{bmatrix}, A_{21}u = 0,$$

так как $u > 0$, то $A_{21} = 0$. А это противоречит неприводимости матрицы A, следовательно, допущение не верно.

Повторим рассуждения аналогично $(n-1)$ раз (каждый раз новый вектор z будет иметь на один ненулевой элемент больше, чем предыдущий вектор z), получаем для любого ненулевого вектора $y \geq 0$ $(E + A)^{n-1}y > 0$. Полагая $y = e_i$, $i = \overline{1, n}$, убеждаемся что $(E + A)^{n-1} > 0$. Лемма 24.1 доказана.

Для ненулевой неприводимой матрицы $A \geq 0$ рассмотрим функцию r, определённую на ненулевых векторах $x \geq 0$ с действительными значениями:

$$r(x) = min_i \frac{(Ax)_i}{x_i}, i = \overline{1, n}, x_i \neq 0,$$

где $(Ax)_i$-ая координата вектора Ax. Отсюда следует, что $r(x) \geq 0$ и при $j = \overline{1, n}$ $r(x)x_j \leq (Ax)_j$. Таким образом, $xr(x) \leq Ax$ и $r(x)$ – это такое наибольшее число p, что $px \leq Ax$ для этого x.

Пусть L – множество всех ненулевых неотрицательных n-мерных векторов. Тогда

$$r = sup_{x \in L} r(x). \tag{24.2}$$

Определение 24.5. *Любой ненулевой вектор $z \in L, z \geq 0$ называется экстремальным, если $Az = rz$.*

Лемма 24.2. *Если матрица $A \in M_n(R)$ неотрицательна и неприводима, то число r, определенное, в (24.2) положительно и является собственным значением для матрицы A. Каждый экстремальный вектор для матрицы A положителен и является правым собственным вектором матрицы A, соответствующим собственному значению r.*

Теорема 24.2. ***(Перрона-Фробениуса)*** *Если матрица $A \in M_n(R)$ неотрицательна и неприводима, то:*

1) A имеет положительное собственное значение r, равное спектральному радиусу матрицы A;

2) существует положительный правый собственный вектор, соответствующий собственному значению r;

3) собственное значение имеет алгебраическую кратность 1.

25. Определённые, примитивные, импримитивные и стохастические матрицы. Осцилляционные и вполнеположительные матрицы

Определение 25.1. *Матрица* $A \in M_n(R)$ *называется положительно определённой, если для* $\forall x \in M_{n,1}(R), x \neq \overline{0}, x^T A x > 0$.

Определение 25.2. *Матрица* $A \in M_n(R)$ *называется неотрицательно определённой, если* $\forall x \in M_{n,1}(R), x^T A x \geq 0$.

Оба вида этих матриц называются *определёнными матрицами.*

Теорема 25.1. *(критерий определенности): Матрица* $A \in M_n(R)$ *ранга* r *является определённой тогда и только тогда, когда она имеет* $(n-r)$ *собственных значений равных 0 и* r *положительных собственных значений.*

Теорема 25.2. *Матрица* A *положительно определённая тогда и только тода, когда все её главные миноры положительны.*

Определение 25.3. *Если неприводимая матрица* $A \geq 0$ *имеет всего* h *характеристических чисел (собственных значений)* $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_h$ *с максимальным модулем* $r(|\lambda_1| = \ldots = |\lambda_h| = r)$, *то матрица* A *называется примитивной при* $h = 1$ *и импримитивной при* $h > 1$. *Число* h *называется индексом импримитивной матрицы* A.

Число h определяется сразу, если известны коэффициенты характеристического уравнения для A:

$P_A(\lambda) = \lambda^n + \alpha_1 \lambda^{n_1} + \alpha_2 \lambda^{n_2} + \ldots + \alpha_t \lambda^{n_t} = 0 (n > n_1 > \ldots > n_t; a_1 \neq 0, \ldots, a_t \neq 0)$.
Тогда $h = \text{НОД}(n - n_1, n_1 - n_2, \ldots, n_{t-1} - n_t)$.

Теорема 25.3. *Матрица* $A \geq 0$ *является примитивной тогда и только тогда, когда некоторая степень матрицы* A *положительна:* $A^m > 0 (m \in Z, m \geq 1)$.

Замечание 25.1. *Если матрица A – примитивна и $A^m > 0$, то $A^k > 0$ для всех $k > m$, так как A не содержит нулевых рядов.*

Следствие 25.1. *Степень примитивной матрицы всегда неприводима и притом примитивна.*

Теорема 25.4. *Если матрица A – импримитивная с индексом импримитивности h, то степень A^h разлагается на h примитивных матриц, которые имеют одно и тоже максимальное характеристическое число.*

Рассмотрим n возможных состояний некоторой системы:

$$S_1, S_2, \ldots, S_n \tag{25.1}$$

и последовательность моментов времени: $t_0, t_1, t_2, \ldots$. Пусть в каждый из этих моментов времени система находится в одном и только одном из состояний (25.1). Причем p_{ij} – вероятность нахождения системы в состоянии S_j в момент времени t_k, если известно, что в предыдущий момент времени t_{k-1} система находилась в состоянии $T_i(i, j = \overline{1, n}; k = 1, 2, \ldots)$. Переходные вероятности p_{ij} не зависят от индекса k (номера момента времени t_k). Если матрица переходных вероятностей задана, то говорят, что задана *однородная цепь Маркова* с конечным числом состояний (25.1). При этом очевидно, что $p_{ij} \geq 0, \sum\limits_{j=1}^{n} p_{ij} = 1 (i, j = \overline{1, n})$.

Определение 25.4. *Квадратная матрица $P = ||p_{ij}||, i, j = \overline{1, n}$ называется <u>стохастической</u>, если $P \geq 0$ и $\sum\limits_{j=1}^{n} p_{ij} (i = \overline{1, n})$ (т.е. сумма элементов любой строки, правда, иногда требуют: $\sum\limits_{j=1}^{n} p_{ij} \neq 0$).*

Таким образом, для каждой однородной цепи Маркова матрица переходных вероятностей является стохастической и наоборот.

Теорема 25.5. *Квадратная матрица $P \geq 0$ является стохастической тогда и только тогда, когда она имеет собственный вектор $(1, 1, 1, \ldots, 1)$ при характеристическом числе 1. Характеристическое число 1 является максимальным для стохастической матрицы.*

Теорема 25.6. *Характерисическому числу 1 стохастической матрицы всегда соответствуют только элементарные делители первой степени.*

Определение 25.5. *Прямоугольная матрица A называется вполне неотрицательной (вполне положительной), если все миноры любых порядков этой матрицы неотрицательны (положительны).*

Замечание 25.2. *Неотрицательно определённые и положительно определённые матрицы соответственно – частые случаи матриц из определения 25.5 (они квадратные!).*

Пример 25.1. *1) Обобщенная матрица Вандермонда – вполне положительна.*

2) Якобиева матрица (трёхдиагональная) является вполне неотрицательной тогда и только тогда, когда все её главные миноры, а так же элементы первой наддиагонали и поддиагонали неотрицательны.

Определение 25.6. *Квадратная матрица A называется осцилляционной, если A – вполне неотрицательна и $\exists q \in Z, q > 0$, что A^q – вполне положительна.*

Теорема 25.7. *Вполне неотрицательная квадратная матрица A осцилляционная тогда и только тогда, когда*

1) $\det(A) > 0$,

2) все элементы A, расположенные на главной диагонали, на первой поддиагонали и на первой наддиагонали, отличны от нуля.

Замечание 25.3. *Осцилляционные матрицы образуют математический аппарат исследования осцилляционных свойств малых колебаний линейных упругих систем.*

26. Векторные и матричные нормы

Определение 26.1. *Пусть V – линейное пространство над полем C, тогда функция $||\cdot|| : V \to R$ называется векторной нормой, если $\forall x, y \in V$ выполняются условия:*

а) $||x|| \geq 0$, *причем* $||x|| = 0 \Leftrightarrow x = 0$,

б) $||cx|| = |c|||x||, \forall c \in C$,

в) $||x + y|| \leq ||x|| + ||y||$ *(неравенство треугольника).*

Примеры векторных норм: пусть $X = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$

1) l_2 – норма (евклидова норма) над C^n :

$$||x||_{l_2} = (|x_1|^2 + |x_2|^2 + \ldots + |x_n|^2)^{\frac{1}{2}} = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

2) l_1 – норма:

$$||x_1||_{l_1} = |x_1| + \ldots + |x_n| = \sum_{i=1}^{n} |x_i|$$

3) l_∞ – норма над C^n :

$$||x||_{l_\infty} = max\{|x_1|, |x_2|, \ldots, |x_n|\}$$

4) l_p – норма (норма Гёльдера с показателем p):

$$||x||_{l_p} = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

Определение 26.2. *Функция* $||\cdot|| : M_n(C) \to R$ *называется* *матричной нормой, если* $\forall A, B \in M_n(C)$ *выполняется:*

а) $||A|| \geq 0$, *причём* $||A|| = 0 \Leftrightarrow A = 0$,

б) $||cA|| = |c| ||A||, \forall c \in C$,

в) $||A + B|| \leq ||A|| + ||B||$,

г) $||AB|| \leq ||A|| ||B||$ *(кольцевое свойство).*

Так как $||A^2|| \leq ||A||$ (из г)) и если A является идемпотентной, то $A^2 = A \Rightarrow \left[\begin{array}{l} ||A|| = 0 \\ ||A|| \geq 1 \end{array}\right.$ (в частности $||E|| \geq 1$). Если A – обратима, то $A \cdot A^{-1} = E \Rightarrow$ $||E|| = ||A \cdot A^{-1}|| \leq ||A|| ||A^-1|| \Rightarrow ||A^{-1}|| \geq \dfrac{||E||}{||A||}$. Некоторые из векторных норм (см. выше) являются и матричными в применении к $M_n(C)$, а некоторые – нет. Наиболее известны примеры l_p-норм при $p = 1, 2$.

Пример 26.1. *Для* $A \in M_n(C) l_1$ *– норма определяется равенством:*

$$||A||_{l_1} = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}| = \sum_{i,j=1}^{n} |a_{ij}|$$

В этом случае легко проверить, что выполняются пункты а) – в) из определения 26.2.

Проверим справедливость условия г):

$$||AB||_{l_1} = \sum_{i,j=1}^{n} \left| \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj} \right| \leq \sum_{i,j,k=1}^{n} |a_{ik} b_{k,j}| \leq \sum_{i,j,k,m=1}^{n} |a_{ik} b_{mj}|$$

$$= \sum_{i,k=1}^{n} |a_{ik}| \sum_{j,m=1}^{n} |b_{mj}| = ||A||_{l_1} ||B||_{l_1}.$$

Пример 26.2. l_2 – *норма (евклидова норма) для* $A \in M_n(C)$ *определяется равенством:*

$$||A||_{l_2} = \left(\sum_{i,j=1}^{n} |a_{ij}|^2\right)^{\frac{1}{2}} \quad (||A||_F \text{ – фробениуса норма}).$$

Нетрудно проверить, что $||AB||_{l_2}^2 \leq ||A||_{l_2}^2 ||B||_{l_2}^2 \Rightarrow$ *а) – г) из определения 26.2 тоже выполняются.*

Пример 26.3. l_∞ – *не является матричной нормой на* $M_n(C)$, *т.е.* $||A||_{l_\infty} = = max_{1\leq i,j\leq n}|a_{ij}|$ – *не матричная норма (вместо неё используется* M *норма).*

Рассмотрим контрпример: $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \in M_2(C), A^2 = 2A, ||A||_{l_\infty} = 1$ тогда $||A^2||_{l_\infty} = ||2A||_{l_\infty} = 2 \Rightarrow ||A^2||_{l_\infty} \leq ||A||_{l_\infty}^2$ – неверно.

Замечание 26.1.

$$Ax = \lambda x \Rightarrow ||\lambda x|| = |\lambda|||x|| = ||Ax|| \leq ||A||||x|| \Rightarrow |\lambda| \leq ||A||.$$

Пример 26.4. *Часто употребляются матричные нормы (максимальная строчная и максимальная столбцовая)*

$$||A||_1 = \max_i \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|, ||A||_2 = \max_j \sum_{i=1}^{n} |a_{ij}|.$$

Пример 26.5. M – *норма:*

$$||A||_M = \sqrt{mn} \max_{i,j} |a_{ij}|, A \in C_{m,n}.$$

Пример 26.6. $||A||_s = \sqrt{\rho(A^*A)}$ – *спектральная норма* ($||A||_S = \alpha_1$ – *наибольшее сингулярное число матрицы* A *и* $\alpha_1 = \sqrt{\alpha}$, *где* $\alpha = \max_i |\lambda_i|$ *для матрицы* A^*A).

Результаты данного раздела могут быть распространены и на прямоугольные матрицы.

Пример 26.7. *Вычислить наиболее употребительные нормы для матрицы* $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 3 \\ 1 & -5 \end{bmatrix}$.

Решение:

$$||A||_{l_1} = 12, ||A||_{l_2} = \sqrt{40}, ||A||_M = 5\sqrt{6}, ||A||_1 = 6, ||A||_2 = 10,$$

$$||A||_S = \sqrt{p(A^*A)} = \sqrt{\rho\left(\begin{bmatrix} 2 & -7 \\ -7 & 38 \end{bmatrix}\right)} = \sqrt{20 + \sqrt{373}}.$$

27. Оценка действительных и мнимых частей собственных значений. Локализационные круги Гершгорина. Теорема Фань Цзы.

Пусть $A \in C_{n,m}, \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ – собственные значения A. Рассмотрим $S = \frac{1}{2}(A + A^*)$ и $T = \frac{1}{2i}(A - A^*)$, тогда $A = S + iT$, причем $S = S^*, T = S^*$.

Теорема 27.1. *Пусть матрица S имеет собственные значения $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$, а матрица T – $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n$, такие, что $\alpha_1 \geq \alpha_2 \geq \ldots \geq \alpha_n, \beta_1 \geq \beta_2 \geq \ldots \geq \beta_n$. Тогда*

$$\alpha_n \leq Re\lambda_i \leq \alpha_1, \ \beta_n \leq Im\lambda_i \leq \beta_1.$$

Теорема 27.2. $|Re\lambda_i| \leq n \max_{1 \leq i,j \leq n} \left| \frac{a_{ij} + \overline{a_{ji}}}{2} \right|, |Im\lambda_i| \leq n \max_{1 \leq i,j \leq n} \left| \frac{a_{ij} + \overline{a_{ji}}}{2} \right|.$

Говорят, что $A \in C_{n,n}$ имеет *доминирующую главную диагональ*, если $|a_{ij}| > \sum_{k=1 (i \neq k)}^{n} |a_{ik}|$, для всех $i = \overline{1, n}$.

Теорема 27.3. *Если $A \in C_{n,n}$ имеет доминирующую главную диагональ, то она невырождена.*

Теорема 27.4. *Все собственные значения $A \in C_{n,n}$ находятся в объединении кругов (Гершгорина)*

$$|\lambda - \alpha_{ii}| \leq \sum_{k=1 (i \neq k)}^{n} |a_{ik}| \text{ для всех } i = \overline{1, n}.$$

Следствие 27.1. *Любое собственное значение $A \in C_{n,n}$ лежит по крайней мере в одном из кругов Гершгорина.*

Теорема 27.5. *Множество из r локализационных кругов, не пересекающихся с остальными $n - r$ кругами, содержит ровно r собственных значений.*

Теорема 27.6. ***(Теорема Фань Цзы)*** *Пусть $A \in C_{n,n}$ и пусть $B \in C_{n,n}$ имеет действительные неотрицательные числа, т. е. $B \geq 0$ (неотрицательна), и $B \geq |A|$ (для всех элементов матриц B и A выполняется $b_{ij} \geq |a_{ij}|$, $|c+di| = \sqrt{c^2+d^2}$). Тогда все характеристические числа (собственные значения) матрицы A лежат в области*

$$\bigcup_{j=1}^{n} \left\{ z \in C \,\middle|\, |z - a_{jj}| \leq \rho(B) - b_{jj} \right\},$$

где $\rho(B)$ – спектральный радиус матрицы B.

Пример 27.1. *Изобразить на комплексной плоскости круги Гершгорина для матрицы*

$$A = \begin{pmatrix} 6+2i & -2 & -2+6i \\ 3-6i & -1+8i & -6+12i \\ 2 & -4+6i & 1+5i \end{pmatrix}$$

и сравнить с кругами Фань Цзы.

Решение:

Согласно теореме Гершгорина, радиусы кругов:

$$\rho_1 = \sqrt{4} + \sqrt{4+36} = \sqrt{40} + 2 \approx 8,$$

$$\rho_2 = \sqrt{9+36} + \sqrt{36+144} = \sqrt{45} + \sqrt{180} \approx 20,$$

$$\rho_3 = \sqrt{4} + \sqrt{16+36} = \sqrt{52} + 2 \approx 9,$$

Центры кругов находятся в точках, соответствующих диагональным элементам матрицы A. Для нахождения кругов Фань Цзы ищем положительную матрицу $B \geq |A|$, скажем $B = \begin{pmatrix} 7 & 2 & 8 \\ 9 & 10 & 14 \\ 2 & 8 & 6 \end{pmatrix}$, и находим $\rho(B) : det(B - \lambda E) = \ldots =$ $= -\lambda^3 + 23\lambda^2 - 26\lambda = -\lambda(\lambda^2 - 23\lambda + 26)$. Здесь

$$\lambda_1 = 0, \lambda_2 = \frac{23 - \sqrt{425}}{2}, \lambda_3 = \rho(B) = \frac{23 + \sqrt{425}}{2} \approx 22,$$

Значит, круги Фань Цзы имеют радиусы:

$$\rho_1 = 22 - 7 \approx 15, \rho_2 = 22 - 10 \approx 12, \rho_3 = 22 - 6 \approx 16.$$

Отметим, что $SpA = \{-4 + 14i, 5 + 5i, 5 - 4i\}$.

Вопросы для самоконтроля

1. Определение минора и алгебраического дополнения матрицы.
2. Определение диагональной матрицы.
3. Определение скалярной матрицы.
4. Определение блочно-диагональной матрицы.
5. Определение треугольной матрицы.
6. Определение блочно-треугольной матрицы.
7. Запишите известные вам матричные нормы.
8. Определение циркулянтной матрицы.
9. Определение матрицы Вандермонда.
10. Определение нормальной матрицы.
11. Определение псевдообратной матрицы.
12. Сформулируйте теорему о скелетном разложении матрицы.
13. Перечислите свойства псевдообратной матрицы.
14. Запишите формулу Бине-Коши.
15. Сформулируйте теорему о нормальном псевдорешении СЛАУ.
16. Определение характеристического многочлена матрицы.
17. Определение нормы матрицы.
18. Определение подобных матриц.
19. Определение эквивалентных матриц
20. Определение матрицы над кольцом многочленов.
21. Определение элементарных делителей матрицы.
22. Определение матричного многочлена.
23. Определение жордановой нормальной формы матрицы.

24. Определение минимального многочлена матрицы.
25. Определение фробениуса нормальной формы матрицы.
26. Определение функции от матриц.
27. Перечислите свойства функции от матриц.
28. Определение пучка матриц.
29. Определение простой и дефектной матрицы.
30. Определение системы квази-би-ортогональных векторов.
31. Сформулируйте спектральную теорему.
32. Перечислите свойства сопутствующие матриц.
33. Сформулируйте теорему о спектральном разложении.
34. Перечислите свойства компонентных матриц.
35. Определение интерполяционного многочлена Лагранжа-Сильвестра.
36. Определение симметрической, кососимметрической и эрмитовой матрицы.
37. Определение ортогональной, унитарной и нильпотентной матрицы.
38. Перечислите свойства эрмитовых матриц.
39. Определение идемпотентной и инволютивной матрицы.
40. Определение неотрицательной и неприводимой матрицы.
41. Определение определённой матрицы.
42. Определение примитивной и импримитивной матрицы.
43. Определение стохастической матрицы.
44. Определение осцилляционной и вполне положительной матрицы
45. Сформулируйте теорему Перрона-Фробениуса.
46. Сформулируйте теоремы Гершгорина и Фань Цзы.

Тесты для самостоятельной работы

Тест для самоконтроля.

ЛИТЕРАТУРА

1. Гантмахер, Ф.Р. Теория матриц / Ф.Р. Гантмахер. – М.: Мир, 1967. – 576 с.
2. Беллман, Р. Введение в теорию матриц / Р. Беллман. – М.: Наука, 1969. – 234 с.
3. Курош, А. Г. Курс высшей алгебры / А. Г. Курош. – М. : Наука, 1975. – 424 с.
4. Кострикин, А. И. Введение в алгебру / А. И. Кострикин. – М. : Наука, 1977. – 495 с.
5. Ланкастер, П. Теория матриц / П. Ланкастер. – М.: Наука, 1978. – 270 с.
6. Проскуряков, И.В. Сборник задач по линейной алгебре / И.В. Проскуряков. – М.: Наука, 1978. – 384 с.
7. Беклемишев, Д.В. Дополнительные главы линейной алгебры / Д.В. Беклемишев. – М.: Наука, 1983. – 168 с.
8. Воеводин, В.В. Матрицы и вычисления / В.В. Воеводин, Ю.А. Кузнецов. – М.: Наука, 1984. – 376 с.
9. Милованов, М.В. Алгебра и аналитическая геометрия / М.В. Мило-ванов [и др.]. – Минск: Высшая школа, 1987. – Ч.II. – 269 с.
10. Хорн, Р. Матричный анализ / Р. Хорн, Ч. Джонсон. – М.: Мир, 1989. – 655 с.
11. Архутик, Г.М. Матрицы над кольцом многочленов. Жорданова нормальная форма матрицы над полем / Архутик, М.А. Дмитрук. –Брест: Изд-во БрГУ, 1997. – 29 с.
12. Деменчук, А.К. Задачи по матричному анализу / А.К. Деменчук, Комраков, Г.П. Размыслович, В.М. Ширяев. – Минск: Изд-во БГУ, 2004. – 123 с.
13. Комраков, Б.Б. Матричный анализ / Б.Б. Комраков. – Минск: Изд-во БГУ, 2006. – 102 с.