УДК 517.95

Басик Александр Иванович
кандидат физ.-мат. наук, доцент кафедры математического анализа,
дифференциальных уравнений и их приложений
Брестский государственный университет имени А.С. Пушкина, г. Брест, Беларусь
alex-basik@yandex.ru
Грицук Евгений Васильевич
кандидат физ.-мат. наук, доцент кафедры математического анализа,
дифференциальных уравнений и их приложений
Брестский государственный университет имени А.С. Пушкина, г. Брест, Беларусь
gricuk_e@tut.by

ГОМОТОПИЧЕСКАЯ КЛАССИФИКАЦИЯ РЕГУЛЯРИЗУЕМЫХ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ РИМАНА-ГИЛЬБЕРТА ДЛЯ ОДНОГО КЛАССА ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ СИСТЕМ В $\mathbf{R}^3$

Аннотация. В ограниченной односвязной области трехмерного пространства рассматривается краевая задача Римана-Гильберта для эллиптической системы четырех дифференциальных уравнений первого порядка с действительными коэффициентами кососимметрического типа. В терминах матрицы граничного оператора и коэффициентов системы строится специальное векторное поле, невхождение которого в касательную плоскость в каждой точке граничной поверхности обеспечивает выполнимость условия регуляризуемости краевой задачи (условия Я.Б. Лопатинского). Доказывается, что множество рассматриваемых регуляризуемых краевых задач имеет четыре компоненты гомотопической связности, а также вычисляется индекс произвольной регуляризуемой краевой задачи Римана-Гильберта.

Ключевые слова: эллиптическая система, регуляризуемая краевая задача, условие Лопатинского, гомотопическая классификация, индекс.

ВВЕДЕНИЕ

Пусть в ограниченной односвязной области $\Omega \subset \mathbf{R}^3$, границей которой является поверхность Ляпунова $\partial\Omega$, задана эллиптическая система четырех дифференциальных уравнений первого порядка с действительными коэффициентами

$$A_1 \frac{\partial U}{\partial x_1} + A_2 \frac{\partial U}{\partial x_2} + A_3 \frac{\partial U}{\partial x_3} = 0, \tag{1}$$

где $U = (U_1, U_2, U_3, U_4)^T$ – неизвестная вектор-функция, A_1, A_2 и A_3 являются кососимметрическими матрицами размера 4×4 вида

$$A_k = \begin{pmatrix} 0 & a_k & b_k & c_k \\ -a_k & 0 & c_k & -b_k \\ -b_k & -c_k & 0 & a_k \\ -c_k & b_k & -a_k & 0 \end{pmatrix}, \quad k = 1, 2, 3.$$

Эллиптичность системы (1) означает, что для каждого ненулевого вектора $\xi \in \mathbf{R}^3$ характеристическая матрица системы (1)

$$A(\xi) := A_1\xi_1 + A_2\xi_2 + A_3\xi_3$$

является невырожденной.

Обозначим $a = (a_1, a_2, a_3), b = (b_1, b_2, b_3), c = (c_1, c_2, c_3)$. Тогда нетрудно убедиться, что

$$\det A(\xi) = \left(\langle a;\xi\rangle^2 + \langle b;\xi\rangle^2 + \langle c;\xi\rangle^2\right)^2,$$

где $\langle x; y\rangle = x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3$ – стандартное скалярное произведение в $\mathbf{R}^3$.

Лемма 1. *Система* (1) *является эллиптической тогда и только тогда, когда векторы* a, b *и* c *линейно независимы.*

Доказательство. Необходимость. Предположим, что существуют числа ξ_1, ξ_2, ξ_3, не все равные нулю, такие что $a\xi_1 + b\xi_2 + c\xi_3 = 0$. Последнее означает, что система уравнений

$$\begin{cases} a_1\xi_1 + a_2\xi_2 + a_3\xi_3 = 0, \\ b_1\xi_1 + b_2\xi_2 + b_3\xi_3 = 0, \\ c_1\xi_1 + c_2\xi_2 + c_3\xi_3 = 0 \end{cases} \tag{2}$$

имеет ненулевое решение, но тогда $\det A(\xi_1, \xi_2, \xi_3) = 0$, что противоречит эллиптичности системы (1).

Докажем достаточность. Уравнение $\det A(\xi) = 0$ равносильно системе (2), которая в силу линейной независимости векторов a, b и c, имеет только нулевое решение. Таким образом, система (1) является эллиптической. Лемма доказана.

Ниже всюду предполагаем, что векторы a, b и c линейно независимы.

Задача Римана-Гильберта для эллиптической системы (1) состоит в отыскании решения этой системы, непрерывно дифференцируемого в области Ω и непрерывного по Гельдеру в замыкании этой области, удовлетворяющего на поверхности $\partial\Omega$ граничным условиям

$$B(y)U(y) = f(y) \quad (y \in \partial\Omega), \tag{3}$$

где B – заданная непрерывная по Гельдеру на $\partial\Omega$ матрица-функция размера 2×4 вида

$$B(y) = \begin{pmatrix} m_1(y) & m_2(y) & m_3(y) & m_4(y) \\ n_1(y) & n_2(y) & n_3(y) & n_4(y) \end{pmatrix},$$

f – заданная непрерывная по Гельдеру на $\partial\Omega$ двухкомпонентная вектор-функция.

В настоящей работе проводится гомотопическая классификация регуляризуемых краевых задач Римана-Гильберта для класса эллиптических кососимметрических систем четырех дифференциальных уравнений первого порядка с тремя переменными. Проблема гомотопической классификации регуляризуемых краевых задач была поставлена И.М. Гельфандом в 1960 г. и состоит в определении числа компонент связности, а также в указании представителей этих компонент и в установлении гомотопических инвариантов эллиптических псевдодифференциальных операторов, задаваемых регуляризуемыми краевыми задачами [1] (напомним, что краевая задача называется регуляризуемой, если для нее выполнено условие Я.Б. Лопатинского [2, 3]). Несмотря на давность постановки, эта проблема до сих пор не решена, по ней имеются лишь отдельные результаты. Отметим некоторые из них. Шевченко В.И. провел классификацию регуляризуемых задач Римана-Гильберта для системы Моисила-Теодореску [4], Усс А.Т. – для трехмерных аналогов системы Коши-Римана [5]. Заметим, что частным случаем систем вида (1) является система Моисила-Теодореску и рассматриваемый нами класс систем имеет непустое пересечение, но не совпадает с классом трехмерных аналогов системы Коши-Римана.

МЕТОДЫ ИССЛЕДОВАНИЯ

В работе исследования проводятся методом, предложенным В.И. Шевченко [4]. Изложим кратко суть этого метода. Для систем рассматриваемого класса доказывается критерий, позволяющий в явном виде описать условие регуляризуемости Я.Б. Лопатинского произвольной краевой задачи Римана-Гильберта в терминах матрицы граничного оператора и нормального вектора к граничной поверхности. Это условие обеспечивает нетеровость задачи в широком классе гильбертовых пространств [2, 3]. Подобный критерий, как указывалось выше, был ранее получен Шевченко В.И. для системы Моисила-Теодореску [4] (см. также [6]), а также Уссом А.Т. для трехмерных аналогов системы Коши-Римана [5]. Для сравнения отметим, что для четырехмерных аналогов системы Коши-Римана [7] и псевдосимметрических эллиптических систем в $\mathbf{R}^4$ [8] такого критерия не существует.

Доказанный критерий позволяет провести гомотопию произвольной краевой задачи Римана-Гильберта для рассматриваемых систем в классе регуляризуемых краевых задач к простейшему виду, тем самым установить равенство индексов этих задач. Индекс регуляризуемой задачи Римана-Гильберта для системы Моисила-Теодореску [4], а также для трехмерных аналогов системы Коши-Римана [5] равен минус единице. В настоящей работе мы распространяем этот результат на класс эллиптических кососимметрических систем (1) в $\mathbf{R}^3$.

РЕЗУЛЬТАТЫ ИССЛЕДОВАНИЯ.

Краевая задача (1), (3) называется регуляризуемой, если для нее выполнено условие Я.Б. Лопатинского. Это условие представляет собой дополнительное ограничение на матрицу граничного оператора и состоит в том, что ранг матрицы

$$B(y)\cdot\int_{\gamma} A^{-1}(\lambda\nu(y)+\tau(y))d\lambda \tag{4}$$

является максимальным в каждой точке $y\in\partial\Omega$ и при каждом единичном касательном к $\partial\Omega$ в точке y векторе $\tau=\tau(y)$. Здесь через $\nu=\nu(y)$ обозначен единичный вектор внутренней нормали к $\partial\Omega$ в точке *y*. Интегрирование в (3) ведется по простому замкнутому контуру γ, лежащему в верхней комплексной λ-полуплоскости и охватывающему корень $\alpha+i\beta$ $(\beta>0)$ уравнения

$$\det A(\lambda\nu(y)+\tau(y))=0.$$

Отметим, что для максимальности ранга матрицы (4) необходимо, чтобы $rank\, B(y)=2$ в каждой точке $y\in\partial\Omega$, что и предполагаем в дальнейшем выполненным.

Через Λ_{jk} обозначим минор матрицы $B(y)$, составленный из ее *j*-го и *k*-го столбцов (*j*, *k* = 1, 2, 3, 4) и рассмотрим векторное поле $L=(L_1,L_2,L_3)$, где

$$L_1=a_1(\Lambda_{12}+\Lambda_{34})+b_1(\Lambda_{13}-\Lambda_{24})+c_1(\Lambda_{23}+\Lambda_{14}),$$
$$L_2=a_2(\Lambda_{12}+\Lambda_{34})+b_2(\Lambda_{13}-\Lambda_{24})+c_2(\Lambda_{23}+\Lambda_{14}),$$
$$L_3=a_3(\Lambda_{12}+\Lambda_{34})+b_3(\Lambda_{13}-\Lambda_{24})+c_3(\Lambda_{23}+\Lambda_{14}).$$

Теорема 1. *Задача* (1), (3) *регуляризуема тогда и только тогда, когда в каждой точке* $y\in\partial\Omega$ *выполняется условие*

$$\langle\nu(y);L(y)\rangle\neq 0. \tag{5}$$

Доказательство. Пусть H_{jk} – минор матрицы Я.Б. Лопатинского (4), составленный из ее *j*-го и *k*-го столбцов (*j*, *k* = 1, 2, 3, 4). Непосредственные вычисления показывают, что

$$H_{12}=H_{34},\ \ H_{13}=-H_{24},\ \ H_{14}=H_{23},$$

и с точностью до ненулевого множителя

$$H_{12}=\langle a;\xi\rangle\big(\langle a;\xi\rangle(\Lambda_{12}+\Lambda_{34})+\langle b;\xi\rangle(\Lambda_{13}-\Lambda_{24})+\langle c;\xi\rangle(\Lambda_{23}+\Lambda_{14})\big),$$
$$H_{13}=\langle b;\xi\rangle\big(\langle a;\xi\rangle(\Lambda_{12}+\Lambda_{34})+\langle b;\xi\rangle(\Lambda_{13}-\Lambda_{24})+\langle c;\xi\rangle(\Lambda_{23}+\Lambda_{14})\big),$$
$$H_{14}=\langle c;\xi\rangle\big(\langle a;\xi\rangle(\Lambda_{12}+\Lambda_{34})+\langle b;\xi\rangle(\Lambda_{13}-\Lambda_{24})+\langle c;\xi\rangle(\Lambda_{23}+\Lambda_{14})\big),$$

где $\xi=(\alpha+i\beta)\nu(y)+\tau(y)$.

Условие максимальности ранга матрицы Я.Б. Лопатинского (3) равносильно тому, что в каждой точке $y\in\partial\Omega$ и при каждом единичном касательном векторе $\tau(y)$ к поверхности $\partial\Omega$ в точке y выполняется условие

$$|H_{12}|^2+|H_{13}|^2+|H_{14}|^2\neq 0.$$

Заметим, что

$$|H_{12}|^2+|H_{13}|^2+|H_{14}|^2=$$
$$=\left(|\langle a;\xi\rangle|^2+|\langle b;\xi\rangle)|^2+|\langle c;\xi\rangle|^2\right)|\langle a;\xi\rangle(\Lambda_{12}+\Lambda_{34})+\langle b;\xi\rangle(\Lambda_{13}-\Lambda_{24})+\langle c;\xi\rangle(\Lambda_{23}+\Lambda_{14})|^2=$$

$$= \left(\left|\langle a;\xi\rangle\right|^2 + \left|\langle b;\xi\rangle\right|^2 + \left|\langle c;\xi\rangle\right|^2 \right) \langle \tau; L\rangle + \alpha\langle \nu; L\rangle + i\beta\langle \nu; L\rangle \Big|^2 . \qquad (6)$$

Докажем необходимость выполнения неравенства (4). Предположим, что в некоторой точке $y_0 \in \partial\Omega$ выполняется равенство $\langle \nu(y_0); L(y_0)\rangle = 0$, т.е. вектор $L(y_0)$ лежит в касательной плоскости $T_{y_0}\partial\Omega$ к поверхности $\partial\Omega$ в точке y_0. Поэтому найдется единичный вектор $\tilde{\tau} \in T_{y_0}\partial\Omega$ ортогональный $L(y_0)$. Положив в формуле (5) $\tau = \tilde{\tau}$ и $y = y_0$ получим $|H_{12}|^2 + |H_{13}|^2 + |H_{14}|^2 = 0$, что противоречит максимальности ранга матрицы (3).

Обратно, пусть выполняется условие (5), однако $|H_{12}|^2 + |H_{13}|^2 + |H_{14}|^2 = 0$ в некоторой точке y_0 и при некотором единичном векторе τ, тогда из формулы (6) следует, что

$$\langle a;\xi\rangle = 0,\ \langle b;\xi\rangle = 0 \text{ и } \langle c;\xi\rangle = 0,$$

где $\xi = (\alpha + i\beta)\nu(y_0) + \tau$. Последнее противоречит эллиптичности системы (1). Теорема доказана.

Напомним, что две регуляризуемые задачи Римана-Гильберта называются гомотопными, если существует непрерывная деформация одной задачи в другую, не нарушающая условия Лопатинского. При этом предполагается, что деформация сохраняет гладкость (непрерывность по Гельдеру) коэффициентов этих задач.

Через $\Im$ обозначим множество всех регуляризуемых краевых задач Римана-Гильберта (1), (3); $\Im_+^+$ – множество регуляризуемых задач Римана-Гильбета (1), (3), для которых выполняется неравенство $\langle \nu(y); L(y)\rangle > 0$ всюду на $\partial\Omega$ и векторы *a*,*b* и *c* образуют правую тройку; $\Im_+^-$– множество регуляризуемых задач, для которых $\langle \nu(y); L(y)\rangle > 0$ и *a*,*b*,*c* – левая тройка векторов; $\Im_-^-$– множество регуляризуемых задач, для которых $\langle \nu(y); L(y)\rangle < 0$ и *a*,*b*,*c* – левая тройка векторов; $\Im_-^+$– множество регуляризуемых задач, для которых $\langle \nu(y); L(y)\rangle < 0$ и *a*,*b*,*c* – правая тройка векторов.

Теорема 2. *Множество* $\Im$ *регуляризуемых краевых задач Римана-Гильберта для эллиптических систем кососимметрического типа в* $\mathbf{R}^3$ *имеет четыре компоненты гомотопической связности* $\Im_+^+$, $\Im_+^-$, $\Im_-^+$, $\Im_-^-$. *Гомотопическими инвариантами являются знак скалярного произведения* $\langle \nu(y); L(y)\rangle$ *и знак смешанного произведения* (*a*, *b*, *c*). *Индекс произвольной задачи из* $\Im$ *равен минус единице.*

Доказательство. В силу непрерывности векторного поля $L(y)$ и связности поверхности $\partial\Omega$ скалярное произведение $\langle \nu(y); L(y)\rangle$ сохраняет знак на $\partial\Omega$, и, следовательно, задачи для которых соответствующие скалярные произведения имеют разные знаки не гомотопны. Заметим также, что если соответствующие тройки векторов *a*,*b* и *c* двух задач имеют разную ориентацию, то эти задачи не гомотопны. Таким образом, достаточно установить гомотопическую связность множеств $\Im_+^+$, $\Im_+^-$, $\Im_-^+$, $\Im_-^-$.

Рассмотрим множество $\Im_+^+$. Так как $rank\, B(y) = 2$ в каждой точке $y \in \partial\Omega$, то на поверхности $\partial\Omega$ первая строка

$$m(y) := (m_1(y), m_2(y), m_3(y), m_4(y))$$

матрицы $B(y)$ не обращается в нуль. Поэтому существует [9] непрерывное отображение $M : \partial\Omega \times [0;1] \to \mathbf{R}^4 \setminus \{0\}$, такое что при каждом $y \in \partial\Omega$

$$M(y, 0) = m(y) \text{ и } M(y, 1) = (1, 0, 0, 0),$$

и при каждом $t \in [0;1]$ вектор-функция $M(\cdot, t)$ непрерывна по Гельдеру на $\partial\Omega$.

Проведем гомотопию матрицы граничного оператора задачи (1), (3). Для этого рассмотрим линейную систему уравнений относительно неизвестной строки $N=(N_1(y,t),N_2(y,t),N_3(y,t),N_4(y,t))$

$$\Xi(y,t)N^T(y,t)=\widetilde{L}(y,t)\,, \tag{7}$$

где матрица $\Xi(y,t)$ имеет вид (для упрощения записей точка $(y,t)\in\partial\Omega\times[0;1]$, в которой вычисляются элементы матрицы, не указывается):

$$\Xi=\begin{pmatrix} M_1 & M_2 & M_3 & M_4 \\ -a_1 M_2 - b_1 M_3 - c_1 M_4 & a_1 M_1 - c_1 M_3 + b_1 M_4 & b_1 M_1 + c_1 M_2 - a_1 M_4 & c_1 M_1 - b_1 M_2 + a_1 M_3 \\ -a_2 M_2 - b_2 M_3 - c_2 M_4 & a_2 M_1 - c_2 M_3 + b_2 M_4 & b_2 M_1 + c_2 M_2 - a_2 M_4 & c_2 M_1 - b_2 M_2 + a_2 M_3 \\ -a_3 M_2 - b_3 M_3 - c_3 M_4 & a_3 M_1 - c_3 M_3 + b_3 M_4 & b_3 M_1 + c_3 M_2 - a_3 M_4 & c_3 M_1 - b_3 M_2 + a_3 M_3 \end{pmatrix},$$

а правая часть системы (7):

$$\widetilde{L}(y,t)=\begin{pmatrix} t(m_1(y)n_1(y)+m_2(y)n_2(y)+m_3(y)n_3(y)+m_4(y)n_4(y)) \\ (1-t)L_1(y)+t\nu_1(y) \\ (1-t)L_2(y)+t\nu_2(y) \\ (1-t)L_3(y)+t\nu_3(y) \end{pmatrix}.$$

Так как в каждой точке $y\in\partial\Omega$ и при каждом $t\in[0;\,1]$

$$\det\Xi(y,t)=(a,b,c)\left(M_1^2+M_2^2+M_3^2+M_4^2\right)^2\neq 0\,,$$

то система (7) однозначно разрешима (через (a,b,c) обозначено смешанное произведение векторов $a,\ b$ и c), при этом отображение $N:\partial\Omega\times[0;1]\to\mathbf{R}^4$ непрерывно и, как нетрудно видеть, при каждом фиксированном $t\in[0;\,1]$ непрерывно по Гельдеру на $\partial\Omega$. При $t=0$ решением системы (7) является вторая строка матрицы $B(y)$.

Рассмотрим гомотопию задачи (1), (3), при которой система (1) остается неизменной, а матрица соответствующего этой системе граничного условия

$$B(y,t)U(y)=f(y)\quad(y\in\partial\Omega), \tag{8}$$

имеет вид

$$B(y,t)=\begin{pmatrix} M_1(y,t) & M_2(y,t) & M_3(y,t) & M_4(y,t) \\ N_1(y,t) & N_2(y,t) & N_3(y,t) & N_4(y,t) \end{pmatrix}.$$

Так как векторное поле $L(y,t)$, отвечающее задаче (1), (8), имеет вид

$$L(y,t)=(1-t)L(y)+t\nu(y)\,,$$

то

$$\langle\nu(y);L(y,t)\rangle=(1-t)\langle\nu(y);L(y)\rangle+t>0$$

при всех $y\in\partial\Omega$ и любом $t\in[0;1]$. Следовательно, задача (1), (3) в классе регуляризуемых краевых задач гомотопна задаче для системы (1) с граничным условием ($y\in\partial\Omega$)

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \dfrac{(\nu(y),b,c)}{(a,b,c)} & \dfrac{(a,\nu(y),c)}{(a,b,c)} & \dfrac{(a,b,\nu(y))}{(a,b,c)} \end{pmatrix}U(y)=f(y)\,. \tag{9}$$

Отметим, что задача (1), (9) регуляризуема для любых линейно независимых векторов a,b и c.

Проведем теперь гомотопию эллиптической системы задачи (1), (9). Если a,b,c образует правую тройку векторов, то непрерывной деформацией в $\mathbf{R}^3$ с сохранением условия линейной независимости, она может быть сгомотопирована в стандартный базис e_1, e_2, e_3 пространства $\mathbf{R}^3$ (см., например, [10, с. 211]). Таким образом, произвольная задача из $\Im_+^+$ гомотопна задаче

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u_2}{\partial x_1}+\dfrac{\partial u_3}{\partial x_2}+\dfrac{\partial u_4}{\partial x_3}=0, \\ -\dfrac{\partial u_1}{\partial x_1}+\dfrac{\partial u_3}{\partial x_3}-\dfrac{\partial u_4}{\partial x_2}=0, \\ -\dfrac{\partial u_1}{\partial x_2}-\dfrac{\partial u_2}{\partial x_3}+\dfrac{\partial u_4}{\partial x_1}=0, \\ -\dfrac{\partial u_1}{\partial x_3}+\dfrac{\partial u_2}{\partial x_2}-\dfrac{\partial u_3}{\partial x_1}=0 \end{cases} \qquad (x\in\Omega), \tag{10}$$

$$\begin{cases} u_1\big|_{\partial\Omega}=f_1(y), \\ (u_2\nu_1+u_3\nu_2+u_4\nu_3)\big|_{\partial\Omega}=f_2(y) \end{cases} \qquad (y\in\partial\Omega). \tag{11}$$

Заменой $V=(-u_2,-u_3,-u_4)$ и $W=u_1$ (10), (11) приводится к виду

$$\operatorname{div}V(x)=0, \quad \operatorname{rot}V(x)=\operatorname{grad}W(x), \tag{12}$$

$$W\big|_{\partial\Omega}=f_1(y), \qquad \langle V;\nu\rangle\big|_{\partial\Omega}=-f_2(y). \tag{13}$$

Индекс последней задачи вычислен в работе [9] и равен минус единице.

Рассмотрим теперь множество $\Im_+^-$. В этом случае, левая тройка векторов a,b,c непрерывной деформацией в $\mathbf{R}^3$ может быть переведена в базис $-e_1$, e_2, e_3 пространства $\mathbf{R}^3$ (см., например, [10, с. 211]). Тогда произвольная задача из $\Im_+^-$ гомотопна задаче

$$\begin{cases} -\dfrac{\partial u_2}{\partial x_1}+\dfrac{\partial u_3}{\partial x_2}+\dfrac{\partial u_4}{\partial x_3}=0, \\ \dfrac{\partial u_1}{\partial x_1}+\dfrac{\partial u_3}{\partial x_3}-\dfrac{\partial u_4}{\partial x_2}=0, \\ -\dfrac{\partial u_1}{\partial x_2}-\dfrac{\partial u_2}{\partial x_3}-\dfrac{\partial u_4}{\partial x_1}=0, \\ -\dfrac{\partial u_1}{\partial x_3}+\dfrac{\partial u_2}{\partial x_2}+\dfrac{\partial u_3}{\partial x_1}=0 \end{cases} \qquad (x\in\Omega), \tag{13}$$

$$\begin{cases} u_1\big|_{\partial\Omega}=f_1(y), \\ (-u_2\nu_1+u_3\nu_2+u_4\nu_3)\big|_{\partial\Omega}=f_2(y) \end{cases} \qquad (y\in\partial\Omega). \tag{14}$$

Задача (13), (14) заменой $V=(-u_2,u_3,u_4)$ и $W=u_1$ также приводится к виду (12), (13) и, следовательно, имеет индекс равный минус единице.

Аналогично доказывается, что каждая задача из множества $\Im_-^+$ гомотопна задаче для системы (10) с граничным условием

$$\begin{cases} u_1\big|_{\partial\Omega}=f_1(y), \\ (-u_2\nu_1-u_3\nu_2-u_4\nu_3)\big|_{\partial\Omega}=f_2(y) \end{cases} \qquad (y\in\partial\Omega), \tag{15}$$

а из $\Im_-^-$ – задаче для системы (13) с граничным условием

$$\begin{cases} u_1\big|_{\partial\Omega}=f_1(y), \\ (u_2\nu_1-u_3\nu_2-u_4\nu_3)\big|_{\partial\Omega}=f_2(y) \end{cases} \qquad (y\in\partial\Omega). \tag{16}$$

Теорема доказана.

ВЫВОДЫ И ПЕРСПЕКТИВЫ ДАЛЬНЕЙШИХ ИССЛЕДОВАНИЙ

В статье в терминах матрицы граничного оператора и коэффициентов системы получен критерий регуляризуемости краевой задачи Римана-Гильберта для класса эллиптических систем четырех дифференциальных уравнений кососимметрического типа в $\mathbf{R}^3$. Доказано, что множество регуляризуемых краевых задач Римана-Гильберта для рассматриваемого класса эллиптических систем имеет четыре компоненты гомотопической связности, найдены простейшие представители каждой из компонент (задачи (10)-(11), (13)-(14), (10)-(15) и (13)-(16)) и признаки различения компонент. Доказано также, что индекс произвольной регуляризуемой краевой задачи Римана-Гильберта для класса эллиптических систем четырех дифференциальных уравнений кососимметрического типа в $\mathbf{R}^3$ равен минус единице.

СПИСОК ИСПОЛЬЗУЕМОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Гельфанд, И.М. Об эллиптических уравнениях / И.М. Гельфанд //Успехи мат. наук. – 1960. – Т. 15, вып. 3. – С. 121-132.

2. Агранович, М.С. Эллиптические сингулярные интегро-дифференциальные операторы / М.С. Агранович // Успехи мат. наук. – 1965. – Т. 20, вып. 5. – С. 3-120.

3. Лопатинский, Я.Б. Об одном способе приведения граничных задач для системы дифференциальных уравнений эллиптического типа к регулярным интегральным уравнениям / Я.Б. Лопатинский // Укр. мат. журн. – 1953. – Т. 5. – С. 123-151.

4. Шевченко, В.И. Гомотопическая классификация задач Римана-Гильберта для голоморфного вектора / В.И. Шевченко // Респ. межвед. сб. «Матем. физика». – Киев, 1975. – Вып. 17. – С. 184-186.

5. Усс, А.Т. Краевая задача Римана-Гильберта для трехмерных аналогов системы Коши-Римана / А.Т. Усс // Докл. НАН Беларуси. – 2003. – Т. 47, № 6. – С. 10-15.

6. Полунин, В.А. Об условии Шапиро-Лопатинского в задаче Римана-Гильберта для эллиптической системы первого порядка / В.А. Полунин, А.П. Солдатов // Научные ведомости сб. «Матем. физика». – Белгород, 2010. – №17(88), Вып. 20. – С. 91-99.

7. Усс, А.Т. Гомотопическая классификация четырехмерных аналогов системы Коши-Римана с действительными коэффициентами / А.Т. Усс // Докл. НАН Беларуси. – 2003. – Т. 47, № 4. – С. 5-9.

8. Виноградов, В.С. Граничная задача для псевдосимметрических систем / В.С. Виноградов // Дифференц. уравнения. – 1985. – Т. 21, № 1. – С. 161-163.

9. Шевченко, В.И. О некоторых краевых задачах для голоморфного вектора / В.И. Шевченко // Респ. межвед. сб. «Матем. физика». – Киев, 1970. – Вып. 8. – С. 172-186.

10. Александров, П.С. Лекции по аналитической геометрии, пополненные необходимыми сведениями из алгебры : [для ун-тов] / П.С. Александров; с приложением собрания задач, снабженных решениями, составленного А.С. Пархоменко. – М.: Наука, 1968. – 911 с.

THE HOMOTOPIC CLASSIFICATION OF REGULARIZABLE RIEMANN-HILBERT BOUNDARY VALUE PROBLEMS FOR ONE CLASS OF ELLIPTIC SYSTEMS IN $\mathbf{R}^3$

Aliaksandr Basik, Evgeny Gricuk

Abstract. The class of elliptic systems of skew-symmetric type in $\mathbf{R}^3$ is considered in the paper. The condition of the regularizability of an arbitrary Riemann-Hilbert boundary value problem in a bounded simply connected domain for such systems is described in terms of the matrix of the boundary operator. It is proved that the considered set of regularizable boundary value problems has four components of homotopic connectedness, and the index of an arbitrary regularizable Riemann-Hilbert boundary value problem is also calculated.

Keywords: elliptic system, regularizable boundary value problem, Lopatinsky condition, homotopic classification, index.