Белорусский государственный университет

УДК 517.956.223(043.3)

**БАСИК**
**Александр Иванович**

# ЭЛЛИПТИЧЕСКИЕ СИСТЕМЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ПЕРВОГО ПОРЯДКА И КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ НИХ

АВТОРЕФЕРАТ
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

по специальности 01.01.02 — дифференциальные уравнения,
динамические системы и оптимальное управление

Минск, 2013

Работа выполнена в УО «Брестский государственный университет имени А.С. Пушкина».

НАУЧНЫЙ РУКОВОДИТЕЛЬ –

**Усс Анатолий Терентьевич**
кандидат физико-математических наук, доцент.

ОФИЦИАЛЬНЫЕ ОППОНЕНТЫ:

**Антоневич Анатолий Борисович**
доктор физико-математических наук, профессор, профессор кафедры функционального анализа Белорусского государственного университета;

**Лемешевский Сергей Владимирович**
кандидат физико-математических наук, заведующий отделом информационных технологий Государственного научного учреждения «Институт математики Национальной академии наук Беларуси».

ОППОНИРУЮЩАЯ ОРГАНИЗАЦИЯ –

учреждение образования «Могилевский государственный университет имени А.А. Кулешова».

Защита состоится 19 апреля 2013 г. в 10.00 на заседании совета по защите диссертаций Д 02.01.07 при Белорусском государственном университете по адресу: 220030, г. Минск, ул. Ленинградская, 8 (юридический факультет), ауд. 407, тел. (017) 209-57-09.

С диссертацией можно ознакомиться в Фундаментальной библиотеке Белорусского государственного университета.

Автореферат разослан марта 2013 г.

Ученый секретарь
совета по защите диссертаций
доктор физико-математических наук,
профессор Н. В. Лазакович

# ВВЕДЕНИЕ

Настоящая диссертационная работа связана с теорией дифференциальных уравнений эллиптического типа и посвящена изучению вопросов гомотопической классификации и постановки регуляризуемых краевых условий для некоторых классов эллиптических систем дифференциальных уравнений с частными производными.

Вопросы регуляризуемости и индекса общих краевых задач для эллиптических систем дифференциальных уравнений принципиально решены (1950–1965 гг.) в том смысле, что получено алгебраическое условие, необходимое и достаточное для нетеровости задачи в широком классе пространств (Я.Б. Лопатинский[1], А.С. Дынин[2], М.С. Агранович[3] и др.), и установлено, что индекс регуляризуемой краевой задачи выражается через определенные топологические инварианты специальных геометрических конструкций, связанных с этой задачей (М. Атья, И. Зингер, Р. Ботт, Буте де Монвель и др.; подробности см. Ш. Ремпель и Б.-В. Шульце[4]). Явное построение этих конструкций для конкретных систем представляет собой далекую от завершения актуальную задачу. Этим обусловлено выделение в современных исследованиях двух направлений, связанных с установлением классов регуляризуемых краевых задач (Б.В. Боярский, М.З. Соломяк, В.И. Шевченко, А. Янушаускас и др.) и с получением аналитических и явных формул для индекса (А.С. Дынин, Ф. Дайсуке, Б.Ф. Федосов, В.И. Шевченко и др.). К направлениям тесно примыкает поставленная еще в 1956 году (И.М. Гельфанд, И.Г. Петровский, Г.Е. Шилов[5]) и к настоящему времени решенная лишь в плоском случае (Б.В. Боярский, В.Б. Лидский, П.А. Фролов и др.) проблема гомотопической классификации эллиптических систем дифференциальных уравнений как при наличии граничных условий, так и без них, поскольку, как обнаружилось, не только индекс, но и регуляризуемость краевой задачи связаны с гомотопическим типом эллиптической системы. Все перечисленные проблемы далеки от своего разрешения и, несмотря на давность постановки, до сих пор активно разрабатываются в мире (А.Б. Анто-

[1] *Лопатинский, Я.Б.* Об одном способе приведения граничных задач для системы дифференциальных уравнений эллиптического типа к регулярным интегральным уравнениям / Я.Б. Лопатинский // Укр. мат. журн. — 1953. — Т. 5. — С. 123-151.

[2] *Дынин, А.С.* Эллиптические интегро-дифференциальные краевые задачи /А.С. Дынин //Успехи мат. наук. – 1963. – Т. 18, вып. 2. – С. 183-184.

[3] *Агранович, М.С.* Эллиптические сингулярные интегро-дифференциальные операторы / М.С. Агранович // Успехи мат. наук. – 1965. – Т. 20, вып. 5. – С. 3-120.

[4] *Ремпель, Ш.* Теория индекса эллиптических краевых задач / Ш. Ремпель, Б.-В. Шульце; пер. с англ. М.А. Шубина. – М.: Мир, 1986. – 576 с.

[5] *Гельфанд, И.М.* Теория систем дифференциальных уравнений с частными производными /И.М. Гельфанд, И.Г. Петровский, Г.Е. Шилов // Труды Третьего Всесоюзного математического съезда, Москва, июнь–июль 1956 / АН СССР. – М., 1958. – Т. 3: Обзорные доклады / [редкол. А.А. Абрамов и др.]. – С. 65–72.

невич, В.Е. Балабаев, А.Ю. Савин, Б.Ю. Стернин, Б.Ф. Федосов, B. Rowley, W.L. Wendland и др.).

# ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

## Связь работы с крупными научными программами (проектами) и темами

Исследования проводились на кафедре математического анализа и дифференциальных уравнений математического факультета учреждения образования «Брестский государственный университет имени А.С. Пушкина» в соответствии с заданиями научных программ, выполнявшихся в рамках:

– кафедральной научной темы «Эллиптические системы дифференциальных уравнений первого порядка и краевые задачи для них»;

– научной темы «Аналитическая и качественная теории дифференциальных уравнений и их приложения» (№ госрегистрации 20113927, дата регистрации 11.10.2011).

## Цель и задачи исследования

Целью диссертационной работы является проведение гомотопической классификации эллиптических систем четырех уравнений первого порядка псевдосимметрического типа в $\mathbb{R}^3$; доказательство нерегуляризуемости краевых задач для эллиптических систем четырех уравнений первого порядка псевдосимметрического типа в $\mathbb{R}^4$; получение условий регуляризуемости краевой задачи линейного сопряжения для некоторых трехмерных аналогов системы Коши-Римана и вычисление индекса регуляризуемых задач.

Для достижения поставленной цели необходимо решить следующие задачи

— определить количество компонент гомотопической связности множества эллиптических систем четырех уравнений первого порядка псевдосимметрического типа в $\mathbb{R}^3$, указать представители каждой из компонент, установить гомотопические инварианты и признаки различения компонент;

— на двумерной сфере построить специальное векторное поле, вырождение или направление по нормали которого хотя бы в одной точке сферы обращает в нуль все $2\times 2$-миноры матрицы Лопатинского краевой задачи для эллиптической псевдосимметрической системы четырех дифференциальных уравнений первого порядка в $\mathbb{R}^4$;

— построить многомерный аналог интеграла типа Коши и получить для него аналоги формул Племеля-Сохоцкого, позволяющие свести задачу линейного сопряжения для многомерных аналогов системы Коши-Римана к равносильной ей системе сингулярных интегральных уравнений с ядром типа Коши; получить теорему о равенстве индексов рассматриваемой краевой задачи и соответствующей ей системы сингулярных интегральных уравнений;

— получить условия регуляризуемости задачи линейного сопряжения для трехмерных аналогов системы Коши-Римана двух специальных типов и вычислить индекс этих задач.

*Объект* исследования – эллиптические системы дифференциальных уравнений с частными производными первого порядка в $\mathbb{R}^n$ с действительными коэффициентами. *Предмет* исследования – гомотопическая классификация систем, регуляризуемость и индекс краевых задач для этих систем.

**Положения, выносимые на защиту**

1. Множество псевдосимметрических эллиптических систем четырех уравнений первого порядка в $\mathbb{R}^3$ имеет две компоненты гомотопической связности.

2. Для псевдосимметрических эллиптических систем четырех уравнений первого порядка в $\mathbb{R}^4$ нет регуляризуемых краевых задач.

3. Получение формул типа Племеля-Сохоцкого для сингулярного интеграла, сопоставляемого каждому многомерному аналогу системы Коши-Римана, и их приложение к исследованию краевых задач.

4. Достаточные условия фредгольмовости краевой задачи линейного сопряжения для некоторых трехмерных аналогов системы Коши-Римана.

**Личный вклад соискателя**

Все изложенные в диссертации основные результаты получены соискателем самостоятельно. Научная идея исследования и задачи были сформулированы научным руководителем кандидатом физико-математических наук, доцентом А.Т. Уссом. Часть результатов опубликована в соавторстве с научным руководителем.

**Апробация результатов диссертации**

Основные результаты диссертации докладывались и обсуждались на: Международной математической конференции AMADE (Минск, 15-19 февраля 2001 г.; Минск, 4-9 сентября 2003 г.; Минск, 13-19 сентября 2006 г.); Минском городском семинаре по краевым задачам имени академика Ф.Д. Гахова (руководитель – доктор физико-математических наук, профессор Э.И. Зверович, 2004 г.); Брестском научном семинаре по дифференциальным уравнениям (руководитель – кандидат физико-математических наук, профессор И.Г. Кожух); Международной математической конференции «Еругинские чтения» (Могилев, 24-26 мая 2005 г.; Гомель, 24-26 мая 2006 г.); межфакультетской научно-практической конференции, посвященной 260-летию со дня рождения П.С. Лапласа «Математические и физические методы исследований: научный и методический аспекты» (Брест, 27 марта 2009 г.); научном семинаре кафедры математической физики факультета прикладной математики и информатики БГУ (руководитель – член-корреспондент НАН Беларуси, доктор физико-математических наук, профессор В.И. Корзюк, 2011 г.); республиканской научно-практической конференции «Современные проблемы математического моделирования и новые образовательные технологии в математике» (Брест, 24-25 апреля 2012 г.); научном семинаре кафедры функционального анализа механико-математического факультета Белорусского государственного университета (научные руководители – профессор, доктор физико-математических наук А.Б. Антоневич, профессор, доктор физико-математических наук П.П. Забрейко и член-корреспондент НАН РБ, профессор, доктор физико-математических наук Я.В. Радыно, 2012 г.).

**Опубликованность результатов диссертации**

Основные результаты диссертации опубликованы в 14 научных работах, из которых 5 – статьи в научных журналах в соответствии с п. 18 Положения о присуждении ученых степеней и присвоении ученых званий в Республике Беларусь (общим объемом 2,3 авторского листа), 1 статья в сборнике трудов конференции и 8 тезисов.

**Структура и объем диссертации**

Диссертация состоит из оглавления, введения, общей характеристики работы, четырех глав, заключения и библиографического списка. Полный объем диссертации составляет 103 страницы. Библиографический список состоит из 116 наименований, включая собственные публикации автора (занимает 10 страниц).

# ОСНОВНОЕ СОДЕРЖАНИЕ

В **первой главе** диссертации содержится краткий обзор основных результатов по теории эллиптических систем дифференциальных уравнений с частными производными и краевых задач для них.

Во **второй главе** проводится гомотопическая классификация эллиптических систем четырех уравнений псевдосимметрического типа в $\mathbb{R}^3$.

**Раздел 2.1** содержит необходимые обозначения и определения используемые в работе.

Пусть $E$ – единичная, а $A_2$ и $A_3$ – действительные постоянные $4 \times 4$-матрицы. Система четырех дифференциальных уравнений с частными производными первого порядка в $\mathbb{R}^3$ вида

$$E\frac{\partial U}{\partial x_1} + A_2\frac{\partial U}{\partial x_2} + A_3\frac{\partial U}{\partial x_3} = 0, \tag{1}$$

называется **эллиптической системой псевдосимметрического типа**, если она эллиптична и матрицы $A_2$ и $A_3$ — кососимметрические, т.е. удовлетворяют условию $A_j^T = -A_j \, (j = 2,\, 3)$. Здесь $U(x) = (u_1(x),\, \ldots,\, u_4(x))^T$ – искомая четырехкомпонентная вектор-функция, $x = (x_1,\, x_2,\, x_3) \in \mathbb{R}^3$.

Множество всех эллиптических систем (1) четырех уравнений первого порядка псевдосимметрического типа в $\mathbb{R}^3$ обозначим через $\mathfrak{M}(4;\, 1;\, 3)$. Две системы

$$\mathfrak{L}_k(\partial)U := E\frac{\partial U}{\partial x_1} + A_2^{(k)}\frac{\partial U}{\partial x_2} + A_3^{(k)}\frac{\partial U}{\partial x_3} = 0, \qquad (k = 0,\, 1), \tag{2}$$

из $\mathfrak{M}(4;\, 1;\, 3)$ называются гомотопными, если существует система

$$\mathfrak{L}(\partial; t)U := E\frac{\partial U}{\partial x_1} + A_2(t)\frac{\partial U}{\partial x_2} + A_3(t)\frac{\partial U}{\partial x_3} = 0, \qquad t \in [0;\, 1], \tag{3}$$

эллиптическая при каждом $t \in [0;\, 1]$, матричные коэффициенты $A_j(t)$ которой являются непрерывными на $[0;\, 1]$ действительными кососимметрическими $4 \times 4$-матрицами-функциями, причем $A_j(0) = A_j^{(0)}$, $A_j(1) = A_j^{(1)}$, $(j = 2,\, 3)$.

Указанное отношение эквивалентности разбивает множество $\mathfrak{M}(4;\, 1;\, 3)$ на попарно непересекающиеся классы, называемые компонентами (гомотопической) связности. Задача гомотопической классификации множества $\mathfrak{M}(4;\, 1;\, 3)$ состоит[5] в отыскании числа компонент связности, указании представителей этих компонент и установлении гомотопических инвариантов, различающих компоненты.

**Разделы 2.3 и 2.4** посвящены доказательству основной теоремы второй главы диссертационной работы, теоремы 2.4. В ее формулировке используются следующие уточняющие обозначения.

Характеристическая матрица псевдосимметрической системы (1) в развернутой форме имеет вид

$$\mathfrak{A}(\xi) = \begin{pmatrix} \xi_1 & a(\xi') & b(\xi') & c(\xi') \\ -a(\xi') & \xi_1 & r(\xi') & -q(\xi') \\ -b(\xi') & -r(\xi') & \xi_1 & p(\xi') \\ -c(\xi') & q(\xi') & -p(\xi') & \xi_1 \end{pmatrix};$$

здесь $\xi' = (\xi_2, \xi_3)$, $a(\xi') := a_2\xi_2 + a_3\xi_3$, ... , $r(\xi') := r_2\xi_2 + r_3\xi_3$ — линейные формы переменной $\xi'$. Условие эллиптичности системы (1) эквивалентно условию знакоопределенности квадратичной формы

$$d(\xi') := a(\xi')p(\xi') + b(\xi')q(\xi') + c(\xi')r(\xi'), \tag{4}$$

построенной по элементам характеристической матрицы системы (1) (см. леммы 2.1 и 2.2 главы 2 раздела 2.2 диссертации).

Обозначим через $\mathfrak{M}^+$ множество систем класса $\mathfrak{M}(4;\,1;\,3)$ у которых квадратичная форма $d(\xi')$ является положительно определенной, а через $\mathfrak{M}^-$ множество систем из $\mathfrak{M}(4;\,1;\,3)$ у которых форма $d(\xi')$ отрицательно определена.

**Теорема 2.4.** [4, 9, 13] *Множество* $\mathfrak{M}(4;\,1;\,3)$ *эллиптических систем четырех дифференциальных уравнений первого порядка в* $\mathbb{R}^3$ *псевдосимметрического типа имеет две компоненты гомотопической связности* $\mathfrak{M}^+$ *и* $\mathfrak{M}^-$. *Любая система из* $\mathfrak{M}^+$ *гомотопна системе*

$$\begin{cases} \partial_1 u_1 + \partial_2 u_2 + \partial_3 u_3 = 0, \\ -\partial_2 u_1 + \partial_1 u_2 - \partial_3 u_4 = 0, \\ -\partial_3 u_1 + \partial_1 u_3 + \partial_2 u_4 = 0, \\ \partial_3 u_2 - \partial_2 u_3 + \partial_1 u_4 = 0, \end{cases} \tag{5}$$

*а из* $\mathfrak{M}^-$ *– системе*

$$\begin{cases} \partial_1 u_1 + \partial_2 u_2 + \partial_3 u_3 = 0, \\ -\partial_2 u_1 + \partial_1 u_2 + \partial_3 u_4 = 0, \\ -\partial_3 u_1 + \partial_1 u_3 - \partial_2 u_4 = 0, \\ -\partial_3 u_2 + \partial_2 u_3 + \partial_1 u_4 = 0. \end{cases} \tag{6}$$

*Знак квадратичной формы* (4) *является гомотопическим инвариантом. Далее, пусть числа* $A$, $B$ *и* $C$ *определены равенствами:* $A = a_2p_2 + b_2q_2 + c_2r_2$, $C = a_3p_3 + b_3q_3 + c_3r_3$, $B = a_3p_2 + a_2p_3 + b_3q_2 + b_2q_3 + c_3r_2 + c_2r_3$. *Тогда, при* $B^2 - 4AC < 0$ *и* $A > 0$ (*или* $C > 0$) *система* (1) *принадлежит классу* $\mathfrak{M}^+$; *при* $B^2 - 4AC < 0$ *и* $A < 0$ (*или* $C < 0$) *система* (1) *принадлежит классу* $\mathfrak{M}^-$.

В этой же главе диссертации доказывается также, что утверждение теоремы 2.4 справедливо и для множества псевдосимметрических систем четырех уравнений эллиптического типа в $\mathbb{R}^3$ с переменными непрерывными коэффициентами $A_2 = A_2(x)$ и $A_3 = A_3(x)$ в звездной относительно некоторой точки области $\Omega \subset \mathbb{R}^3$.

Класс эллиптических систем четырех дифференциальных уравнений в $\mathbb{R}^4$ псевдосимметрического типа рассмотрел В.С. Виноградов. Им было показано[6], что этот класс имеет четыре компоненты гомотопической связности. Отметим здесь также, что множество $\mathfrak{M}(4;\,1;\,3)$ имеет непустое пересечение, однако не совпадает, с классом трехмерных аналогов системы Коши-Римана, который, как показал А.Т. Усс[7], также имеет две компоненты связности.

В **третьей главе** изучается возможность постановки регуляризуемых краевых условий для некоторых классов эллиптических систем четырех дифференциальных уравнений с четырьмя переменными.

Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^4$ — ограниченная область, границей которой является достаточно гладкая трехмерная поверхность $\partial\Omega$. Рассмотрим задачу отыскания решения $U(x) = (u_1(x), \ldots, u_4(x))^T$ эллиптической системы дифференциальных уравнений с частными производными первого порядка

$$\sum_{j=1}^{4} A_j \frac{\partial U}{\partial x_j} = f(x), \qquad x \in \Omega, \tag{7}$$

удовлетворяющего следующим граничным условиям:

$$\left( \sum_{k=0}^{s_1} B_{1k} \frac{\partial^k U}{\partial \nu^k}; \sum_{k=0}^{s_2} B_{2k} \frac{\partial^k U}{\partial \nu^k} \right)^T = g(y), \qquad y \in \partial\Omega. \tag{8}$$

Здесь $A_j (j = 1,\,2,\,3,\,4)$ – постоянные действительные матрицы четвертого порядка, $f : \Omega \mapsto \mathbb{R}^4$ – заданная в области $\Omega$ четырехкомпонентная вектор-функция, $g : \partial\Omega \mapsto \mathbb{R}^2$ – заданная на границе $\partial\Omega$ области $\Omega$ двухкомпонентная вектор-функция, $s_1,\,s_2 \in \mathbb{Z}_+$, $B_{jk}\,(j = 1,\,2,\,k = 0,\,1,\,\ldots,\,s_j)$ – псевдодифференциальные $1 \times 4$-матричные операторы (т.е. строки из скалярных п. д. о.) на $\partial\Omega$ порядка $s_j - k$, $\partial/\partial\nu$ – оператор дифференцирования по нормали к $\partial\Omega$.

Краевая задача (7), (8) называется регуляризуемой, если для нее выполнено условие Я.Б. Лопатинского[1,3]. Известно, что регуляризуемость краевой задачи необходима и достаточна для нетеровости ее в широком классе пространств[3].

Для одного эллиптического уравнения второго порядка корректной является задача Дирихле. Долгое время гипотезой оставалась аналогичное заключение и для систем эллиптического типа, пока А.В. Бицадзе не привел пример эллиптической системы, ставшей уже классической, для которой однородная задача Дирихле имеет бесконечно много линейно независимых

[6] *Виноградов, В.С.* О несингулярных псевдосимметрических матричных полиномах / В.С. Виноградов // Сибирский матем. журнал. – 1967. – Т. 8, № 2. – С. 463-466.

[7] *Усс, А.Т.* Гомотопическая классификация трехмерных аналогов системы Коши-Римана / А.Т. Усс // Докл. НАН Беларуси. – 2002. – Т. 46, № 5. – С. 30-34.

решений. Для системы Бицадзе, однако, имеются другие краевые условия, образующие с системой регуляризуемую краевую задачу. В то же время, как установил М.З. Соломяк[8], для эллиптических систем вообще может не иметься краевых условий, образующих регуляризуемую краевую задачу. Выделение классов таких систем представляет научный интерес, и соответствующая задача также рассматривается в диссертации.

В **третьей главе** диссертации выделяются три класса систем, для которых доказывается, что никакие краевые условия общего вида (8) не образуют регуляризуемую краевую задачу ([1, 2, 3, 7, 8]). Опишем эти классы.

В **разделе 3.2** рассматриваются системы, характеристическая матрица которых имеет вид:

$$\mathfrak{A}(\xi) = \begin{pmatrix} \xi_1 & a\xi_2 & \xi_3 & \xi_4 \\ -a\xi_2 & \xi_1 & \xi_4 & -\xi_3 \\ -\xi_3 & -\xi_4 & \xi_1 & b\xi_2 \\ -\xi_4 & \xi_3 & -b\xi_2 & \xi_1 \end{pmatrix}, \qquad a,\, b \in \mathbb{R}. \tag{9}$$

Система (9) является эллиптической тогда и только тогда, когда выполняется неравенство $ab > 0$. Заметим, что при $a = b = 1$ мы получим систему Фьютера для которой нерегуляризуемость краевых условий общего вида установил М.З. Соломяк.

В **разделе 3.3** рассматриваются системы А. Янушаускаса. Характеристическая матрица таких систем имеет вид:

$$\mathfrak{A}(\xi) = \begin{pmatrix} \xi_1 & \xi_2 & \xi_3 & \xi_4 \\ -\xi_2 & \xi_1 & r(\xi') & q(\xi') \\ -\xi_3 & -r(\xi') & \xi_1 & p(\xi') \\ -\xi_4 & -q(\xi') & -p(\xi') & \xi_1 \end{pmatrix}, \tag{10}$$

где $\xi' = (\xi_2,\, \xi_3,\, \xi_4) \in \mathbb{R}^3$, $r(\xi') = a\xi_2 + b\xi_3 + \xi_4$, $p(\xi') = \xi_2 + c\xi_3 - a\xi_4$, $q(\xi') = c\xi_2 - \xi_3 + b\xi_4$, $a,\, b,\, c \in \mathbb{R}$. Системы этого вида являются эллиптическими при любых значениях действительных постоянных $a$, $b$ и $c$.

Наконец, в **разделе 3.4** рассматриваются эллиптические системы в $\mathbb{R}^4$ псевдосимметрического типа. Эллиптическая система (7) называется псевдосимметрической, если $A_1$ — единичная, а $A_j\, (j = 2,\, 3,\, 4)$ — кососимметрические (т.е. $A_j = -A_j^T$) матрицы четвертого порядка.

Отметим, что ранее для псевдосимметрических систем и другим методом (установлением бесконечномерности ядра однородной задачи с «замороженными» коэффициентами) В.С. Виноградовым было установлено[9]: для си-

[8] *Соломяк, М.З.* О линейных эллиптических системах первого порядка / М.З. Соломяк // Докл. АН СССР. – 1963. – Т. 150, № 1. – С. 48-51.

[9] *Виноградов, В.С.* Граничная задача для псевдосимметрических систем / В.С. Виноградов // Дифференц. уравнения. – 1985. – Т. 21, № 1. – С. 161-163.

стем этого вида не может быть нетеровой любая краевая задача типа задачи Римана-Гильберта. В задаче Римана-Гильберта граничный оператор – оператор умножения вектора $U$ на гладкую матрицу-функцию размера $2 \times 4$.

В **четвертой главе** исследуются вопросы нетеровости и индекса краевой задачи линейного сопряжения. В общем $n$-мерном случае эта задача ставится следующим образом.

Пусть $\Omega$ — ограниченная, гомеоморфная шару, область в $\mathbb{R}^n$, границей $\partial\Omega$ которой является поверхность Ляпунова, гомеоморфная сфере. Положим, что в $\mathbb{R}^n$ фиксирована некоторая система $p = p(n)$ дифференциальных уравнений первого порядка

$$\sum_{j=1}^{n} A_j \frac{\partial U}{\partial x_j} = 0, \tag{11}$$

где $A_j (j = 1, \ldots, n)$ – постоянные действительные матрицы размера $p \times p$, являющаяся $n$-мерным аналогом системы Коши-Римана (сокращенно АКР-система). По определению АКР-системы каждая компонента любого непрерывно дифференцируемого решения системы (11) является гармонической функцией в $\mathbb{R}^n$. Вектор-функция $U(x)$, удовлетворяющая в областях $\Omega^+ := \Omega$ и $\Omega^- := \mathbb{R}^n \setminus \overline{\Omega}$ (черта означает замыкание) системе (11) и обращающаяся в нуль на бесконечности называется **кусочно-голоморфным вектором**.

Пусть на $\partial\Omega$ заданы непрерывные по Гельдеру с показателем $\alpha \in ]0;1]$ $p \times p$-матрица-функция $G$ и $p$-компонентная вектор-функция $f$. Под задачей линейного сопряжения понимается задача нахождения кусочно-голоморфного вектора $U(x)$, в замыкании областей $\Omega^+$ и $\Omega^-$ непрерывного по Гельдеру с показателем $\alpha$ и удовлетворяющего на $\partial\Omega$ краевому условию

$$U^+(t) = G(t)U^-(t) + f(t), \qquad t \in \partial\Omega. \tag{12}$$

Здесь $U^{\pm}(t)$ – предельные значения функции $U(x)$ при $x \to t \in \partial\Omega$ изнутри и извне области $\Omega$, по некасательному к $\partial\Omega$ направлению:

$$U^+(t) := \lim_{x \to t,\ x \in \Omega^+} U(x), \qquad U^-(t) := \lim_{x \to t,\ x \in \Omega^-} U(x). \tag{13}$$

**Раздел 4.1** вводный. В нем приводится постановка задачи линейного сопряжения и обзор полученных ранее результатов.

В плоском ($n = 2$) случае, когда система (11) представляет собой систему Коши-Римана, задача линейного сопряжения является основной краевой задачей теории аналитических функций и изучена достаточно подробно (см. книги[10, 11] и имеющуюся там библиографию).

[10] *Гахов, Ф.Д.* Краевые задачи / Ф.Д. Гахов — 3-е изд., перераб. и доп. — М.: Наука, 1977. — 640 с.

[11] *Мусхелишвили, Н.И.* Сингулярные интегральные уравнения: границ. задачи теории функций и некоторые их прил. к мат. физике / Н.И. Мусхелишвили. – Изд. 3-е, испр. и доп. – М.: Наука, 1968. – 511 с.

В многомерном случае ситуация иная. Трехмерный $(n = 3)$ вариант задачи, когда система (11) есть система Моисила-Теодореску и $G$ есть постоянная матрица специального вида, впервые рассмотрел и решил А.В. Бицадзе (см., например, главу VI книги[12], где был построен интеграл типа Коши и установлены формулы Племеля-Сохоцкого). Позднее В.И. Шевченко[13, 14] провел более полное исследование задачи линейного сопряжения для системы Моисила-Теодореску с матрицей $G$ общего вида: была введена сопряженная задача, получено условие нетеровости, проведена гомотопическая классификация задач, найдены явные формулы для индекса и указаны признаки разрешимости задачи. В общем $n$-мерном случае $(n > 3)$ задача линейного сопряжения изучалась только для систем ортогонального типа[15](нормальных эллиптических систем по терминологии В.Е. Балабаева[16]).

В **разделе 4.2** доказываются некоторые общие свойства решений АКР-систем. Перечислим их.

Известно[17], что (11) является АКР-системой тогда и только тогда, когда $A_j\,(j = 1, \ldots, n)$ – невырожденные матрицы, удовлетворяющие условиям:

$$A_k^{-1}A_j + A_j^{-1}A_k = 2E\delta_{kj} \quad (k,\, j = 1, \ldots, n); \tag{14}$$

здесь и далее $E$ – единичная $p \times p$ матрица, $\delta_{kj}$ – символ Кронекера.

Для точек $y \in \partial\Omega$ через $M(x;\, y)$ обозначим $p \times p$ матрицу

$$M(x;\, y) := -\mathfrak{D}^*\left(\frac{\partial}{\partial y}\right)\frac{1}{(n-2)|x-y|^{n-2}} \cdot \mathfrak{D}(\nu(y)), \tag{15}$$

а через $N(x;\, y)$ – матричный, размера $p \times p$, дифференциальный оператор, действующий по формуле:

$$N(x;\, y)U(y) := -\mathfrak{D}^*\left(\frac{\partial}{\partial y}\right)\frac{1}{(n-2)|x-y|^{n-2}} \cdot \mathfrak{D}\left(\frac{\partial}{\partial y}\right)U(y), \tag{16}$$

где $\nu(y) = (\nu_1(y), \ldots, \nu_n(y))$ – единичное поле внешних нормалей на поверхности $\partial\Omega$, $\partial/\partial y = (\partial/\partial y_1, \ldots, \partial/\partial y_n)$, $\mathfrak{D}(\xi) := \sum_{j=1}^{n} A_j\xi_j$, $\mathfrak{D}^*(\xi) := \sum_{j=1}^{n} A_j^{-1}\xi_j$, $U(y) = (u_1(y), \ldots, u_p(y))^T$ – функциональный вектор-столбец высоты $p$.

[12] *Бицадзе, А.В.* Краевые задачи для эллиптических уравнений второго порядка / А.В. Бицадзе. – М.: Наука, 1966. – 203 с.

[13] *Шевченко, В.И.* Гомотопическая классификация краевых задач Гильберта для голоморфного вектора / В.И. Шевченко // Докл. АН СССР. – 1971. – Т. 201, №5. – С. 1067-1069.

[14] *Шевченко, В.И.* Задача Гильберта для голоморфного вектора / В.И. Шевченко // Rev. Roum. de Mathémathiques Pures et Appliquées. — 1979. — Vol. 24, № 5. — P. 801-810.

[15] *Шевченко, В.И.* О задаче Гильберта для голоморфного вектора в многомерном пространстве / В.И. Шевченко // Дифференциальные и интегральные уравнения. Краевые задачи. – Тбилиси, 1979. – С. 279-291.

[16] *Балабаев, В.Е.* Нормальные эллиптические системы первого порядка / В.Е. Балабаев // Дифференц. уравнения. – 1995. – Т. 31, №1. – С. 71-83.

[17] *Усс, А.Т.* Гомотопическая классификация трех- и четырехмерных аналогов системы Коши-Римана / А.Т. Усс // Дифференц. уравнения. – 2004. – Т.40, № 8. – С. 1118-1125.

**1.** (Теорема 4.1; аналог формулы Бореля-Помпею.) *Если* $U:\overline{\Omega}\mapsto\mathbb{R}^p$ *– непрерывно дифференцируемая в замыкании области* $\Omega$ *вектор-функция, то*

$$\frac{1}{\varkappa_n}\int\limits_{\partial\Omega} M(x;\,y)U(y)\,dS(y)-\frac{1}{\varkappa_n}\int\limits_{\Omega} N(x;\,y)U(y)\,dy=\begin{cases}U(x), & x\in\Omega;\\ 0, & x\notin\overline{\Omega}.\end{cases}\tag{17}$$

*Здесь* $\varkappa_n=2\pi^{n/2}/\Gamma(n/2)$ *– площадь единичной* $(n-1)$ *-мерной сферы в* $\mathbb{R}^n$ *.*

**2.** (Теорема 4.2; аналог интегральной теоремы Коши.) *Если* $U:\overline{\Omega}\mapsto\mathbb{R}^p$ *– решение системы* (11) *в области* $\Omega$ *, непрерывное в* $\overline{\Omega}$ *, то*

$$\int\limits_{\partial\Omega}\sum_{j=1}^{n}A_j\nu_j(y)U(y)\,dS(y)=0.$$

**3.** (Теорема 4.3; аналог интегральной формулы Коши.) *Если непрерывная функция* $U:\overline{\Omega}\mapsto\mathbb{R}^p$ *– решение АКР-системы* (11) *, то*

$$\frac{1}{\varkappa_n}\int\limits_{\partial\Omega} M(x;\,y)U(y)\,dS(y)=\begin{cases}U(x), & \text{если } x\in\Omega;\\ 0, & \text{если } x\in\mathbb{R}^n\setminus\overline{\Omega}.\end{cases}\tag{18}$$

**4.** (Теорема 4.4; аналог теоремы о среднем.) *Пусть шар* $B[x;\,R]$ *с центром в точке* $x$ *и радиуса* $R$ *содержится в области* $\Omega$ *,* $U:\Omega\mapsto\mathbb{R}^p$ *– решение АКР-системы* (11). *Тогда*

$$U(x)=\frac{1}{\varkappa_n R^{n-1}}\int\limits_{|x-y|=R}U(y)\,dS(y).$$

**5.** (Теорема 4.5; аналог теоремы Морера.) *Пусть непрерывная функция* $U:\overline{\Omega}\mapsto\mathbb{R}^p$ *такова, что для каждого шара* $B\Subset\Omega$ *имеет место равенство*

$$\int\limits_{\partial B}\sum_{j=1}^{n}A_j\nu_j(y)U(y)\,dS(y)=0,$$

*где* $\nu=(\nu_1,\,\ldots,\,\nu_n)$ *– единичное поле внешних нормалей на сфере* $\partial B$ *. Тогда* $U$ *– бесконечно дифференцируемое в* $\Omega$ *решение системы* (11) *.*

В **разделе 4.3** определяется многомерный интеграл типа Коши, отвечающий АКР-системе (11), и изучаются некоторые его свойства. Предпосылкой определения аналога интеграла типа Коши является теорема 4.6.

**Теорема 4.6.** [5, 6] *Пусть* $\Omega$ *область в пространстве* $\mathbb{R}^n$ *,* $S$ *— ограниченная кусочно-гладкая* $(n-1)$ *-мерная поверхность, причем* $\overline{\Omega}\cap S=\varnothing$ *,*

*$\Phi : S \mapsto \mathbb{R}^p$ непрерывная на $S$ функция. Тогда вектор-функция $U$, заданная формулой*

$$U(x) := \frac{1}{\varkappa_n} \int\limits_S M(x;\, y)\Phi(y)\, dS(y), \tag{19}$$

*удовлетворяет АКР-системе (11) в области $\Omega$.*

Вектор-функцию $U$, заданную формулой (19), назовем **многомерным аналогом интеграла типа Коши** или просто **интегралом типа Коши**, отвечающем АКР-системе (11).

В **подразделе 4.3.2** доказываются следующие вспомогательные утверждения, имеющие и самостоятельный интерес.

*Пусть $S$ — замкнутая поверхность Ляпунова.*

**1.** (Лемма 4.2; [6].) *Если функция $u : S \mapsto \mathbb{R}$ непрерывна по Гельдеру, то для всех целых $k, j = 1, \ldots, n$ и в каждой точке $t \in S$ существует предел интеграла*

$$\int\limits_S \frac{\nu_j(y)(x_k - y_k)(u(y) - u(t))}{|x - y|^n}\, dS(y),$$

*по пути, некасательному к $S$ в точке $t$, и он равен интегралу*

$$\int\limits_S \frac{\nu_j(y)(t_k - y_k)(u(y) - u(t))}{|t - y|^n}\, dS(y).$$

**2.** (Лемма 4.3.) *Оператор $K\varphi(t) := \int\limits_S K(t, y)\varphi(y)\, dS(y)$ вполне непрерывен в пространстве $L_q(S)$, $q > 1$. Здесь*

$$K(t, y) := (\nu_k(y) - \nu_k(t))(y_j - t_j)|t - y|^{-n} \quad (k, j = 1, \ldots, n).$$

Согласно теореме 4.6 интеграл (19) задает две функции, определенные соответственно в областях $\Omega^+$ и $\Omega^-$. При $x \in \Omega^\pm$ функцию, задаваемую формулой (19), будем обозначать через $U^\pm(x)$.

Если точка $x$ лежит на поверхности $\partial\Omega$, то интеграл (19) как несобственный не существует и его следует рассматривать как интеграл в смысле главного значения по Коши, т.е. как предел

$$\frac{1}{\varkappa_n} \int\limits_{\partial\Omega} M(x;\, y)\Phi(y)\, dS(y) := \lim_{\varepsilon \to +0} \frac{1}{\varkappa_n} \int\limits_{\partial\Omega_\varepsilon} M(x;\, y)\Phi(y)\, dS(y); \tag{20}$$

здесь $\partial\Omega_\varepsilon = \partial\Omega \setminus B(x; \varepsilon)$. Предел (20), если он существует, называется **сингулярным интегралом типа Коши**.

Если $t \in \partial\Omega$, то через $U^\pm(t)$ обозначается предел (если он существует) функции $U^\pm(x)$, когда точка $x \in \Omega^\pm$ стремится к точке $t$.

В теореме 4.7 указываются простое достаточное условие существования сингулярного интеграла (20) и многомерные аналоги формул Племеля-Сохоцкого.

**Теорема 4.7.** [5, 6] *Пусть векторная плотность* $\Phi : \partial\Omega \mapsto \mathbb{R}^p$ *удовлетворяет условию Гельдера порядка* $\alpha \in ]0;\, 1]$ *и* $t \in \partial\Omega$. *Тогда сингулярный интеграл* (19) *существует, как предел* (20). *При этом в каждой точке* $x = t \in \partial\Omega$ *существуют пределы* $U^+(t)$ *и* $U^-(t)$, *и справедливы равенства*

$$U^{\pm}(t) = \pm\frac{\Phi(t)}{2} + \frac{1}{\varkappa_n}\int\limits_{\partial\Omega} M(t;y)\Phi(y)\, dS(y). \tag{21}$$

В следующей теореме указывается многомерный аналог формулы Пуанкаре-Бертрана (формула обращения сингулярного интеграла).

**Теорема 4.8.** *Пусть вектор-функция* $\Phi : \partial\Omega \mapsto \mathbb{R}^p$ *удовлетворяет условию Гельдера порядка* $\alpha \in ]0;\, 1]$. *Тогда справедлива формула*

$$\int\limits_{\partial\Omega} M(t;\, x)\, dS(x) \int\limits_{\partial\Omega} M(x;\, y)\Phi(y)\, dS(y) = \frac{\varkappa_n^2}{4}\cdot\Phi(t) \quad (t \in \partial\Omega). \tag{22}$$

**Раздел 4.4** отводится изучению задачи линейного сопряжения для некоторых трехмерных аналогов системы Коши-Римана.

В **подразделе 4.4.1** доказывается равносильность и совпадение индексов (в случае регуляризуемости) задачи линейного сопряжения и некоторой системы сингулярных интегральных уравнений. Сформулируем основные результаты этого подраздела.

**Лемма 4.4.** [5, 6] *Кусочно-голоморфный вектор* $U(x)$ *является решением задачи линейного сопряжения* (11), (12) *тогда и только тогда, когда функция* $\Phi(t) := U^+(t) - U^-(t)$ *удовлетворяет системе сингулярных интегральных уравнений*

$$(G(t) + E)\Phi(t) + (E - G(t))\frac{2}{\varkappa_n}\int\limits_{\partial\Omega} M(t;y)\Phi(y)\, dS(y) = 2f(t) \tag{23}$$

*в пространстве* $L_q(\partial\Omega)$, $1 < q < +\infty$.

Левую часть системы (23) обозначим через $\mathfrak{L}\Phi(t)$.

**Теорема 4.9.** *Задача линейного сопряжения* (11), (12) *регуляризуема тогда и только тогда, когда в каждой точке* $t \in \partial\Omega$ *и при каждом единичном векторе* $\tau$, *касательном к* $\partial\Omega$ *в точке* $t$ *выполнено неравенство* $\det\sigma_{\mathfrak{L}}(t;\tau) \neq 0$. *В случае регуляризуемости индекс задачи* (11), (12) *равен* *индексу оператора* $\mathfrak{L}$ в $L_q(\partial\Omega)$. *Здесь* $\sigma_{\mathfrak{L}}(t;\tau)$ – *символическая матрица оператора* $\mathfrak{L}$.

Заканчивается подраздел вычислением символической матрицы $\sigma_{\mathfrak{L}}(t;\tau)$ оператора $\mathfrak{L}$ в случае $n=3$, $p=4$.

**Лемма 4.5.** [5, 6] *Символ* $\sigma_{\mathfrak{L}}(t;\tau)$ *сингулярного интегрального оператора* $\mathfrak{L}$, *отвечающего АКР-системе* (11) в случае $n=3, p=4$, *есть матрица вида*

$$\sigma_{\mathfrak{L}}(t;\tau) = (G(t)+E) + i(E-G(t))(A_3^{-1}A_2\tau_1 + A_1^{-1}A_3\tau_2 + A_2^{-1}A_1\tau_3), \quad (24)$$

*где* $\tau = (\tau_1, \tau_2, \tau_3)$ — *произвольный единичный касательный вектор к поверхности* $\partial\Omega$ *в точке* $t \in \partial\Omega$.

В **подразделе 4.4.2** рассматривается трехмерный вариант задачи Гильберта для описываемого ниже класса трехмерных аналогов системы Коши-Римана.

Полагается, что $n=3$ и $p=4$. Матричные коэффициенты системы (11) имеют вид

$$A_1 = E, \qquad A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & a & b \\ 0 & 0 & c & -a \\ a & b & 0 & 0 \\ c & -a & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad A_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (25)$$

Здесь $E$ — единичная матрица четвертого порядка, $a$, $b$ и $c$ — произвольные действительные числа, связанные соотношением $a^2+bc=-1$ (последнее необходимо и достаточно для того, чтобы система (11), (25) являлась трехмерным аналогом системы Коши-Римана). Системы (11) с матрицами вида (25) выделены Уссом А.Т. [7] в связи с гомотопической классификацией трехмерных аналогов системы Коши-Римана; они образуют подкласс множества всех таких аналогов и не являются нормальными эллиптическими системами.

Относительно коэффициента сопряжения $G$ задачи (11), (12) предполагается, что он имеет ортогональную структуру:

$$G(t) = \begin{pmatrix} g_1(t) & g_2(t) & g_3(t) & g_4(t) \\ -g_2(t) & g_1(t) & -g_4(t) & g_3(t) \\ -g_3(t) & g_4(t) & g_1(t) & -g_2(t) \\ -g_4(t) & -g_3(t) & g_2(t) & g_1(t) \end{pmatrix}, \quad (26)$$

где $g_j : \partial\Omega \mapsto \mathbb{R}$ — непрерывные по Гельдеру с показателем $\alpha$ ($0 < \alpha \leqslant \beta \leqslant 1$) на $\partial\Omega$ функции.

С использованием леммы 4.5 и теоремы 4.9 устанавливается достаточное условие нетеровости рассматриваемой задачи в указанном выше пространстве.

**Теорема 4.10.** [6, 11, 12, 13] *Если в каждой точке* $t \in \partial\Omega$ *выполнено неравенство* $4g_1^2(t)+(4-(b-c)^2)(g_2^2(t)+g_4^2(t))>0$ , *то сингулярный интегральный оператор* $\mathfrak{L}$ , *коэффициенты которого имеют вид* (25) *и* (26) , *является нетеровским в пространстве* $L_q(\partial\Omega)$ .

Поскольку индекс нетеровского оператора в $L_q(\partial\Omega)$ является гомотопическим инвариантом, вычисление индекса рассматриваемой задачи линейного сопряжения проводится с помощью гомотопий матрицы $G$ .

**Теорема 4.11.** [6, 11, 12, 13] *Индекс регуляризуемой краевой задачи* (11) , (12) *с коэффициентами вида* (25) *и* (26) *равен нулю.*

В **подразделе 4.4.3** изучается вопрос регуляризуемости краевой задачи Гильберта для АКР-системы

$$\frac{\partial U}{\partial x_1}+\begin{pmatrix}-1 & 2 & 0 & 0\\ -1 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -1 & 1\\ 0 & 0 & -2 & 1\end{pmatrix}\frac{\partial U}{\partial x_2}+\begin{pmatrix}0 & 0 & 2 & -1\\ 0 & 0 & 1 & -1\\ -1 & 1 & 0 & 0\\ -1 & 2 & 0 & 0\end{pmatrix}\frac{\partial U}{\partial x_3}=0, \qquad (27)$$

в предположении, что коэффициент $G(t)$ задачи имеет вид (26).

Сформулируем основной результат этого подраздела.

**Теорема 4.12.** [5, 10] *Задача линейного сопряжения* (27) , (12) *с коэффициентом* $G(t)$ *вида* (26) , *регуляризуема тогда и только тогда когда в каждой точке* $t \in \partial\Omega$ *матрица* $G(t)$ *невырождена. Индекс регуляризуемой задачи равен нулю.*

# ЗАКЛЮЧЕНИЕ

### Основные научные результаты диссертации

1. Доказано, что множество псевдосимметрических эллиптических систем четырех уравнений с частными производными первого порядка в $\mathbb{R}^3$ с постоянными коэффициентами имеет две компоненты гомотопической связности. Найдены представители каждой из компонент, указаны признаки различения компонент и гомотопические инварианты компонент. Полученные результаты распространены на эллиптические системы псевдосимметрического типа с переменными коэффициентами в звездной области трехмерного пространства [4, 9, 14].

2. Доказано, что для псевдосимметрических эллиптических систем четырех уравнений первого порядка в $\mathbb{R}^4$ нет регуляризуемых краевых задач [1, 2, 3, 7, 8].

3. Строится многомерный сингулярный (матричный) интеграл, обладающий свойствами, аналогичными свойствам потенциалов в математической физике и интеграла типа Коши в теории функций комплексной переменной; в частности, для многомерного аналога интеграла типа Коши доказываются аналоги формул Племеля-Сохоцкого, применяемые при сведении краевых задач для многомерных аналогов системы Коши-Римана к равносильным системам сингулярных интегральных уравнений [5, 6].

4. В двух случаях конкретизации аналога системы Коши-Римана изучается трехмерный вариант задачи линейного сопряжения в предположении, что матрица-коэффициент сопряжения имеет ортогональную структуру. Получены условия, при которых эта задача имеет фредгольмовский характер разрешимости [5, 6, 10, 11, 12, 13].

### Рекомендации по практическому использованию результатов

Работа носит теоретический характер и является вкладом в теорию краевых задач для эллиптических систем дифференциальных уравнений с частными производными.

Результаты работы могут использоваться в теоретических исследованиях краевых задач для эллиптических систем дифференциальных уравнений и в приложениях их при решении конкретных задач физики[18], механики[19], химии, биологии, теории управления и других прикладных наук.

Результаты могут также использоваться в учебном процессе при чтении основного и специальных курсов математической физики[20].

[18] *Шварц, А.С.* Эллиптические операторы в квантовой теории поля / А.С. Шварц // Итоги науки и техн. Сер. совр. проблемы математики. – 1981. – Т. 17. – С. 113–117.

[19] Трехмерные задачи математической теории упругости и термоупругости: классическая и микрополярная теория. Статика, гармонические колебания, динамика. Основы и методы решения / [В.Д. Купрадзе и др.]; под общ. ред. В.Д. Купрадзе. – 2-е перераб. и доп. изд. – М.: Наука, 1976. – 663 с.

[20] *Бицадзе, А.В.* Основы теории аналитических функций комплексного переменного / А.В. Бицадзе. — М.:Наука, 1969. — 240 с.

# СПИСОК ПУБЛИКАЦИЙ СОИСКАТЕЛЯ ПО ТЕМЕ ДИССЕРТАЦИИ


## Статьи в научных рецензируемых журналах

1. Басик, А.И. О краевых задачах для систем Янушаускаса / А.И. Басик, А.Т. Усс // Тр. Ин-та математики НАН Беларуси. – 2002. – Т. 10. – С. 26-28.

2. Басик, А.И. О краевых задачах для одного класса эллиптических систем / А.И. Басик // Весн. Брэсц. ун-та. – 2002. – № 4. – С. 3-6.

3. Басик, А.И. О краевых задачах для эллиптических псевдосимметрических систем первого порядка в $\mathbb{R}^4$ / А.И. Басик, А.Т. Усс // Дифференц. уравнения. – 2003. – Т. 38, № 3. – С. 410-412.

4. Басик, А.И. Гомотопическая классификация краевых задач Римана-Гильберта для некоторых классов эллиптических систем дифференциальных уравнений в $\mathbb{R}^3$ / А.И. Басик, А.Т. Усс // Тр. Ин-та математики НАН Беларуси. – 2004. – Т. 12, № 2. – С. 33-37.

5. Басик, А.И. Задача линейного сопряжения для трехмерного аналога системы Коши-Римана / А.И. Басик // Весн. Брэсц. ун-та. – 2005. – № 1. – С. 3-10.

## Статьи в трудах конференций

6. Басик, А.И. Задача линейного сопряжения для одного класса трехмерных аналогов системы Коши-Римана / А.И. Басик // Аналитические методы анализа и дифференциальных уравнений: тр. 4-й междунар. конф., посвящ. 100-летию акад. Ф.Д. Гахова, Минск, 13–19 сент. 2006 г.: в 3 т. / НАН Беларуси, Ин-т математики; [ред.: А.А. Килбас, С.В. Рогозин]. – Минск, 2006. – Т. 3: Дифференциальные уравнения. – С. 12–18.

## Тезисы докладов научных конференций

7. Басик, А.И. Краевые задачи для кососимметрических систем в $\mathbb{R}^4$ / А.И. Басик // II научно-методическая конференция молодых ученых: сб. материалов, Брест, 17–19 мая 2000 г. / Брест. гос. ун-т; редкол.: Г.И. Малейчук [и др.]. – Брест, 2000. – С. 5–6.

8. Басик, А.И. О краевых задачах для эллиптических систем в $\mathbb{R}^4$ / А.И. Басик, А.Т. Усс // Аналитические методы анализа и дифференциальных уравнений: тез. докл. междунар. конф., Минск, 15-19 февраля 2001 г./ / Белорус. гос. ун-т, Ин-т математики НАН Беларуси; [ред.: А.А. Килбас, С.В. Рогозин, А.А. Сенько]. – Минск, 2001. – С. 24–25.

9. Басик, А.И. Гомотопическая классификация эллиптических псевдосимметрических систем четырех уравнений первого порядка в $\mathbb{R}^3$ / А.И. Басик // Аналитические методы анализа и дифференциальных уравнений: тез. докл. междунар. конф., Минск, 4–9 сент. 2003 г. / Белорус. гос. ун-т, Ин-т математики НАН Беларуси. – Минск, 2003. – С. 32–33.

10. Басик, А.И. Задача Гильберта для для одной АКР-системы / А.И. Басик // Еругинские чтения – X: междунар. мат. конф., 24–26 мая 2005 г.: тез. докл. / Могилев. гос. ун-т [и др.]; ред. совет: В.В. Амелькин [и др.]. – Могилев, 2005. – С. 145–146.

11. Басик, А.И. Условие регуляризуемости краевой задачи Гильберта для одного класса ТКР-систем / А.И. Басик // Еругинские чтения – XI: тез. докл. междунар. мат. конф., Гомель, 24–26 мая 2006 г. / Гомел. гос. ун.-т [и др.]; сост.: В.И. Мироненко, И.В. Сафонов. – Минск, 2006. – С. 100–101.

12. Басик, А.И. Условие фредгольмовости краевой задачи Гильберта для одного класса ТКР-систем / А.И. Басик // Аналитические методы анализа и дифференциальных уравнений: тез. докл. междунар. конф., посвящ. 100-летию акад. Ф.Д. Гахова, Минск, 13–19 сент. 2006 г. / Ин-т математики НАН Беларуси [и др.]; ред.: А.А. Килбас [и др.]. – Минск, 2006. – С. 21.

13. Басик, А.И. Условие фредгольмовости краевой задачи Гильберта для одного класса трёхмерных аналогов системы Коши-Римана / А.И. Басик // Математические и физические методы исследований: научный и методический аспекты: сб. материалов межфак. науч.-практ. конф., посвящ. 260-летию со дня рождения П.С. Лапласа, Брест, 27 марта 2009 г.: в 2 ч. / Брест. гос. ун-т. – Брест, 2009. – Ч. 2 / [под общ. ред. С.А. Марзана]. – С. 3.

14. Басик, А.И. Гомотопическая классификация эллиптических систем четырех уравнений первого порядка в $\mathbb{R}^3$ псевдосимметрического типа / А.И. Басик // Современные проблемы математического моделирования и новые образовательные технологии в математике: материалы респ. науч.-практ. конф., Брест, 24–25 апр. 2012 г. / Брест. гос. ун-т; под общ. ред. И.Г. Кожуха; редкол.: А.Е. Будько [и др.]. – Брест, 2012. – С. 13–14.

# РЭЗЮМЭ

## Басік Аляксандр Іванавіч

## Эліптычныя сістэмы дыферэнцыяльных ураўненняў першага парадку і краявыя задачы для іх

*Ключавыя словы*: эліптычная сістэма, краявая задача, індэкс, умова Лапацінскага, сінгулярнае інтэгральнае ўраўненне, гоматапічная класіфікацыя.

*Мэтай* дысертацыйнай працы з'яўляецца правядзенне гоматапічнай класіфікацыі эліптычных сістэм чатырох ураўненняў першага парадку псеўдасіметрычнага тыпу ў $\mathbb{R}^3$; доказ нерэгулярызавальнасці краявых задач для эліптычных сістэм чатырох ураўненняў першага парадку псеўдасіметрычнага тыпу ў $\mathbb{R}^4$; атрыманне ўмоў рэгулярызавальнасці краявой задачы лінейнага спалучэння для некаторых трохмерных аналагаў сістэмы Кашы – Рымана і вылічэнне індэкса рэгулярызавальных задач.

Для дасягнення пастаўленай мэты выкарыстоўваліся геаметрычныя і функцыянальныя *метады* сучаснага аналізу.

У рабоце атрыманы наступныя асноўныя *вынікі*:

– мноства псеўдасіметрычных эліптычных сістэм чатырох ураўненняў першага парадку ў $\mathbb{R}^3$ мае дзве кампаненты гоматапічнай звязнасці;

– для псеўдасіметрычных эліптычных сістэм чатырох ураўненняў першага парадку ў $\mathbb{R}^4$ няма рэгулярызавальных краявых задач;

– атрыманы формулы тыпу Племеля – Сахоцкага для сінгулярнага інтэграла, які супастаўляецца шматмернаму аналагу сістэмы Кашы – Рымана, і іх прымяненне да даследавання краявых задач;

– дастатковыя ўмовы фрэдгольмавасці краявой задачы лінейнага спалучэння для двух тыпаў трохмерных аналагаў сістэмы Кашы – Рымана, вылучаных у дысертацыі.

Усе вынікі дысертацыі з'яўляюцца новымі, маюць тэарэтычны характар і могуць быць *выкарыстаны* ў тэарэтычных даследаваннях краявых задач для эліптычных сістэм дыферэнцыяльных ураўненняў, а таксама на практыцы – пры рашэнні канкрэтных задач фізікі, механікі, хіміі, біялогіі, тэорыі кіравання і іншых прыкладных навук. Яны таксама могуць знайсці прымяненне ў вучэбным працэсе пры выкладанні асноўнага і спецыяльных курсаў матэматычнай фізікі.

# РЕЗЮМЕ

## Басик Александр Иванович

## Эллиптические системы дифференциальных уравнений первого порядка и краевые задачи для них

*Ключевые слова*: эллиптическая система, краевая задача, индекс, условие Лопатинского, сингулярное интегральное уравнение, гомотопическая классификация.

*Целью* диссертационной работы является проведение гомотопической классификации эллиптических систем четырех уравнений первого порядка псевдосимметрического типа в $\mathbb{R}^3$; доказательство нерегуляризуемости краевых задач для эллиптических систем четырех уравнений первого порядка псевдосимметрического типа в $\mathbb{R}^4$; получение условий регуляризуемости краевой задачи линейного сопряжения для некоторых трехмерных аналогов системы Коши – Римана и вычисление индекса регуляризуемых задач.

Для достижения поставленной цели использовались геометрические и функциональные *методы* современного анализа.

В работе получены следующие основные *результаты*:

– множество псевдосимметрических эллиптических систем четырех уравнений первого порядка в $\mathbb{R}^3$ имеет две компоненты гомотопической связности;

– для псевдосимметрических эллиптических систем четырех уравнений первого порядка в $\mathbb{R}^4$ нет регуляризуемых краевых задач;

– получены формулы типа Племеля – Сохоцкого для сингулярного интеграла, сопоставляемого многомерному аналогу системы Коши – Римана, и их приложение к исследованию краевых задач;

– достаточные условия фредгольмовости краевой задачи линейного сопряжения для выделяемых в диссертации двух типов трехмерных аналогов системы Коши – Римана.

Все результаты диссертации являются новыми, имеют теоретический характер и могут быть *использованы* в теоретических исследованиях краевых задач для эллиптических систем дифференциальных уравнений, а также на практике – при решении конкретных задач физики, механики, химии, биологии, теории управления и других прикладных наук. Они также могут найти применение в учебном процессе при чтении основного и специальных курсов математической физики.

# SUMMARY

## Basik Aliaksandr Ivanovich

## The elliptic systems of the differential equations of the first order and boundary-value problems for them


*Keywords*: elliptic system, boundary-value problem, index, Lopatinskii's condition, singular integral equation, homotopic classification.


The *aim* of the research is to carry out homotopic classification of elliptic systems of four equations of the first order of pseudo-symmetric type in $\mathbb{R}^3$; to prove the non-regularizability of boundary-value problems for elliptic systems of four equations of the first order of pseudo-symmetric type in $\mathbb{R}^4$; to receive the conditions of the regularizability of boundary-value problem of linear conjugation for some three-dimensional analogs of system of Cauchy-Riemann and calculation of an index of regularizing problem.

The research is carried out by using modern geometrical and functional *methods* of analysis.

The following main *results* were received in the research:

– The set of pseudo-symmetric elliptic systems of four equations of the first order in $\mathbb{R}^3$ has two components of homotopic connectivity;

– There are no regularizing boundary-value problem for pseudo-symmetric elliptic systems of four equations of the first order in $\mathbb{R}^4$;

– The creating of formulas of Plemel-Sokhotsky type for the singular integral, compared to multidimensional analog of Cauchy–Riemann system, and their using to research of boundary-value problems;

– Sufficient conditions of regular type of boundary-value problem of linear conjugation for two types of three-dimensional analogs of system of Cauchy-Riemann emphasized in the dissertation.

All results of the dissertation are new, have theoretical character and can be *used* in theoretical researches of boundary-value problem for elliptic systems of the differential equations. They can also be used for solving some problems of physics, mechanics, chemistry, biology, the theory of management and other practical sciences, as well as, in educational process during the teaching of basic and special courses of mathematical physics.