УДК 519.24

Е. И. МИРСКАЯ
Брест, БрГУ имени А. С. Пушкина

СРАВНИТЕЛЬНЫЙ АНАЛИЗ ВТОРЫХ МОМЕНТОВ СГЛАЖЕННОЙ ОЦЕНКИ СПЕКТРАЛЬНОЙ ПЛОТНОСТИ ВРЕМЕННОГО РЯДА

Основными областями применения теории случайных процессов в настоящее время являются радио- и электротехника, где применяются главным образом стационарные в широком смысле и гауссовские процессы, кибернетика (в частности, теория информации), использующая стационарные в узком смысле и марковские процессы.

Исследование оценок спектральных плотностей стационарных случайных процессов является одной из основных задач спектрального анализа временных рядов.

Одним из непараметрических методов спектрального оценивания, который позволяет получить оценку спектральной плотности непосредственно по исходному набору данных, является метод Уэлча.

Рассмотрим действительный стационарный случайный процесс

$$X(t) = \{X_a(t), a = \overline{1,r}\},\ t \in Z$$

с неизвестной взаимной спектральной плотностью $f_{ab}(\lambda)$, $\lambda \in \Pi = [-\pi, \pi]$, $a,b = \overline{1,r}$.

Пусть $X_a(0), X_a(1), \ldots, X_a(T-1)$ – T последовательных наблюдений, полученных через равные промежутки, за составляющей $X_a(t)$ процесса $X(t)$, $t \in Z$, $a = \overline{1,r}$.

Предполагаем, что число наблюдений T представимо в виде $T = S(N-M) + M$, где S – число пересекающихся интервалов разбиения длины N, где N и M принимают целочисленные значения, $0 \le M < N$ (S не зависит от T).

В качестве оценки неизвестной взаимной спектральной плотности $f_{ab}(\lambda)$, $\lambda \in \Pi$ исследована статистика, построенная по методу Уэлча, вида

$$\hat{f}_{ab}^{(T)}(\lambda) = \frac{1}{S}\sum_{S=1}^{S} I_{ab}^{S(N-M)}(\lambda). \qquad (1)$$

Первый момент оценки взаимной спектральной плотности, заданной соотношением (1), исследован в работе [1]. В данной работе исследован второй момент статистики (1). Доказана

Теорема. Пусть взаимная спектральная плотность $f_{ab}(\lambda)$, $\lambda \in \Pi$, $a,b=\overline{1,r}$ непрерывна в точке $\lambda \in \Pi$ и ограничена на Π, семиинвариантная спектральная плотность четвертого порядка ограничена на Π^3 и выполняется соотношение

$$\iiint_{\Pi^3} \left|\Phi_T(\mu_1,\mu_2,\mu_3)\right| d\mu_1 d\mu_2 d\mu_3 \le D < \infty,$$

тогда оценка $\hat{f}_{ab}^{(T)}(\lambda)$, задаваемая равенством (1), удовлетворяет соотношению

$$\lim_{N\to\infty} D\hat{f}_{ab}^{(T)}(\lambda) = \begin{cases} \dfrac{1}{S} f_{aa}(\lambda) f_{bb}(\lambda), \lambda \ne 0(\operatorname{mod}\pi), \\ \dfrac{1}{S}\left[f_{aa}(0) f_{bb}(0) + f_{ab}^2(0)\right], \lambda = 0(\operatorname{mod}\pi). \end{cases}$$

С помощью математического пакета MatLab проведен сравнительный анализ дисперсии оценки спектральной плотности для окон просмотра данных Бартлетта, Рисса, Дирихле, Гаусса, Парзена для временного ряда, представляющего собой данные температуры воздуха в г. Бресте с 2001 г. по 2017 г.

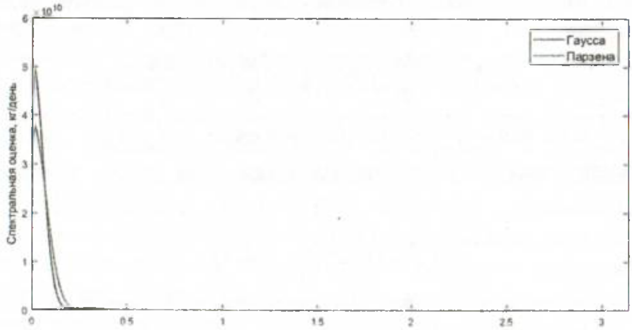

Рисунок – График оценки спектральной плотности, построенной для временного ряда с использованием окна Гаусса и Парзена

Как следует из графика, минимальной дисперсией обладает оценка, построенная с использованием окна Гаусса.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Труш, Н. Н. Асимптотические методы статистического анализа временных рядов / Н.Н. Труш. – Минск : БГУ, 1999. – 218 с.