*УДК 515.124.62*

*З.Н. СИЛАЕВА*

# ОБ ОДНОМ СВОЙСТВЕ ПРОФИЛЬТРОВАННЫХ АБСОЛЮТНЫХ ОКРЕСТНОСТНЫХ ЭКСТЕНЗОРОВ

We investigate the hypothesis about the characterization of filtered absolute neighbourhood extensors by topological properties of filtration elements. It is shown that in general case the property of equipower local extensibility doesn't characterize this class of spaces.

Исследуем абсолютные окрестностные экстензоры в категории метрических профильтрованных пространств (так называемые $\mathcal{N}$-ANE-пространства). Ряд результатов о таких пространствах получен в [1, 2], в частности, в [2] установлена характеризация конечномерных $\mathcal{N}$-ANE-пространств: профильтрованное конечномерное метрическое пространство принадлежит классу $\mathcal{N}$-ANE тогда и только тогда, когда его фильтрация образует equi-LAE-семейство. Однако вопрос о характеризации $\mathcal{N}$-ANE-пространств в бесконечномерном случае остается открытым. В настоящей работе установлены необходимые условия для $\mathcal{N}$-ANE-пространств произвольной размерности.

**Теорема 1.** *Если метрическое пространство $X$ с фильтрацией $\{X_i\}_{i\in\mathbf{N}}$ принадлежит классу $\mathcal{N}$-*ANE, *то каждый $X_i$ является* ANE-*пространством, а совокупность всех элементов фильтрации образует* equi-LAE-*семейство*.

Поскольку пространства с конечной фильтрацией характеризуются первым условием из теоремы 1, а конечномерные профильтрованные пространства – вторым, возникает естественная гипотеза о том, что эти условия характеризуют $\mathcal{N}$-ANE-пространства произвольной размерности. Основным результатом статьи является контрпример к этой гипотезе.

**Теорема 2.** *Существует компактное профильтрованное метрическое пространство $Y\notin\mathcal{N}$-*ANE, *для которого каждый элемент фильтрации является* ANE-*пространством и совокупность всех элементов фильтрации $\{Y_i\}_{i\in\mathbf{N}}$ образует* equi-LAE-*семейство*.

**Предварительные сведения.** *Профильтрованным пространством*, или *$\mathcal{N}$-пространством*, называется топологическое пространство $X$, в котором выделена последовательность замкнутых подмножеств $X_1\subseteq X_2\subseteq\ldots$ (*фильтрация*) такая, что $\bigcup_{i=1}^{\infty} X_i = X$. Непрерывное *отображение* $f: X\to Y$ двух $\mathcal{N}$-пространств $X$ и $Y$ называется *профильтрованным*, или *$\mathcal{N}$-отображением*, если $f(X_i)\subseteq Y_i$ для любого $i\in\mathbf{N}$. Другие понятия, связанные с метрическими $\mathcal{N}$-пространствами, можно найти в [1, 2].

Д о к а з а т е л ь с т в о   т е о р е м ы   1. Установим лишь, что $\{X_i\}_{i\in\mathbf{N}}\in$equi-LAE. Предположим противное. Тогда существуют элемент $x_0\in X$, его окрестность $U$, и для любого $k\in\mathbf{N}$ метрическое пространство $Z'_k$ и замкнутое $A'_k\subset Z'_k$ такие, что для окрестности $V_k$ точки $x_0$, $V_k\subset U$, $\operatorname{diam}V_k<1/k$, существует непрерывное отображение $\varphi_k: A'_k\to V_k\cap X_{m_k}$, не имеющее продолжения $Z'_k\to U\cap X_{m_k}$. Нетрудно показать, что на множестве $Z=(\coprod_{i=1}^{\infty} Z'_i)\coprod\{s_0\}$ можно ввести метрику так, чтобы для любого $k\in\mathbf{N}$ выполнялось $\operatorname{diam}Z'_k<1/k$ и расстояние $d(s_0, Z'_k)<1/k$. Чтобы ввести фильтрацию на $Z$, для $z\in Z'_i$ положим $\deg z=m_i$, а для $s_0$ положим $\deg s_0=\deg x_0$ (можно считать, что для любого $k\in\mathbf{N}$, $m_k\geq\deg s_0$ и $m_1<m_2<\ldots$). При этом получим $Z_{m_1}=Z'_1\cup\{s_0\}$, $Z_{m_2}=Z_{m_1}\cup Z'_2$, ..., $Z_{m_i}=Z_{m_{i-1}}\cup Z'_i$, ..., $Z=\bigcup_{i=1}^{\infty} Z_{m_i}$. На подпространстве $A=(\coprod_{i=1}^{\infty} A'_i)\coprod\{s_0\}$ пространства $Z$ возникает фильтрация $\mathcal{N}$-подпространства.

Зададим отображение $\Phi: A \to X$ так, чтобы для $a \in A'_k$, $k \in \mathbf{N}$, $\Phi(a)=\varphi_k(a)$, а $\Phi(s_0)=x_0$. Из построений ясно, что $\Phi$ является $\mathcal{N}$-отображением, поэтому существует его $\mathcal{N}$-продолжение $\bar{\Phi}: U_1 \to X$ на окрестность $U_1$ множества $A$ в $Z$. Так как $\operatorname{diam} Z'_k < 1/k$, будем считать, что для всех $k$, начиная с некоторого номера, $Z'_k \subset U_1$. Из непрерывности $\bar{\Phi}$ следует, что ограничение $\bar{\varphi}_k = \bar{\Phi}|_{Z'_k}$ принимает значения из множества $U \cap X_{m_k}$ и является продолжением отображения $\varphi_k : A'_k \to V_k \cap X_{m_k}$, что противоречит предположению. Тогда $\{X_i\}_{i\in\mathbf{N}} \in$ equi-LAE, что и требовалось доказать.

Доказательство теоремы 2. С помощью теоремы Борсука о продолжении гомотопии несложно установить, что справедлива

**Лемма.** Для метрического $\mathcal{N}$-пространства $Y = \bigcup_{i=1}^{\infty} Y_i$ такого, что все $Y_i$ суть ANE-пространства, $\{Y_i\}_{i\in\mathbf{N}} \in$ equi-LAE тогда и только тогда, когда $\{Y_i\}_{i\in\mathbf{N}} \in$ equi-LC.

Рассмотрим следующие подмножества гильбертова куба $Q=[0,1]^{\omega}$: $X_0=\{x=\{x_i\} \mid x_1=0\}$, $X_k=\{x=\{x_i\} \mid 1/(k+1) \le x_1 < 1/k,\ x_i = 0 \text{ при } i>k\}$, $Q_k=\{x=\{x_i\} \mid 0 \le x_1 < 1/k,\ x_i=0 \text{ при } i>k\}$, $k \in \mathbf{N}$. Ясно, что $X_0$ гомеоморфно гильбертову кубу $Q$, а $X_k$ и $Q_k$ – евклидову $k$-мерному кубу для любого $k \in \mathbf{N}$. Пространство $Y = X_0 \cup (\bigcup_{k=1}^{\infty} X_k^{\bullet})$, где $X_k^{\bullet}$ – граница множества $X_k$, является компактом.

Рассмотрим фильтрацию пространства $Y$, образованную компактами $Y_1=X_0$, $Y_k = X_0 \cup X_1^{\bullet} \cup X_2^{\bullet} \cup \ldots \cup X_{k-1}^{\bullet} \cup Q_k^{\bullet}$, $k \ge 2$. Можно проверить, что любой $Y_k \in$ ANE.

Докажем, что $\{Y_k\}_{k\in\mathbf{N}} \in$ equi-LC, т. е. для любой точки $a \in Y$ и любого $\varepsilon>0$ существует окрестность $V$ этой точки такая, что для любого $k \in \mathbf{N}$, $Y_k \cap V$ стягивается по $Y_k \cap B(a,\varepsilon)$ в точку, где $B(a,\varepsilon)$ – открытый шар радиуса $\varepsilon$ с центром в точке $a$. В случае $a \notin X_0$ требуемое следует из того, что для любого $k \in \mathbf{N}$, $Y_k$ содержится во внутренности $Y_{k+1}$. Рассмотрим случай $a \in X_0$. Пусть $3/m < \varepsilon$, где $m \in \mathbf{N}\setminus\{1\}$, $U=B(a,\varepsilon)$, $V=B(a,1/(2m))$. Можно показать, что $V$ не пересекается по крайней мере с одним из множеств $A_m=\{x=\{x_i\} \mid x_m=0\}$; $B_m=\{x=\{x_i\} \mid x_m=1/m\}$.

*Случай 1.* $V \cap B_m = \varnothing$. Положим для $\{x_i\} \in V$

$$\varphi(\{x_i\},t) = \begin{cases} (x_1,\ldots,x_{m-1},(1-3t)x_m,x_{m+1},\ldots) \text{ при } 0 \le t \le 1/3, \\ ((2-3t)x_1,x_2,\ldots,x_{m-1},0,x_{m+1},\ldots) \text{ при } 1/3 \le t \le 2/3, \\ (0,a_2-3(1-t)(a_2-x_2),a_3-3(1-t)(a_3-x_3),\ldots,a_{m-1}-3(1-t)(a_{m-1}-x_{m-1}), \\ \qquad (3t-2)a_m,a_{m+1}-3(1-t)(a_{m+1}-x_{m+1}),\ldots) \text{ при } 2/3 \le t \le 1. \end{cases}$$

Ясно, что $\varphi$ – гомотопия, стягивающая $V$ в точку $a$. При этой гомотопии всякая точка $x=\{x_i\} \in V$ для $0 \le t \le 1/3$ пробегает отрезок $L_1$, соединяющий точки $\varphi(x,0)=x$ и $\varphi(x,1/3)=(x_1,\ldots,x_{m-1},0,x_{m+1},\ldots)$, для $1/3 \le t \le 2/3$ – отрезок $L_2$, соединяющий $\varphi(x,1/3)$ и $\varphi(x,2/3)=(0,x_2,\ldots,x_{m-1},0,x_{m+1},\ldots)$, и для $2/3 \le t \le 1$ – $L_3$, соединяющий $\varphi(x,2/3)$ и $\varphi(x,1)=a$. Покажем, что $\varphi$ стягивает $V \cap Y_k$ по $U \cap Y_k$ в точку для $k \in \mathbf{N}$.

Пусть $0 \le t \le 1/3$, $\varphi(x,0)=x=\{x_i\} \in V \cap Y_k$. Докажем, что $\varphi(x,t)=(x_1,\ldots,x_{m-1},x'_m,x_{m+1},\ldots) \in Y_k$. Если $x_1=0$, то $x \in X_0$, тогда $\varphi(x,t) \in X_0 \subset Y_k$. Если $x_m=0$, то $\varphi(x,t)=\varphi(x,0)$, поэтому гомотопия $\varphi$ тривиальна на $L_1$, значит, $\varphi(x,t) \in Y_k$. Рассмотрим случай $0<x_m<1/m$, $x_1>0$ ($x_m=1/m$ не рассматривается, так как $V \cap B_m=\varnothing$). Поскольку $x \in Y_k$, то существует $X_i^{\bullet} \subset Y_k$ такое, что $x \in X_i^{\bullet}$ (или существует $Q_k^{\bullet} \subset Y_k$, содержащее $x$). Точки из $X_i^{\bullet}$ и $Q_k^{\bullet}$ имеют вид $(x_1,\ldots,x_i,0,0,\ldots)$, причем существует такое $j \in [1,i]$, что $x_j$ равно 0 или $1/j$. Ясно, что $j \ne m$. Тогда $\varphi(x,0)_j=0$ или $1/j$, и в процессе проектирования, параллельного оси $Ox_m$, снова получим $\varphi(x,t)_j=0$ или $1/j$, поэтому смещенная точка $\varphi(x,t) \in Y_k$. При $1/3 \le t \le 2/3$ доказательство аналогично. При $2/3 \le t \le 1$ точки $\varphi(x,2/3)$ и $\varphi(x,t)$ принадлежат $Y_1$, поэтому $\varphi(x,t) \in Y_k$.

Длины отрезков $L_1$ и $L_2$ меньше, чем $1/m$. Длина отрезка $L_3$ не превышает суммы расстояния $\rho(a,\varphi(x,0))<1/m$ и длин отрезков $L_1$ и $L_2$, т. е. числа $3/m<\varepsilon$. Поэтому $\varphi(x,t) \in U$ для $0 \le t \le 1$.

*Случай 2.* $V \cap A_m=\varnothing$. Доказывается аналогично.

Рассматриваемое пространство $Y$ совпадает с примером К. Борсука [3, с. 142] локально стягиваемого, но не ANE-пространства. Поэтому $Y$ не является и $\mathcal{N}$-ANE-пространством. В силу леммы построенное пространство $Y$ – искомое.


1. Силаева З.Н. // Тр. Ин-та математики НАН Беларуси. 2009. № 2. С. 76.
2. Силаева З.Н. // Вестн. БГУ. Сер. 1. 2009. № 3. С. 89.
3. Борсук К. Теория ретрактов. М., 1971.


Поступила в редакцию 13.05.09.

***Зоя Николаевна Силаева*** – аспирант кафедры геометрии, топологии и методики преподавания математики. Научный руководитель – доктор физико-математических наук, профессор С.М. Агеев.