Учреждение образования
«Брестский государственный университет имени А.С.Пушкина»

А.Н.Сендер

МЕТОДОЛОГИЯ ФОРМИРОВАНИЯ ПОНЯТИЯ О ЧИСЛЕ В НАЧАЛЬНОМ КУРСЕ МАТЕМАТИКИ

Курс лекций
для студентов-заочников психолого-педагогических
факультетов университетов

Брест 2003

УДК 372.8:510(042)+378
ББК 22.1+74.262.21
С 31

Рецензенты:

Доктор педагогических наук, профессор
А.М.Радьков

Доктор педагогических наук, профессор
И.А.Новик

Кафедра прикладной математики и информатики, зав. кафедрой, профессор
А.И.Павловский

Научный редактор

Кандидат физико-математических наук, доцент
А.Е.Будько

Печатается по решению редакционно-издательского совета БрГУ им. А.С.Пушкина

Сендер, А.Н.

С 31 Методология формирования понятия о числе в начальном курсе математики: Курс лекций / А.Н.Сендер; Брест. гос. ун-т имени А.С.Пушкина. – Брест: Изд-во БрГУ им. А.С.Пушкина, 2003.– 165 с.

ISBN 985-473-049-2.

Адресуется студентам-заочникам психолого-педагогического факультета, а также может быть полезна аспирантам, преподавателям педагогического вуза, занимающимся проблемами математической и методической подготовки учителя начальной школы.

УДК 372.8:510(042)+378
ББК 22.1+74.262.21

ISBN 985-473-049-2

ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ 5

Глава 1
ИСТОРИЧЕСКИЙ МЕТОД В ОБУЧЕНИИ МАТЕМАТИКЕ 8

§ 1. Краткие сведения из истории возникновения понятия числа 8
§ 2. Реализация принципа историзма в процессе формирования понятия о числе 20

Глава 2
ЛОГИЧЕСКАЯ СОСТАВЛЯЮЩАЯ ПОДГОТОВКИ УЧИТЕЛЯ НАЧАЛЬНОЙ ШКОЛЫ К ПРЕПОДАВАНИЮ МАТЕМАТИКИ 23

§ 1. Использование дедуктивного метода в начальном обучении математике 23
§ 2. Математические понятия. Процесс их формирования в начальной школе 27
§ 3. Способы математических доказательств 32
§ 4. Операции над высказываниями 37
§ 5. Числовые выражения. Равенства и неравенства как высказывания 42
§ 6. Операции над предикатами 45
§ 7. Уравнения, неравенства как предикаты 50

Глава 3
ТЕОРЕТИКО-МНОЖЕСТВЕННЫЙ ПОДХОД К ПОСТРОЕНИЮ АРИФМЕТИКИ ЦЕЛЫХ НЕОТРИЦАТЕЛЬНЫХ ЧИСЕЛ 60

§ 1. Множества и операции над ними 60
§ 2. Элементы комбинаторики 72
§ 3. Бинарные соответствия и отношения 76
§ 4. Отображение. Виды отображений 82
§ 5. Функциональные отношения. Множество определений и множество значений функций 85
§ 6. Понятие о количественной теории целых неотрицательных чисел 90

Глава 4
АКСИОМАТИЧЕСКИЙ ПОДХОД К ВВЕДЕНИЮ СИСТЕМЫ НАТУРАЛЬНЫХ ЧИСЕЛ 100

§ 1. Аксиомы Пеано 100
§ 2. Теоретические основы техники вычислений 102

Глава 5
ДЕЛИМОСТЬ ЦЕЛЫХ НЕОТРИЦАТЕЛЬНЫХ ЧИСЕЛ. СИСТЕМЫ СЧИСЛЕНИЙ 107

§ 1. Отношение делимости и его свойства 107
§ 2. Простые и составные числа 111
§ 3. Системы счисления 122

Глава 6
ПРОБЛЕМА РАСШИРЕНИЯ ПОНЯТИЯ ЧИСЛА 127

§ 1. Принцип расширения числовых систем и его реализация в методике обучения 127
§ 2. Аддитивно-скалярная величина и этапы ее формирования в начальной школе 128
§ 3. Измерения отрезков. Равносильные дроби 133
§ 4. Множество положительных рациональных чисел и операции над ними 137
§ 5. Иные расширения числовых систем 142

ЗАКЛЮЧЕНИЕ 149

СЛОВАРЬ МАТЕМАТИЧЕСКИХ ТЕРМИНОВ 151

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ 165

ВВЕДЕНИЕ

Математическое знание можно рассматривать как совокупность результатов измерительных и сравнительных действий над элементами любой природы. Это знание, в первую очередь, базируется на понятии числа. Между тем в истории науки известно, что в развитии общества был такой период, когда люди не имели оформленного представления о числе, но, тем не менее, справлялись с операцией сравнения и счета различных множеств. Понятие числа появилось значительно позже, поскольку оно предполагает уже довольно развитую способность к абстрактному мышлению.

В истории формирования понятия натурального числа можно выделить четыре больших этапа, которые соответствуют четырем последовательным этапам в развитии самой техники счета. Первый этап начинается с установления равночисленности различных множеств вещей. Здесь общее свойство эквивалентных множеств полностью ассоциируется с конкретной природой сравниваемых множеств. На втором этапе численность какого-либо определенного множества выражается через целый ряд других эквивалентных ему множеств. Здесь общее свойство всех множеств начинает уже осознаваться как нечто отличное от конкретной природы самого множества. Однако лишь на третьем этапе, когда определенное множество выступает в качестве своеобразного эталона количества, это общее свойство начинают отличать от особенных свойств множеств. И только на четвертом этапе общее свойство всех эквивалентных множеств абстрагируется от самих множеств и выступает в "чистом" виде, т.е. как абстрактное понятие натурального числа. Теперь в качестве эталона выступают уже сами натуральные числа.

Получаемые новые знания о числе оформляются в теории. В широком смысле теория – это система взглядов, представляющая и объясняющая содержание и сущностную природу некоторых объектов, процессов и явления объективной действительности, а в узком – форма организации знания, дающего целостное и логически связное представление о некоторой предметной области человеческого познания. На определенном этапе развития математической науки сформировались количественная и аксиоматическая теории натурального числа. Как известно, такая математическая структура как теория входит в структуру методологии науки.

В сфере математического знания к числу актуальных методологических проблем относится, во-первых, вопрос о природе логики. Во-вторых, этот вопрос о математическом методе, связанный с выбором между строгой дедукцией и отказом от нее. В-третьих, это вопрос о содержании математического объекта, связанный также с выбором – между неовеществленным набором символов и символами, отражающими некоторую реальность. В-четвертых, это вопрос о природе мира математических построений и физического мира, т.е. о социально-психологических механизмах развития математического знания, формирования логического статуса и предпосылок его проникновения в другие сферы научной деятельности.

Если трансформировать методологию математического знания на предмет нашего рассмотрения, то можно констатировать следующее:

1. Развитие математической науки, в частности теорий натурального числа находит отражение в вузовском курсе теоретических основ начального курса математики на уровне: понятий, законов теорий. В теорию входят разнообразные элементы знаний с различными типами связей между ними (формально-логические, содержательно-структурные, функциональные, генетические). Формы фиксации знаний различные: формулы, графики, схемы, круги Эйлера, диаграмма Венна.

2. Очень многие принципиальные затруднения студентов, будущих педагогов, в процессе усвоения научно-теоретических знаний проистекают из-за несформированности у них методологических знаний. В то же время методологическая подготовка будущего учителя является базисом, на основании которого строится результативность в педагогическом процессе.

В комплекс методологических знаний могут быть включены:

1) Формализованные понятия.

2) Теория, как система знаний (истоки ее возникновения, структура, природа ее основных положений, пути проверки, границы применимости).

3) Группа общенаучных понятий (определений, закон, правило, принцип).

4) Методы познания (математика как метод познания).

3. Для педагогических специальностей к методологии науки следует отнести и методологию обучения, т.е. учение о закономерностях и методах педагогической деятельности по обучению математике и т.д.

В связи с этим представленный курс лекций, предназначенный для студентов-заочников, которые уже прошли соответствующую профессиональную подготовку в педагогическом колледже, имеет:

1. Логическую составляющую в подготовке учителя начальной школы.

2. Профессиональную направленность изучения математики на психолого-педагогическом факультете, заключающуюся в выделении из системы фундаментальных знаний такого содержания, которое обеспечивало бы выпускникам педвуза подготовку к обучению математике в начальной школе.

3. Формирование методологических знаний студентов. В философии к основным методологическим понятиям, которые встречаются и в процессе обучения математике, относят объяснение, обоснование, доказательство, теория. Представленные математические категории "работают" и в

данном курсе лекций. Инициируя у студентов, будущих педагогов, объяснение, обоснование и доказательство математических утверждений, преподаватели тем самым реализуют преемственность вузовского и школьного образования: под руководством владеющего этими методами учителя ученики постепенно начнут осознавать, что в познании важно продвинуться от понимания явлений к пониманию причинных связей, лежащих в их основе, и, наконец, к пониманию закономерностей.

4. Техническую сторону в подготовке учителя начальных классов, связанную с овладением ими приемами устного счета, проверки результатов действий, выполнением практических заданий.

К курсу лекций разработан словарь, который содержит 136 терминов по элементарной математике, теоретическим основам начального курса математики. Не обойдены вопросы методологического значения и оснований математики. Все это содействует формированию самостоятельности при изучении математики у студентов-заочников.

Для самоконтроля осознанности и прочности получаемых знаний студентам предлагается **тест самооценки**:

1. Я могу ответить на любой вопрос вида "Что называется... ?" (подмножеством, пустым множеством и т.д.)

2. Я могу проиллюстрировать каждое из этих понятий конкретными примерами из обыденной жизни, из математики, из практики обучения математике, из других школьных дисциплин.

3. Я знаю свойства...

4. Я могу доказать...

5. Я умею записывать соответствующие предложения, используя математические символы, и читать подобные записи.

Автор выражает глубокую благодарность рецензентам: Радькову А.М., доктору педагогических наук, профессору, Новик И.А., доктору педагогических наук, профессору, зав. кафедрой прикладной математики и информатики, профессору Павловскому А.И., а также научному редактору – Будько А.Е., кандидату физико-математических наук, доценту, за ознакомление с рукописью и полезные замечания, способствовавшие ее улучшению.

Глава 1

ИСТОРИЧЕСКИЙ МЕТОД В ОБУЧЕНИИ МАТЕМАТИКЕ

§ 1. Краткие сведения из истории возникновения понятия числа

Анализ методов познания в науке – математике и в математике – учебном предмете предполагает обращение к истории математики. В ней убедительно демонстрируется, что проблемы практики, а также самой математической науки служили источниками новых понятий, идей, методов, научных направлений.

В задачу данной книги не входит рассмотрение вопросов истории возникновения и развития всей математики, а только истории ее начального этапа, связанного с формированием понятия натурального числа, геометрической фигуры, величины.

Общеизвестно, что натуральное число относится к определяемым понятиям в математике, и определение его можно дать как в аксиоматической, так и в количественной теории. Однако в истории математики видные ученые относились к этому неоднозначно. Так, например, великий французский математик А. Пуанкаре считал, что натуральные числа должны быть признаны неопределяемыми объектами. Как и Л.Кронекер, он был убежден, что ни аксиоматическое, ни теоретико-множественное описание натуральных чисел неправомерно.

В истории человечества необходимы, были тысячелетия, чтобы возникли некоторые операции, которые затем были положены в основание математики. Этот начальный этап относится ко времени, когда человек от примитивного использования орудий для добывания пищи (охота и земледелие) перешел к их исследованию и совершенствованию:

а) разделение целого на части (стадия обработки орудия, раздел добычи);

б) составление нового целого из частей (составные орудия, жилище);

в) установление однозначного соответствия (оружие – охотники);

г) замена конкретного множества другим, более абстрагированным от качественных особенностей (насечки на кости, дереве);

д) простейшие парные соотношения (2 руки, день и ночь, тепло и холод и т.д.).

Нанесение, например, древними людьми параллельных насечек на кости фиксировало количество каких-либо предметов (орудий для охоты, участников охоты и т.п.), т.е. условная фиксация количества появилась намного раньше отвлеченного натурального числа. "Фиксация количества элементов во множестве с помощью, скажем, нарезок и его обозначение числительным – это совершенно разные когнитивные процессы".

Но из умения пользоваться данной операцией, т.е. заменой конкретного множества другим, еще не следует, что у человека формируется понятие числа. Количество предметов определяется с помощью взаимно-однозначного соответствия, без "сосчитывания" самих предметов. Таким образом, вначале было установление взаимно-однозначного соответствия между конкретным множеством и другим множеством-посредником, элементами которого могли служить камешки, палочки, насечки на кости. Это был первый шаг на пути к формированию понятия числа.

Словесная фиксация количества была следующим шагом в приближении к понятию числа. Потребовалось достаточно много времени для того, чтобы было понято, что для подсчета различных предметов удобно иметь единый "инструмент" – множество, с которым соотносились бы пересчитываемые предметы. Таким множеством чаще всего служило множество пальцев рук и ног человека. У некоторых народов, например, у чукчей, количество из пяти элементов до сих пор обозначается словом "рука", из десяти – "две руки", из пятнадцати – нога, двадцати – человек". В процессе моторно-зрительного счета в языке появляются первые числительные – один, два, и т.д. Причем это были "именованные числа": две руки, 5 баранов, 10 овец, 7 жен, т.е. первоначальное число не отделялось от природы сосчитываемых элементов множеств, оно было конкретным и связанным с совокупностью определенных предметов, а не абстрактным, которое является объектом математики.

Абстрактное понятие отвлеченного числа сложилось значительно позднее. Тот факт, что 3 козы и 3 жены имеют нечто общее, т.е. то, что их – "три" – отнюдь не очевиден (маленькие дети этого не понимают, но они хорошо отличают одну козу от трех). Когда произошло отвлечение от природы объектов и установилось отношение между группами объектов (пальцы – камни, козы – жены и т.д.), возникло представление о натуральном ряде чисел.

Развитие понятия натурального числа имеет свое продолжение и заключается в отыскании способов обозначения чисел, позволяющих характеризовать любые множества так, чтобы при этом сами числа могли бы легко заучиваться и использоваться. По сути дела ставится вопрос о системе счисления.

В процессе формирования математического счета и появления понятия целого числа К.А. Рыбников выделяет следующие логические этапы.

1. Идентификация элементов множества, отвлечение от ряда их индивидуальных свойств, частных особенностей.

2. Сравнение множеств путем операции поэлементного сопоставления (в ходе обмена, например).

3. Выделение множеств, играющих роль эталона при сопоставлениях (пальцы рук и ног, наборы камешков).

4. Возникновение абстрактных понятий чисел, вначале небольших индивидуальных.

5. Сравнение натуральных чисел по их величине, формирование конечного ряда натуральных чисел, удлинение ряда.

6. Появление обозначений для чисел, развитие числовой символики.

7. Формирование систем чисел и систем символов.

На ранних этапах математического знания первоначальное количество чисел было сильно ограничено и состояло из: один, два, много, т.е. числа больше двух, обозначались словом "много". Хотя справедливости ради следует отметить, что споры по поводу того, является ли единица числом или нет велись вплоть до XIV века. С. Стевин (1548–1620) приводил следующие аргументы в пользу того, что единица есть число: "1) части имеют ту же природу, что и целое; поэтому если целое есть число, то его часть – единица – также есть число; 2) если из данного числа вычитается то, что не является числом, то число должно оставаться прежним, но если из числа вычесть 1, число не останется прежним. Значить, нельзя утверждать, что 1 не есть число".

Нуль признан числом лишь в XVII веке. В Древней Индии для обозначения отсутствующего разряда числа рисовали кружочек и обозначали "сунья", что значит "пустой". При переводе этого слова на арабский получили слово "сифр". Заимствовав от арабов этот термин, европейцы осуществили транскрипцию слова "сифр" как "цифра", которое и вошло в математический тезаурус для обозначения десяти значков для записи чисел 0,1,2,3,…,9. Само же название "нуль" происходит от латинского *nullus* – никакой. Именно это слово имело место для названия числа нуль в латинских рукописных переводах с арабского языка.

Следующим этапом в развитии математики после появления натуральных чисел стала организация их в системы. Для ранних периодов истории культуры народов характерно разнообразие числовых систем, каждая из которых имела определенное основание. Вероятно до того, как человек пришел к десятичному счислению, он пользовался при счете пальцами руки. Это привело к созданию пятеричной системы счисления, следы которой сохранились в римской нумерации, где в записи чисел фиксируется способ их получения из чисел 1 и 5 путем сложения или вычитания: VI=V+I, VII=V+II; VIII=V+III, IV=V–1, IX=X–1.

Система римского счета основана на четырех принципах:

1). Буква, повторяемая дважды или трижды, удваивает или утраивает свое значение (III=3, XXX=30, CC=200 и т.п.).

2). Одна или более букв, помещенных после другой буквы большего значения, увеличивает значение этой буквы на величину более мелкой (VI=6, LXX=70, MCC=1200, где X=10, L=50, C=100, M=1000).

3). Буква, помещенная перед другой буквой, имеющей большее значение, уменьшает это значение на величину более мелкой буквы (IV=4, XL=40, CM=900).

4). Горизонтальная черта, помещенная над буквой, увеличивает ее значение в тысячу раз ($CX = 110$, $\overline{CX} = 110000$).

Знакомство учащихся начальной школы с римской системой счисления можно начать при изучении чисел первого десятка. При этом интересны могут быть следующее задания:

– Запишите число 7 с помощью четырех спичек, шесть – с помощью трех, десять – с помощью двух (Речь идет о их записи в римской системе счисления.).

– У меня 3 спички. Если я к ним прибавлю еще две спички, то получу восемь. Как это может случиться?(VIII).

– Доказать "на спичках", что 9 без 3 равно четырем, а 11 без трех равно шести, 10 без двух равно пяти.

Учитель сам может придумывать аналогичные задания и предлагать их в соответствующих темах, в разделе "Повторение" или во внеклассной работе.

К непозиционным относится и славянская нумерация, которой пользовались на Руси. В ней цифры обозначались буквами церковного алфавита. Для того, чтобы буква стала числом, наверху ставили особый знак "титло" (~). Например, число 20 изображалось $\overline{K}$.

Египетская система счисления также была непозиционной. В ней числа от 1 до 9 изображались с помощью соответствующего количества черточек: I(1), II(2), III(3), IIII(4), $\frac{\text{III}}{\text{II}}$(5), $\frac{\text{III}}{\text{III}}$(6), $\frac{\text{IIII}}{\text{III}}$(7), $\frac{\text{IIII}}{\text{IIII}}$(8), $\begin{array}{c}\text{III}\\ \hline \text{III}\\ \text{III}\end{array}$(9);

10 изображалось – ∩; (стилизация сомкнутых рук) 20 – ∩∩; и т.д., 100 – С.

Однако в непозиционных системах счисления очень сложно выполнять арифметические действия над числами, особенно непреодолимы трудности, связанные с умножением и делением. Поэтому постепенно произошел переход от непозиционных систем счисления к позиционным. Были разработаны пяти –, десяти –, двенадцати, шестидесятиричные, двоичная системы счисления. Разные народы выбирали то или иное основание системы. Это имело свои исторические корни. Вавилоняне предпочли число 60, англичане – 12 (счет дюжинами). Двенадцатеричная система у некоторых народов связана с тем, что используется лунный календарь (12 оборотов Луны вокруг Солнца, 12 знаков Зодиака). Остатки шестидесятиричной системы счисления мы находим, например, при делении 1 часа на 60 мин; 1 минуты на 60с.

Двоичная система счисления возникла на востоке около 4 тыс. лет до н.э. В двоичной системе счисления все числа записываются всего с помощью двух цифр: 0 и 1. Так, например, число $4=2^2$ обозначается – 100, а число $13=2^3+2^2+1$ записывается как 1101. То обстоятельство, что при пользовании двоичной системой счисления требуется только 2 цифры, послужило основанием очень важного ее использования – в электронно-вычислительных машинах (компьютерах).

Введение позиционной десятичной системы счисления объясняется удобством ее применения, так как у человека при себе всегда есть 10 предметов посредников (пальцы). Известный русский математик Н.Н. Лузин акцентирует на это внимание, заявляя, что если бы у нас на руках было не десять пальцев, а восемь, то человечество пользовалась бы восьмеричной системой. Ученые, между тем, считают, что двенадцатеричная система счисления была бы удобнее в обиходе, чем десятичная, т.к. число 12 имеет четыре делителя, кроме самого себя и единицы, (делится без остатка на 2, 3,4, 6), а число 10 только два делителя (2 и 5).

Если проследить историю науки, то наибольший вклад в развитие философии, математики, естествознания внесли древние греки. "Теоретическое естествознание, если оно хочет проследить историю возникновения и развития своих теперешних общих положений, вынуждено обращаться к грекам" В древней Греции сформировался культ числа. Пифагорейская школа в основу своего учения ставит число, считая его истоком, сущностью бытия. В школе Пифагора были убеждены, что "мир управляется числом и мерой". Числам приписывались мистические свойства: одни несут добро, другие – зло, третьи – успех. При этом единица считалась зародышем числа, а не собственно числом, так как положительное число есть множество единиц, а единица не реализует эффект множественности. Древние греки не признавали и нуль в качестве числа. Единица – символом славы и могущества. Пифагор и его единомышленники ставили единицу выше всех чисел, считали, что именно она является началом всего, что именно от нее пошел весь мир, что единица – "героиня", "прима" всякого счета.

Древние греки утверждали, что 2 – символ любви и неустойчивости. Это мягкость и тактичность, стремление сгладить острые углы. Число 2 находится между светом и темнотой, теплом и холодом, богатством и бедностью.

В далекие годы люди с большой трудностью научились считать сначала до двух и только через много-много лет начали в счете двигаться вперед. Каждый раз за двойкой начиналось что-то неизвестное, таинственное. Когда считали "один, два, много", то после двух было "все". Поэтому число 3, которое идет при счете за числом 2, обозначает "все". Долгое время число 3 было для многих народов границей в счете, символом полноты, точности.

Древние люди считали число четыре символом устойчивости и прочности. Оно представлено квадратом, четыре стороны которого обозначают четыре стороны света, четыре поры года, четыре стихии – Огонь, Землю, Воздух и Воду.

Числу пять математик Пифагор отводил важное место, считал его самым счастливым из всех чисел. Для древних людей число 5 было символом риска, ему приписывали непредвиденность, энергичность и независимость

Пифагор считал 6 сверхъестественным числом, потому что оно обладает отличными качествами: получается в результате сложения или умножения всех чисел, на которые делится. Шесть делится на 1,2,3 и если сложить или перемножить эти числа, то снова получится 6: $1+2+3=1\cdot2\cdot3=6$. Такими особенностями не обладает ни одно другое число.

Особенно большим уважением в древности было окружено число 7 Еще в древнем Вавилоне были известны семь планет, к которым присоединяли тогда Солнце и Месяц. Все непонятные явления природы приписывали богам, представления о которых постепенно соединились с семью планетами. По планетам стали исчислять время. Так родилась семидневная неделя. Название дней связали с именами богов. Семь стало священным числом. Его считали магическим потому, что человек воспринимает окружающий мир (звук, запах, вкус, цвет) через семь "дырок" в голове (два глаза, два уха, две ноздри, рот). Приписывая числу 7 таинственную силу, знахари нередко давали больному семь разных лекарств, настаивали на семи травах и рекомендовали пить их семь дней. В радуге 7 цветов и неслучайно на свете семь чудес.

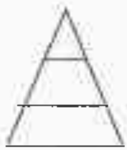
Сказочное число 7 широко использовалось в сказках, мифах древнего мира. Одиссей семь лет был в плену у нимфы Калипсо. У вавилонцев подземное царство окружено семью степями. Мусульмане считают, что небосвод состоит из 7 небес. У индусов есть обычай дарить на счастье семь слоников. Великий христианский пост тянется семь недель.

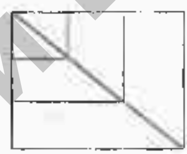
Число 8 древние люди считали воплощением надежности, которая доведена до совершенства. Оно символизируется двойным квадратом. Когда поделишь это число пополам, оно будет иметь равные части (4;4). А если эти части поделить еще раз, то вновь полученные части тоже будут равными (2,2,2,2).

Таинственную силу приписывали числу 9: в одно время добрую, а в другую – недобрую. У древних греков за этим числом закрепилась добрая слава. Так, жюри на Олимпийских играх состояло из 9 судей, существовало 9 муз – заступниц науки и искусства. Почему греки так относились к 9? Просто они уже давно умели считать до десяти, и потому это число их не пугало. Оно было признаком полноты, достатка, а не чем-то неизвестным, темным.

Число 10 выступало в древности символом гармонии и полноты. Десяток стал основой десятичной системы счисления, которую используют во всем мире.

Пифагорейцы уделяли много внимания теории чисел, которую они отличали от низкой науки арифметического счета. Пифагор и его ученики воспринимали числа довольно конкретно как точки, расположенные по геометрическим фигурам. Такое понимание чисел привело их к исследованию чисел треугольных, квадратных, пятиугольных, т.е. таких, из которых можно построить перечисленные фигуры, если представить их в виде соответственно расположенных точек.





$$1+2+3+\ldots+n=\frac{n(n+1)}{2} \qquad 1+3+5+\ldots+(2n-1)=n^2$$

$$1+4+\ldots+(3n-2)=\frac{4(3n-1)}{2}$$

Античные математики очень важным считали изучать вместе с каждым числом все его делители, причем числа, имеющие много делителей называли избыточными, а мало – недостаточными. В качестве меры числа бралось не количество делителей, а их сумма (за исключением самого себя), и сравнивали с этим числом. Например, для числа 9 сумма делителей:1+3=4, 4<9, следовательно, 9 – недостаточное число. Для 24 сумма делителей: 1+2+3+4+6+8+12=36, 36>24, следовательно, 36 – избыточное число.

Интересными являются так называемые совершенные числа, т.е. такие, у которых сумма делителей (включая единицу, но исключая само число), равно данному числу, например, 6=1+2+3. Предполагают, что совершенные числа были известны уже в Древнем Вавилоне и Древнем Египте. Во всяком случае, вплоть до V-го века н.э. в Египте, где сохранялся пальцевой счет, рука с загнутым безымянным пальцем и выпрямленными остальными изображала 6 – первое совершенное число. Тем самым этот палец как бы стал причастен к совершенству и потому получил привилегию нести на себе обручальное кольцо.

Евклидом (III в до н.э.) была доказана теорема о нахождении совершенных чисел:

Теорема Евклида: В тех случаях, когда число $p=1+2+4+8+...+2^n=2^{n+1}-1$ –простое, число $2^n \cdot p$ является совершенным.

Например, число $p=7=2^3-1$ – простое, значит число $2^2 \cdot 7=28$ – совершенное. Действительно, сумма делителей числа 28 равна $1+2+4+7+14=28$, т.е. это число совершенное.

Эти страницы истории интересны и доступны даже младшим школьникам. После того, как дети познакомятся с названием чисел при делении (делимое, делитель, частное), можно предложить им найти все делители числа 6. Потом рассказать о совершенных числах, к которым и относится число 6.

При изучении последующих таблиц (с числами 4,5,6,7,8,9) учеников можно познакомить с совершенным числом 28, а также с "избыточными" и "недостаточными" числами.

Были найдены древними греками так называемые "дружественные" числа. Числа а и b они называли дружественными, если сумма делителей первого числа равна второму и наоборот. Примером являются числа 220 и 284:

сумма делителей числа 220: $1+2+4+10+5+20+11+22+44+55+110=284$,

сумма делителей числа 284: $1+2+4+71+142=220$.

По преданию на вопрос: "Кого следует считать другом?", Пифагор ответил: "Того, кто является моим вторым я, как числа 220 и 284".

Нахождением дружественных чисел занимались такие великие математики, как Пифагор, Евклид, Декарт, Эйлер.

Знакомство школьников с дружественными числами возможно уже в начальных классах при изучении темы "Умножение и деление" в концентре "Тысяча". Здесь же можно познакомить их с еще одним трехзначным совершенным числом 496, сумма делителей которого равна этому числу.

Среди натуральных чисел интересны так называемые пифагоровы тройки (3,4,5;6,8,10;5,12,13). Это три числа a, b, c, которые удовлетворяют условию $a^2+b^2=c^2$ (*). В такой тройке чисел интегрируется их геометрическая и арифметическая сущность: если в треугольнике стороны будут равны 3, 4 и 5 см (дм) соответственно, то один из углов треугольника будет прямой и наоборот, если треугольник – прямоугольный, то длины сторон будут образовывать пифагорову тройку, характеризующуюся указанным выше равенством (*). Древнегреческий ученый Платон считал, что тройка (3, 4, 5) – это символ супружества. Он истолковал катет длины 4 как женское начало, вертикальный катет 3 как мужское начало, а гипотенузу как их потомство. В древности пифагоровы тройки использовались на практике в землемерном деле, в архитектуре, на что имеются ссылки даже в Библии. Там, например, повествуется, что при построении скинии использовались ковры, основной квадрат которых имел измерение 3×4 локтя (исход 37.10), а при возведении Соломонова храма были изготовлены подставки для жертвенных чаш с боковыми гранями размером 3×4 локтя (1 кн. Царств., 7.27). Упоминание этих чисел в связи с великими святынями иудеев должно выражать нечто больше, чем просто гордость практически полезным знанием. Возможно, тройка (3, 4, 5) воспринималась как место соединения духовного и материального мира.

Рассказать младшим школьникам о пифагоровых тройках можно при решении задач на построение прямоугольных треугольников или при вычислении суммы длин всех сторон (периметра) прямоугольного треугольника, которых в учебниках предлагается достаточно много. Например, на сторонах прямого угла отложить 3 см и 4 см. Соединить полученные точки и измерить третью сторону треугольника (5см). Учитель: "Треугольник со сторонами – 3, 4, 5 называется египетским. Он имеет интересное свойство, которое вы сейчас откроете сами. Умножьте длину каждой стороны треугольника саму на себя. Сложите два меньших из полученных произведений. Вы получили большее произведение". Таким образом, можно, по сути дела, в неявном виде подойти к теореме Пифагора

Классификация чисел на четные и нечетные также приписывается пифагорейцам, причем четные числа они называли "женскими", а нечетные – "мужскими". Платон утверждал, что арифметика есть учение о четных и нечетных числах. Пифагорейская школа (VI–V вв. до н.э.), по свидетельству Аристотеля, включила в таблицу своих категорий и противопоставление четного и нечетного, из которой уже в Древней Греции возникла распространенная игра в "чет и нечет".

В Древней Греции (Платон, Евклид) давали определение четного числа как числа, разбивающегося на два одинаковых натуральных слагаемых, указывали, что четные и нечетные числа встречаются в равном количестве. Евклид определил нечетное число как число, отличающееся от четного на единицу и не разбивающегося на два одинаковых слагаемых. Решая предложенные задачи, дети убеждаются, что действительно любое четное число можно представить как сумму двух одинаковых чисел, например, 6=3+3, 8=4+4; 10=5+5, а нечетные числа нельзя. Сумма двух четных чисел будет обязательно четной, например, 4+4=8; 6+8=14, сумма трех нечетных – нечетным, так как сумма двух нечетных – четное число, а четное и нечетное – нечетное. (3+5+7=15, 3+5=8; 8+7=15).

Рассказывая о четных и нечетных числах, учитель может предложить учащимися решить следующую задачу:

1. Найти кратчайшим путем сумму четных чисел от 2 до 16 включительно, т.е. 2+4+6+8+10+12+14+16:

Наблюдательный ребенок заметит, что суммы двух чисел, равностоящих от концов этой последовательности, одинаковы, т.е 2+16=18. 4+14=18; 6+12=18; 8+10=18. И таких сумм будет 4, т.е. общая сумма всех указанных четных чисел равна 18·4=72.

2. Найти сумму всех нечетных чисел от 1 до 15. Аналогично решая, получаем 16·4=64.

При изучении темы "Четырехзначные числа" можно вернуться к заданиям этого вида. Например:

"Избавляя себя от лишних вычислений, найти сумму всех четных чисел от 2 до 100 включительно".

2+100=102; 4+98=102… 46+56=102; 48+54=102; 50+52=102. И таких пар будет 50. Следовательно, сумма всех четных чисел от 2 до 100 равна 102·50=5100.

Тут же уместно будет рассказать учащимся о первом собственном открытии великого немецкого математика К. Гаусса. В третьем классе, где он учился, учитель предложил найти сумму всех натуральных чисел от 1 до 100. В решении мальчика ярко проявилась его математическая зоркость. Ему оказалось достаточным взглянуть на запись задания 1+2+3+…+98+ +99+100, чтобы заметить, что сумма каждой пары слагаемых, которые одинаково отстоят от концов записанного выражения, равна 101 (1+100; 2+99; 3+98; … 50+51). А таких пар, рассуждал К. Гаусс, в 2 раза меньше, чем слагаемых, т.е. 50. Выходит, что вся сумма равна 101·50=5050.

Говоря о многозначных числах, учитель должен сделать акцент на их практической значимости, т.к. мы с ними встречаемся в повседневной жизни, делая какие-либо расчеты или читая о достижениях науки и техники. С другой стороны, основываясь на философском единстве конечного и бесконечного, учителю необходимо подвести учащихся к осознанию идеи бесконечности натурального ряда чисел. И здесь без знакомства учеников с большими числами не обойтись.

Например, миллиард (реже его называют биллионом) – это единица с девятью нулями (10^9). Многим известен и триллион – единица с 12 нулями. Названия еще более крупных чисел мало распространены, поскольку для экономии места их обычно записывают как степени десяти да так и произносят: например, десять в двадцать четвертой степени. Все же приведем несколько названий числовых великанов: 10^{15} – квадрильон, 10^{18} – квинтильон, 10^{21} – секстильон, 10^{24} – септильон, 10^{27} – октильон, 10^{30} – нональон, 10^{33} – декальон.

В Древней Руси применялись элементы практической арифметики и геометрии. Существовали специальные названия для больших чисел. Кирик Новгородец в XII веке называл 10000 "певеди". В рукописях XVII века применялись наименования "тьма" =10000, "легион" =10 тьмам =100000, "леодр" =10 легионов = 1000000.

Американский математик Кастнер (XXвек), чтобы приобщить своих учеников к манипулированию большими числами, изобрел "самое большое" число, назвав его "гугол". Это единица со ста нулями, то есть 10^{100}. Хотя натуральный ряд чисел бесконечен и в принципе нельзя назвать такое большое число, к которому мы не могли бы прибавить хотя бы единицу, чтобы оно стало еще больше, однако гугол в определенном смысле представляет собой границу исчисляемого мира. Дело в том, что во всей Вселенной невозможно найти гугол чего бы то ни было. Даже современный компьютер не может достичь гугола путем простого сложения: 1+1+1+1... за все время существования Вселенной, хотя за несколько минут пришел бы к нему путем геометрической прогрессии.

Деление чисел на четные и нечетные в истории математики положило начало такой науке о числах как теоретическая арифметика.

В начальной школе учащихся знакомят с так называемыми магическими квадратами. Впервые о таких квадратах ученики узнают в подготовительном классе при выполнении заданий следующего содержания: "Запиши в свободных клеточках числа 4, 6, 7, 8, 9 так, чтобы сумма чисел в каждом ряду и столбце равнялась 15" или "Проверь, являются ли квадраты магическими".

	1	
	5	3
2		

Так что же такое магические квадраты? Учащимся будет небезынтересно узнать, что числа в них расположены таким образом, что их сумма по строкам, столбцам и диагоналям одна и та же. Это основное свойство любого магического квадрата. В самом древнем из известных магическом квадрате сумма равна 15. В другом, древнеиндийском, сумма равна 34.

1	14	15	4
12	7	6	9
8	11	10	5
13	2	3	16

В далеком прошлом отсталые, суеверные люди считали все эти необычайные свойства таинственными. Отсюда произошло и название этих, известных еще древним арабам и индусам квадратов, магические, или "волшебные". В Европе они появились в XV веке благодаря византийскому писателю Мосхокуло. Средневековые звездочеты верили в магическую силу таких квадратов. По их убеждению они могли служить талисманом против чумы. Однако магические квадраты представляют известный интерес и в науке о числе, поэтому ими занимались некоторые видные ученые. Например, знаменитый французский математик XVII века П. Ферма. Но и в наше время математики не пренебрегают вопросом о магических квадратах.

Итак, пифагорейцы считали, что все сущее может быть определено с помощью числа, основной элемент их учения: первоначально есть число. Философское учение пифагорейцев о числе нашло отражение в известном афоризме Л. Кронекера "Господь бог создал натуральное число, все остальное дело рук человеческих". Борьба вокруг этого положения остается весьма проблематичной в зарубежной философии, психологии и истории математики.

Можно вспомнить и известные слова И. Канта, что понятие натурального числа является врожденным, априорным, которым люди владеют до всякого опыта. Это свидетельствует о том, что учение Платона о врожденных идеях применяется в контексте математики.

Поскольку арифметика – наука, которая изучает числа и операции над ними, необходимо остановиться на истории введения арифметических операций. До XV века почти не было стабильных общепринятых арифметических знаков. В XV–XVI веках операции сложения и вычитания обозначались буквами соответственно p (первая в слове plus, означающее более), для вычитания – буква m (первая в слове minus – менее.) Для сложения употреблялось также латинское слово et (означающее "и"), которое, как полагают, в скорописи постепенно превратилось в знак "+". Знаки "+" и "–" встречаются в рукописях в начале 80-х годов XV века, но в печати впервые появляются в "Арифметике" Видмана. В XVII веке "минус" обозначали и знаком ÷ возможно для того, чтобы не смешивать знак минус со знаком препинания (тире). Знак ÷ используется и в "Арифметике" Л.Ф. Магницкого.

Знак умножения "×" введен в 1631 году английским математиком Вильямом Оутредом (1574 – 1660). Точкой для обозначения умножения систематически пользовался знаменитый немецкий математик XVII века Готфрид Вильгельм Лейбниц (1646 – 1716). Он же ввел и двоеточие для обозначения действия деления.

Знак "=" был введен английским врачом Робертом Рекордом в 1557 году.

Цифры, используемые для записи чисел, знаки арифметических действий являются частью математической символики, которая позволяет сжимать информацию, делать ее обозримой и удобной для последующей обработки.

§ 2. Реализация принципа историзма в процессе формирования понятия о числе

Возникновение понятия числа исторически связана с решением двух жизненно важных для человека практических задач: 1) подсчет предметов в некоторой совокупности, например, людей в племени и 2) измерение величин (длины, площади, массы).

Изучение чисел в школьном курсе математики осуществляется в соответствии с принципом историзма: организуется и в концентрированном виде воспроизводится процесс становления понятия числа и его постепенного расширения. В качестве первых элементарных математических задач детям предлагаются:

1) определение количества элементов в некотором конечном множестве;
2) установление порядка между элементами заданного множества

Обе эти задачи решаются с помощью операции счета: указывая каким-либо образом (рукой, глазами, словом) на каждое из предметов множества, произнося в строго определенной последовательности имена числительные, обязательно начиная со слова "один". Если при этом не были нарушены правила счета, то последнее из названных числительных дает ответ на вопрос: "Сколько элементов в заданном множестве?". Одновременно в процессе счета устанавливается и определенный порядок между предметами этого множества, ибо каждый из них получил при счете соответствующий порядковый номер. "Чтобы считать, – указывает Ф. Энгельс, – надо иметь не только предметы, подлежащие счету, но обладать уже и способностью отвлекаться при рассматривании этих предметов от всех прочих их свойств, кроме числа, а эта способность есть результат долгого, опирающегося на опыт, исторического развития". (К. Маркс и Ф. Энгельс. Соч., т. 20, стр. 37)

Операция счета представляет собой взаимно однозначное соответствие, отображение, функцию $f: A \to \{1;2;...;n\}$, где A – множество сосчитываемых предметов, а $\{1;2;...;n\}$ - отрезок, подмножество отвлеченного стандартного бесконечного множества $N = \{1;2;...;n;...\}$, называемого множеством натуральных чисел.

Всякое натуральное число является количественной характеристикой не только одного конкретного множества, а целого класса равномощных конечных множеств. Так число 3 характеризует, например, множества сторон, углов, вершин треугольника, множество букв в слове "дом", множество предметов {книга; ручка; тетрадь} и еще бесконечно много других множеств, эквивалентных (равномощных) уже названным.

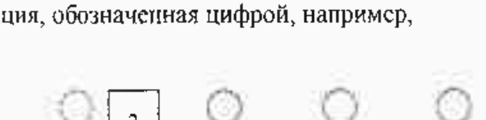
Наряду с *количественной* натуральное число выполняет и другие функции: *порядковая* – устанавливается порядок следования: первый, второй и т.д.; *результат измерения величины* показывает, сколько раз выбранная мерка (единица измерения) вмещается в заданной однородной величине; операторная – определяет некоторые операции над числами, например, в записи 3·4 число 4 является оператором, который показывает, что число 3 надо взять слагаемым 4 раза, а в записи 4^3 оператором служит уже число 3, т.к. оно позволяет определить, что 3 раза требуется умножить 4 само на себя.

Уже в начальном обучении математике раскрываются все функции натурального числа, но не одновременно, а последовательно. В зависимости от того, какую из перечисленных функций выбирают в качестве исходной, и существуют различные подходы к начальному формированию понятия числа.

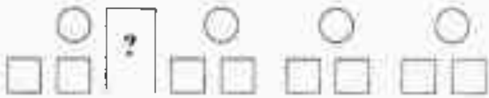
Возрастным особенностям и познавательным возможностям младших школьников наиболее соответствуют технологии, предусматривающие поэтапный переход от непосредственной предметной деятельности к оперированию абстрактными словами-терминами. По этой причине подавляющее большинство программ и учебников математики для начальных классов (А.С. Пчелко, М.И. Моро, А.А. Столяр и др.) отдают предпочтение теоретико-множественному подходу к формированию понятия о натуральном числе. В технологии развивающего обучения Эльконина-Давыдова реализуется иной подход на основе сравнения и измерения величин. В этом случае появляется возможность введения сразу действительного числа, рассматриваемого как отношение величин, частным случаем которого является число натуральное. Операторный подход к формированию понятия о натуральном числе нашел воплощение в учебных пособиях А.А. Ходовой. Работа здесь начинается с практических взаимно обратных упражнений вида:

а) изобразить столько предметов, сколько показывает оператор – натуральное число, например,

б) изобразить столько предметов, сколько было до того, как была выполнена операция, обозначенная цифрой, например,



в) определить значение оператора, например,



В аксиоматической теории арифметики натуральных чисел в качестве исходной основной выступает порядковая функция натурального числа. Натуральное число здесь трактуется как элемент стандартного множества N абстрактных объектов, для которых вводится отношение "следовать за", подчиненное аксиомам Пеано. Аксиомы Пеано задают не одну, а несколько (даже бесконечно много) изоморфных между собой систем "натуральных" чисел. Известное нам множество $N = \{1;2;...;n;...\}$ является лишь одной из моделей данной аксиоматической теории. Очевидно, что столь формализованный подход к формированию понятия натурального числа не может быть использован в школьном обучении.

Таким образом, введение понятия "число" изначально предполагает знание учителем целого ряда математических понятий (множество, подмножество, отображение, функция и многие другие), отношений между ними, теорий натурального числа, представляющих собой каждая систему знаний о числе и умение правильно применять теоретические знания в процессе обучения математике.

Использование исторического метода в обучении связано не только с выполнением требования качественной ретроспективности, но и требования предпосылочного рассмотрения причин возникновения развития математики. Если причиной возникновения натуральных чисел послужила практическая деятельность людей, которая имитируется в процессе формирования этого понятия, то дальнейшее расширение понятия числа связано с внутренними потребностями самой математической науки – прежде всего с выполнимостью обратных арифметических действий вычитания и деления. Выявление этой причинно-следственной связи должно стать непременным условием при введении понятий рационального, а также действительного числа.

Глава 2

ЛОГИЧЕСКАЯ СОСТАВЛЯЮЩАЯ ПОДГОТОВКИ УЧИТЕЛЯ НАЧАЛЬНОЙ ШКОЛЫ К ПРЕПОДАВАНИЮ МАТЕМАТИКИ

§ 1. Использование дедуктивного метода в начальном обучении математике

Наука всегда стремится к истинному знанию, достоверным выводам, доказуемым суждениям, что особенно характерно для математики. Исключительное значение в ней приобретают умозаключения достоверности, в которых используются надёжные логические способы получения истинного вывода из истинных посылок. Из индуктивных умозаключений к умозаключениям достоверности относятся полная и математическая индукция. Однако, основной вид умозаключения достоверности в математике и науке вообще – дедуктивное умозаключение, обеспечивающее истинность заключения при истинности посылок и соблюдении правил логики.

Дедукция (лат. deductio – выведение) – логический путь от общего к частному. В более специальном смысле термин "дедукция" обозначает процесс логического вывода, т.е. перехода в соответствии с определенными правилами логики от исходных предложений, посылок к их следствиям.

Существует три вида дедуктивных умозаключений.

1. От более общего заключения к менее общему или единичному.
2. От одной общности заключают к общности того же уровня.
3. От единичного заключения к частному.

Достоверно умозаключать от единичного к общему или от частного к общему нельзя – можно получить ложный вывод. Но достоверно умозаключать от единичного к частному можно.

Впервые теорию дедукции разработал Аристотель. Декарт считал, что к познанию вещей человек приходит двумя путями: через опыт и с помощью дедукции, которую он назвал чистым умозаключением; "опыт часто вводит нас в заблуждение, а дедукция избавлена от этого недостатка". Однако, именно опыт и наблюдения помогли человеку выработать правила дедуктивного умозаключения.

Термин "дедукция" употребляется также в следующих его значениях.

1. Дедукция как метод исследования предполагает отыскание "ближайшего рода", в который входят предметы исследования, применение к этим предметам соответствующего закона, присущего всему данному роду. Разновидностью этого метода является переход от знания более общих положений к знанию менее общих положений.

2. Дедукция как форма изложения материала в книге, учебнике или на уроке в процессе обучения, когда от общих положений, законов идут к менее общим суждениям, предложениям.

Дедукция играет огромную роль в науке математике и в обучении школьников её основам. Почти все доказуемые предложения, теоремы, формулы, тождества обосновываются, доказываются и выводятся с помощью дедуктивных умозаключений. Этим методом обычно устанавливается истинность математических предложений, которые, благодаря этому, переходят из разряда вероятных суждений, гипотез в фонд математической теории.

В начальном обучении математике дедукция чаще всего используется на этапе применения обобщенных знаний, полученных в большинстве случаев индуктивным путем.

Дедукция и индукция тесно связаны между собой. Индукция служит одним из средств первичного обобщения огромного количества опытного материала, полученного посредством наблюдения и эксперимента. С её помощью сделан ряд научных открытий. Однако, индукция не даёт гарантии на получение достоверного знания: "Самая простая истина самым простым, индуктивным путём полученная, всегда неполна, ибо опыт всегда незакончен" (В.И.Ленин). В науке всякое индуктивное заключение дополняется теоретической проверкой, прежде чем применится на практике.

Большинство посылок дедуктивных умозаключений получены в результате индуктивного обобщения значительного числа эмпирических данных.

Дедукция и индукция составляют две неразрывные стороны единого процесса познания, постоянно взаимодействуют, дополняют друг друга. Указывая на неразрывную взаимосвязь индукции и дедукции в процессе познания, Ф. Энгельс писал: "индукция и дедукция связаны между собой столь же необходимым образом, как синтез и анализ. Вместо того, чтобы односторонне превозносить одну из них до небес за счёт другой, надо стараться применять каждую на своём месте, а этого можно добиться лишь в том случае, если не упускать из виду их связь между собой, их взаимное дополнение друг друга".

В математике как дедуктивной науке преобладают дедуктивные умозаключения, особенно в доказательствах. Но существенную роль играют и индуктивные методы, сочетающиеся с дедуктивными методами в научном мышлении, познании.

В школьном обучении математике соотношение между индуктивными и дедуктивными методами зависит от возраста школьников. В старших классах преобладают дедуктивные методы, в начальных – индуктивные. Однако и в начальных классах дети постепенно приучаются к использованию простейших дедуктивных умозаключений.

В начальном обучении математике наиболее эффективен индуктивно-дедуктивный метод, когда от рассмотрения частных случаев /задач, примеров/ осуществляется переход к общим выводам и правилам, а затем в свете общих положений осмысливаются другие частные факты. Знание, добытое индуктивным путём, становится основой получения новых знаний дедуктивным путём.

Однако в любом случае конкретно-индуктивный подход введения новых понятий характеризуется тем, что факты, полученные в процессе эмпирического познания действительности, служат исходным материалом для обобщающих выводов по индукции. Индукция здесь выступает как метод исследования, научного познания реального мира.

Усвоение понятий начинается уже в процессе их введения, однако овладение понятием невозможно без его систематического закрепления и повторения на последующих уроках. В начальном обучении математике, где почти все понятия сообщаются детям без логических определений, усвоение их организуется в следующих формах:

1) приведение иллюстрирующих и конкретизирующих данное понятие примеров (назови, чего у нас в классе "3"; запиши произведение чисел 3 и 4; покажи треугольник, четырехугольник и т.п.);

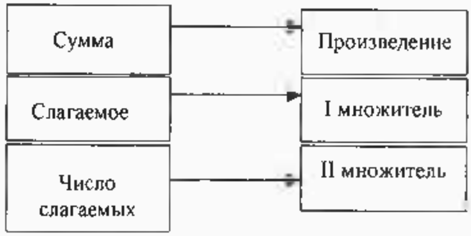
2) использование понятия в суждениях и умозаключениях (например, это треугольник, потому что у него 3 стороны, 3 угла, 3 вершины).

Каждый из этих видов деятельности связан с проведением дедукции, осуществляемой мысленно или с проговариванием вслух. От общего мысль учащихся движется к частному, конкретному (и, конечно, в противоположном направлении).

Еще К.Д.Ушинский подчеркивал значение систематизации знаний "Голова, наполненная бессвязными знаниями, похожа на кладовую, в которой все в беспорядке и где сам хозяин ничего не отыщет". Включение новых понятий в систему математических знаний основано на установлении ближайших и более удаленных связей между отдельными понятиями, т.е. на установлений отношений между объемами понятий. С одной стороны, связи между понятиями определяют переходы в процессе рассуждений от одних понятий к другим, с другой стороны, понимание взаимоотношений между понятиями служит основой для усвоения системы понятий.

Изобразим, например, схему системы понятий в теме "Умножение"

Такой подход ориентирует учителя на использование индукции как метода познания, когда отдельные знания путем индуктивных умозаключений обобщаются до соответствующих законов или правил. Эти рекомендации и используют учителя в практике обучения. Проанализируем, к примеру, фрагмент урока во втором классе СШ №6 г. Кобрина по теме "Нахождение неизвестного уменьшаемого и вычитаемого" /учитель Петрачук А.Р./.



Схема

С помощью наглядных пособий раскрывается связь между уменьшаемым, вычитаемым и разностью:

– Возьмите 7 кружков, отодвиньте 4 кружка. Сколько кружков осталось? Как узнали? (7-4=3). На доске запись: 7-4=3.

– Как называется в этом примере число 7? 4? 3? Придвиньте 4 кружка к 3 кружкам. Сколько стало кружков? Как узнали? (4+3=7). Сравните этот пример с первым. Как получили уменьшаемое 7? /К вычитаемому прибавили разность./ Отодвиньте теперь 3 кружка. Сколько кружков осталось? Как узнали? (7–3 = 4).Сравните этот пример с первым. Как нашли вычитаемое 4? /Из уменьшаемого вычли разность/.

Так же ведется наблюдение по иллюстрации и записи, данной в учебнике, в результате чего формулируются выводы: если к вычитаемому прибавить разность, то получится уменьшаемое; если из уменьшаемого вычесть разность, то получится вычитаемое.

Здесь индукция выступает не только как метод познания, но и как способ обоснования истинности выдвигаемых гипотез. И хотя вывод неполной индукции всегда содержит элемент неисследованного неизвестного, ибо делается на основе рассмотрения части обобщаемых явлений, для младших школьников он является вполне убедительным. На этой ступени обучения, мы думаем, можно не акцентировать внимание детей на вероятностном характере получаемого таким путем знания.

Некоторые вопросы теории в начальном обучении математике вводятся дедуктивно. В арифметике – это правила умножения на 0 и на 1. Выбор этого метода обусловлен тем, что мы не может предложить учащимся для наблюдения ряд частных фактов, т.к. случаи, когда второй множитель 0 или 1, не могут быть подведены под общее определение действия умножения и требуют доопределения понятия "произведение целых неотрицательных чисел".

Ограниченное использование дедукции при введении теоретических знаний объясняется в первую очередь возрастными особенностями младших школьников, которые мыслят конкретными категориями, опираясь при этом на свойства конкретных предметов и явлений, а также их невысокими познавательными возможностями, которые находятся в начальной стадии активного развития и совершенствования. Дедукция широко используется на этапе применения в практике знаний теоретического характера.

§ 2. Математические понятия. Процесс их формирования в начальной школе

1. Объем и содержание понятий. Определение понятий

Из философии известно, что существуют три формы мышления: понятия, суждения, умозаключения.

Понятие есть одна из форм отражения мира на ступени познания, связанной с применением речи, в которой выражается суть предметов и явлений. Первые понятия относились к чувственно воспринимаемым предметам и имели наглядно-образный характер (конкретные понятия). Конкретные понятия отображают предмет в совокупности его признаков. Этим понятиям отвечают конкретные предметы (стол, дверь). С умножением потребности человека и усложнением видов его деятельности появились более отвлеченные, абстрактные понятия, непосредственно не связанные с чувственным отражением. Абстрактные понятия отображают некоторый признак предмета, который абстрагируется, отделяется мысленно от предмета и сам выступает как предмет мышления. В математике к конкретным понятиям можно отнести, например, понятие "модель куба" (наглядное пособие), а понятия "прямая", "число", "функция", "отношение" – к абстрактным. Для математики, в основном, характерны абстрактные понятия.

Определение. Понятия – такая форма мышления, в процессе которой выделяются наиболее существенные свойства данного объекта или класса объектов, позволяющие выделить его из других объектов.

Например, формируя понятие о квадрате, мы выделяем следующие существенные его свойства: а) все стороны равны; б) все углы прямые, в) диагонали равны и взаимно перпендикулярны и т.д. При этом нас не интересует, нарисован ли квадрат, вырезан ли из бумаги или изготовлен из металла, не интересует цвет и т.д. Все эти и подобные им свойства в математике относят к несущественным свойствам.

Всякое понятие характеризуется своим объемом и содержанием.

Определение. Объем понятия – это множество объектов, которые охватывают данное понятие.

Определение. Содержание понятия – это перечень наиболее существенных свойств данного понятия, позволяющих отличить его от других понятий.

Например: *объем* понятия "атом" составляет множество, к которому относятся атомы всех химических элементов. Содержание понятия – это совокупность существенных свойств предметов, составляющих объем данного понятия.

Содержание и объем понятия взаимосвязаны между собой в том смысле, что увеличение объема понятия влечет за собой уменьшение его содержания и наоборот. Объем понятия "молекула" шире объема понятия "атом", а содержание его уже.

В математике понятие обозначается часто не только термином, названием, но и символом – знаком.

Понятия выделяют и классифицируют по различным признакам.

1. Понятия делятся по объему на *единичные*, *собирательные* и *общие* в зависимости от числа предметов в их объеме.

Единичные понятия. Их объем состоит из одного предмета. Например, "автор "Гамлета"", "число нуль", "число тысяча" и др.

Собирательные – это группа однородных предметов, мыслимых как единое (например, понятие созвездия).

Общие понятия. Объемы таких понятий включают в себя более одного предмета. Здесь выделяются два случая: а) объем понятия конечное множество, например, натуральные однозначные числа; б) понятия с объемом, представляющим собой бесконечное множество, например, натуральные числа, квадрат, прямоугольник, отрезок и т.д.

2. Все понятия по содержанию делятся на сравнимые и несравнимые.

Сравнимые имеют некоторые общие признаки. *Несравнимые* таких общих признаков не имеют. Например, квадрат и прямоугольник – сравнимые понятия, так как у них есть общий: признак они являются четырехугольниками. Понятия "четное число" и "треугольник" – несравнимые, у них нет ни одного общего признака. Сравнимые понятия делятся на совместимые и несовместимые.

Совместимые – это такие понятия, объемы которых имеют хотя бы один общий элемент.

Несовместимые – это такие понятия, объемы которых не имеют ни одного общего элемента, например, четные и нечетные числа.

Обобщим сказанное в виде схемы:

3. Объемы совместимых понятий могут находится в трех видах отношений: *тождества*, *частичного пересечения*, *включения*. Наглядно это можно представить с помощью кругов Эйлера. Каждый предмет, входящий в объем понятия, изображается точкой этого круга.

Отношение тождества. Объемы таких понятий совпадают. Соответственно совпадают и изображающие их круги Эйлера (рис. 1). Например, объемы понятий "биссектриса угла при определенной вершине равнобедренного треугольника" и "его высота, проведенная из этой же вершины" находятся в отношении тождества.

Отношения пересечения. Например, понятие А – четные числа, понятие В – числа больше пятидесяти. Заштрихованная часть кругов Эйлера (рис. 2) изображает множество чисел, которые одновременно являются четными и больше пятидесяти.

Отношения включения. Например, А – натуральные числа, В – натуральные числа, оканчивающиеся нулем. Очевидно, второе множество является подмножеством первого, $B \subset A$ (рис. 3). Другим примером могут служить понятия "прямоугольник" и "квадрат" и др.

Рис. 1

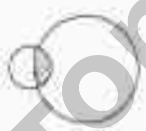


Рис. 2

Рис. 3

В последнем случае, когда $B \subset C$, понятие В называется видовым (видом), понятие А – родовым (родом). Например, понятие "натуральные числа" является родом по отношению к понятию "числа, оканчивающиеся нулем". При этом иногда возникает необходимость различать ближайшее и отдаленное родовое понятие. Так, например, для понятия "квадрат" ближайшим родом будет понятие "прямоугольник". Отдаленными родовыми понятиями будут "четырехугольник", "многоугольник", "фигура".

Если объемы понятий не имеют ни одного общего элемента, то круги Эйлера, изображающие их, не будут иметь общих точек. Примером могут служить понятия "отрезок", "площадь", "слагаемое" и др.

Несовместимые понятия также могут находиться в трех видах отношений.

Отношение соподчинения. Такие понятия имеют общий род. Соответствующие круги Эйлера не пересекаются, но включаются в один общий круг. Например, понятия "треугольник", "четырехугольник", "пятиугольник" находятся в таком отношении к понятию "многоугольник", которое является для них родовым.

Отношение противоречивости. Признаки двух таких понятий противоречивы. Например, "четное число" и "нечетное число", "уравнение" и "неравенство" и др. Объемы таких понятий удобно изображать частями круга Эйлера. Точки отрезка, разделяющего круг Эйлера, не принадлежат ни одной из его частей.

Отношение противоположности. Например, в таком отношении находятся понятия "острый угол" и "тупой угол".

Процесс формирования понятий длительный и состоит из нескольких этапов:

1 этап: ученик наблюдает множество объектов, которые образуют данное понятие. На этом этапе идет накопление информации о данных объектах. При этом учитываются как существенные, так и несущественные свойства.

2 этап: происходит выделение существенных свойств и игнорирование несущественных свойств.

3 этап: когда учащиеся, не имея конкретного образа перед глазами, представляют его в своем воображении.

4 этап. Формулирование определения понятия.

5 этап. Применение учащимися сформированного понятия в практических и познавательных ситуациях. Это способствует проверке полноты усвоения его всеми учащимися.

В начальном курсе математики должно быть уделено большое внимание процессу формирования понятий ввиду того, что на этом этапе обучения младшие школьники овладевают огромным количеством понятий.

Процесс формирования понятия заканчивается его определением.

Определение. Определение понятия – это предложение, с помощью которого раскрывается содержание понятия либо устанавливается значение термина.

К определению понятий предъявляются следующие требования:

1. Определение понятий не должно содержать порочного круга, т.е. одно понятие не должно определяться через другое, а это другое – через данное (например, сумма – число, которое получается в результате сложения; сложение – действие нахождения суммы).

2. Определение понятия должно содержать лишь минимальные сведения о нем. Это значит, что все те свойства, которые могут быть доказаны, не должны содержаться в определении понятия. Например, определение параллелограмма как четырехугольника, у которого противолежащие стороны попарно параллельны и равны, содержит избыточную информацию, т.к. равенство противоположных сторон параллелограмма можно доказать, исходя из того, что они попарно параллельны

3. Определение понятия должно быть полным. Например, определение «пирамида называется правильной, если в основании ее лежит правильный многоугольник», имеет недостаток в информации, т.к. в опреде-

лении надо добавить фразу: «и вершина пирамиды проецируется в центр этого многоугольника».

4. По возможности определение не должно быть отрицанием какого-либо факта (например, «трапеция – это четырехугольник, который не является параллелограммом»; определение неправильное, т.к. существуют четырехугольники, которые не параллелограммы и не трапеции).

5. Объем определяемого понятия должен содержаться в объеме того понятия, через которое определяется новое понятие. Пример: трапеция – четырехугольник, у которого две стороны параллельны, а две другие непараллельны. В этом определении объем понятия "трапеция", содержится в объеме понятия "четырехугольник". Если объем определяемого понятия содержится в объеме того понятия, через которое мы определяем, то объем определяемого понятия называют видовым по отношению к объему определяющего понятия, а объем определяющего понятия называют родовым. Пример: трапеция – видовое понятие по отношению к четырехугольнику, а четырехугольник – родовое понятие по отношению к трапеции.

Одному и тому же понятию в математике можно дать различные, но эквивалентные относительно принятой аксиоматики определения. Например, определение "квадрата" можно дать двояко. Квадрат – это прямоугольник, у которого все стороны равны. Или квадрат – это ромб, у которого все углы прямые. Данные определения эквивалентны и не противоречат друг другу.

Способы определения понятий

1. Наиболее распространенным является способ определения через род и вид. Таким способом вводится большинство определений школьной геометрии. В начальном курсе математики данный способ широкого применения не находит.

2. Генетический способ. В таком случае в определении понятия указывается способ конструирования определяемого понятия (объекта). Например, окружность – это кривая замкнутая линия, все точки которой одинаково удалены от центра окружности.

3. Аксиоматический способ определения понятий. При таком способе определяемое понятие задается системой аксиом. Так, понятие натурального числа определяется с помощью аксиом Пеано, понятие "расстояние" между двумя точками на плоскости или в пространстве дается в аксиомах метрического пространства и т.д.

При обучении младших школьников математике все эти способы определения практически не используются. Наиболее распространенным способом в начальных классах является *контекстуальный* (описательный) способ. Таким способом, например, определяются понятия "равенство" и "неравенство" в начальной школе: через контекст определенной математической ситуации, которая описывает смысл самого этого понятия,

$3\cdot 5>10$, $\quad 9\cdot 4=36$

$75-10<75$ (неравенства), $\quad 6\cdot 4=2\cdot 12$ (равенства).

$3+5>6$ $\quad 16-3=12+1$

При изучении математики в начальной школе чаще всего применяют остенсивные определения понятий, т.е. через демонстрацию объектов, которыми этими понятиями определяются или указания на модели определяемых понятий (понятие шара иллюстрируется его моделью – мячом, понятие куба – моделью его, понятие окружности – моделью ее – обручем.).

Вопросы и задания для самоконтроля:

1. Укажите содержание понятий: уравнение, математическое выражение, уменьшаемое, двузначные числа, доля, дробь, окружность, прямоугольник, ломаная, угол.

2. Приведите примеры единичных и общих понятий, изучаемых в начальных классах. Выделите их содержание.

3. На одном рисунке с помощью кругов Эйлера изобразите: а) объемы понятий: четные числа; числа, оканчивающиеся нулем; нечетные числа; числа, оканчивающиеся цифрой 5; натуральные числа; б) объемы понятий: уравнение, равенство, выражение с переменной, математическое выражение, числовое выражение. Почему здесь необходимы два рисунка?

4. Из начального курса математики приведите примеры понятий: а) на все выше рассмотренные случаи расположения кругов Эйлера; б) находящиеся в отношении "вид – род".

§ 3. Способы математических доказательств

1. Структура теоремы. Виды теорем. В математике есть ряд предложений, которые принимаются без доказательств. Такие предложения в математике называют **аксиомами**, а в физике – постулатами. Кроме аксиом в математике есть и **теоремы** – это математические утверждения, истинность которых устанавливается путем доказательства. Теоремы часто формулируются в виде импликации вида $\forall x \in X\ \left(A(x) \Rightarrow B(x)\right)$. A(x) называют условием теоремы, B(x) – заключением теоремы. Заключение теоремы B(x) является *необходимым условием* для условия A(x) теоремы. А условие A(x) *достаточным условием* для заключения теоремы B(x). В некоторых теоремах существует разъяснительная часть. В форме импликации можно сформулировать каждую теорему. Например, теорему "Всякий вписанный в окружность угол, опирающийся на диаметр, является прямым" можно высказать в форме импликации: "Если вписанный в окружность угол опирается на диаметр, то он прямой".

Пример. Если точка лежит на биссектрисе угла, то она равноудалена от сторон угла. В общем виде – $\forall x \in X, (A(x) \Rightarrow B(x))$.

Если теорема задана в виде (*) ее называют прямой. Для каждой теоремы, высказанной в форме (*) можно сформулировать ей обратную. Для прямой и обратной теорем условие и заключение меняются местами. Обратная теорема для сформулированной выше прямой будет иметь вид $\forall x \in X \;\; B(x) \Rightarrow A(x)$. Не для всякой верной теоремы обратная теорема оказывается тоже верной. Так, обратная теорема для следующей теоремы: "Если сумма цифр в записи числа делится на 3, то и само число делится на 3" является верной. Для теоремы "Если в треугольнике один из углов прямой, то оба других острые" обратная теорема не верна.

Если условие и заключение теоремы заменить их отрицаниями, то получим противоположную теорему. Теорема, противоположная прямой, которая математически выражается $\forall x \in X \;\; \left(\overline{A}(x) \Rightarrow \overline{B}(x)\right)$ называется противоположной прямой. Теорема, противоположная обратной, выражается следующим образом: $\forall x \in X \;\; \left(\overline{B}(x) \Rightarrow \overline{A}(x)\right)$.

На основе закона контрапозиции известно, что $A \Rightarrow B = \overline{B} \Rightarrow \overline{A}$; $B \Rightarrow A = \overline{A} \Rightarrow \overline{B}$.

Следовательно, если истинна прямая теорема, то будет истинна и противоположная обратной; если истинна обратная теорема, то будет истинна и противоположная прямой. Поэтому из четырех различных видов теорем достаточно доказать две любые неравносильные теоремы и тогда можно сделать вывод относительно истинности другой пары теорем.

Если в формулировке теоремы «Для того, чтобы… достаточно…» есть условие, то оно стоит после слова «достаточно», а заключение стоит на первом месте.

2. Дедуктивные умозаключения. В процессе познания человек рассуждает, а значит, умение правильно рассуждать и делать выводы является необходимым в любой деятельности.

Определение. Под рассуждением или умозаключением понимают форму мышления, в процессе которой из одного или нескольких известных суждений (посылок) на основании определенных правил вывода получается новое суждение (заключение).

1 посылка: Сегодня ясная погода; *2 посылка:* Небо безоблачное; *3 посылка:* Ярко светит солнце. *Заключение:* Значит, сегодня не идет дождь.

Приведем пример рассуждений, которые выполняются учащимися начальной школы на уроке математики при решении простейших уравнений. При обосновании выбора действия при решении уравнения $x \cdot 6 = 30$ ученики рассуждают так: "Для нахождения неизвестного множителя надо разделить произведение на известный множитель. В уравнении $x \cdot 6$ неизвестен первый множитель. Значит, чтобы его найти, надо произведение 30 разделить на второй множитель 6, откуда $x = 30:6$".

Рассуждения могут быть правильными и неправильными.

Определение. Правильным считается такое рассуждение, в процессе которого из истинных посылок нельзя сделать ложное заключение. При правильном рассуждении между посылками и заключением имеет место отношение логического следования. В противном случае рассуждение является неправильным.

Приведем пример правильного рассуждения. *1 посылка:* Все люди смертны; *2 посылка:* Сократ человек. *Заключение:* Сократ смертен.

Пример неправильного рассуждения *1 посылка:* Все люди смертны; *2 посылка:* Сократ смертен. *Заключение:* Сократ – человек (ложное).

Для того, чтобы выяснить является ли данное рассуждение правильным, составляют логическую формулу и затем таблицу истинности для нее. Если таблица истинности принимает только лишь значение *и*, то рассуждение по такой формуле является правильным. Если хотя бы в одной строке таблицы истинности содержится значение *л*, то рассуждение по этой формуле неправильное.

Логическая формула составляется следующим образом:

а) каждая посылка и заключение обозначаются большой буквой латинского алфавита; б) формула есть импликация конъюнкции посылок и заключения.

Если A, B, C посылки, D – заключение, то чтобы проверить правильность рассуждения составляют формулу: $A \wedge B \wedge C \Rightarrow D$.

Чтобы уметь правильно рассуждать, надо знать правила, по которым любое рассуждение является достоверным. Такие правила называются правилами вывода. Их кратко условились записывать так: $\dfrac{A_1, A_2, A_3, \ldots, A_n}{B}$. Над чертой – посылки, под чертой – заключение.

Рассмотрим некоторые правила вывода:

1. Правило заключения. $\dfrac{A \Rightarrow B, A}{B}$; $(A \Rightarrow B) \wedge A \Rightarrow B$

A	B	$A \Rightarrow B$	$(A \Rightarrow B) \wedge A$	$(A \Rightarrow B) \wedge A \Rightarrow B$
и	и	и	и	и
и	л	л	л	и
л	и	и	л	и
л	л	и	л	и

Пример: если число делится на 4, то оно делится на 2; число 16 делится на 4; заключение: число 16 делится на 2.

2. Правило отрицания. $\frac{A \Rightarrow B, \overline{B}}{\overline{A}}$; $(A \Rightarrow B) \wedge \overline{B} \Rightarrow \overline{A}$.

Пример. *1 посылка:* если четырехугольник параллелограмм, то его диагонали в точке пересечения делятся пополам; *2 посылка:* диагонали четырехугольника в точке пересечения не делятся пополам. *Заключение:* четырехугольник – не параллелограмм.

3. Правило силлогизма. $\frac{A \Rightarrow B, B \Rightarrow A}{A \Rightarrow C}$; $(A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow C) \Rightarrow A \Rightarrow C$.

Пример. *1 посылка:* Если число делится на 12, то оно делится на 6.

2 посылка: Если число делится на 6, то оно делится на 3. *Заключение:* Если число делится на 12, то оно делится на 3.

4. Правило контрапозиции. $\frac{A \Rightarrow B}{\overline{B} \Rightarrow \overline{A}}$;

Пример: если треугольник равнобедренный, то его углы при основании равны (посылка).

Если углы треугольника при основании не равны, то такой треугольник неравнобедренный.

Рассуждение по схеме «Если А то В и В, то А»: $\frac{A \Rightarrow B, \overline{B}}{A}$ (1); $\frac{A \Rightarrow B, \overline{A}}{B}$ (2).

Пример неправильного рассуждения.

1. Если животное заяц, то оно любит капусту.
2. Иванов любит капусту

Заключение: Иванов – заяц.

Иногда для установления правильности рассуждений используют круги Эйлера. Такой способ наиболее приемлем тогда, когда одна из посылок содержит квантор всеобщности.

Все рыбы плавают в воде.

Лещ – рыба.

Заключение: лещ плавает в воде.

Математические доказательства. Доказать теорему $A \Rightarrow B$, значит установить логическим путем, что всегда, когда выполняется свойство A, будет выполняться и свойство B. В основе доказательства лежит рассуждение: это логическая операция, в результате которой из одного или нескольких взаимосвязанных по смыслу предложений получается предложение, содержащее новое знание..

Определение. Рассуждение, между посылками и заключением которого имеет место отношение логического следования, называют дедуктивным.

В основе любого дедуктивного рассуждения лежит определенное правило вывода:

1. Правило заключения. Сущность такого доказательства состоит в том, что с помощью логических рассуждений из общего случая выводится какой либо частный случай. $A(x) \Rightarrow B(x)$ – общие посылки и заключение; $A(a) \Rightarrow B(b)$ – частные посылки и заключение.

Пример: доказательство теоремы о равенстве прямоугольных треугольников, как частном случае произвольных треугольников.

2. Правило отрицания. В основе этого способа доказательства лежит известный закон контрапозиции. Это есть доказательство методом от противного.

Пример: если две прямые a и b перпендикулярны третьей прямой, то эти прямые параллельны.

Доказательство: предполагаем противное: т.е., что a и b не параллельны. Предположим $a \cap b = N$, а значит из одной точки к прямой *c* можно провести два перпендикуляра, такого быть не может, значит, a параллельна b.

Метод доказательства от противного состоит в следующем:

а) предполагаем, что справедливо предложение, противоположное B(x), т.е. $\overline{B}(x)$ – истинно; б) если с помощью рассуждений докажем, что в этом случае будет истинна импликация $\overline{B}(x) \Rightarrow \overline{A}(x)$, то тем самым будет доказана и исходная теорема.

Конструктивное доказательство. Сущность его состоит в том, что строится некая модель, на которой доказывается истинность определенной теоремы.

Метод математической индукции. Доказательство теоремы методом математической индукции основано на аксиоме математической индукции.

Определение. Если некоторый предикат A(x) становится истинным при x=1, и если из истинности этого предиката при x=к следует, что он истинен и при x=к+1, то множество истинности этого предиката совпадает со всем множеством натуральных чисел N, т.е. этот предикат истинен для всех натуральных чисел.

Пример: доказать, что $1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots n^2 = \dfrac{n \cdot (n+1)(2n+1)}{6}$.

1. Проверяем истинность этого утверждения для n=1; $1^2 = \dfrac{1 \cdot 2 \cdot 3}{6} = 1$.

2. Предположим, что данное утверждение справедливо для n=k, т.е. $1^2 + 2^2 + \dots + k^2 = \dfrac{k(k+1)(2k+1)}{6}$

3. Докажем, что данное утверждение истинно при n=k+1. $1^2+2^2+...+(k+1)^2=\frac{(k+1)(k+2)(2k+3)}{6}$.

Доказательство.

$1^2+2^2+...k^2+(k+1)^2=\frac{k(k+1)(2k+1)}{6}+(k+1)^2=\frac{(k+1)(k\cdot(2k+1)+6\cdot(k+1))}{6}=$

$\frac{(k+1)(2k^2+7k+6)}{6}=\frac{(k+1)2(k+2)\left(k+\frac{3}{2}\right)}{6}=\frac{(k+1)(k+2)(2k+3)}{6}$,

что и требовалось доказать.

Замечание. Квадратный корень $2k^2+7k+6$ разложили на множители по формуле $ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2)$, где x_1 и x_2 – корни данного трехчлена. Для их отыскания решаем квадратное уравнение

$2k^2+7k+6=0$;

Д=49-48=1.

$k_1=\frac{-7-1}{4}=-2; k_2=\frac{-7+1}{4}=-\frac{3}{2}$;

$\frac{(k+1)(k+2)(2k+3)}{6}=\frac{(k+1)(k+2)(2k+3)}{6}$

§ 4. Операции над высказываниями

1. Высказывание. Отрицание высказывания. Любое рассуждение состоит из цепочки высказываний, на основе которых строятся понятия, суждения, умозаключения.

Определение. Любое повествовательное предложение, о котором можно сказать, истинно оно или ложно, называется высказыванием.

Например, ласточки умеют летать – истинное высказывание; крокодилы живут на крыше – ложное высказывание. Вопросительные и восклицательные предложения высказываниями не являются, определение также не является высказыванием.

Определение. Отрицанием высказывания A называется такое высказывание $\overline{A}$, которое истинно, когда A ложно, и ложно, когда A истинно

Отрицание любого высказывания строится с помощью слов «не», «неверно что». Пример: высказывание A: все люди смертны; отрицание высказывания A – высказывание $\overline{A}$: неверно, что все люди смертны.

Отрицание высказывания является высказыванием, поэтому можно построить отрицание отрицания высказывания (двойное отрицание – $\overline{\overline{A}}$) $\overline{\overline{A}}=A$.

Таблица истинности отрицания высказывания

A	$\overline{A}$	$\overline{\overline{A}}$
и	л	и
л	и	л

2. Конъюнкция высказываний. Пусть А и В два высказывания.

Определение. Конъюнкцией называют составное высказывание, образованное из двух высказываний А, В, соединенных с помощью союза *и*; обозначается $A \wedge B$.

Конъюнкция двух высказываний истинна только в том случае, когда оба высказывания А и В истинны.

Таблица истинности конъюнкции

A	B	$A \wedge B$	$B \wedge A$
и	и	и	и
и	л	л	л
л	и	л	л
л	л	л	л

Пример 1. А: $2 \cdot 2=5$; В: Солнце вращается вокруг Земли; $A \wedge B$ ложно.

Пример 2. А: Брест – пограничный город; В: В городе Бресте есть два университета. $B \wedge A$ истинно.

А: $5<10$; В: $10<17$, $A \wedge B$: $5<10<17$ истинно. Таким образом, двойное числовое неравенство есть конъюнкция двух неравенств.

Свойства операции конъюнкции высказываний.

1. Конъюнкция обладает свойством коммутативности. $A \wedge B = B \wedge A$.

2. Конъюнкция обладает свойством ассоциативности. $(A \wedge B) \wedge C = A \wedge (B \wedge C)$. Проверим ассоциативность конъюнкции с помощью таблицы истинности.

A	B	C	$A \wedge B$	$(A \wedge B) \wedge C$	$B \wedge C$	$A \wedge (B \wedge C)$
и	и	и	и	и	и	и
и	и	л	и	л	л	л
и	л	и	л	л	л	л
и	л	л	л	л	л	л
л	и	и	л	л	и	л
л	и	л	л	л	л	л
л	л	и	л	л	л	л
л	л	л	л	л	л	л

Вывод – конъюнкция ассоциативна.

Конъюнкция высказывания А и его отрицания всегда ложна, поэтому такую конъюнкцию называют тождественно ложной.

A	$\overline{A}$	$A\wedge\overline{A}$
и	л	л
л	и	л

3. Дизъюнкция высказываний.

Определение. Дизъюнкцией высказываний называют такое составное высказывание, которое состоит из двух высказываний А и В, соединенных с помощью союза *или.*

Дизъюнкция двух высказываний истинна, когда хотя бы одно высказывание истинно.

Таблица истинности дизъюнкции

A	B	$A\vee B$
и	и	и
и	л	и
л	и	и
л	л	л

Пример 1. А: 7=8; В: 7<8; А∨В: 7<8.

Пример 2. А: Город Брест – пограничный город; В: Брест – столица Беларуси; А∨В (и).

Свойства операции дизъюнкции.

1. Дизъюнкция коммутативна: $A\vee B=B\vee A$.
2. Дизъюнкция ассоциативна: $(A\vee B)\vee C=A\vee(B\vee C)=A\vee B\vee C$.

(Проверьте ассоциативность дизъюнкции с помощью таблицы истинности.).

При помощи таблицы истинности (проверьте самостоятельно) не трудно установить, что 1) $(A\vee B)\wedge C=(A\wedge C)\vee(B\wedge C)$. 2)$(A\wedge B)\vee C=(A\vee C)\wedge(B\vee C)$. Первое равенство выражает дистрибутивный закон конъюнкции относительно дизъюнкции, а второе – дистрибутивный закон дизъюнкции относительно конъюнкции.

Дизъюнкция высказывания и его отрицания всегда истинна:

A	$\overline{A}$	$A\vee\overline{A}$
и	л	и
л	и	и

Операции отрицания конъюнкции и дизъюнкции высказываний связаны следующими соотношениями, справедливость которых можно установить с помощью таблиц истинности.

$\overline{A \wedge B} = \overline{A} \vee \overline{B}$	A	B	$A \wedge B$	$\overline{A \wedge B}$	$\overline{A}$	$\overline{A}$	$\overline{A} \vee \overline{B}$
Отрицание конъюнкции двух высказываний равно дизъюнкции отрицаний этих высказываний	и	и	и	л	л	л	л
	и	л	л	и	л	и	и
	л	и	л	и	и	л	и
	л	л	л	и	и	и	и

$\overline{A \vee B} = \overline{A} \wedge \overline{B}$	A	B	$A \vee B$	$\overline{A \vee B}$	$\overline{A}$	$\overline{B}$	$\overline{A} \wedge \overline{B}$
Отрицание дизъюнкции двух высказываний равно конъюнкции отрицаний двух высказываний	и	и	и	л	л	л	л
	и	л	и	л	л	и	л
	л	и	и	л	и	л	л
	л	л	л	и	и	и	и

Эти равенства называют формулами де Моргана.

4. Импликация высказываний

Определение. Сложное высказывание, образованное из двух высказываний А и В с помощью союза «если …, то …», называют импликацией и обозначают $A \Rightarrow B$. А – это условие импликации, В – ее заключение.

Импликация истинна во всех случаях, за исключением, когда А – истинно, а В – ложно.

Таблица истинности импликации

A	B	$A \Rightarrow B$
и	и	и
и	л	л
л	и	и
л	л	и

Пример: А: 2·2=4; В: 1 сентября – Новый год, $A \Rightarrow B$: Если 2·2=4, то 1 сентября – Новый год (ложно).

Пусть дана импликация $A \Rightarrow B$, тогда импликация $B \Rightarrow A$, обратная импликации $A \Rightarrow B$, а противоположная $A \Rightarrow B$ будет $\overline{A} \Rightarrow \overline{B}$.

С помощью таблицы истинности покажем, что $A \Rightarrow B = \bar{B} \Rightarrow \bar{A}$ (закон контрапозиции).

A	B	$A \Rightarrow B$	$\bar{B}$	$\bar{A}$	$\bar{B} \Rightarrow \bar{A}$
и	и	и	л	л	и
и	л	л	и	л	л
л	и	и	л	и	и
л	л	и	и	и	л

$B \Rightarrow A = \bar{A} \Rightarrow \bar{B}$ (проверьте самостоятельно).

5. Эквиваленция высказываний.

Определение. Эквиваленцией называют сложное высказывание, образованное из двух элементарных высказываний А, В с помощью слов «тогда и только тогда, когда» и обозначается $A \Leftrightarrow B$.

Эквиваленция истинна только тогда, когда оба высказывания либо истинны либо ложны.

Таблица истинности эквиваленции двух высказываний

A	B	$A \Leftrightarrow B$
и	и	и
и	л	л
л	и	л
л	л	и

Пример. А: Я пойду в гости; В: Будет хорошая погода.

$A \Leftrightarrow B$: Я пойду в гости тогда и только тогда, когда будет хорошая погода.

Вопросы и задания для самоконтроля:

1. Назовите десять понятий, изучаемых в начальном курсе математики. Если ли среди них такие, которые находятся в отношении рода и вида?

2. Известно, что высказывание А истинно. Можно ли, зная только это, определить значение истинности следующих высказываний: а) $A \wedge B$, б) $A \cup B$; в) $A \Rightarrow B$.

3 Постройте различными способами отрицания следующих предложений: а) четырехугольник АВСД – квадрат; б) 16<13.

4. У Коли есть книга, о которой Миша ничего не знает. Но об этой книге Миша высказался так: «В книге более 100 или менее 150 страниц». Верно ли это высказывание?

5. Докажите, что $\overline{A \vee B} = \bar{A} \wedge \bar{B}$, $\overline{A \wedge B} = \bar{A} \vee \bar{B}$.

6. Найдите значение истинности высказывания $A \Rightarrow B \wedge C$ на основании следующих данных: а) А – «л»; б) А «и», В «л»; в) В «и», С «и».

7. Выясните, какие из следующих эквиваленций истинны: а) число 21 делится на 3 тогда и только тогда, когда сумма цифр этого числа делится на 3; б) 2<5 тогда и только тогда, когда 2+3=5.

8. Приведите примеры заданий из математики начальной школы, в которых в неявном виде предлагаются задания по математической логике.

§ 5. Числовые выражения. Равенства и неравенства, как высказывания

1. Числовые выражения. С понятием числового выражения знакомятся учащиеся уже в начальной школе.

Определение. Под числовым выражением понимают: а) любое число; б) два числа, соединенные знаками арифметических действий; в) два и более числовых выражений, соединенные знаками арифметических действий.

Если в числовом выражении выполнить указанные действия, то в результате получим число, которое называется значением числового выражения. Если в записанном выражении какое-то действие выполнить нельзя, то говорят, что выражение не имеет значения. Например, если выражение содержит операцию деления на 0: $\dfrac{8 \cdot 7}{16 : (4-4)}$.

Некоторые числовые выражения могут не иметь значения, хотя и не содержат операции деления на 0. Это возможно тогда, когда указано множество, на котором рассматривается это выражение, а значение выражения не принадлежит этому множеству. Например, с точки зрения учащихся начальных классов, выражение 2-7 не имеет значения, так как его значение не является натуральным числом. Однако, если аналогичные выражения рассматриваются учащимися старших классов, то они имеют значение. Если в условии задачи ничего не сказано о том, на каком множестве задано числовое выражение, то считают, что числовое выражение задано на множестве действительных чисел.

2. Числовые равенства.

Определение. Два числовых выражения, соединенных знаком «равно», образуют числовое равенство: 4+3=2+6 (л); $3 \cdot 7 + 3 = 4 \cdot 6$ (и).

Числовые равенства являются высказываниями, т.к. о них можно сказать истинны или ложны. Для того, чтобы определить, является ли данное числовое равенство истинным или ложным, требуется найти значение выражений, стоящих в левой и правой частях этих равенств. Числовое выражение равенством не является.

Числовые равенства обладают следующими **свойствами**:

1. Если к двум частям истинного числового равенства прибавить одно и то же числовое выражение, имеющее смысл, то получим истинное числовое равенство.

2. Если обе части истинного числового равенства умножить на одно и то же числовое выражение, имеющее значение, то получим истинное числовое равенство.

3. При почленном сложении двух истинных числовых равенств получается истинное числовое равенство.

3. Числовое неравенство. Два числовые выражения, имеющие значения и соединенные одним из знаков $>$, $<$, $\geq$, $\leq$, образуют числовое неравенство. Числовые неравенства могут быть истинными или ложными. Например, $2+3<4+2$ (истинное числовое неравенство); $2+3>5+1$ (ложное).

Для установления истинности неравенства необходимо найти значение числовых выражений в правой и левой его частях и сравнить их. Поскольку о числовых неравенствах есть смысл говорить истинно оно или ложно, то всякое числовое неравенство является высказыванием.

Числовые неравенства можно разделить на две группы: строгие неравенства (такие, в которых числовые выражения соединены знаками $>$, $<$) и нестрогие числовые неравенства (в которых числовые выражения соединены знаками $\geq$, $\leq$). Всякое нестрогое неравенство можно рассматривать как дизъюнкцию строгого неравенства и равенства: $a \geq b \Rightarrow a > b \vee a = b$.

Числовые неравенства обладают рядом свойств. Для определенности все эти свойства будем формулировать для неравенств, содержащих знак $<$, имея ввиду, что они справедливы и для других видов.

Определение. Числовое выражение а меньше числового выражения b, если a-b – число отрицательное, и наоборот, если $a-b>0$, то $a>b$.

1. Если $a<b$, то $b>a$. Т.к. $a<b$, то из $a<b \Rightarrow a-b<0$; а значит, $-(a-b)>0$, т.е. $b-a>0 \Rightarrow b>a$.

2. Транзитивность. Если $a<b$ и $b<c$, то $a<c$. Действительно, $a<b \Rightarrow a-b<0$, $b<c \Rightarrow b-c<0$. Известно, что сумма двух отрицательных чисел является числом отрицательным, т.е. $(a-b)+(b-c)<0 \Rightarrow a-c<0 \Rightarrow a<c$.

3. Если $a<b$ и $c>0$ ($c \in R$), то $ac<bc$. Если обе части истинного числового неравенства умножить на одно и то же положительное действительное число, то получим истинное числовое неравенство.

4. Если $a<b$ и с – любое отрицательное действительное число, то $ac>bc$.

5. Если $a<b$ и $c<d$ – истинные числовые неравенства, $a+c<b+d$ – истинное числовое неравенство.

Неравенство одинакового смысла можно почленно складывать.

Замечание. Под неравенствами одинакового смысла понимают два и более неравенств, имеющих один и тот же знак.

6. Если $a<b$ и $c>d$, то $a-c<b-d$.

Неравенства противоположного смысла можно почленно вычитать, при этом в разности получим неравенство этого же смысла, что и в уменьшаемом.

7. Если $a<b$ и $c<d$, числа a, b и c – положительные, то $ac<bd$.

Свойства 3-7 предлагаем читателю доказать самостоятельно.

В начальном курсе математики рассматриваются только истинные числовые неравенства. Свойства этих неравенств в явном виде не формулируются, однако учителю следует научить учащихся пользоваться ими. Чаще всего свойства неравенств используются при выполнении заданий на сравнение выражений.

Вопросы и задания для самоконтроля:

1. Найдите значения следующих числовых выражений

а) $\dfrac{(7-6{,}35):6{,}5+9{,}9}{\left(1{,}2:36+1{,}2:0{,}25-1\frac{5}{16}\right)\cdot\frac{169}{24}}$;

б) $\left((520\cdot 0{,}43):0{,}26-217+2\frac{3}{7}\right)-\left(31{,}5:12\frac{3}{5}+114\cdot 2\frac{1}{3}+61\frac{1}{2}\right)$;

в) $\dfrac{\left(3^{-1}-\sqrt{1\frac{7}{9}}\right)^2:0{,}25}{\frac{37}{300}:0{,}0925}+12{,}5\cdot 0{,}64$.

2. Проверьте истинность неравенств:
$675+872<6^3+7^3+5^3$.

3. Выразите с помощью четырех четверок, знаков арифметических действий, скобок все натуральные числа от 1 до 15. Например:

$1=\dfrac{4+4}{4+4}$; $2=\dfrac{4\cdot 4}{4+4}$ и т.д.

4. Вычислите рациональным способом:

$380\cdot(625+395)=$ $\qquad$ $535^2-\dfrac{70^2}{4}=$

$11\cdot(75\cdot 36)=$ $\qquad$ $(289\cdot 2)\cdot 7+11\cdot 14=$

§ 6. Операции над предикатами

1. Предикат. Кванторы.

Определение. Под предикатом, заданным на множестве X, понимают предложение с одной или несколькими переменными, которое обращается в высказывание при подстановке вместо переменных их значений из множества X.

Например. Река x протекает в Сибири. Множество X, на котором задан данный предикат, есть множество всех рек мира.

Обозначают предикаты: A(x) – одноместный предикат (предикат, содержащий одну переменную). A(x, y) – двухместный предикат (предикат, содержащий две переменные).

Определение. Областью определения X предиката A(x) называют те значения переменной x, при подстановке которых в предикат последний превращается в истинное или ложное высказывание.

Определение. Под множеством истинности предиката A(x) понимают те значения переменной x из области определения X, при подстановке которых предикат превращается в истинное высказывание. $T_{A(x)}$– множество истинности предиката A(x).

Пример: $x^2-4=0$. Область определения X – множество всех действительных чисел R. Для уравнений, которые являются одним из видов предикатов, множество решений и есть множество истинности такого предиката. Для данного уравнения множество истинности $T=\{-2,2\}$.

Как правило, множество истинности является подмножеством области определения предиката.

Известно, что предикат A(x) превращается в высказывание при подстановке вместо переменной определенных ее значений из области определения. Вместе с тем одноместный предикат превращается в высказывание и с помощью специальных слов – кванторов, таких как: все, каждый, существует и т.д. Существует два основных вида кванторов:

1. Квантор существования ($\exists$) заменяет слова: существует, некоторый, имеется и т.д. Пример: пусть задан предикат P(x), заданный на множестве X. Поставив перед ним квантор существования, получаем высказывание: существует $x \in X$, для которого выполняется P(x): $(\exists x \in X)P(x)$.

2. Квантор общности ($\forall$) заменяет слова: любой, каждый, всякий. Пример: $(\forall x \in X)P(x)$.

2. Построение отрицания высказываний, содержащих кванторы.

Построить отрицание высказываний, содержащих кванторы, можно двумя способами:

1. Строят отрицание ко всему высказыванию, содержащему квантор: $\overline{(\exists x \in X)P(x)}$ (Читается так: неверно что $(\exists x \in X)P(x)$).

2. а) Квантор существования меняют на квантор общности и строят отрицание предиката P(x). $\overline{(\exists x \in X)P(x)} = [\forall x \in X]\overline{P}(x)\ (\forall x \in X)\overline{P}(x)$.

б) Квантор общности меняют на квантор существования и строят отрицание предиката P(x). $\overline{(\forall x \in X)P(x)} = (\exists x \in X)\overline{P}(x)$.

Пример. Построим двумя способами отрицание следующего высказывания: "Существует человек, который смертен". С помощью первого способа: а) неверно, что существует человек, который смертен; б) любой человек не является смертным.

$\overline{(\exists x \in X)P(x)} \equiv (\forall x \in X)\overline{P}(x)$.

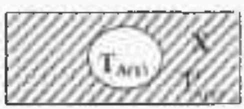
Определение. Переменная, которая связывается квантором, называется связанной переменной.

Если двуместный предикат P(x,y) связывается квантором только по одной переменной, то вторую переменную, не связанную квантором, называют свободной. Пример: $\exists y | y = 2x$; y – связанная, x – свободная.

3. Отрицание предиката. Предикаты, как и высказывания, бывают элементарными и составными. Пусть на множестве X задан предикат A(x).

Определение. Отрицанием предиката A(x) называют предикат вида $\overline{A(x)}$, заданный на том же множестве X, что и предикат A(x), который превращается в истинное высказывание при тех значениях переменной x, при которых предикат A(x) превращается в ложное высказывание.

Пусть $T_{\overline{A}(x)}$ – множество истинности предиката $\overline{A(x)}$. Тогда $T'_{A(x)} = T_{\overline{A}(x)}$, т.е., множество истинности предиката $\overline{A(x)}$, $x \in X$, является дополнением T' к множеству T во множестве X:



Пример. Пусть задан предикат A(x): x – простое число на множестве $X = \{2,3,4,5,6,7,8\}$; $T_{A(x)} = \{2,3,5,7\}$. Предикат $\overline{A}(x)$:неверно, что x – простое число. $T_{\overline{A}(x)} = T'_{A(x)} = \{2,4,8\}$.

4. Конъюнкция предикатов. Пусть заданы предикаты A(x) и B(x) на множестве X.

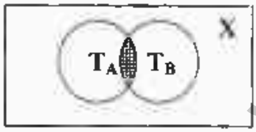
Определение. Конъюнкцией двух предикатов A(x) и B(x) называют предикат вида $A(x) \wedge B(x)$, который истинен при тех и только тех значениях x из области определения X, при которых каждый предикат превращается в истинное высказывание.

Множество истинности конъюнкции двух предикатов равно $T_{A(x)\wedge B(x)} = T_{A(x)} \cap T_{B(x)}$.

Пример: A(x):x – простое число, B(x): число x делится на 3. Два предиката заданы на множестве $X=\{2,3,4,5,6,7,8\}$. Найдем множество истинности конъюнкции этих предикатов:

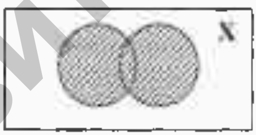
$T_{A(x)} = \{2,3,5,7\}$; $T_{B(x)} = \{3,6\}$, $T_{A(x)} \cap T_{B(x)}$.

Во множество истинности конъюнкции двух предикатов входят те значения из области определения двух предикатов, при которых каждый предикат превращается в истинное высказывание.



5. Дизъюнкция предикатов. Пусть A(x) и B(x) – предикаты, заданные на множестве X.

Определение. Под дизъюнкцией предикатов A(x) и B(x) понимают предикат $A(x) \vee B(x)$ $x \in X$, который принимает истинные значения при тех значениях из множества X, при которых хотя бы один из предикатов обращается в истинное высказывание. $T_{A(x)\vee B(x)} = T_{A(x)} \cup T_{B(x)}$

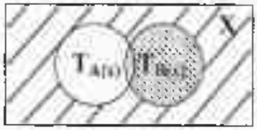


Пример. A(x): 7-x>0, $x \in N$, B(x): x^2-9=0, $x \in N$. Найдем множество истинности дизъюнкции этих предикатов. $T_{A(x)} = \{1,2,3,4,5,6\}$, $T_{B(x)} = \{3\}$. $T_{A(x)\vee B(x)} = \{1,2,3,4,5,6\}$

6. Импликация предикатов. Из предикатов A(x) и B(x), заданных на множестве X, можно составить импликацию этих предикатов.

Определение. Под импликацией двух предикатов A(x) и B(x), $x \in X$ понимают предикат вида $A(x) \Rightarrow B(x)$.

Если $T_{A(x)}$ – множество истинности предиката A(x), а $T_{B(x)}$ – множество истинности предиката B(x), то $T_{A(x)} \cap \overline{T}_{B(x)}$ – множество значений переменной $x \in X$, при которых импликация ложна. Тогда множеством истинности импликации $A(x) \Rightarrow B(x)$ называют те значения переменной x, которые принадлежат дополнению к множеству $T_{A(x)} \cap T'_{B(x)}$, т.е. $T_{A(x)\Rightarrow B(x)} = \left(T_{A(x)} \wedge T'_{B(x)}\right)' = T'_{A(x)} \vee T_{B(x)}$.



Пример: на множестве $x = \{-3;-2;-1;0;1;2;3;4\}$ задан предикат A(x): x делится на 3; B(x): x-1>0. Найдем $T_{A(x)\Rightarrow B(x)}$. $T_{A(x)} = \{-3;0;3\}$, тогда $T'_{A(x)} = \{-2;-1;1;2;4\}$, $T_{B(x)} = \{2;3;4\}$; $T'_{A(x)} \cup T_{B(x)} = \{-2;-1;1;2;3;4\}$.

7. Отношение логического следования.

Существуют такие предикаты A(x) и B(x), когда при всех значениях $x \in X$, при которых предикат A(x) превращается в истинное высказывание, предикат B(x) тоже превращается в истинное высказывание. В этом случае говорят, что из $A(x)$ следует $B(x)$: $(A(x) \mapsto B(x))$. Такое истинное утверждение импликации возможно в том случае, когда множество истинности $T_{A(x)}$ предиката A(x), является подмножеством множества истинности $T_{B(x)}$ предиката B(x), т.е. $T_{A(x)} \subset T_{B(x)}$.

Такую импликацию $A(x) \Rightarrow B(x)$, которая обращается в истинное высказывание при всех значениях переменной x, при условии, когда $T_{A(x)}$ является подмножеством $T_{B(x)}$ и называют **отношением логического следования**.

Пример. A(x): число x делится на 4, $x \in N$, B(x): число x делится на 2, $x \in N$.

Множество истинности предиката A(x) включено во множество истинности предиката B(x). Предикат B(x) логически следует из предиката A(x). Предикат A(x) является достаточным условием для выполнения B(x); а B(x) – необходимым условием для выполнения A(x).

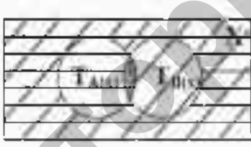
Пример. A(x): x – вертикальные углы; B(x): x – равные углы. Предикаты заданы на множестве всевозможных углов.

Если углы вертикальные, то они равны. Наличие вертикальных углов достаточно для их равенства. Углы равные – необходимое условие для того, чтобы они были вертикальными.

8. Эквиваленция предикатов. Пусть заданы предикаты A(x) и B(x), определенные на множестве X.

Определение. Эквиваленцией двух предикатов A(x) и B(x) называют предикат вида $A(x) \Leftrightarrow B(x)$, который превращается в истинное высказывание при тех значениях $x \in X$, при которых A(x) и B(x) обращаются оба в истинные высказывания или оба в ложные.

Как известно, эквиваленция двух высказываний истинна, когда оба высказывания либо истинны, либо ложны. Поскольку операции над предикатами сохраняют тот же смысл, что и операции над высказываниями, следовательно, множество истинности эквиваленции двух предикатов представляет собой объединение двух множеств, первое из которых есть пересечение множеств истинности предикатов A(x) и B(x), а второе – пересечение дополнений множеств истинности данных предикатов до области определения этих предикатов, т.е. $T_{A(x) \Leftrightarrow B(x)} = \left(T_{A(x)} \cap T_{B(x)}\right) \cup \left(T'_{A(x)} \cap T'_{B(x)}\right)$



Пример. A(x): Число x делится на 2. B(x): Число x делится на 3. Предикаты заданы на множестве $X = \{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$.

$T_{A(x)} = \{2,4,6,8\}$; $T_{B(x)} = \{3,6,9\}$. $T'_{A(x)} = \{1,3,5,7,9\}$; $T'_{B(x)} = \{1,2,4,5,7,8\}$.

$T_{A(x)} \cap T_{B(x)} = \{6\}$; $T'_{A(x)} \cap T'_{B(x)} = \{1,5,7\}$

$T_{A(x) \Leftrightarrow B(x)} = \left(T_{A(x)} \cap T_{B(x)}\right) \cup \left(T'_{A(x)} \cap T'_{B(x)}\right) = \{1,5,6,7\}$

Если предикаты A(x) и B(x), заданные на одном и том же множестве X, имеют одинаковые множества истинности, т.е. $T_{A(x)} = T_{B(x)}$, то такие предикаты называются эквивалентными. Это значит, что для всех $x \in X$, всегда истинна эквиваленция $A(x) \Leftrightarrow B(x)$. Если предикаты A(x) и B(x) на множестве X эквивалентны, то каждый из них является необходимым и достаточным условием для другого. Например, для того, чтобы натуральное число x делилось на 3, необходимо и достаточно, чтобы сумма цифр в записи этого числа делилась на 3.

Вопросы и задания для самоконтроля:

1. Найдите множества истинности каждого из следующих предикатов: A(x): x – однозначное число (заданное на множестве X); B(x): город

находится в Беларуси; C(x): (x+1)·x-2=0 (на множестве действительных чисел).

2. Приведите примеры предикатов.

3. На множестве $X=\{-3;-2;-1;0;1;2;3;4\}$ заданы предикаты A(x): число x кратно 3 и B(x): x-2>0. Определите множество истинности конъюнкции, дизъюнкции, импликации, эквивалентности этих предикатов.

4. Из начального курса математики приведите примеры высказываний с кванторами.

§ 7. Уравнения, неравенства как предикаты

1. Выражение с переменной. Выражение с переменной определяется аналогично определению числового выражения, т.е. генетически. Буквы, входящие в выражение с переменной, называют переменными. Они ставятся вместо чисел.

Определение. а) Всякая буква является выражением с переменной; б) буквы, буквы и числа, соединенные знаками арифметических действий, являются выражениями с переменной.

Среди выражений с переменными различают выражения с одной, двумя, тремя и т.д. переменными.

Пример: a+5; 2x+3 – выражения с одной переменной; a+b; x^2-xy+3y; x-2y+7 – выражения с двумя переменными.

В дальнейшем будем рассматривать в основном выражения с одной переменной. Если в выражении с переменной вместо переменной подставить какое-либо число, то получим числовое выражение. Подставленное при этом число называется значением переменной. Если в полученном числовом выражении выполнить указанные действия, то получим значение числового выражения. Возможен случай, когда это числовое выражение не имеет значения. Тогда говорят, что выражение с переменной не определено.

Определение. Областью определения выражения с переменной называется множество тех значений переменной, при которых выражение с переменной превращается в числовое выражение, имеющее значение. Такие значения переменной называются допустимыми.

В область определения выражения с переменной входят все значения переменной, за исключением:

а) тех значений переменных, при которых делитель (знаменатель дроби) обращается в ноль;

б) тех значений переменной, при которых подкоренное выражение принимает отрицательное значение;

в) тех значений переменной, при которых выражение, стоящее под знаком логарифма принимает неположительное значение и др

Примеры.

1. $x + 3x^3 + 2x - 5$ – определено для любого значения x.
2. $\dfrac{x^2+1}{1-x}$ – определено для всех x, кроме $x \quad 1$.
3. $\sqrt{2-x}$ – определено для тех x, где $2 - x \geq 0$ или $x \leq 2$.
4. $\log(x^2-1)$ – определено для тех x, где $x^2 - 1 > 0$ или $|x| > 1$.

Выражение с переменной не является ни высказыванием, ни предикатом. Предикатом не является, так как при подстановке вместо переменной какого-либо значения из области определения, выражение с переменной в высказывание не обращается. Над выражениями с переменной можно выполнять различные преобразования.

Определение. Преобразования выражения с переменной (переменными), которые не меняют значения этого выражения при всех допустимых значениях букв, входящих в это выражение, называются тождественными.

Из школьного курса математики известны такие тождественные преобразования выражений как: а) приведение подобных членов; б) раскрытие скобок и заключение в скобки (по соответствующим правилам); в) разложение многочленов на множители; г) использование формул сокращенного умножения; д) действия над алгебраическими дробями.

Пример:

$$x^3 - x^2 + x - 1 = (x^3 - x^2) + (x - 1) = x^2(x-1) + (x-1) = (x^2+1)(x-1).$$

Определение. Равенство двух выражений с переменной (переменными), полученных одно из другого с помощью тождественных преобразований справедливые для всех допустимых значений входящих в него букв, называют тождеством (обозначается $\equiv$).

Пример: $x^3 - x^2 + x - 1 \equiv (x^2+1)(x-1)$.

Понятие выражения с переменной явно в начальном курсе математики не вводится. Его называют выражением, содержащим букву. Но в учебниках содержится много упражнений, связанных с понятием выражения с переменной.

Например, предлагается ученикам в выражение □+1 подставить в "окошечко" число (1, 2, 3, 4) и вычислить результат. Начиная с третьего класса переменные обозначаются буквами: $x + 27$. Найти значение выражения при x=13, 14, 23 и т.д. Включение задач, связанных с выражением с переменной, носит пропедевтический характер и нацелено на сознательное усвоение понятия функции в старших классах.

2. **Уравнения.** Пусть заданы два выражения $f_1(x)$ и $f_2(x)$ на множестве X.

Определение. Уравнением с одной переменной называется предикат вида $f_1(x)=f_2(x)$, определенный на множестве X. При этом множество истинности которого называется множеством корней (решений) уравнения.

Пример: $x^3-2x^2+3x-2=0, x=1$ – корень уравнения.

В зависимости от того, какая наивысшая степень переменной, входящей в уравнение, уравнения с одной переменной могут быть линейными, квадратными, кубическими и т.д. Всякое значение переменной, при котором уравнение $f_1(x)=f_2(x); x\in X$ обращается в истинное числовое равенство называется корнем уравнения. Если x=a – корень уравнения $f_1(x)=f_2(x); x\in X$, то $f_1(a)=f_2(a)$ – есть истинное числовое равенство.

Уравнения с одной переменной могут иметь один, два и более корней, а могут их не иметь.

Пример: а) $2x+3=0; x=-\dfrac{3}{2}$. б) $x^2+x+1=0$ – не имеет корней.

в) $x+2=2+x$ – имеет бесконечное множество корней.

Решить уравнение, значит найти все его корни. Для уравнений выше третьей степени универсального способа их решений не существует. Однако в большинстве случаев решение такого уравнения сводится к решению уравнения вида $(x-a_1)(x-a_2)(x-a_3)...(x-a_n)=0$.

Полученное уравнение решается, исходя из того факта, что произведение нескольких множителей равно нулю тогда и только тогда, когда хотя бы один из множителей равен нулю.

Чтобы решить уравнение необходимо выполнить определенные тождественные преобразования над его правой и левой частью. Смысл преобразований сводится к тому, чтобы они не изменили корень этого уравнения.

Определение. Два уравнения $f_1(x)=\varphi_1(x)$ и $f_2(x)=\varphi_2(x)$, определенные на одном и том же множестве *X*, называются равносильными, если множества их решений совпадают. Иначе, если два уравнения равносильны, то каждый корень одного уравнения является корнем другого и наоборот.

Для того, чтобы в процессе преобразований получилось равносильное данному уравнение, необходимо пользоваться определенными правилами. Эти правила гарантируются теоремами о равносильности уравнений и следующими из них.

Теорема (1). Если к двум частям уравнения $f_1(x)=f_2(x), x\in X$ (1) прибавить одно и то же выражение с переменной $F(x), x\in X$, то получим уравнение: $f_1(x)+F(x)=f_2(x)+F(x)$ (2), равносильное первому уравнению.

Доказательство. Пусть x=a, какое-либо решение уравнения (1). Значит $f_2(a)=f_1(a)$, $a\in X$, является истинным числовым равенством, а $F(a)$ –

есть числовое выражение. По свойству истинных числовых выражений заключаем: $f_1(a)+F(a)=f_2(a)+F(a)$ есть истинное числовое равенство, а это значит, что x=a есть корень уравнения (2). Справедливо и обратное: пусть x=b – есть корень уравнения (2). Это значит, что $f_1(b)+F(b)=f_2(b)+F(b)$, $b\in X$, есть истинное числовое равенство. Прибавим к двум частям этого равенства числовое выражение $-F(b)$ и получим: $f_1(b)=f_2(b)$, которое так же является истинным числовым равенством. Это значит, что x=b – есть одновременно и корень уравнения (1). Таким образом, мы получили, что всякий корень уравнения (1) является корнем уравнения (2) и наоборот. Это говорит о том, что уравнения (1) и (2) равносильны, ч.т.д.

Следствия из теоремы:

1. Члены уравнения можно переносить из одной его части в другую, поменяв при этом знак переносимого члена на противоположный;

2. Уравнение с одной переменной всегда можно привести к виду $F(x)=0$. Для этого надо все его члены перенести в левую часть.

Теорема (2). Если обе части уравнения $f_1(x)=f_2(x), x\in X$ умножить на одно и то же выражение с переменной $F(x), x\in X$ и не обращающееся на этом множестве в нуль, то получим уравнение $f_1(x)\cdot F(x)=f_2(x)\cdot F(x), x\in X$ равносильное данному. (Докажите самостоятельно.)

Замечание. Требование, чтобы $F(x)$ было отличным от нуля на множестве X, является существенным, поскольку его нарушение меняет равносильность уравнений. При умножении двух частей уравнения на нуль, получим уравнение, для которого любое значение x является корнем, так как придем к истинному числовому равенству.

Следствие из теоремы: обе части уравнения можно умножить или разделить на любое, отличное от нуля число. При этом получим уравнение, равносильное данному.

Линейные и квадратные уравнения. Из школьного курса математики известны способы решения линейного и квадратного уравнения.

$$ax+b=0; x=-\frac{b}{a};\ a\neq 0;\ ax^2+bx+c=0; x=\frac{-b\pm\sqrt{D}}{2a}, \text{где } D=b^2-4ac.$$

Определение. Линейным уравнением называется уравнение первой степени $ax+b=0$ (1), где a и b – некоторые действительные числа.

Линейное уравнение при $a\neq 0$ и $b\neq 0$ имеет единственный корень $x=-\frac{b}{a}$, который находится следующим образом.

Прибавляя к обеим частям уравнения (1) число –b, получаем уравнение $ax=-b$ (2), эквивалентное уравнению (1). Разделив обе части уравнения (2) на величину $a\neq 0$, получаем корень уравнения (1): $x=\frac{-b}{a}$.

Определение. Алгебраическое уравнение второй степени вида $ax^2+bx+c=0$(3), где a ($a\neq 0$), b, c – некоторые действительные числа, называется квадратным уравнением. Если $a=1$, то квадратное уравнение (3) называется приведенным.

Корни квадратного уравнения вычисляются по формуле $x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$

Для уравнения третьей степени существуют формулы, по которым находятся его решения. Они называются формулами Кардана. Для уравнений выше третьей степени никаких универсальных формул нет.

Уравнения в начальном курсе математики вводятся, начиная с первого класса. Само слово "уравнение" и "корень уравнения" не употребляются. Эти понятия вводятся в третьем классе. В первом и во втором классе переменная величина обозначается "окошечко" и предлагаются решения заданий следующего вида: "Какое число нужно вставить в "окошечко", чтобы получилось верное равенство: □+2=5?".

Способы решения уравнений на начальной стадии обучения следующие:

а) метод подбора;

б) метод, основанный на знании состава чисел первого десятка. Пример: 5 – это 2 и 3, значит в рассмотренном выше примере в "окошечко" нужно вставить число 3;

в) начиная с третьего класса, вводятся правила нахождения неизвестных компонентов.

Программа начального курса математики предусматривает решение лишь таких уравнений, в которых неизвестное находится одним действием: $x:5=2, x=2\cdot 5=10$. Более сложные уравнения программой не предусмотрены, однако учитель может предлагать такие уравнения более сильным учащимся.

3. Система и совокупность двух уравнений.

Определение. Множество уравнений с $n\geq 2$ неизвестными $x_1, x_2, \ldots, x_n$, для которых требуется найти значения неизвестных, удовлетворяющих одновременно всем заданным уравнениям, называют системой уравнений.

В школьном курсе математики решают, как правило, систему двух уравнений. Поскольку уравнение представляет собой предикат определенного вида, можно дать определение системы уравнений следующим образом.

Пусть даны два предиката вида $f(x,y)=0$ и $F(x,y)=0$.

Определение. Системой двух уравнений с двумя неизвестными, заданных на множестве X, называют конъюнкцию этих уравнений как предикатов: $(f(x,y)=0)\wedge(F(x,y)=0)$.

Систему двух уравнений с двумя неизвестными записывают в следующем виде: $\begin{cases} f(x,y)=0, \\ F(x,y)=0. \end{cases}$

Из школьного курса математики известно, что системы двух линейных уравнений с двумя переменными могут решаться либо способом подстановки, либо способом алгебраического сложения, либо графически.

Определение. Если система уравнений не имеет решений, то говорят, что она несовместна. Если решения у системы есть, то система называется совместной.

Определение. Совместная система уравнений называется определенной, если она имеет единственное решение, если решений больше, чем одно, то совместная система называется неопределенной.

Применительно к системе двух уравнений это значит, что существует только пара чисел, которая обращает два уравнения системы в истинные числовые равенства.

Определение. Совокупностью двух уравнений с двумя переменными называется дизъюнкция этих уравнений как предикатов и обозначается $(f(x,y)=0)\vee(F(x,y)=0)$.

В школьном курсе математики совокупность двух уравнений с двумя неизвестными записывают в следующем виде: $\left[\begin{array}{l} f(x,y)=0, \\ F(x,y)=0. \end{array}\right.$

Найти решение совокупности уравнений – это значит найти множество решений каждого из них, а затем найти их объединение. Универсальных специальных способов решения совокупности уравнений с более чем одной переменной не существует. В некоторых случаях как при решении систем, так и при решении совокупности уравнений прибегают к графическому способу решения, смысл которого заключается в следующем: строят графики каждого уравнения (если это возможно), а затем находят точки пересечения этих графиков при решении систем уравнений и точки, принадлежащие хотя бы одному графику, при решении совокупности уравнений.

4. Неравенство.

Определение. Неравенством с одной переменной называется предикат одного из следующих видов: а) $f(x)<\varphi(x), x\in X$;

б) $f(x) > \varphi(x), x \in X$;

в) $f(x) \le \varphi(x), x \in X$;

г) $f(x) \ge \varphi(x), x \in X$.

Неравенства а) и б) называют строгими; в) и г) нестрогими.

Решить неравенство это значит найти множество значений переменной, при которых оно обращается в истинное числовое неравенство. Так, если x=a – есть решение неравенства б), то $f(a) > \varphi(a)$ – есть истинное числовое неравенство. Другими словами, решить неравенство – это значит найти множество истинности предиката, который задается этим неравенством. Множество истинности такого предиката называется множеством решений соответствующего ему неравенства, а каждый элемент из множества истинности – решением этого неравенства.

Определение. Два неравенства $f_1(x) < \varphi_1(x)$ и $f_2(x) < \varphi_2(x)$, заданные на одной и той же области определения *X*, называются равносильными, если множества их решений совпадают. Другими словами, два неравенства являются равносильными, если множество решений одного неравенства является множеством решений другого неравенства и наоборот.

Неравенство $f_2(x) < \varphi_2(x)$ является следствием неравенства $f_1(x) < \varphi_1(x)$, если множество решений второго неравенства является подмножеством множества решений первого неравенства, или, если импликация предикатов $f_1(x) < \varphi_1(x) \Rightarrow f_2(x) < \varphi_2(x), x \in X$ обращается в истинное высказывание для любого значения x из области определения. Поэтому равносильными можно назвать два таких неравенства, каждое из которых является следствием другого.

Рассмотрим теоремы, на основании которых можно выполнять равносильные преобразования неравенств.

Теорема (1). Если к обеим частям неравенства $f_1(x) < f_2(x), x \in X$ прибавить одно и то же выражение с переменной $F(x)$, имеющее значение при $\forall x \in X$, то получим неравенство $f_1(x) + F(x) < f_2(x) + F(x)$, равносильное данному.

Теорема (2). Если обе части неравенства $f_1(x) < f_2(x), x \in X$ умножить на одно и то же положительное число, либо на одно и тоже выражение с переменной $F(x)$, определенное на множестве X и принимающее на нем только положительные значения, то получим неравенство $f_1(x) \cdot F(x) < f_2(x) \cdot F(x)$, равносильное первоначальному.

Теорема (3). Если обе части неравенства $f_1(x) < f_2(x)$ умножить на одно и то же отрицательное число, либо на одно и то же выражение с переменной, определенное на X и принимающее на нем только отрицательные значения, и при этом знак неравенства поменять на противоположный, то получим неравенство $f_1(x)\cdot F(x) > f_2(x)\cdot F(x)$, равносильное первоначальному.

Теоремы 1-3 доказываются аналогично теоремам о равносильности уравнений. Предлагаем читателям доказать их самостоятельно.

Из сформулированных теорем вытекают следствия:

1. Члены неравенства можно переносить из одной части в другую, поменяв при этом их знак на противоположный. Например: $f(x) < \varphi(x) + q(x), x \in X$; $f(x) - q(x) < \varphi(x)$ (и), где слагаемое $q(x)$ находится в другой части неравенства с противоположным знаком.

2. Обе части неравенства можно разделить на одно и то же положительное число. При этом получим неравенство, равносильное первоначальному.

3. Обе части неравенства можно разделить на одно и то же отрицательное число, поменяв при этом знак на противоположный. При этом получится неравенство, равносильное первоначальному.

В начальном курсе математики неравенства, содержащие переменную, решаются методом подбора. Например: из чисел 1, 2, 3, 4, 5, 6 найти число, такое, чтобы неравенство $x + 2 < 7$ было верным. Рассмотрение такого типа неравенств в начальном курсе математики носит пропедевтический характер и нацелено на подготовку учащихся к изучению неравенств в старших классах средней школы.

В средней школе рассматриваются следующие типы неравенств: а) алгебраические (неравенства, правая и левая часть которых являются многочленами); б) дробно-линейные неравенства.

5. Система и совокупность неравенств с одной переменной.

Поскольку всякое неравенство с одной переменной является одноместным предикатом, то над неравенствами можно выполнять те же логические операции, что и над предикатами. Так, наиболее распространенными из таких операций являются конъюнкция и дизъюнкция.

Определение. Системой n неравенств с одной переменной $(f_1(x) < \varphi_1(x), f_2(x) < \varphi_2(x), f_3(x) < \varphi_3(x) \ldots f_n(x) < \varphi_n(x))$ называется конъюнкция этих неравенств как предикатов, а их дизъюнкция – совокупностью.

$$\left|\begin{array}{l} f_1(x) < \varphi_1(x) \\ f_2(x) < \varphi(x) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ f_n(x) < \varphi_n(x) \end{array}\right. \qquad \left[\begin{array}{l} f_1(x) < \varphi_1(x) \\ f_2(x) < \varphi_2(x) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ f_n(x) < \varphi_n(x) \end{array}\right.$$

Множество истинности дизъюнкции неравенств как предикатов называется множеством решений совокупности неравенств, а множеств истинности их конъюнкций – множеством решений системы неравенств. Из сказанного следует, что для нахождения множества решений совокупности неравенств с одной переменной, необходимо найти множество решений каждого неравенства, а затем найти их объединение; для решения системы неравенств с одной переменной необходимо найти решение каждого неравенства, а затем найти их пересечение. Объединение и пересечение полученных решений удобно изображать на числовой прямой.

Определение. Если система или совокупность неравенств не имеет ни одного решения (множество решений Ø), то она называется несовместной.

Определение. Если существует хотя бы одно решение системы (совокупности), то ее называют совместной.

Определение. Система или совокупность, имеющая единственное решение, называется определенной, в противном случае – неопределенной.

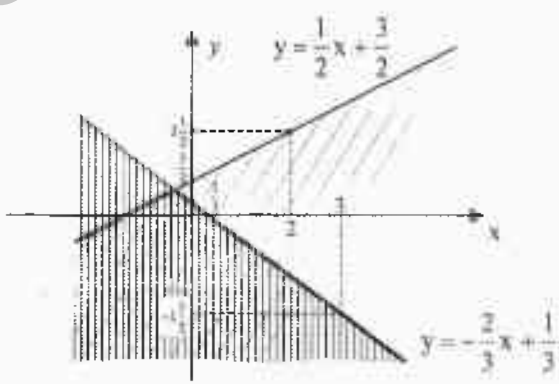
В отдельных случаях систему или совокупность неравенств решают графически, т.е. находят множество точек плоскости, удовлетворяющих каждому неравенству, затем их объединение для совокупности неравенств или пересечение – для системы неравенств.

В математике рассматриваются системы (совокупности) неравенств и более чем с одной переменной. Система (совокупность) неравенств с двумя переменными допускает графическое решение, а более чем с двумя – графическое решение осуществить трудно.

Решение систем неравенств с двумя и более переменными находит широкое применение в разделе математики, который называется «математическое программирование».

Пример: решить графически систему неравенств:

$$\begin{cases} 2x+3y-1\le 0 \\ x-2y+3\ge 0 \end{cases}; \quad \begin{cases} y<-\frac{2}{3}x+\frac{1}{3} \\ y<\frac{1}{2}x+\frac{3}{2} \end{cases}$$



Вопросы и задания для самоконтроля:

1. Дайте определение уравнения (неравенства) с одной переменной.
2. Сформулируйте теоремы о равносильности уравнений (неравенств).

3. Решите уравнения и объясните, какие теоремы использовали при их решении.

а) $\dfrac{2}{3-x}+\dfrac{1}{2}=\dfrac{6}{x(3-x)}$;

б) $\sqrt{x-2}=x-4$;

в) $\dfrac{4}{x^2+4}+\dfrac{5}{x^2+5}=2$.

4. Решите системы уравнений:

а) $\begin{cases}(x-y)(x^2-y^2)=45\\ x+y=5\end{cases}$;

б) $\begin{cases}\dfrac{2}{x}+\dfrac{y}{3}=3\\ \dfrac{x}{2}+\dfrac{3}{y}=\dfrac{3}{2}\end{cases}$

Глава 3

ТЕОРЕТИКО-МНОЖЕСТВЕННЫЙ ПОДХОД К ПОСТРОЕНИЮ АРИФМЕТИКИ ЦЕЛЫХ НЕОТРИЦАТЕЛЬНЫХ ЧИСЕЛ

§ 1. Множества и операции над ними

1. Множества.

Теория множеств – это раздел математики, изучающий множества, отвлекаясь от конкретной природы элементов множества. Теория множеств изучает общие свойства множеств, преимущественно бесконечных.

Множество – понятие неопределяемое. В быту для определения множества предметов используют слова-синонимы (коллекция, группа, поток, табун и др.). Георг Кантор – немецкий математик, отмечал, что множество есть, многое, понимаемое как целое. О предметах, составляющих множество, говорят, что они принадлежат этому множеству или являются его элементами. Элементы множества обозначают маленькими буквами латинского алфавита, например, a, b, c, d, или одной буквой, но с индексом: a_1, a_2, a_3. Сами множества обозначают большими буквами латинского алфавита A, B, C, D, $A = \{a, b, c, d\}$, $a \in B$ (элемент a принадлежит B).

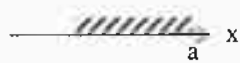
Множества могут быть как конечными, так и бесконечными.

Примеры бесконечных числовых множеств

1. $x \geq a (x \in R)$; $x \in [a;+\infty[$; $\{x | x \geq a; x \in R\}$

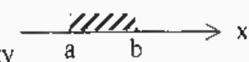
Луч, закрытый снизу и открытый сверху.

2. $x \leq a$; $x \in]-\infty;a]$; $\{x | x \leq a; x \in R\}$



Луч, открытый снизу, закрытый сверху;

3. $a \leq x \leq b$

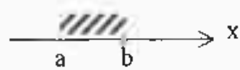


Отрезок или промежуток, закрытый сверху и снизу.

$x \in [a, b]$; $A \in \{x | a \leq x \leq b; x \in R\}$

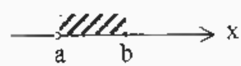
4. $a \leq x < b$; $x \in [a, b[$

$A = \{x | a \leq x < b;\ x \in R\}$



5. $a < x \leq b$; $x \in]a, b]$.

$A = \{x | a < x \leq b; x \in R\}$.



6. N – множество натуральных чисел.

7. N_0 – множество целых неотрицательных чисел (начиная с нуля).

8. Z – множество всех целых чисел.

9. Q – множество рациональных чисел (целые числа и дроби, за исключением бесконечных десятичных непериодических дробей, π; $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$.

10. R – множество действительных чисел (рациональные и иррациональные числа).

Существует множество, не содержащее ни одного элемента, такое множество называют пустым и обозначают символом Ø. Примером пустого множества является множество решений уравнения $x^2 + 4 = 0$, заданного на множестве действительных чисел R, $x \in \varnothing$.

2. Способы задания множеств. Множество считается заданным, если о любом объекте можно сказать, принадлежит он данному множеству или нет.

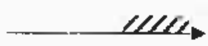
1. Множество можно задать перечислением его элементов (таким способом задают конечные множества и множества, состоящие из небольшого количества элементов).

2. Множество можно задать с помощью указания характеристического свойства, т.е. свойства, которым обладают все элементы данного множества и только они.

Например, множество натуральных чисел, меньших 6, можно задать перечислением: {1, 2, 3, 4, 5} или $A=\{x|x\in N \text{ и } x<6\}$, где справа от вертикальной черты дается математическая запись характеристического свойства. Прочитайте следующую запись и назовите несколько элементов множества $B=\{x|x=2k \text{ и } k\in N\}$.

3. Иногда множество задается перечислением нескольких начальных его элементов A={1,3,5,7.....}, причём такое перечисление должно указать на способ нахождения следующих элементов этого множества.

4. Числовые множества можно задать точками на числовой прямой. Например, множество $D=\{x|x\geq 3\}$ задано лучом.



Определение. Множество В называется подмножеством множества А, если каждый элемент множества В является и элементом множества А.

Различают два вида подмножеств множества А. Само множество А и пустое множество Ø называют несобственными подмножествами. Все остальные подмножества множества А, если они существуют, – это собственные подмножества множества А.

$B \subset A$

(В включено в А)

$A = \{a,b,c\}$

$\left.\begin{array}{l} A_1 = \{a\}; A_2 = \{b\}; A_3 = \{c\} \\ A_4 = \{a,b\}, A_5 = \{a,c\}; A_6 = \{b,c\} \end{array}\right\}$ собственные подмножества.

Ø; А – несобственные множества

Вопросы и задания для самоконтроля:

1. Даны числа: 10; 6,5; $\frac{1}{2}$; $\sqrt{2}$, $3\frac{2}{3}$. Запишите, используя знак $\in$, какие из них принадлежат множеству: а) N натуральных чисел, б) Z целых чисел, в) Q рациональных, г) R действительных чисел.

2. Объясните, почему множество $A\{x|x \in N, x < 10\}$ можно задать перечислением его элементов, а множество $B\{x|x \in R, 10 < x < 11\}$ так задать нельзя.

3. Приведите примеры из учебников математики для начальных классов, при выполнении которых осуществляется переход от одного способа задания множества к другому.

3. Отношения между множествами. В математике изучают не только различные множества, но и отношения, связи между ними. Если множества имеют общие элементы, т.е. элементы принадлежащие одновременно множеству А и множеству В, то говорят, что эти множества находятся в отношении *пересечения*.

Если каждый элемент множества А является элементом множества В и наоборот каждый элемент множества В является элементом множества А, то такие множества находятся в отношении *равенства*, а сами множества А и В называются равными.

Определение. Два множества А и В называются равными, если $A \subset B$ и $B \subset A$.

Из этого определения следует, что равные множества состоят из одних и тех же элементов. Порядок записи элементов в них не играет роли. Например, множество $A = \{b, a, c\}$ и множество $B = \{b, a, c\}$ являются равными, потому что состоят из одних и тех же элементов.

Определение. Если множество В является подмножеством множества А, то говорят, что множество В находится в отношении включения со множеством А.

Отношения между множествами можно изобразить с помощью кругов Эйлера.

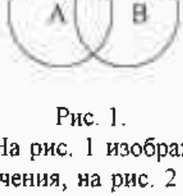


Рис. 1.

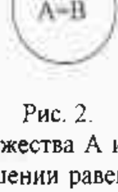


Рис. 2.

Рис. 3

На рис. 1 изображены множества А и В, находящиеся в отношении пересечения, на рис. 2 – в отношении равенства, на рис. 3 – в отношении включения.

Свойства отношения включения между множествами:

1. $A \subset A$ – свойство рефлексивности (каждое множество включается само в себя).

2.Если $C \subset B$, а $B \subset A$, то $C \subset A$ – свойство транзитивности. (Если С включено в В и В включено в А, то множество С включено также и во множество А).

Свойства отношения равенства между множествами:

1. $A = A$ – свойство рефлексивности.

2. Если $A = B$, то $B = A$ – свойство симметричности.

3. Если $A = B; B = C$, то $A = C$ – свойство транзитивности.

Свойства отношения пересечения: 1. Свойство симметричности, то есть $A \cap B = B \cap A$

2. Отношение пересечения нетранзитивно и нерефлексивно.

Если рассматриваются всевозможные подмножества некоторого множества I, то множество I называют **универсальным.**

Например, для множества треугольников, четырехугольников, шестиугольников универсальным является множество многоугольники.

Вопросы и задания для самоконтроля:

1. Поясните, почему множество А=$\{2,3,7\}$ является подмножеством множества В=$\{0,1,2,3,4,5,6,7\}$, а множество В - $\{1,5,9\}$ – нет.

2. Равны ли множества А=$\{2,4,6,8,10,12\}$; В=$\{10,6,8,2,4,12\}$; С=$\{x | x \geq 2n, n \in N, x < 13\}$.

3. Покажите, что выполнение в начальной школе задания: «Назовите среди чисел 10, 13, 17, 19, 24, 28 – четные» связано с выделением из данного множества его подмножества.

4. Приведите примеры заданий из учебников математики для начальной школы, выполнение которых связано с образованием подмножества данного множества.

4. Операции над множествами.

Определение. Пересечением двух множеств А и В называют множество, которое состоит только из тех элементов, которые принадлежат как множеству А, так и множеству В.

Пересечение множеств обозначается $A \cap B$. $A \cap B = \{x | x \in A$ и $x \in B\}$.

Пересечение любых множеств А и В всегда существует. В частности, пересечение множеств может быть и пустым множеством.

Свойства операции пересечения двух множеств:

1. Пересечение двух множеств коммутативно: $A \cap B = B \cap A$ для любых множеств А и В.

2. Пересечение ассоциативно: для любых трех множеств A, B и C. $(A\cap B)\cap C = A\cap(B\cap C)$.

Наглядно это свойство можно проиллюстрировать с помощью кругов Эйлера.

3. $\forall A(A\cap A = A)$. 4. $\forall A(A\cap\varnothing=\varnothing)$.

Примеры. Пересечением множеств $A=\{x|x\in N, x<10\}$ и $B=\{x|x\in N, x\le 7\}$ является множество $A\cap B=\{x|x\in N, x\le 7\}$.

С операцией пересечения множеств связано, например, нахождение решений неравенств вида $|x+5|<3$:

$$\begin{cases} x+5<3, \text{ если } x+5>0 \\ x+5>-3, \text{ если } x+5<0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x<-2 \text{ если } x+5>0 \\ x>-8 \text{ если } x+5<0 \end{cases}$$

$x\in]-8,-2[$.

Определение. Объединением двух множеств A и B называют множество, состоящее только из тех элементов которые принадлежат хотя бы одному из множеств A и B. Объединение множеств обозначается $A\cup B$.

Объединение любых множеств A и B всегда существует и оно единственно. Изобразите на кругах Эйлера объединение множеств A и B, если

$A\cup B\ne\varnothing$ $A\cap B=\varnothing$ $A=B$ $B\subset A$ $A\subset B$

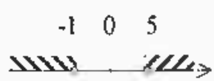
$A\cup B=\{x|x\in A \text{ или } x\in B\}$.

Например: $A=\{1,2,3,4\}, B=\{3,4,5,6\}$, $A\cup B=\{1,2,3,4,5,6\}$

$A=\{a,b,c,d\}, B=\{d,e,f,r\}$, $A\cup B=\{a,b,c,d,e,f,r\}$.

С операцией объединения множеств связано, например, нахождение множества решений следующего неравенства $|x-2|>3$.

$$\left[\begin{array}{l} x-2>3, \text{ если } x-2>0 \\ x-2<-3, \text{ если } x-2<0 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x>5 \\ x<-1 \end{array}\right.$$



$x \in \left]-\infty;-1\right] \cup \left[5;+\infty\right[$.

Операция объединения находит своё неявное отражение при введении в начальной школе действия сложения.

Свойства операции объединения множеств.

1. Объединение двух множеств коммутативно: $\forall A,B\,(A \cup B = B \cup A)$ (следует из определения объединения множеств).

2. Объединение множеств ассоциативно.

$(\forall A,B,C)\big((A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)\big)$ (объясните)

3. $\forall A\,(A \cup \varnothing = A)$
4. $\forall A\,(A \cup A = A)$
5. $\forall A\,(A \cup B = A)$
6. $\forall A\,(A \cup I = I)$.

Правила суммы. Если множества A и B непересекающиеся, причём множество A содержит $n(A)$ элементов, а множество B – $n(B)$ элементов, то число элементов в их объединении равно сумме числа элементов во множестве A и во множестве B: $n(A \cup B) = n(A) + n(B)$. Если множества A и B пересекающиеся, то число элементов в их объединении равно $n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$.

Например, $A = \{a,b,c,d\}$, $B = \{r,e,f\}$, $A \cup B = \{a,b,c,d,r,e,f\}$.

$n(A) = 4$; $n(B) = 3$, $n(A \cup B) = n(A) + n(B) = 4 + 3 = 7$.

$A = \{a,b,c,d\}$, $B = \{a,c,e,f\}$, $A \cup B = \{a,b,c,e,f\}$, $A \cap B = \{a,c\}$.

$n(A) = 4$, $n(B) = 3$, $n(A \cap B) = 2$, $n(A \cup B) = 4 + 3 - 2 = 5$.

Дистрибутивные законы, связывающие операцию пересечения и объединения множеств.

1. $(\forall A,B,C)\, A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ дистрибутивный закон пересечения относительно объединения.

2. $(\forall A,B,C)\, A \cup (B \cap C) = A(A \cup B) \cap (A \cup C)$ дистрибутивный закон объединения относительно пересечения.

Проиллюстрируем первый закон на кругах Эйлера.

Вопросы и задания для самоконтроля:

1. Найдите пересечение и объединение множеств:

а) $[4,8]$ и $[5,6[$; б) $[5,+\infty[$ и $[3{,}5,+\infty[$;

в) $]-\infty,-5]$ и $[-8,+\infty[$; г) $[-10,4]$ и $0{,}7$.

2. Докажите, что для множеств А, В, С справедливы равенства:

$A \cup (e \cap „) = (A \cup e) \cap (A \cup „)$

$A \cap (e \cup „) = (A \cap e) \cup (A \cap „)$

3. Приведите примеры простых текстовых арифметических задач, в которых речь идет о пересечении или об объединении множеств.

Разность множеств. Определение. Разностью двух множеств А и В называется такое множество, которое состоит только из элементов, принадлежащих множеству А и не принадлежащих множеству В.

Разность двух множеств А и В обозначается А\В. Таким образом по определению $A \setminus B = \{x | x \in A \text{ и } x \notin B\}$. Операция, при помощи которой находится разность множеств, называется вычитанием.

Например, $A = \{1,2,3,4,5\}$, $B = \{3,4,5,6,7\}$, $A \setminus B = \{1,2\}$; $B \setminus A = \{6,7\}$.

Свойства операции вычитания множеств:

1. Вычитание множеств не обладает свойством коммутативности, т.е. $A \setminus B \neq B \setminus A$.

2. Вычитание множеств не ассоциативно: $(A \setminus B) \setminus C \neq A \setminus (B \setminus C)$.

3. Если А=В, то А\В= В\А=Ø.

Для любых множеств А, В, С справедливы следующие равенства, связывающие вычитание множеств с другими операциями над ними.

4. $A \setminus B = A \setminus (A \cap B)$.

5. $A \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$.

6. $A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$.

7. $A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \setminus C$.

Проиллюстрируем свойство 6 с помощью кругов Эйлера.

Дополнение к подмножеству. Очень часто приходится находить разность множеств А и В в случае, когда одно из них (например, множество В) является подмножеством другого (множества А). Тогда разность множеств А и В называют дополнением множества В до множества А и обозначает B'_A.

Определение. Дополнением множества B до множества A называют множество, которое содержит элементы множества A, но не содержит элементы множества B, причём множество B является подмножеством множества A.

Например, $B'_A = \{x | x \in A;\quad \text{но } x \notin B; B \in A\}$, $A = \{1,2,3.....10\}$, $B = \{2,4,6,8,10\}$, $B \subset A$, $B'_A = \{1,3,5,7,9\}$.

Свойства дополнения:

1. Если $A = B$, то $B'_A = \varnothing$
2. Если $A = \varnothing$, то $\varnothing'_A = A$

Дополнение множества B до универсального множества I обозначают B'. Например, если I – множество натуральных чисел, а B – множество натуральных чисел, кратных 2, то множество B' есть множество натуральных чисел, не кратных 2.

Для любых подмножеств A и B универсального множества I справедливы следующие равенства:

3. $(A \cap B)' = A' \cup B'$ 4. $(A \cup B)' = A' \cap B'$

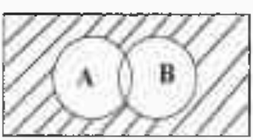
Проиллюстрируем с помощью кругов Эйлера справедливость третьего свойства, где заштрихованный многоугольник изображает универсальное множество.

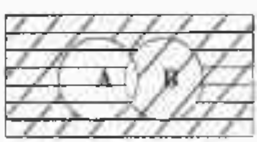
Действительно, в силу определения операций над множествами, справедливы следующие эквиваленции:

1) пусть $x \in (A \cap B)' \Leftrightarrow x \notin A \cap B \Leftrightarrow x \notin A$ или $x \notin B \Leftrightarrow x \in A'$ или $x \in B' \Leftrightarrow x \in A' \cup B'$.

2) пусть $x \in A' \cup B' \Leftrightarrow x \in A'$ или $x \in B' \Leftrightarrow x \notin A$ или $x \notin B \Leftrightarrow x \notin A \cap B \Leftrightarrow x \in (A \cap B)'$.

Аналогично проиллюстрируем справедливость четвертого свойства:





1) пусть $x \in (A \cup B)' \Leftrightarrow x \notin A \cup B \Leftrightarrow x \notin A$ и $x \notin B \Leftrightarrow x \in A'$ и $x \in B' \Leftrightarrow x \in A' \cap B'$.

2) пусть $x \in A' \cap B' \Leftrightarrow x \in A'$ и $x \in B' \Leftrightarrow x \notin A$ и $x \notin B \Leftrightarrow x \notin A \cup B \Rightarrow x \in (A \cup B)'$.

Дополнение множества В до множества А является теоретической основой для введения в начальной школе понятия вычитания чисел.

Вопросы и задания для самоконтроля:

1. Запишите элементы множества A\B, если: а) $A=\{x|x \in N, x<10\}$; $B=\{x|x \in N, 5<x<15\}$; б) А – множество прямоугольников, В – множество четырехугольников с равными сторонами.

2. Из каких чисел состоит дополнение:

а) множества натуральных чисел до множества целых чисел;

б) множества хвойных деревьев до множества всех деревьев;

в) множества чисел, кратных 5, до множества натуральных чисел.

3. Назовите все множества, о которых идет речь в задаче: "Около дома 20 уток и кур. Кур – 12. Сколько уток около дома?".

4. Даны множества: А – множество учащихся школы; В – множество девушек; С – множество юношей; Д – множество отличников; Е – множество спортсменов. В каких отношениях находятся между собой данные множества. Изобразите данные множества с помощью кругов Эйлера.

5. Декартово произведение двух множеств. Известно, что если множество задается перечислением своих элементов, то каждый элемент в этом перечислении записывается только один раз. Однако часто приходится учитывать не только элементы, составляющие множество, но и порядок их следования. Так, например, если известны цифры, с помощью которых записано число, то нельзя однозначно назвать само это число (например, с помощью цифр 1, 2, 3 можно составить 6 трехзначных чисел, у которых цифры в записи не повторяются).

Пусть дано множество А и пусть нас интересует порядок размещения элементов в этом множестве, причём элементы в множестве А могут повторяться, тогда:

Определение. Кортеж – конечная последовательность (допускающая повторения) элементов какого-нибудь множества Х.

Например, кортеж цифр, из которых состоит число 112312, (1,1,2,3,1,2), а множество цифр, с помощью которых оно записано, $\{1,2,3\}$.

Кортеж букв в слове "математика" следующий: $M=(м,а,т,е,м,а,т,и,к,а)$, а множество букв, из которых составлено это слово, следующее: $A=\{м,а,т,е,и,к\}$.

Два кортежа $(a_1, a_2, a_3 \ldots a_n)$ и $(b_1, b_2, b_3 \ldots b_m)$ называются равными, если они имеют одинаковую длину, то есть т=n и каждая компонента первого кортежа равна соответствующей ей компоненте второго кортежа. Кортежи (a, b, c) и (b, a, c) неравны.

Если длина кортежа равна двум, то такой кортеж называют упорядоченной парой (например, координаты точки на плоскости), если трем, то упорядоченной тройкой (например, координаты точки в пространстве).

Определение. Декартовым произведением множества X и Y называют множество $X \times Y$, состоящее из всех упорядоченных пар (x, y) элементов x и y таких, что $x \in X$, а $y \in Y$: $X \times Y = \{(x, y) | x \in X \text{ и } y \in Y\}$.

Найдем, например, декартово произведение множеств $X = \{1, 2, 3\}$ и $Y = \{a, b, c\}$. $X \times Y = \{(1, a); (1, b); (1, c); (2, a); (2, b); (2, c); (3, a); (3, b); (3, c)\}$.

Операцию по нахождению декартова произведения множеств называют декартовым умножением множеств.

Если находим декартово произведение двух одинаковых множеств, то говорим о декартовом квадрате множества.

Например, множество $X = \{m, n, p\}$ и $Y = \{m, n, p\}$ $X \times Y = X \times X$.

В этом случае, когда $X = Y$; $X \times Y = X \times X = X^2$ – декартов квадрат.

$X^2 = \{(m, m); (m, n); (m, p); (n, m); (n, n); (n, p); (p, m); (p, n); (p, p)\}$

Способы задания декартова произведения

1. С помощью перечисления упорядоченных пар.
2. Табличный.

Например, декартово произведение множеств $A = \{м, н, р\}$ и $B = \{а, е, у\}$, заданное таким способом, представляет таблицу некоторых открытых (рис. 1) и закрытых (рис. 2) слогов русского языка:

$A \times B$	а	е	у
м	ма	ме	му
н	на	не	ну
р	ра	ре	ру

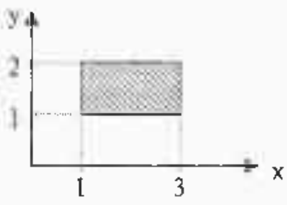
Рис. 1

$B \times A$	м	н	р
а	ам	ан	ар
е	ем	ен	ер
у	ум	ун	ур

Рис. 2.

3. Графический способ.

Например, пусть даны множества $X = \{x | x \in R, \quad 1 \le y \le 3\}$ и $Y = \{y | y \in R, 1 \le y \le 2\}$. Декартово произведение множеств $X \times Y$ задано графически на рис. 3.



Декартово произведение в неявной форме используется и в начальном курсе математики при решении, например, такой задачи: "Сколько двузначных чисел можно составить из цифр 1, 2, 3?"

Свойства декартова произведения

1. $X \times \varnothing = \varnothing \times X = \varnothing$.

2. $X \times Y \neq Y \times X$ (не обладает свойством коммутативности). Действительно, элементами множества $X \times Y$ являются пары (x, y) – такие, что $x \in X$, а $y \in Y$. Декартово произведение $Y \times X$ состоит из пар (y, x), где $y \in Y$, $x \in X$. Пары $(x, y) \neq (y, x)$ (по определению равенства кортежей).

3. $(A \times B) \times C \neq A \times (B \times C)$ – неассоциативно.

4. $(A \cup B) \times C = (A \times C) \cup (B \times C)$. Данное свойство определяет дистрибутивный закон декартова произведения относительно операции объединения множеств.

5. $(A \setminus B) \times C = (A \times C) \setminus (B \times C)$. Данное свойство определяет дистрибутивный закон декартова произведения относительно операции вычитания множеств.

Докажем свойство 5.

1. Пусть (x, y) – любой элемент множества $(A \setminus B) \times C$. Тогда, по определению декартова произведения, $x \in (A \setminus B)$, а $y \in C$. Отсюда, согласно определению разности множеств, имеем, что $x \in A$, но $x \notin B$. Поскольку $x \in A$, а $y \in C$, то, по определению декартова произведения, $(x, y) \in A \times C$, а декартово произведение $B \times C$ такого элемента не содержит в связи с тем, что $x \notin B$. Следовательно, по определению разности множеств, получаем, что $(x, y) \in (A \times C) \setminus (B \times C)$. Итак, любой элемент множества $(A \setminus B) \times C$ содержится в множестве $(A \times C) \setminus (B \times C)$, т.е. $(A \setminus B) \times C \subset (A \times C) \setminus (B \times C)$.

2. Пусть (x, y) – любой элемент множества $(A \times C) \setminus (B \times C)$. Тогда, по определению разности множеств, $(x, y) \in A \times C$ и $(x, y) \notin B \times C$. Из этих двух утверждений вытекает, что $x \in A$, $y \in C$, но $x \notin B$. Отсюда $x \in A \setminus B$, $y \in C$, а значит, $(x, y) \in (A \setminus B) \times C$. Итак, любой элемент множества $(A \times C) \setminus (B \times C)$ содержится в множестве $(A \setminus B) \times C$ и, значит, $(A \times C) \setminus (B \times C) \subset (A \setminus B) \times C$.

На основании определения равенства множеств заключаем, что $(A \setminus B) \times C = (A \times C) \setminus (B \times C)$.

Определение. Пусть даны множества A_1, A_2, $A_3, \ldots, A_n$. Декартовым произведением множеств A_1, A_2, $A_3, \ldots, A_n$ называют множество всевозможных кортежей длины n, в которых первая компонента взята из множества A_1, вторая – из A_2, …, n-ая из A_n.

Если $A_1=A_2=A_3=\ldots=A_n$, то декартово произведение таких одинаковых множеств называют декартовой степенью множества и обозначают A^n. $A^n=\{(x_1,x_2,\ldots x_n)\ x_1\in A, x_2\in A,\ldots,x_n\in A\}$.

Число элементов в декартовом произведении множеств

Теорема. Если множество А содержит m элементов, а множество В – n элементов, то число элементов в декартовом произведении равно m·n.

Доказательство. Даны два множества: $A=\{a_1,a_2,\ldots,a_m\}$, $B=\{b_1,b_2,\ldots,b_n\}$. Образуем их декартово произведение:

$$A\times B=\left\{\begin{array}{l}(a_1,b_1);(a_1,b_2);(a_1,b_3)\ldots;(a_1,\ldots,b_n)\\(a_2,b_1);(a_2,b_2);(a_2,b_3);\ldots;(a_2,\ldots,b_n)\\\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\(a_m,b_1);(a_m,b_2);(a_m,b_3)\ldots(a_m,\ldots,b_n)\end{array}\right\}$$

В каждой строке n пар, а всего таких строк m, поэтому число пар равно $m\times n$, т.е. $n(A\times B)=n(A)\cdot n(B)=m\cdot n$.

В декартовом произведении m множеств число всевозможных кортежей равно $n(A_1\times A_2\times\ldots..A_m)=n(A_1)\times n(A_2)\times\ldots..\times n(A_m)$.

Число элементов (кортежей) в декартовой степени X^n равно m^n, где m – число элементов во множестве X, а n – количество перемножаемых множеств, каждое из которых равно X.

1Вопросы и задания для самоконтроля:

1. Даны множества $A=\{1,2,3\}$; $B=\{4,5\}$. Найдите все элементы декартовых произведений $A\times B$ и $B\times A$. Отличаются ли друг от друга декартово произведение $A\times B$ и $B\times A$? Отличаются ли они числом элементов?

2. Дано множество цифр $A=\{2,5,6\}$. Запишите все двузначные числа, в запись которых входят эти числа.

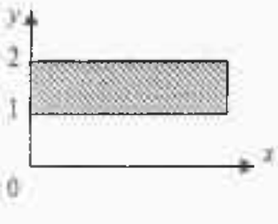
3. Найдите декартово произведение множеств $X\times Y$ и изобразите их элементы на координатной плоскости:

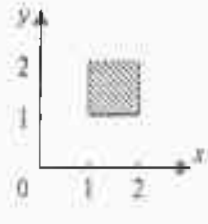
а) $X=\{x|x\in N, x=2\}$, $Y=\{y|y\in R,-3\le y\le 2\}$.

в) $X=\{x|x\in R, x\le 2\}$, $Y=\{y|y\in N, y<6\}$.

с) $X=\{x|x\in R, x<0\}$, $Y=\{y|y\in R, y>0\}$.

4. Определите, декартово произведение каких множеств А и В изображено на рисунке?





5. Приведите примеры заданий из учебника математики начальной школы, которые по сути дела сводятся к нахождению декартова произведения двух множеств.

§ 2. Элементы комбинаторики

Пусть нужно решить следующую задачу. "Имеется пять различных стульев и семь рулонов обивочной ткани различных цветов. Сколькими способами можно осуществить обивку стульев?"

Для первого стула существует 7 способов выбора обивки, для второго – 7 и т.д. Таким образом, применяя правило произведения, получаем 7^5= 168071 вариантов выбора обивки.

Решим эту задачу в общем виде. Необходимо найти число кортежей длины к (к=5), которые можно составить из элементов множества X, содержащего m элементов (m=7). Так как длина кортежа равна к, то этот кортеж является элементом декартового произведения $\underbrace{X \times X \times X ... X}_{k\ раз}$, составленного из *к* множеств. Но по правилу произведения число элементов в этом декартовом произведении равно $\underbrace{n(X^k) = n(X) \times n(X) \times ..... \times n(X)}_{k\ раз}$, где $n(X)$ – число элементов во множестве X. Так как $n(x) = m$, то $\underbrace{n(X^k) = m \times m ..... \times m}_{k\ раз} = m^k$.

Число кортежей длины к, составленных из элементов m множества X, равно m^k.

Определение. Кортеж длины k, составленный из m элементов множества X, называют размещением с повторениями из m элементов по k элементов. Число таких кортежей обозначают $\overline{A}_m^k$. Как видно из предыдущих рассуждений $\overline{A}_m^k = m^k$

Данная формула позволяет найти число подмножеств *m*-элементного множества X. Для этого перенумеруем элементы множества $X = \{x_1, x_2, ..., x_m\}$. Каждое подмножество множества *X* можно "зашифровать" с помощью кортежа длины m из 0 и 1. Если элемент с данным номером входит в это подмножество, пишем на этом месте 1, а если элемент не входит, пишем 0. Значит, найти число подмножеств m-элементного множества X – это всё равно, что найти число кортежей длины m, составленных из двухэлементного множества. По приведённой формуле такое количество кортежей будет равно 2^m.

Например, множество $A = \{1,2,3\}$ имеет 2^3 подмножеств: Ø; A; $\{1\}$; $\{2\}$; $\{3\}$; $\{1,2\}$; $\{1,3\}$; $\{2,3\}$.

Размещения и перестановки без повторений. Множество А будем называть упорядоченным, если в нём известен порядок следования элементов. Одно и то же множество может быть упорядочено несколькими различными способами: множество студентов – по росту, успеваемости и т.д.

Следует отличать упорядоченное множество от кортежа, а именно: упорядоченное множество не может содержать одинаковых элементов, а кортеж может. При этом, всякое упорядоченное множество является кортежем, но не всякий кортеж является упорядоченным множеством.

Задача. Пусть дано m-элементное множество. Сколько существует способов упорядочения этого множества?

Решение. Так как данное множество содержит m элементов, то упорядочение заключается в том, что какой-то элемент получает номер 1, какой-то – 2 и какой-то – m. Номер 1 может получить любой из элементов множества, а значит выбор 1-го элемента осуществляется m способами. Если 1-й элемент выбран, то 2-й элемент может быть выбран (m-1) способами и т.д. И, наконец, последний элемент можно выбрать только одним способом.

По правилу произведения получаем, что общее число способов упорядочения множества равно $m\times(m-1)\times.....\times2\times1$. Произведение первых m натуральных чисел называют m-факториалом и обозначают $m!$ (например, $1\cdot2\cdot3=3\cdot2\cdot1=3!$, при этом $0!=1$).

Определение. Различные упорядочения m-элементного множества состоят из одних и тех же элементов, отличаются друг от друга только порядком следования элементов. При этом элементы в них не повторяются, и эти упорядочения называют перестановками без повторений из m элементов. ($P_m = m!$).

Определение. Пусть имеется множество, содержащее m элементов. Каждое его упорядоченное подмножество, состоящее из k элементов, называется размещением без повторений из m элементов по k элементов.

Из определения видно, что $m\geq k\geq0$, и что размещения из m элементов по k элементов – это всевозможные *k*-элементные подмножества, отличающиеся составом элементов или порядком их следования, а число размещений из m элементов по k элементов (обозначается A_m^k) равно числу всех k-элементных упорядоченных подмножеств множества, содержащего m элементов.

Первый элемент подмножества можно выбрать m способами. Второй элемент подмножества можно выбрать (m-1) способами, третий (m-2) способами и т.д., k-й элемент – (m-(k-1)) способами. По правилу произведения получаем, что общее число размещений без повторений из m элементов по k элементов равно $A_m^k=m\cdot(m-1)\cdot(m-2)\cdot...\cdot(m-k+1)$. Умножим и разделим данное произведение на $(m-k)!$. В результате в числителе

$A_m^k = 1\cdot 2\cdot 3\cdot 4.....(m-k)\cdot(m-k+1)....(m-2)\cdot(m-1)\cdot m/1\cdot 2\cdot 3\cdot 4....(m-k)$ (1).

В числителе мы получили $m!$ (m-факториал), а в знаменателе $(m-k)!$. Значит, $A_m^k = \frac{m!}{(m-k)!}$.

Например, задано 5 цифр 1,2,3,4,5. Сколько можно составить трёхзначных чисел так, чтобы цифры в записи числа не повторялись?

Задачу можно решить двумя способами:

1. $5\cdot 4\cdot 3 = 60$ (1)
2. $A_3^5 = \frac{5!}{3!} = \frac{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}{1\cdot 2} = 3\cdot 4\cdot 5 = 60$ (2)

Сочетания без повторений.

Определение. Пусть имеется множество, состоящее из m элементов. Каждое его подмножество, содержащее k элементов называется сочетанием из m элементов по k элементов.

Таким образом сочетания из m элементов по k элементов – это все k-элементные подмножества m-элементного множества, причём различными подмножествами считаются только те из них, которые имеют неодинаковый состав элементов. Подмножества, отличающиеся друг от друга только порядком следования, не считаются различными. Число сочетаний из m по k обозначается C_m^k.

Например, задано 4-х элементное множество, состоящее из элементов a, b, c, d. Нужно составить все трёхэлементные подмножества данного множества.

$A_1 = \{a,b,c\}$; $A_2 = \{b,c,d\}$; $A_3 = \{a,c,d\}$; $A_4 = \{a,b,d\}$. Их количество $C_4^3 = 4$.

Теорема. $C_m^k = \frac{m!}{k!(m-k)!}$

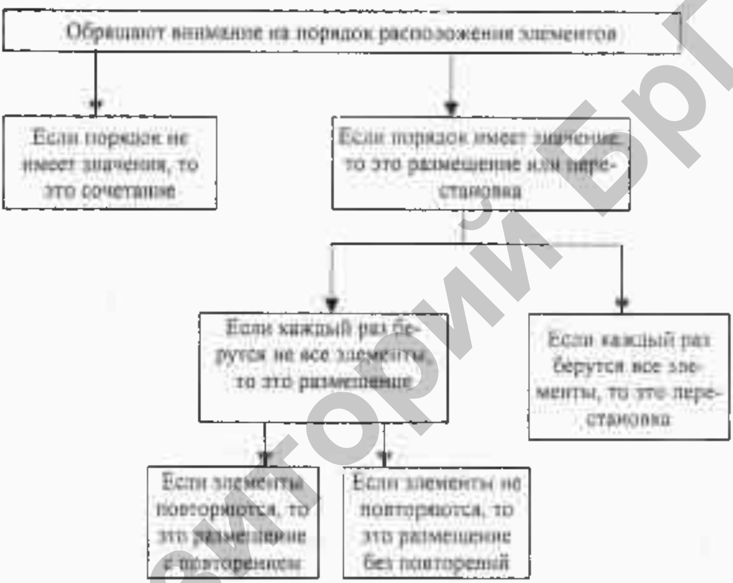
Доказательство. Образуем сначала всевозможные неупорядоченные подмножества, содержащие k элементов. Число их равно числу сочетаний, т.е. C_m^k. Затем из каждого полученного подмножества перестановкой его элементов получим все упорядоченные подмножества. Этих упорядоченных подмножеств, т.е. размещений из m элементов по k элементов будет в k! раз больше, потому что каждое k-элементное подмножество можно упорядочить k! способами.

Следовательно, $A_m^k = k!C_m^k \Rightarrow C_m^k = \frac{A_m^k}{k!} \Rightarrow C_m^k = \frac{m!}{(m-k)!k!}$, что и требовалось доказать.

Задача. Из 12 солдат нужно выбрать три солдата для караула. Сколькими способами это нужно сделать.

Решение. $C_3^{12} = \frac{12!}{3!9!} = \frac{9!10\cdot 11\cdot 12}{9!\,6} = 220$.

При решении комбинаторных задач главная трудность – определить вид комбинаторной задачи. При этом может быть полезна следующая схема:



Вопросы и задания для самоконтроля:

1. С помощью цифр 2, 5, 7, 8 образуйте всевозможные трехзначные числа: а) цифры в записи которых повторяются; б) цифры в записи не повторяются.

2. Имеется 5 различных стульев и 3 вида обивочной ткани. Сколькими способами можно осуществить обивку стульев?

3. Из 50 учащихся, изучающих немецкий и английский языки, 35 человек изучает английский, 18 - немецкий. Сколько человек изучает оба языка?

4. Сколькими способами можно выбрать из 7 человек комиссию в составе 3 человек?

5. Приведите примеры комбинаторных задач из начального курса математики.

6. Сколькими способами можно посадить на скамейку 6 человек?

§ 3. Бинарные соответствия и отношения

1. Понятие соответствия между множествами.

В математике и в жизни для обозначения связей между предметами и понятиями используют термин отношение. Например, отношение «меньше» на Q, отношение равенства дробей, отношение делимости на множество целых чисел, отношение родства и старшинства среди людей. Это бинарные отношения.

Пусть заданы два множества $A = \{1,2,3\}$, $B = \{2,3,4\}$

Используя определение декартова произведения, перечислим все упорядоченные пары декартова произведения:

$A \times B = \{(1,2);(2,2);(3,2);(1,3);(2,3);(2,4);(3,2);(3,3);(3,4)\}$

Если известен перечень всех упорядоченных пар, для которых имеет смысл говорить о каком-то отношении, то для каждой пары можно сказать находится она или нет в данном отношении. Например, на указанном множестве декартова произведения рассмотрим такое отношение, при котором первая компонента меньше второй. Полученное подмножество обозначим буквой Г. Оно состоит из следующих пар:

$\Gamma = \{(1,2);(1,3);(2,3);(2,4);(3,4)\}$, $\Gamma \subset (A \times B)$

Если множества А и В равны, то говорят о бинарном отношении, если множества А и В различны, то говорят о бинарном соответствии.

Соответствия между множествами принято обозначать прописными буквами латинского алфавита. Например, R, S, T.

Определение 1. Бинарным соответствием между множествами А и В называют любое подмножество их декартова произведения.

Можно по-другому дать определение бинарного соответствия.

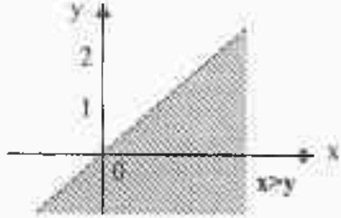
Определение 2. Бинарным соответствием k называют тройку множеств $k = (\Gamma, A, B)$, где А и В – множества, между которыми задано бинарное солответствие, а Г – подмножество их декартова произведения.

Если задано бинарное соответствие (отношение) $R = (\Gamma, A, B)$, то А – это область отправления данного соответствия, В – область прибытия, Г – график, который состоит из множества упорядоченных пар (x, y), принадлежащих данному бинарному соответствию.

2. Способы задания бинарных соответствий:

1. Бинарное соответствие можно задать таблицами (например, таблица дежурств);

2. С помощью графика этих отношений (например, отношение "больше" на множестве действительных чисел);



3. С помощью графа.

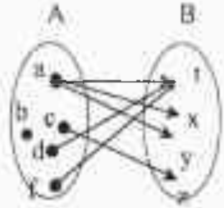


Рис. 1

С помощью графов бинарные соответствия задаются следующим способом:

а) элементы множеств A и B изображаются точками;

б) соединяют стрелками каждый элемент множества A с элементами множества B таким образом, чтобы выполнялось условие aRb;

в) стрелки выходят из элементов множества A и направлены к элементам множества B.

На рис.1 видим, что из точки $a \in A$ выходит несколько стрелок. Множество концов этих стрелок называют образом элемента a в соответствии *R* и обозначают его $R(a) = \{t, x, y\}$

В общем случае образ элемента *a* определяется как множество всех элементов $y \in B$, для которых истинно, что aRy.

Возьмём теперь какой-нибудь элемент из множества B, например, t и все стрелки, которые оканчиваются в этом элементе. Множество начал этих стрелок называют полным прообразом элемента t в соответствии R и обозначают $R^{-1}(t)$. На рис. 1 $R^{-1}(t) = \{a, f, d\}$.

В общем виде полный прообраз элемента $y \in B$ определяется как множество таких элементов x , принадлежащих A, что истинно xRy.

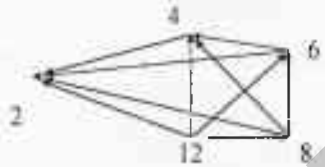
Определение. Совокупность элементов из множества A таких, что они имеют непустые образы во множестве B, называется областью определения соответствия R.

В нашем примере на рис.1 область отправления {a,b,f,c,d}, а множество определения {a,c, f,d}.

Определение. Совокупность таких элементов из множества B, которые имеют непустой полный прообраз во множестве A, называют множеством значений соответствия R.

В нашем примере область прибытия совпадает с множеством значений данного бинарного соответствия и состоит из элементов t, x, y, z.

Рассмотрим пример бинарного отношения, заданного множества $A=\{2,4,6,8,10,12\}$. Отношение "больше" зададим с помощью графа.



3. Противоположные соответствия. Может случиться так, что графики соответствий xRy и xQy – дополнительные множества в декартовом произведении $X \times Y$, т.е. графики этих соответствий не пересекаются, а их объединением является всё декартово произведение $X \times Y$. Такие соответствия называются противоположными.

Допустим соответствие R задаёт отношение $x > y$, тогда противоположное ему соответствие a, задает отношение $x \leq y$.

4. Обратные соответствия. Пусть задано соответствие xRy между множествами X и Y. **Обратным** ему называют соответствие между множествами y и x, такое, что ySx только в том случае, когда xRy.

Обратное соответствие S обычно обозначают R^{-1} и тогда, если прямое соответствие xRy, то обратное ему $yR^{-1}x$.

Например, если задано соответствие R такое, что *x* делится на y, то обратное ему соответствие будет y делитель x. Для соответствия $x > y$; обратным будет $y < x$.

5. Свойства бинарных отношений. Пусть на множестве X задано некоторое отношение R.

1. **Рефлексивность.** Отношение R называется рефлексивным, если каждый элемент множества $x \in X$ находится в отношении R самим собой (отношение равенства на множестве геометрических фигур обладает свойством рефлексивности).

2. **Антирефлексивность.** Отношение R антирефлексивно, если ни один из элементов $x \in X$ не находится в отношении R с самим собой: xRx (отношение перпендикулярности прямых антирефлексивно, так как ни одна прямая не перпендикулярна сама себе).

3. **Симметричность.** Отношение R называется симметричным, если для любых элементов $x \in X$, $y \in X$ из того, что элемент x находится в отношении R с элементом y следует, что и элемент y находится в отношении R с элементом x, т.е. $xRy \Rightarrow yRx$ (отношение параллельности прямых обладает свойством симметричности).

4. **Асимметричность.** Отношение R асимметрично, если ни для каких элементов $x \in X$ и $y \in X$ из множества X из того, что элемент *x* находится в отношении R с элементом y, никогда не следует, что элемент *y* находится в отношении R с элементом *y* (отношения "больше", "меньше", "длиннее" обладают свойством асимметричности).

5. **Антисимметричность.** Отношение R антисимметрично, если xRy и yRx одновременно выполняются в том и только в том случае, когда $x = y$. Антисимметричное отношение – объединение асимметричного отношения с отношением тождества (отношение "больше или равно" на множестве действительных чисел).

6. **Транзитивность.** Отношение R транзитивно, если для любых элементов $x \in X, y \in X$, $z \in X$ из того, что элемент *x* находится в отношении R с элементом y, а элемент y находится в отношении R с элементом z, то следует, что элемент x находится в отношении R с элементом z, т.е. (xRy) и (yRz) отношения "параллельности " на множестве прямых, "подобия" на множестве геометрических фигур обладают свойством транзитивности.

6. Разбиение множества на попарно непересекающиеся подмножества. Классификация.

Рассмотрим множество студентов педагогического факультета и разобьем это множество на подмножества студентов, которые учатся на одном курсе. Таким образом всё множество *X* можно разделить на 5 подмножеств:

X_1 – студенты 1 курса педагогического факультета;
X_2 – студенты 2 курса педагогического факультета;
X_3 – студенты 3 курса педагогического факультета;
X_4 – студенты 4 курса педагогического факультета.
X_5 – студенты 5 курса педагогического факультета.

В этом случае говорят, что множество X разбито на попарно непересекающиеся классы (подмножества). В данном случае разбиение на попарно непересекающиеся классы производилось по признаку «быть однокурсником». Возможны и другие разбиения множества X. Например: а) по году рождения; б) по группам; в) по полу.

Вообще можно говорить о разбиении данного множества на попарно непересекающиеся подмножества (классы) тогда, когда одновременно выполняются следующие 3 условия:

1. Все подмножества, образующие разбиение не пусты;
2. Любые два таких подмножества не пересекаются;
3. Объединение всех этих подмножеств образует данное множество.

Например, множество целых чисел можно разделить на чётные и нечётные.

Разбиение множества на попарно непересекающиеся подмножества лежит в основе всевозможных классификаций. Так разбиением на типы, классы, виды животных оперирует биология. В сельском хозяйстве классифицируют семена, фрукты, овощи по весу и размерам. В словарях слова классифицируют по алфавиту.

Таким образом, разбиение множества на попарно непересекающиеся классы возможно в случае, если задано определенное отношение. Но не всякое отношение, заданное на множестве, позволяет разбить его на попарно непересекающиеся классы. Например, пусть на множестве X студенческого университета задано отношение: «студент x знаком со студентом y». Если студент x знаком со студентом y, то x и y окажутся в одном подмножестве. Если y знаком со студентом z, то студент z окажется в одном подмножестве со студентом y, а значит и со студентом x, хотя возможна ситуация, что студент x не знаком со студентом z. Исходя из этого, в одном подмножестве могут находиться элементы, которые в заданном отношении не находятся.

7. Отношение эквивалентности.

Определение. Если отношение R во множестве X обладает свойствами рефлексивности, симметричности, транзитивности, то говорят, что отношение R есть отношение эквивалентности.

Например, отношение подобия на множестве геометрических фигур, отношения равенства на множестве действительных чисел, отношения параллельности на множестве прямых и т.д.

С каждым отношением эквивалентности связано разбиение множества на попарно непересекающиеся классы. Это утверждает следующая теорема.

Теорема. Для того, чтобы отношение R позволяло разбить множество X на попарно непересекающиеся классы, необходимо и достаточно, чтобы отношение R было отношением эквивалентности (без доказательства).

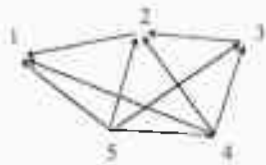
Отношение эквивалентности и только оно разбивает множество на классы.

8. Отношение порядка

Определение. Отношение R на множестве X называется отношением строгого порядка, если оно транзитивно, асимметрично и транзитивно.

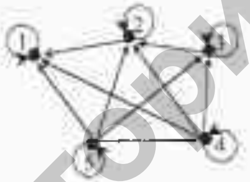
Например, отношение "быть выше ростом" на множестве студентов группы является отношением строгого порядка.

Рассмотрим на множестве *X*, состоящем из элементов $\{3,1,2,5,4\}$, отношение x>y. Данное отношение асимметрично и транзитивно.



Определение. Отношение R называют отношением нестрогого порядка, если оно рефлексивно, антисимметрично и транзитивно.

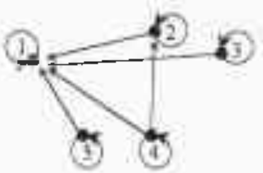
Такие отношения являются объединениями отношения строгого порядка и отношения тождества. Например, $(x \geq y) = (x > y) \cup (x = y)$. Построим граф этого отношения на множестве $A = \{3,1,5,2,4\}$:



Упорядоченные множества.

Определение. Множество X, на котором задано отношение R порядка (строгого или нестрогого) называют частично упорядоченным. В этом случае говорят, что множество X упорядочено отношением R.

Например, на том же множестве $\{3,1,2,5,4\}$ рассмотрим другое отношение –"x делится на элемент y".$(x \div y)$. Граф этого отношения имеет вид:



На графе отношения $x \leq y$ любые две вершины соединены одной стрелкой. На графе же отношения $x \div y$ имеются вершины, несоединенные стрелкой – (3,5). Говорят в этом случае, что отношение упорядочивает множество X линейно.

Определение. Если отношение R на множестве X обладает свойствами, что для любых элементов x и y из множества X либо xRy, либо yRx, то говорят, что множество X линейно упорядочено.

Вопросы и задания для самоконтроля:

1. Задайте соответствия между множествами с помощью: а) графиков, б) графов, в) таблиц.

2. Объясните, почему любое подмножество точек координатной плоскости является графиком некоторого соответствия между числовыми множествами X и У.

3. Докажите, что графики взаимно обратных соответствий между числовыми множествами симметричны относительно диагонали первого и третьего координатных углов.

4. Приведите примеры отношений, которые рассматриваются в начальных классах между: а) числовыми выражениями, б) отрезками, в) прямоугольниками.

5. Какие соответствия рассматриваются в начальном курсе математики между: а) множеством прямоугольников и множеством натуральных чисел; б) множеством уравнений и множеством натуральных чисел.

6. На множестве $A=\{4,6,10,12,16\}$ заданы отношения «больше» и «делится на 2». Постройте их графы и укажите свойства данных отношений.

7. Имеется 30 геометрических фигур (треугольники, четырехугольники, круги) разного цвета (желтого, зеленого, красного). Произойдет ли разбиение этого множества фигур на классы, если задать на нем отношение: а) «иметь одну и ту же форму»; б) «иметь один и тот же цвет».

§ 4. Отображение. Виды отображений

При бинарном соответствии R между множествами X и Y образ элемента $a \in X$ может оказаться пустым (Рис. 1), а может содержать несколько элементов (Рис. 2).

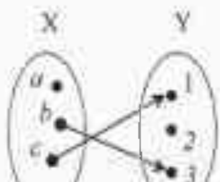


Рис. 1

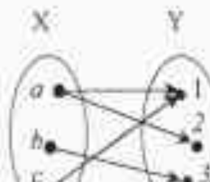
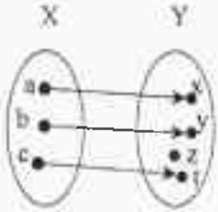
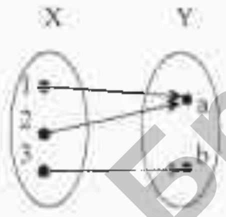


Рис. 2

Определение. Отображением множества X в множество Y называют такое соответствие между этими множествами, при котором каждому элементу множества X соответствует единственный элемент множества Y.

Примеры отображений





Бинарное соответствие «в окружность X вписан квадрат Y» не задает отображения, так как в одну окружность можно вписать несколько квадратов.

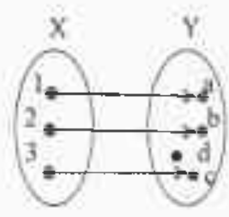
“Ученик x сидит за партой y” – задает отображение. Соответствие "Писатель x написал книгу y" не задает отображение. (Почему?)

Элемент y, соответствующий элементу x при отображении f называют образом элемента x и обозначают $f(x)$. Отображение множества X в множество У принято обозначать $f:X \to Y$ или $X \xrightarrow{f} Y$ или $y = f(x)$.

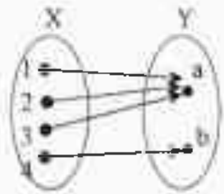
Множество X называют областью определения отображения f, а множество Y – областью прибытия этого отображения. Часть области прибытия, состоящая из образов всех элементов множества X, называется множеством значений отображения f.

Определение 1. Отображение $f:X \to Y$ такое, что множество значений его совпадает с областью прибытия, называют отображением X на Y.

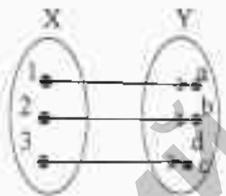
Определение. Отображение f называют инъективным, если полный прообраз любого элемента $y \in Y$ имеет не более одного элемента.



Определение. Отображение f называют сюръективным, если полный прообраз любого элемента $y \in Y$ содержит не менее одного элемента.



Если отображение одновременно и инъекция и сюрьекция, то такое отображение называют биекцией или взаимнооднозначным соответствием.



Отображение f X в Y такое, что полный прообраз каждого элемента $y \in Y$ состоит из одного элемента $x \in X$ называют обратимым отображением X в Y. Взаимно однозначное отображение обратимо.

Эквивалентные множества.

Определение. Конечные множества, между которыми можно установить взаимно однозначное соответствие, имеют одинаковое количество элементов. Такие множества называют эквивалентными или равномощными и обозначают: X~Y.

Если два множества имеют одинаковую мощность, то они эквивалентны и наоборот.

Определение. Множество, имеющее ту же мощность, что и множество натуральных чисел, называют счётным. Всякое счётное множество бесконечно и каждому элементу такого множества можно поставить в соответствие единственное натуральное число.

Например, множество чётных положительных чисел счетно, т.к. каждому элементу этого множества можно поставить в соответствие элемент из множества натуральных чисел.

2	4	6	8	10
↓	↓	↓	↓	↓
1	2	3	4	5

Объединение двух счетных множеств есть также множество счетное Исходя из этого, множество рациональных чисел счетное.

Можно доказать, что множество действительных чисел неэквивалентно множеству натуральных чисел, а значит множество действительных чисел несчетно. Говорят, что множество действительных чисел имеет мощность континуума (непрерывное). Множество действительных чисел имеет мощность большую, чем мощность натуральных чисел. Всякое бесконечное множество содержит некоторое подмножество, эквивалентное всему множеству.

Вопросы и задания для самоконтроля:

1. Задано следующее соответствие между множествами X и Y: $\{(a,3);(b,4);(c,5);(d,4);(e,5)\}$

а) Запишите область определения и область значений данного отображения;

б) Постройте граф соответствия между множествами X и Y. Будет ли оно отображением?

2. Приведите примеры соответствий между множествами A и B, которые являются отображением.

3. В начальной школе учащиеся решают задачу на вычисление площади прямоугольника. Между элементами каких множеств рассматривается соответствие в данной задаче? Будет ли оно отображением?

4. Выделите из множества N натуральных чисел два подмножества, равномощные множеству N. Свои предложения обоснуйте.

§ 5. Функциональные отношения. Множество определения и множество значений функции

1. Функции. Если две величины связаны между собой так, что каждому значению одной из них соответствует единственное значение другой, то говорят, что эти величины находятся в **функциональной зависимости:** зависимость длины окружности от радиуса; зависимость расстояния, пройденного телом, от скорости и времени движения.

Определение 1. Бинарное соответствие f, заданное на непустых множествах X и Y называется отображением X в Y (или функцией), определенном на множестве X со значениями во множестве Y, если для любого элемента $x \in Y$ существует единственный элемент $y \in Y$, такой, что выполняется xfy. Множество X – область определения, а множество Y – множество значений функции. Переменную x называют аргументом функции.

Таким образом, видим, что понятия "отображение" и "функция" синонимичны. Понятием "функция" больше оперируют в курсе математического анализа, когда рассматривают отношения между числовыми множествами. Понятие "отображение" больше используется в курсе высшей алгебры при рассмотрении отношений между множествами другой природы.

2. Способы задания функции

1. Аналитический способ задания функции.

Он состоит в том, что функциональная зависимость между элементами x и y задается с помощью формулы. Например, $y = x^2$; $y = 2x + 3$; $y = x^3 - 4$.

Определение. Множество всех значений аргумента, при которых функция, заданная аналитически, имеет вполне определенный смысл, называется областью определения функции.

Пусть задана функция: $y = \frac{1}{x-2}$. Областью определения этой функции являются все действительные числа R, кроме x=2.

2. Табличный способ задания функции.

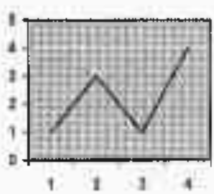
При таком способе функция задана в виде таблицы, в которой различным значениям аргумента соответствуют определенные и единственные значения функции. (Так задается, например, зависимость температуры воздуха от времени суток).

3. Графический способ задания функции.

Функция считается заданной графически, если начерчен её график.

Определение. Графиком функции $y = f(x)$, заданной в некоторой области X, называется множество всех точек плоскости (x,y) таких, что $y = f(x)$.

Например:



3. Числовые функции. На множестве $X \subset R$ действительных чисел задана числовая функция, если каждому числу $x \in X$ поставлено в соответствие единственное число $y \in R$.

Часто рассматривают три величины, одна из которых равна произведению двух других, например, путь при равномерном движении равен $\upsilon \cdot t$, стоимость всей покупки равна цене единицы товара на количество товаров. Математическая зависимость этих величин выражается равенством: $y = zx$.

Если одна из величин z или x постоянна $(z = k)$, $y = kx$ – аналитическая запись прямой пропорциональности. Если взять любые два значения x_1 и x_2, то $y_1 = kx_1$, $y_2 = kx_2$, $\frac{y_1}{x_1} = \frac{y_2}{x_2}$; $\frac{y_1}{y_2} = \frac{x_1}{x_2}$.

Определение. Прямой пропорциональностью называется функция, которая может быть задана при помощи формулы вида $y = kx$, где x – независимая переменная, а k – действительное число, $k \neq 0$. Графиком функции $y = kx$ является прямая линия, проходящая через начало координат, имеющая угловой коэффициент k. (k характеризует наклон прямой к положительному направлению оси абсцисс).

Прямая пропорциональность в начальных классах специально не изучается, но при решении текстовых задач, учащиеся встречаются с прямой пропорциональностью между величинами:

1. Метр полотна стоит 4 у.е. Сколько стоит 2 метра полотна? 5 м?

В этой задаче рассматривается зависимость стоимости от количества купленного полотна. Цена 1 м постоянна. Так как эта зависимость может быть выражена формулой $y = 4x$, где x – это число метров, а y – стоимость, следовательно, имеем прямо пропорциональную зависимость между величинами, где коэффициент пропорциональности k=4 задан в условии.

2. Из куска ткани длиной 24 метра в мастерской сшили 8 одинаковых костюмов. Сколько потребуется ткани на 20 таких же костюмов? В задаче рассматривается зависимость расхода ткани от количества костюмов. Эта зависимость прямо пропорциональна, поскольку может быть задана формулой $y = 3x$, где 3 – расход ткани на один костюм. Он найден из условия задачи (24:8).

Линейная функция, ее свойства и график.

Турист 1 час ехал на автомашине со скоростью 60 км/ч и x часов шел пешком со скоростью 5 км/ч. Все расстояние, пройденное туристом, выражается следующим образом: y=60+5x. Зависимость между временем, потраченным туристом на путешествие пешком и общим расстоянием, пройденным им, является функцией, которая носит название линейной.

Определение. Линейной функцией называют функцию, которую можно задать с помощью формулы вида $y = kx + b$, где k и b – заданные действительные числа, а x – независимая переменная величина.

Областью определения линейной функции $y = kx + b$ является множество действительных чисел, а положение графика этой функции, определяется коэффициентами **k** и b.

Графиком линейной функции является прямая линия.

При $k=0$, $y=b$ (постоянная функция). График ее прямая, параллельная OX, пересекающая ось ординат в точке (0, b).

Если обозначить через φ угол между осью OX и графиком линейной функции и измерять его против часовой стрелки, то можно заметить следующее: величина угла φ зависит от k. Если **k** 0, то φ – острый, если k 0, то φ – тупой.

Если $x = 0$, то $y = b$, т.е. точка с координатами (0, b), принадлежит графику функции $y = kx + b$. Следовательно, коэффициент b есть значение длины отрезка, отсекаемого прямой на оси OY.

Выясним, при каких условиях функция $y = kx + b$ будет возрастающей, а при каких убывающей. Возьмем два значения x, таких, что $x_1 < x_2$,

тогда: $\begin{matrix} y_2 = kx_2 + b \\ y_1 = kx_1 + b \end{matrix}$

$$y_2 - y_1 = (kx_2 + b) - (kx_1 + b) = kx_2 - kx_1 = k(x_2 - x_1).$$

Так как по условию $x_2 > x_1$, то $(x_2 - x_1)$ всегда положительна, следовательно знак произведения $k(x_2 - x_1)$ будет зависеть от знака k: если $k>0$, то $k(x_2 - x_1)>0$, а значит функция возрастающая; если $k<0$, то $k(x_2 - x_1)<0$, а значит функция убывающая.

Линейная функция $y = kx + b$ непрерывна на всей области определения.

Для того, чтобы найти *k* в линейной функции, нужно знать две пары соответствующих друг другу числовых значений (x_1, y_1) и (y_2, x_2).

$$\begin{cases} y_2 = kx_2 + b \\ y_1 = kx_1 + b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b = y_2 - kx_2 \\ b = y_1 - kx_1 \end{cases} \Rightarrow$$

$$y_2 - kx_2 = y_1 - kx_1 \Rightarrow y_2 - y_1 = kx_2 - kx_1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y_2 - y_1 = k(x_2 - x_1) \Rightarrow k = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}.$$

С нахождением *k* в физике связано нахождение скорости при равномерном движении

Обратная пропорциональность. График этой функции и ее свойства.

С обратной пропорциональностью встречаемся при изучении физики. Например, если S – расстояние, которое нужно пройти туристу, υ – скорость, t – время пути, тогда $t = \frac{S}{\upsilon}$, т.е. чем больше скорость движения туриста, тем меньше времени понадобится для прохождения пути и наоборот.

Определение. Обратной пропорциональностью называется функция, которую можно задать формулой вида $y = \frac{k}{x}$, где k – постоянная, $k \neq 0, x \neq 0$.

Областью определения функции является множество всех действительных чисел, за исключением x=0. Графиком обратной пропорциональности является гипербола, причем, если k>0, то гипербола находится в первой и третьей координатных четвертях; если k<0, то во второй и четвертой.

При k>0 функция $y = \frac{k}{x}$ будет убывающей, при k<0 – возрастающей.

Функция разрывна в точке x=0. Если взять любые два значения x_1 и x_2, то $y_2 = \frac{k}{x_2}$, $y_1 = \frac{k}{x_1}$, $\frac{y_2}{y_1} = \frac{k}{x_2} : \frac{k}{x_1}$, $\frac{y_1}{y_2} = \frac{x_2}{x_1}$.

Если значениями переменных x и y являются положительные числа, то доказанное утверждение $\frac{y_1}{y_2} = \frac{x_2}{x_1}$ можно сформулировать словами: увеличение (уменьшение) значения переменной x в несколько раз приводит к тому, что соответствующее значение переменной y будет уменьшаться (увеличиваться) во столько же раз.

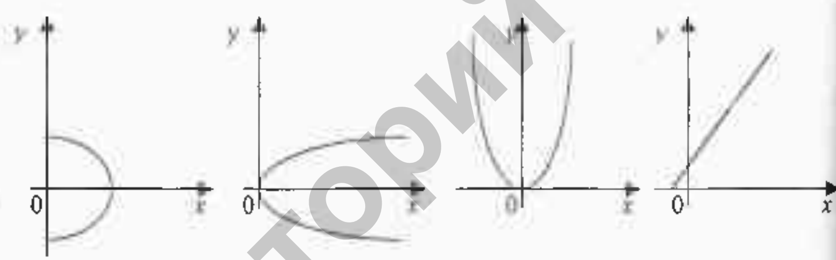
С обратной пропорциональностью учащиеся знакомятся в начальных классах лишь при решении текстовых задач: надо упаковать в пакеты 24 кг муки. Какова будет масса одного пакета, если эту муку можно упаковать в три одинаковых пакета? в 4? в 6?

В задаче рассматривается три величины: 1) масса всей муки; 2) количество пакетов; 3) масса муки в одном пакете.

Первая величина принимает одно и то же значение (24). Две другие величины находятся в обратно пропорциональной зависимости следующего вида: $y = \frac{24}{x}$, где x количество пакетов, а y – масса муки в одном пакете.

Вопросы и задания для самоконтроля:

1. "У Саши 7 конфет, а у Миши на х меньше. Сколько конфет у Саши и Миши вместе". Будет ли данное соотношение функциональным?
2. Среди следующих зависимостей укажите функциональные: а) зависимость температуры воздуха от времени суток; б) зависимость количества пути от времени, за которое он пройден; в) зависимость количества делителей от числа; г) зависимость совместимости между группами крови человека; д) зависимость стоимости покупки от цены товара; е) зависимость периметра квадрата от длины его стороны.
3. Среди следующих формул укажите те, которые задают функциональную зависимость: а) $y=kx^2+b$; б) $y=|x|$; в) $x=y^2$; г) $x^2+y^2=4$; д) $y=x^3$.
4. Среди следующих линий координатной плоскости укажите те, которые являются графиками функций.



5. Приведите пример заданий из математики начальной школы, которые подготавливают учащихся к изучению функциональных зависимостей в старших классах.
6. Найдите области определения следующих функций: $y=\sqrt{x^2-5x+6}$; $y=\dfrac{8x-3}{x^2-16}$; $y=\dfrac{x+8}{x-2}$.

§ 6. Понятие о количественной теории целых неотрицательных чисел

1. Различные подходы к определению понятия натурального числа

Натуральное число возникло из практической необходимости людей. Причина возникновения натуральных чисел в необходимости сравнить несколько множеств. На первом этапе сравнение множеств происходило в процессе непосредственного установления однозначного взаимного соответствия. Позже для сравнения множеств стали использовать множества-посредники (камешки, пальцы).

После того, как человек научился оперировать множествами-посредниками, он установил то общее, что существует между 5 пальцами, 5 яблоками и т.д., т.е. когда произошло отвлечение от природы элемента множеств. На этом этапе возникло представление о натуральном числе. Наука, изучающая натуральные числа и операции над ними, – арифметика. Понятие натурального числа ввел римский ученый Боэций (480-524 гг. н.э.).

Натуральные числа – это числа, используемые при счете. Что такое счет? Возьмем множество, содержащее а элементов. Сосчитав элементы этого множества: 1-ый, 2-ой, 3-ий ... а-ый, мы получаем количественную характеристику этого множества. Чтобы получить количественную характеристику, мы использовали порядковые натуральные числа, т.е. для счета нами было использовано множество, состоящее из первых а натуральных чисел. Это множество – отрезок натурального ряда чисел.

Определение. Отрезком натурального ряда чисел N_a называется множество натуральных чисел, не превосходящих а.

Определение. Счетом называют установление взаимно-однозначного соответствия между элементами определенного множества и отрезком натуральных чисел, начиная с числа 1.

Анализ сущности счета показывает, что для того, чтобы считать, необходимо заранее иметь достаточный запас чисел, множество которых обладает рядом свойств (располагаться в определенном порядке, иметь первое число).

Тесная связь порядкового и количественного нашла отражение в количественной теории натуральных чисел, в которой изучаются их количественные и качественные свойства. Основополагающим в этой теории является понятие равномощных конечных множеств.

2. Теоретико-множественный смысл количественного натурального числа и 0.

Счет служит как для упорядочения конечного элементного множества, так и для определения количества его элементов; в общем случае порядковое число ведет к количественному. Смысл количественного числа можно истолковать и иначе с теоретико-множественных позиций, используя понятие равномощности множеств.

Возьмем какое-либо конечное множество А и отберем в один с ним класс все равномощные ему множества. Например, если А – множество вершин треугольника, то в один с ним класс попадет множество его углов, сторон; множество букв в слове «дом» и любые другие 3-х элементные множества.

Возьмем множество В, не равномощное А. Отберем все множества, равномощные В. В результате получим новый класс конечных равномощных множеств. Процесс образования таких классов бесконечен, т.е. их множество бесконечно.

Поскольку отношение равномощности эквивалентно, то оно разбивает это бесконечное множество на непустые непересекающиеся классы конечных множеств. В одном классе содержатся различные множества, и общим для всех них является только то, что они равномощны, т.е. содержат одинаковое количество элементов.

Определение. Натуральным числом называют общее свойство класса равномощных конечных множеств.

С количественными и порядковыми натуральными числами учащиеся знакомятся уже при изучении чисел первого десятка. Происходит это при счете элементов множеств. Ответ на вопрос, сколько элементов содержит данное множество, выражается количественным натуральным числом, а порядковое число указывает, какое место при счете занимает тот или иной предмет, и отвечает на вопрос: «Которым по счету будет данный предмет?». В первом классе, когда учащиеся изучают однозначные числа, приводятся примеры равномощных множеств и формируется понятие количественного натурального числа. Число 0 также имеет теоретико-множественное истолкование. Оно ставится в соответствие пустому множеству. Объединение множества всех натуральных чисел и числа 0 образует множество целых неотрицательных чисел, которое обозначают N_0: $N_0 = N \cup \{0\}$.

3. Сложение целых неотрицательных чисел. Ученики решают следующую задачу: «На поляне росло 5 боровиков и 4 подосиновика. Сколько грибов росло на поляне?». Данная задача решается сложением. К 5 белым грибам нужно присоединить 4 подосиновика. Таким образом, мы видим, что сложение целых неотрицательных чисел связано с операцией объединения множеств.

Пусть заданы два множества $A = \{a, b, c, d\}$ и $B = \{e, k, f\}$. Число элементов во множестве A есть $n(A) = 4$, а число элементов во множестве B – $n(B) = 3$. Объединение этих множеств есть множество $A \cup B = \{a, b, c, d, e, f, k\}$.Число элементов в объединении этих множеств обозначим $n(A \cup B) = n(A) + n(B) = 4 + 3$. Если возьмем множество $A = \{a, b, c, d\}$ и $B = \{c, d, k\}$, то $A \cup B = \{a, b, c, d, k\}$. Число элементов в объединении двух множеств равно не семи, а пяти, т.к. множества A и B пересекаются. Поэтому сумму целых неотрицательных чисел определяют через объединение непересекающихся множеств.

Определение. Суммой целых неотрицательных чисел a и b называют число элементов в объединении двух непересекающихся множеств A и B, т.е. $a + b = n(A \cup B), n(A) = a, n(B) = b$, где $A \cap B = \varnothing$, $a = n(A)$, $b = n(B)$

Сумма a+b не зависит от выбора множеств A и B. Сумма целых неотрицательных чисел a и b всегда существует и единственна. Существование суммы целых неотрицательных чисел следует из того, что существует объединение двух множеств А и В и оно единственно.

Дано определение сложения натуральных чисел для двух слагаемых. Аналогично можно определить сумму для n слагаемых. Пусть дано объединение n попарно непересекающихся множеств $A_1, A_2, \ldots, A_n$, причем $n(A_1)=a_1$, $n(A_2)=a_2$, ..., $n(A_k)=a_k$. Тогда $a_1+a_2+\ldots+a_n = n(A_1 \cup A_2 \ldots \cup A_k)$. $a_1+a_2+a_3+\ldots a_k+a_{k+1}=(a_1+a_2)+a_3+\ldots+a_k+a_{k+1}=$ $=((a_1+a_2)+a_3)+\ldots+a_k+a_{k+1}=((a_1+a_2+\ldots+a_k)+a_{k+1})$.

Сложение обладает свойством коммутативности и ассоциативности (в школе их называют переместительный и сочетательный законы).

Так, коммутативность сложения целых неотрицательных чисел, записываемая в виде $(\forall a, b \in N)$ (a+b=b+a), связана с тем, что для любых множеств А и В выполняется равенство $A \cup B = B \cup A$. Действительно, если $a=n(A)$, $b=n(B)$ и $A \cap B=\varnothing$, то $a+b=n(A \cup B)=n(B \cup A)=b+a$. Аналогично можно доказать справедливость ассоциативности сложения: $\forall a,b,c \in N$ $(a+b)+c=a+(b+c)$ (попытайтесь сделать это самостоятельно).

Ассоциативный закон сложения в начальном курсе явно не изучается, но постоянно используется: при сложении двух чисел: 3+2=(3+1)+1; 8+6=(8+2)+4; при прибавлении числа к сумме или суммы к числу: 72+(28+35)=(72+28)+35.

Переместительный закон сложения используется уже в первом классе при составлении таблицы сложения.

3. Вычитание целых неотрицательных чисел.

Ученики решают задачу: «На ветке сидело 5 птиц. Три птицы улетело. Сколько птиц осталось сидеть?». Данная задача решается вычитанием. Как видим, ее решение тесно связано с выделением из данного множества его подмножества (в нашей задаче все множество – 5 птиц; 3 птицы – подмножество данного множества). Мы находим при решении задачи число элементов в дополнении этого подмножества. Таким образом, вычитание двух чисел связано с нахождением дополнения подмножества до данного множества.

Пусть заданы множества $A=\{a,b,c,d\}$ и $B=\{c,d\}$ Если удалить из множества А множество В, то останется множество $B'_A=\{a,b\}$ Т.о. если $n(A)=a$; $n(B)=b$; $B \subset A$, то разность чисел a и b, в нашем примере 4 и 2 является числом элементов в дополнении множества А до множества В.

Определение. Разность целых неотрицательных чисел a и b равна числу элементов в дополнении множества В до множества А.

$$a-b=n(A \setminus B)=n(B'_A), \text{ где } a=n(A); n(B)=b; B \subset A.$$

Операция по нахождению разности называется вычитанием. Число a – уменьшаемое; b – вычитаемое. Разность чисел a и b существует и единственна в том случае, когда a>b. Согласно определению $n(A)=a; n(B)=b$; а так как $B \subset A$, то $n(B)<n(A)$, т.е. b<a; a>b.

Свойство вычитания (вычитание числа из суммы).

$$(a+b)-c=\begin{cases} a-c+b, & \text{если } a \geq c \\ b-c+a, & \text{если } b \geq c \end{cases}$$

В начальном курсе математики первоначально вычитание вводится на основании практических упражнений, связанных с выделением подмножества данного множества и образования нового множества – дополнения выделенного подмножества.

Вычитание в начальных классах вводится параллельно со сложением. Изучение начинается с самого простого случая – вычесть один. Это значит найти число, предшествующее данному. Для того, чтобы вычесть число 2, нужно использовать второе свойство. Т.е. 3-2=3-1-1. Вычитание в теме «Десяток» основано на знании состава числа, т.е. 7-3=(4+)-3=4. Свойство 1 используется для выработки умения в решении примеров 37-5=(30+7)-5=(7-5)+30=30+2=32.

Связь вычитания со сложением устанавливается при рассмотрении темы «Как найти неизвестное слагаемое».

5. Умножение целых неотрицательных чисел.

В количественной теории умножение целых неотрицательных чисел можно определить двумя способами: через сложение одинаковых слагаемых; через декартово произведение.

Определение. Произведением числа a на b называют число, которое удовлетворяет следующим условиям:

1) если b>1, то $a \cdot b = \underbrace{a+a+a+\ldots+a}_{b \text{ раз}}$
2) если b=1, то $a \cdot 1 = a$;
3) если b=0, то $a \cdot 0 = 0$.

Нахождение произведения чисел a и b можно определить с теоретико-множественных позиций следующим образом. Возьмем b множеств, непересекающихся между собой, в каждом из которых содержится a элементов. Тогда объединение этих множеств содержит $a \cdot b$ элементов:

$$a \cdot b = \underbrace{n(A)+n(A)+n(A)\ldots}_{b \text{ раз}}$$

1. Можно дать другое истолкование произведения целых неотрицательных чисел – с помощью декартова произведения множеств. Пусть задано множество $A=\{x, y, z\}$ и множество $B=\{p, q, r, s\}$. Тогда

$$A \times B = \begin{Bmatrix} (x, p), (x, q), (x, r), (x, s) \\ (y, p), (y, q), (y, r), (y, s) \\ (z, p), (z, q), (z, r), (z, s) \end{Bmatrix}.$$

Если число элементов во множестве A есть $n(A)=a$, во множестве B – $n(B)=b$; тогда $a \cdot b$ есть число элементов (упорядоченных пар) в декартовом произведении этих множеств.

Определение. Произведением целых неотрицательных чисел a и b называют число элементов в декартовом произведением $A \times B$, $a \cdot b = n(A \times B)$, где $a = n(A)$, $b = n(B)$.

Операцию по нахождению произведения называют умножением, а числа, которые перемножаются – множителями.

Теорема. Для любых неотрицательных целых чисел a и b существует произведение их и оно единственно.

Справедливость теоремы вытекает из существования и единственности декартова произведения A и B, где число элементов во множестве A есть a, а число элементов во множестве B есть b.

Свойства умножения:

1. $a \cdot b = b \cdot a$ (коммутативный закон).
2. Ассоциативный закон (сочетательный) – $\forall a, b, c \in N_0$ $a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$.
3. Для любых целых неотрицательных чисел a, b, c справедливо равенство: $(a+b) \cdot c = ab + ac$ (дистрибутивность умножения относительно сложения).

Законы умножения коммутативный, ассоциативный и дистрибутивный относительно сложения тоже имеют наглядный теоретико-множественный смысл. Например, смысл равенства ab=ba состоит в том, что, хотя множества $A \times B$ и $B \times A$ различны (первое состоит из пар вида (a, b), где $a \in A$, $b \in B$, а второе из пар (b, a), где $b \in B$, $a \in A$), они являются равномощными: каждой паре (a, b) из множества $A \times B$ можно поставить в соответствие единственную пару (b, a) из множества $B \times A$, и наоборот. Значит $n(A \times B) = n(B \times A)$ и поэтому $n(A) \cdot n(B) = n(B) \cdot n(A)$.

Предлагаем читателям самостоятельно проиллюстрировать справедливость ассоциативного закона умножения и дистрибутивного закона умножения относительно сложения с помощью декартова произведения множеств.

В начальных классах умножение вводится при решении простых задач типа «На одно пальто необходимо пришить 4 пуговицы. Сколько пуговиц надо пришить на 5 пальто?».

Коммутативный закон умножения используется при составлении таблицы умножения. Сочетательный (ассоциативный) закон в явном виде в начальных классах не изучается, но используется при решении следующих примеров: $(3\cdot5)\cdot2=3\cdot(5\cdot2)=30$; $273\cdot40=273\cdot(4\cdot10)=(273\cdot4)\cdot10$.

Дистрибутивные законы используются при решении заданий вида $10\cdot(2+4)$, сравнении выражений, решении двумя способами соответствующих арифметических задач.

6. Деление.

В начальной школе решают задачи следующих типов:

1. «На столе лежало 12 яблок, их разложили поровну в 3 тарелки. Сколько яблок лежит в каждой тарелке?»

2. «На столе лежало 12 яблок. Их разложили в тарелки так, что в каждой тарелке оказалось по 3 яблока. Сколько было тарелок?».

И первая и вторая задачи решаются делением, но с точки зрения количественной теории эти задачи разные.

Первый тип задач называют задачей на деление на равные части, а второй тип задач – задачи на деление по содержанию.

С теоретико-множественной точки зрения деление натуральных чисел связано с разбиением конечных множеств на равномощные подмножества, никакие два из которых не имеют общих элементов.

Определение. Пусть a – это число элементов во множестве A, т.е. $a = n(A)$ и множество A разбито на попарно непересекающиеся подмножества. Тогда, если b есть число равномощных подмножеств данного множества A, то частное при делении a на b есть число элементов в каждом подмножестве. Если b – число элементов в каждом подмножестве, то $a : b$ есть число подмножеств данного множества A.

Определение. Частным целого неотрицательного числа a и натурального числа b называют такое неотрицательное число c, которое при умножении на число b дает число a.

$a : b = c \Rightarrow a = b \cdot c$.

Теорема (1). Для того, чтобы существовало частное двух целых неотрицательных чисел a и b, необходимо, чтобы $a \geq b$.

Дано: $a : b$. Доказать: $a \geq b$.

Доказательство. Пусть существует частное при делении $a : b$ и оно единственное: $a : b = c$; $c \geq 1$, умножим обе части последнего неравенства на b: $bc \geq b$, а значит $a \geq b$. Если $a = 0, b \neq 0$, то $a : b = 0$.

Теорема (2): Если существует частное чисел a и b, то оно единственно.

Доказательство. Допустим обратное. Пусть $a:b=c$ и $a:b=d, c\in N, d\in N, c\neq d$. Тогда $a=b\cdot c$ и $a=b\cdot d$, отсюда $bc=bd$, а значит, $c=d$, что противоречит допущенному.

Докажем невозможность деления числа a на 0. Предположим, что $a:0=c$, тогда по определению $a=0\cdot c; 0\cdot c=0, a=0$, но $a\neq 0$. Следовательно, на 0 делить нельзя.

1. Правила деления суммы на число

$(a+b):c=a:c+b:c$, где a, b, $c\in N$.

Частное от деления суммы чисел a и b на c равно сумме частных от деления a на c и b на c.

Доказательство. Так как существует частное от деления a на c, обозначим его *m*. Следовательно, $\begin{matrix} a:c=m\Rightarrow a=c\cdot m \\ b:c=n\Rightarrow b=c\cdot n \end{matrix}$. Сложим

$a+b=cm+cn=c(m+n)$

$a+b=c(m+n)\Rightarrow(a+b):c=m+n$

$(a+b):c=a:c+b:c$

Доказанное правило можно пояснить с точки зрения теории множеств на следующем примере,

где a=6, b=4, c=2.

Если непересекающиеся множества A и B можно разбить на равномощные подмножества, то и объединение этих множеств допускает такое разбиение.

2. Правило деления числа на произведение.

Для того, чтобы число a разделить на произведение чисел b и c, необходимо это число a разделить на число b (на число c), а потом частное разделить на число c (число b).

$a:(b\cdot c)=(a:b):c$

$a:(b:c)=(a:c)\cdot b$

$560:80=56:(8\cdot 10)=(560:10):8=56:8=7$.

3. Правило умножения числа на частное двух чисел. Для того, чтобы число умножить на частное двух чисел, можно это число умножить на делимое и разделить на делитель.

$a\cdot(b:c)=\frac{a\cdot b}{c}$

4. Правило деления числа на частное (a, b, c)$\in N$ $a:(b:c)=(a:b)\cdot c, a,b,c\in N$.

Деление с остатком

Разделим 36 на 7. $36:7=5$ (остаток 1); $36=7\cdot 5+1$. Разделить с остатком целое неотрицательное число a на натуральное число b – это значит найти такую пару чисел q и r, что $a=b\cdot q+r$; $r<b\le 0$.

Теорема. Для любого целого неотрицательного числа a и натурального числа b существуют целые неотрицательные числа q и r, что $a=b\cdot q+r$, причем эта пара единственная.

С точки зрения количественной теории множество A, в котором a элементов, разбивается на q равномощных подмножеств, в каждом из которых по b элементов, и одно множество X, в котором r элементов.

Важность деления с остатком в том, что оно является одной из операций алгоритма деления многозначных чисел.

Отношения «равно», «меньше» («больше») и «меньше в » («больше в»).

Определение. Пусть даны два целых неотрицательных числа a и b $a=n(A), b=n(B)$.

Числа a и b называются равными, если они определяются равномощными множествами.

Если множество A равномощно собственному подмножеству множества B и $n(A)=a$, а $n(B)=b$. То говорят, что число a меньше числа b.

Отношение "меньше" обладает рядом свойств: а) антирефлексивность; б) антисимметричность; в) транзитивность.

Свойства множества целых неотрицательных чисел:

1. Так как отношение «меньше», заданное на множестве целых неотрицательных чисел, антирефлексивно, антисимметрично и транзитивно, то множество N_0 упорядочено этим отношением.

2. Множество целых неотрицательных чисел имеет наименьший элемент – 0, т.е. говорят, что множество N_0 ограничено снизу.

3. Множество целых неотрицательных чисел бесконечно.

Предположим, что множество целых неотрицательных чисел конечно и содержит m элементов. Но тогда к числу m прибавляя 1, мы получаем новое целое неотрицательное число (m+1).

4. Множество целых неотрицательных чисел дискретно.

Пусть *a* некоторое целое неотрицательное число, a+1 – следующее за ним целое неотрицательное число. Тогда ни для одного целого неотрицательного числа a нельзя указать такое целое неотрицательное число x, что a<x<a+1.

Вопросы и задания для самоконтроля:

1. Объясните с теоретико-множественной точки зрения смысл равенств:

а) 2+4=6; б) 7-4=3; в) 8:4=2; г) 2·3=6.

2. Приведите примеры заданий из учебников математики для начальных классов, при выполнении которых используется:

а) определение суммы через объединение непересекающихся множеств и через разность;

б) определение разности через дополнение подмножества до всего множества и через сумму;

в) определение произведения целых неотрицательных чисел через сумму, и используя его, докажите, что 3·1=3;

г) теоретико-множественный смысл частного.

3. В магазине продаются чемоданы, портфели, сумки. Они окрашены в черный, коричневый, серый цвета. Сколько предметов отличаются друг от друга или цветом, или названием, или тем и другим.

4. Объясните теоретико-множественный смысл деления с остатком. Где имеет значение это действие в начальных классах?

Глава 4

АКСИОМАТИЧЕСКИЙ ПОДХОД К ВВЕДЕНИЮ СИСТЕМЫ НАТУРАЛЬНЫХ ЧИСЕЛ

§ 1. Аксиомы Пеано

1. Аксиоматический метод в математике. Каждая математическая теория изучает множества с определенными отношениями между элементами данного множества. Содержание теории заключается в определении одних понятий (отношений) через другие и в доказательстве одних свойств отношений (понятий) на основе других свойств.

Очевидно, что определить все понятия и отношения невозможно. Поэтому некоторые понятия берутся в качестве неопределяемых. К таким в математике, например, относят «точка», «множество». Аналогично тому, что невозможно дать определения всем понятиям данной науки, также невозможно доказать все свойства отношений между объектами изучаемого множества чисто логическим путем. Следовательно, должны быть и существуют предложения, истинность которых принимается без доказательства. Такие утверждения называются аксиомами. Список основных понятий и аксиом и составляют фундамент данной теории, на котором вся она строится логическим путем.

Определение. Системой аксиом данной науки называется совокупность предложений, в которых указываются отношения между основными неопределяемыми понятиями, необходимые и достаточные для того, чтобы истины данной науки можно было вывести чисто логически.

Т.о. аксиоматическое построение теории начинается с введения неопределяемых понятий, перечисления основных отношений между элементами изучаемого множества и аксиом, которым удовлетворяют данные отношения. Система аксиом, на основании которой строится та или иная математическая теория, должна удовлетворять ряду требований:

1. Отображать реальную действительность. Например, аксиома расстояния, утверждающая, что: "Для любых трех точек плоскости справедливо следующее утверждение: $|AB|+|BC|\geq|AC|$", реально отображает действительность.

2. Непротиворечивость: не должны противоречить друг другу не только сами аксиомы данной системы, но и все логические следствия, которые могут быть получены из аксиом;

3. Полнота. Это значит, что любые две ее модели (системы объектов, в которых выполняются все аксиомы) должны быть изоморфны между собой;

4. Независимость: все аксиомы должны быть взаимно независимы, т.е. ни одну из аксиом нельзя доказать как теорему на основании остальных аксиом.

Аксиоматический метод – важнейший метод теоретического исследования. Конечно же, в первую очередь, в математике, построение которой дает образец реализации аксиоматического метода в науке и демонстрирует его действенность. Аксиоматическое построение других научных дисциплин возможно в той мере, в какой эти науки математизированы. Например, когда биология стала использовать математические методы, когда ее понятийный аппарат мог быть формализован, тогда появилась возможность ее аксиоматизации.

Задачей аксиоматического метода является установление связей между положениями данной дисциплины с целью дальнейшего ее развития. Значение этого метода состоит в том, что отпадает необходимость в непосредственной эмпирической проверке всех суждений данной теории. Все содержание аксиоматической теории выводится на основе аксиом. В аксиомах аккумулирован индуктивный опыт человечества.

Аксиоматический метод находит отражение, например, в теории натуральных чисел, сформулированным шведским математиком Ж. Пеано. При аксиоматическом подходе натуральное число рассматривают как элемент некоторого множества N, в котором задано отношение "непосредственно следовать за", и которое удовлетворяет следующим аксиомам:

1. Во множестве N существует элемент, который непосредственно не следует ни за каким элементом этого множества. Его называют единицей.

Если натуральное число обозначим а, то а′ – это число, которое непосредственно следует за числом а.

2. Для каждого элемента а из N существует единственный элемент а′, непосредственно следующий за а.

3. Для каждого элемента а из N существует не более одного элемента, за которым непосредственно следует а.

4. Если множество М есть подмножество множества N и а) единица содержится в М; б) из того, что а содержится в М, следует, что и а′ содержится в М, то множество М совпадает с множеством N.

В аксиоматике Пеано множество натуральных чисел можно определить следующим образом.

Определение. Множеством натуральных чисел N называется такое множество, на котором задано отношение «непосредственно следовать за» и которое удовлетворяет всем аксиомам Пеано.

На основании четвертой аксиомы строится один из методов доказательства в математике математических утверждений – метод математической индукции.

Суть доказательства методом математической индукции состоит в следующем:

1. Проверяется истинность утверждения для п=1.
2. Предполагается справедливость утверждения для п=к.
3. Доказывается справедливость данного утверждения для п=к+1.

Например, доказать, что 1…+3+5+…+2п-1=п^2.

Доказательство:

1. Проверим истинность данного утверждения для п=1: 1=1^2=1
2. Предположим, что данное утверждение справедливо для п=к. 1+3+5+…+(2к-1)=к^2
3. Докажем, что 1+3+5+…+(2к-1)+(2к+1)=(к+1)^2

Доказательство: $1+\underbrace{3+5+\ldots+(2к-1)}_{к^2}+(2к+1)=к^2+2к+1=(к+1)^2$

4. На основании аксиомы индукции делаем вывод, что данное утверждение справедливо для любых натуральных чисел.

Отражение аксиоматической теории натурального числа проявляется и в начальной школе: первоначальное знакомство с единицей как наименьшим числом, с принципами образования каждого числа, непосредственно следующего за данным и предшествующего ему: т.е. 2=1+1, 3=2+1, 1=2-1, 2=3-1 и т.д. Некоторые из приемов сложения и умножения являются прямым следствием аксиоматического определения этих операций в данной теории: 5+3=(5+2)+1, 5·3=5·2+5

§ 2. Теоретические основы техники вычислений

1. Сложение в аксиоматической теории.

Определение. Сложением натуральных чисел называется алгебраическая операция, определенная на множестве N (натуральных чисел) и обладающая следующими свойствами:

1. $\forall a \in N,\ a+1=a'$;
2. $\forall a,b \in N,\ a+b'=(a+b)'$, где a+b называется суммой, а сами числа a и b – слагаемыми.

Теорема 1. Сумма натуральных чисел всегда существует и она единственна.

Сумма любого натурального числа и нуля равна самому этому натуральному числу.

Теорема 2 (ассоциативный закон сложения). Для любых чисел a, b, c, взятых из множества N, (a+b)+c=a+(b+c).

Доказательство. Пусть выбраны числа a и b и M – множество тех чисел *c*, для которых равенство справедливо.

а) $(a+b)+1=(a+b)'=a+b'=a+(b+1)$; 1 принадлежит M.

б) Если c принадлежит M, то $(a+b)+c=a+(b+c)$, откуда $(a+b)+c'=[(a+b)+c]'=[a+(b+c)]'=a+(b+c)'=a+(b+c')$; c' принадлежит M. По аксиоме 4 равенство $(a+b)+c=a+(b+c)$ справедливо для любых a, b и c из множества N.

Теорема 3 (коммутативный закон сложения). Для любых a, b, принадлежащих множеству N, a+ b= b+a.

Доказательство. а) докажем индукцией по a, что a+1=1+a, M – множество тех a, для которых это верно.

А) 1, очевидно, принадлежит M.

Б) Если a принадлежит M, то a+b=b+a. Тогда $a'+1=(a+1)+1=(1+a)+1=(1+a)'=1+a'$; a' принадлежит M. По аксиоме 4 доказано, что a+1=1+a.

б) Докажем индукцией по b, что a+b=b+a. Пусть M – множество тех b, для которых это верно при данном a.

А) По доказанному в а) 1 принадлежит M.

Б) Если b принадлежит M, то a+b=b+a. Тогда, используя теорему 2 находим:

$a+b'=(a+b)'=(b+a)'=b+a'=b+(a+1)=b+(1+a)=(b+1)+a=b'+a$;

b' принадлежит M. По аксиоме 4 теорема доказана.

Теорема *4 (свойство монотонности сложения).* Для любых натуральных чисел a, b и c, если a<b, то a+c<b+c.

Исходя из определения операции сложения в аксиоматической теории, можно составить таблицу сложения

$1+1=1'=2$ $\qquad$ $2+2=2+1'=(2+1)'=3'=4$

$2+1=2'=3$ $\qquad$ $3+2=3+1'=(3+1)'=4'=5$

$3+1=3'=4$ $\qquad$ $4+2=4+1'=(4+1)'=5'=6$ и т.д.

2. Умножение натуральных чисел в аксиоматической теории.

Определение. Умножением натуральных чисел в аксиоматической теории называют алгебраическую операцию, определенную на множестве натуральных чисел, для которой выполняются следующие свойства:

1. $a \cdot 1 = a$ для любого $a \in N$.
2. $a \cdot b' = a \cdot b + a$ для любых a и b из множества N.

Например, $6 \cdot 8 = 6 \cdot 7' = 6 \cdot (7+1) = 6 \cdot 7 + 6$

Теорема 1. Умножение натуральных чисел всегда выполнимо и дает единственный результат. (Это следует из существования и единственности сложения натуральных чисел.)

Используя определение умножения натуральных чисел в аксиоматической теории, вышеприведенную теорему о единственности и таблицу сложения можно составить таблицу умножения. Составляется она поэтапно. Вначале рассматривают случаи умножения на 1 (используя свойство 1), а затем выводят таблицу умножения на любое другое однозначное число.

Например, $1 \cdot 1 = 1$ $\quad 2 \cdot 2 = 2 \cdot 1' = 2 \cdot 1 + 2 = 4$

$2 \cdot 1 = 2 \quad 3 \cdot 2 = 3 \cdot 1' = 3 \cdot 1 + 3 = 6$

$3 \cdot 1 = 3$

$$2 \cdot 3 = 2 \cdot 2' = 2 \cdot 2 + 2 = 6$$

$$2 \cdot 4 = 2 \cdot 3' = 2 \cdot 3 + 2 = 8$$

Теорема 2 (коммутативный закон умножения). Для любых натуральных чисел a и b $a \cdot b = b \cdot a$.

Теорема 3 (дистрибутивный закон умножения относительно сложения). Для любых натуральных чисел a, b и c $(a + b) \cdot c = ac + bc$.

Доказательство. Для данных a и b применим индукцию по c.

А) $(a + b) \cdot 1 = a + b = a \cdot 1 + b \cdot 1$. Для c=1 теорема верна.

Б) Если теорема верна для c, то $(a + b)c = ac + bc$. Используя ассоциативность и коммутативность сложения, находим:
$(a + b)c' = (a + b)c + (a + b) = (ac + bc) + (a + b) = (ac + a) + (bc + b) = ac' + bc'$, т.е. теорема верна и для c'.

По аксиоме 4 теорема доказана.

Теорема 4 (ассоциативный закон умножения). Для любых a, b и c$\in$ N $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$.

Доказательство. Пусть даны a и b. M – множество тех чисел c, для которых равенство имеет место.

А) $(ab) \cdot 1 = ab = a(b \cdot 1)$, 1 принадлежит M.

Б) Если c принадлежит M, то $(ab)c = a(bc)$. Тогда, используя теорему 4, найдем: $(ab)c' = (ab)c + ab = a(bc) + ab = a(bc + b) = a(bc')$, c' принадлежит M. Теорема доказана.

Теорема 5 (свойство монотонности умножения). Для любых натуральных чисел a, b и c, если a<b, то $a \cdot c < b \cdot c$.

Теорема 6. Умножение натуральных чисел сократимо: если a, b, c – натуральные числа и $ab = ac$, то $b = c$.

Аксиоматический подход к определению сложения и умножения натуральных чисел находит отражение в тех вычислительных приемах, которые используются учащимися начальных классов для нахождения результатов сложения и умножения. Чтобы убедиться в этом, достаточно сопоставить определение сложения и умножения в аксиоматической теории и те вычислительные приемы, которые рассматривают младшие школьники при нахождении результатов сложения и умножения натуральных чисел. Так, например, первое условие в определении сложения реализуется в начальном курсе математики в таком виде: прибавляя единицу к любому натуральному числу, получаем число, следующее за ним. Например, 2+1=3, 5+1=6. Второе условие в определении сложения реализуется в начальном курсе в таком виде: 2+2=(2+1)+1=3+1=4; 2+3=(2+2)+1=4+1=5.

Второе условие в определении умножения используется как вычислительный прием: $2 \cdot 2 = 2 \cdot (1+1) = 2 \cdot 1 + 2 = 4$.

3. Вычитание и деление натуральных чисел. Если сложение и умножение натуральных чисел всегда определено, то операции вычитания и деления натуральных чисел относятся к операциям частично определенным на данном множестве.

Определение. Вычитанием натуральных чисел называют алгебраическую операцию, обратную сложению, которая числам a и b ставит в соответствие число a-b=c, называемое разностью, такое, что (a-b)+b=a.

Теорема 1. Разность чисел a и b существует в том и только в том случае, когда b<a. Если разность существует, то она единственна.

Доказательство: предположим противное: пусть $a - b = c_1$ и $a - b = c_2$, причем $c_1 \neq c_2$.

$$\begin{matrix} a = b + c_1 \\ a = b + c_2 \end{matrix} \Rightarrow \underbrace{b + c_1}_{-b} = \underbrace{b + c_2}_{-b} \Rightarrow c_1 = c_2$$ Наше предположение неверно, следовательно, разность единственна.

При операции вычитания число a называют уменьшаемым, число b – вычитаемым, число a-b – разностью.

Определение. Делением называют алгебраическую операцию, обратную умножению, сопоставляющую числам a и b такое число $\frac{a}{b} = a : b$, что $(a:b) \cdot b = a$.

Число *a* называют делимым, b – делителем, $\frac{a}{b}$ – частным.

Теорема 2. Для того, чтобы существовало частное $\frac{a}{b}$, необходимо, чтобы a>b. Если частное существует, то оно единственно.

Вопросы и задания для самоконтроля:

1. Какие понятия являются основными в аксиоматической теории натурального числа?
2. Сформулируйте аксиоматическое определение натурального числа.
3. Как вы объясните учащимся, что в натуральном ряду нет наибольшего числа (т.е. что натуральный ряд чисел бесконечен)?
4. Дайте аксиоматическое определение сложения и умножения целых неотрицательных чисел.

5. Покажите на примерах, какое отражение нашли в начальном курсе математики коммутативный и ассоциативный законы умножения; дистрибутивный закон умножения относительно сложения.

Глава 5

ДЕЛИМОСТЬ ЦЕЛЫХ НЕОТРИЦАТЕЛЬНЫХ ЧИСЕЛ. СИСТЕМЫ СЧИСЛЕНИЯ

§ 1. Отношение делимости и его свойства

1. Определение понятия делимости числа. Признаки делимости суммы, разности, произведения чисел.

Для вычитания существует простой общий признак выполнимости этого действия: во множестве N_0 вычитание выполнимо тогда и только тогда, когда уменьшаемое не меньше вычитаемого. Для деления такого общего необходимого и достаточного признака не существует: условие $a \geq b$ является необходимым для существования частного $a:b$. Но если $a>b$, то этого еще недостаточно для существования частного $a \geq b$ в области натуральных чисел. Например, $17>3$, $(17:3) \notin N$.

Поиски признаков делимости привели к установлению важных специфических свойств натуральных чисел, изучением которых занимается теория чисел. Признаки делимости являются не общими, а частными, т.к. существенно зависят от выбора упорядоченной пары $(a; b)$, компонентами которой служат соответственно делимое и делитель. Например, во множестве N определено частное чисел 15 и 3, но оно не определено для чисел 15 и 4.

Определение. Пусть дано целое неотрицательное число a и натуральное число b. Говорят, что число a делится на число b ($a \vdots b$), если существует целое натуральное число q, такое, что $a = b \cdot q$. Число b называется делителем числа a, а число a – кратным числа b.

Число 36 делится на 4, т.к. существует $q = 9$, $q \in N$, такое, что $36=4 \cdot 9$.

Свойства отношения делимости

1. Делитель b данного числа $a \neq 0$, не превышает этого числа, т.е. $a \geq b$.

Доказательство. $a \vdots b \Rightarrow$ существует q, при котором $a = b \cdot q$, а значит, $a - b = b \cdot q - b = b(q-1)$. Поскольку $a \neq 0$, то $q \geq 1$, тогда $b(q-1) \geq 0$, значит $a-b \geq 0$, т.е. $a \geq b$, ч.т.д.

2. Отношение делимости рефлексивно, т.е. каждое натуральное число делится само на себя.

Доказательство. Для любого $a \in N_0$, имеем $a \cdot 1 = a$. Т.к. $1 \in N_0$, то это означает, что $a \vdots a$.

3. Отношение делимости обладает свойством антисимметричности, т.е. если число a делится на число b, то число b не делится на число a, если $a \neq b$.

Пусть a делится на b и b делится на a. Если a делится на b, то по одному из свойств делимости $a \geq b$, если b делится на a, то $b \geq a$, а это возможно, когда $a = b$.

4. Отношение делимости транзитивно. Если a делится на b, b делится на c, то a делится на c.

Доказательство. $a \vdots b \Rightarrow$ существует q>0 такое, что $a = b \cdot q$. $b \vdots c \Rightarrow$ существует p>0 такое, что $b = c \cdot p$. Подставляя значение b в первое равенство, получаем $a = c \cdot p \cdot q$. Обозначим $p \cdot q = d$, $d \in N$, т.к. $p \in N$ и $q \in N$ и тогда $a = c \cdot d \Rightarrow a \vdots c$

5. Если каждое слагаемое суммы делится на данное число, то и сумма делится на данное число.

$a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n$

$a_1 \vdots b \Rightarrow \exists q_1 > 0,\ a_1 = b \cdot q_1$

$a_2 \vdots b \Rightarrow \exists q_2 > 0,\ a_2 = b \cdot q_2$

$a_3 \vdots b \Rightarrow \exists q_3 > 0,\ a_3 = b \cdot q_3$

...

$a_n \vdots b \Rightarrow \exists q_n > 0,\ a_n = b \cdot q_n$

$b \cdot q_1 + b \cdot q_2 + b \cdot q_3 + \ldots + b \cdot q_n = b(q_1 + q_2 + q_3 + \ldots + q_n) \Rightarrow$ все выражение делится на b, т.к. сумма натуральных чисел $q_1, q_2, \ldots, q_n$ – тоже натуральное число.

Обратное утверждение не всегда верно, то есть если сумма делится на данное число, то совсем не обязательно, что каждое слагаемое делится на это число.

Например, 12=5+7. Сумма делится на число 3, а слагаемые не делятся на 3.

6. Необходимый и достаточный признак делимости суммы. Сумма двух или нескольких слагаемых делится на данное число в том и только в том случае, когда сумма остатков, получаемых при делении слагаемых на данное число, делится на это число.

Например, 5+7 делится на 3, потому что 5 при делении на 3 дает остаток 2, 7 при делении на 3 дает остаток 1, а сумма остатков 2+1=3 делится на 3.

7. Если числа a и b делятся на число c, то и разность чисел a и b делится на c.

Доказать самостоятельно (аналогично доказательству признака делимости суммы).

8. Необходимый и достаточный признак делимости разности чисел. Разность делится на данное число в том и только в том случае, когда равны остатки, получаемые при делении на это число уменьшаемого и вычитаемого.

9. Если все слагаемые суммы кроме одного делятся на данное число, то сумма не делится на данное число.

10. Если число a делится на число b, то и произведение чисел $a \cdot n$ делится на b.

Доказательство. $a \vdots b \Rightarrow \exists q > 0,\ a = b \cdot q$ (1). Умножим обе части равенства (1) на n $\Rightarrow$ $a \cdot n = (b \cdot q) \cdot n$. По свойству ассоциативности умножения $\Rightarrow$ $a \cdot n = b \cdot (q \cdot n)$ (2), где $q \cdot n$ является натуральным числом. Значит правая часть равенства (2) делится на b. Следовательно, и левая часть делится на b, то есть $(a \cdot n) \vdots b$, что и требовалось доказать.

11. Если число a делится на число n, а число b делится на число m, то произведение чисел $a \cdot b$ делится на произведение $m \cdot n$.

12. Если произведение $a \cdot c$ делится на произведение чисел $b \cdot c$, причем $c \neq 0$, то $a \vdots b$.

13. Необходимый и достаточный признак делимости произведения. Произведение делится на данное число в том и только в том случае, когда произведение остатков, получаемых при делении сомножителей на данное число, делится на это число.

14. Число 0 делится на любое число.

Свойства 9-11 предлагаем читателю доказать самостоятельно.

15. Ни одно натуральное число нельзя разделить на число 0.

Доказательство. Предположим, что число $a \vdots 0$. Из этого следует по определению делимости, что: $\exists q \in N$, такое, что $a = 0 \cdot q$, но правая часть равенства $(0 \cdot q) = 0$. Значит, и левая часть должна быть равна нулю. Но $a \neq 0$, т.к. $a \in N$ Следовательно, наше предположение о том, что $a \vdots 0$ неверно.

2. Признак делимости Паскаля. Признаки делимости чисел на 2, 3, 4, 5, 9, 11, 25.

Определение. Под признаком делимости на число q $(q \neq 0)$ понимают правило, с помощью которого, не производя деления, можно определить, делится ли данное число на число q или нет.

Пусть дано число $m = \overline{a_n a_{n-1} a_{n-2} \ldots a_1 a_0}$, где a_0 – число единиц, a_1 – число десятков и т.д, a_n – число единиц n - 1 разряда.

$$m = \overline{a_n a_{n-1} a_{n-2} \ldots a_1 a_0} = a_n 10^n + a_{n-1} 10^{n-1} + a_{n-2} 10^{n-2} + \ldots + a_1 10^1 + a_0 \qquad (1)$$

Например: $1245 = 1 \cdot 10^3 + 2 \cdot 10^2 + 4 \cdot 10 + 5$, где $a_3 = 1$, $a_2 = 2$, $a_1 = 4$, , $a_0 = 5$ – цифры записи данного числа.

Теорема (признак Паскаля). Число $m \vdots q$, если на q делится следующее число $Q = a_n \cdot r_n + a_{n-1} \cdot r_{n-1} + a_{n-2} \cdot r_{n-2} + \ldots + a_2 r_2 + a_1 r_1 + a_0$, где $r_n, r_{n-1}, \ldots, r_2, r_1$ – остатки от деления соответствующих степеней числа 10 на q, т.е.

$$\begin{aligned} 10^n &= q \cdot b_n + r_n \\ 10^{n-1} &= q \cdot b_{n-1} + r_{n-1} \\ &\ldots \\ 10^2 &= q \cdot b_2 + r_2 \\ 10^1 &= q \cdot b_1 + r_1 \end{aligned} \qquad (2)$$

Доказательство. Подставляем (2) в (1) и получаем.

$$m = a_n(q \cdot b_n + r_n) + a_{n-1}(q \cdot b_{n-1} + r_{n-1}) + \ldots + a_1(q \cdot b_1 + r_1) + a_0 = a_n q b_n + a_n r_n + a_{n-1} q b_{n-1} +$$
$$+ a_{n-1} r_{n-1} + \ldots + a_1 q b_1 + a_1 r_1 + a_0.$$

Отсюда $m = (a_n q b_n + a_{n-1} q b_{n-1} + \ldots + a_1 q b_1) + a_n r_n + a_{n-1} r_{n-1} + \ldots + a_1 r_1 + a_0$.

$$m = \overbrace{q(a_n b_n + a_{n-1} b_{n-1} + \ldots + a_1 b_1)}^{*} + \overbrace{a_n r_n + a_{n-1} r_{n-1} + \ldots + a_2 r_2 + a_1 r_1 + a_0}^{**}.$$

Число m представлено в виде двух больших выражений, первое из них (*) делится на число q, второе (**) представлено в виде суммы. Для того, чтобы число m делилось на q, необходимо, чтобы на q делилась следующая сумма $a_n r_n + a_{n-1} r_{n-1} + \ldots + a_2 r_2 + a_1 r_1 + a_0$, что и требовалось доказать.

Признак делимости на 2. Число делится на 2, если последняя цифра в записи числа четна или равна 0.

Доказательство. Любая степень числа 10 при делении на 2 дает остаток, равный 0. Поэтому в записи числа Q (см. признак Паскаля) $r_n = r_{n-1} = \ldots r_2 = r_1 = 0$. Значит число $Q = a_0$. Поэтому число делится на 2, если последняя цифра (a_0) делится на 2, что и требовалось доказать.

Признак делимости на 3 и 9. Если сумма цифр в записи данного числа делится на 3 или на 9, то число делится на 3 или на 9.

Доказательство. Как известно, любая степень числа 10 при делении на 3 или на 9 даст в остатке единицу, а это значит, что $r_n = r_{n-1} = \ldots r_2 = r_1 = 1$.

Тогда $Q = a_n + a_{n-1} + \ldots + a_2 + a_1 + a_0$. Значит Q представляет сумму цифр в записи данного числа, что и утверждает данная теорема.

Признак делимости на 4. Для того, чтобы число делилось на 4, необходимо и достаточно, чтобы число, образованное двумя последними цифрами в записи данного числа делилось на 4.

Признак делимости на 5. Число делится на 5, если оно оканчивается либо на нуль, либо на 5.

Признак делимости на 11. Число делится на 11, если у него сумма цифр, занимающих четные места, либо равна сумме цифр, занимающих нечетные места, либо отличается о нее на число, делящееся на 11.

Признак делимости на 25. Число делится на 25, если его последние две цифры – нули либо образуют число, делящееся на 25.

Вопросы и задания для самоконтроля:

1. Может ли разделиться на 5 сумма нескольких натуральных чисел, если ни одно из этих чисел не делится на 5?
2. При каких условиях сумма трех слагаемых разделится на 15, если известно, что первое слагаемое при делении на 15 дает остаток 7, а второе – 8.
3. Докажите, что разность квадратов двух последовательных нечетных чисел делится на 8.
4. Выведите признак делимости на 11 и на 125.
5. Докажите, что числа, запись которых состоит из трех одинаковых цифр, делятся на 3 и на 37.

§ 2. Простые и составные числа

Определение. Простыми числами называются числа, которые делятся только на себя и на 1.

Например, 2, 3, 5, 7, 11, 13 ...

Определение. Составные числа – это числа, которые имеют больше двух делителей.

Например, 4, 6, 8, 9, 10 ...

В связи с этим все целые неотрицательные числа делятся на 4 класса. В первый класс входит только число 0 (это число имеет бесконечно много делителей); во второй – число 1 (имеет только один делитель - 1); в третий – простые числа, в четвертый – составные числа.

Докажем **некоторые свойства простых чисел.**

1. Если простое число p *делится на число* $n \neq 1$, *то* $p = n$.

Доказательство. Так как p по условию простое число, то у него только два делителя: 1 и само это число. Если бы $p \neq n$, то у него было бы три делителя: 1, n, p, а значит это число p не было бы простым. Отсюда следует, что $p = n$.

2. Если p *и* q *- различные простые числа, то* p *не делится на* q.

Доказательство. Действительно, если p – простое число, то p делится только на 1 и на p, но $q \neq p$ и так как q – простое число, то $q \neq 1$, значит q не является делителем числа p, что и требовалось доказать.

Определение. Натуральные числа a и b называются взаимно простыми, если они имеют только один общий делитель, равный единице.

Например, числа 3 и 7; 4 и 9.

Два составных числа тоже могут быть взаимнопростыми.

Примечание. Взаимнопростые числа – это числа, которые могут быть как простыми, так и составными, главное – чтобы эти числа имели только общий один делитель. Числа 3 и 7 – простые, и между собой они взаимно простые; числа 4 и 9 – составные, между собой они тоже взаимнопростые.

3. *Если натуральное число* a *не делится на простое число* p, *то* a *и* p *взаимно просты.*

Доказательство. Пусть d – наибольший общий делитель чисел a и p. Тогда p делится на d. Но p – число простое, поэтому либо d=p, либо d=1. Если d=p, то тогда a будет делиться на p, что противоречит условию. Значит, остается лишь случай d=1, т.е. a и p взаимно просты.

4. *Если произведение двух натуральных чисел делится на простое число, то на это число делится один из сомножителей.*

Например, 15 делится на 3 и 15=5·3.

(Доказать самостоятельно.)

Замечание. Свойство, аналогичное свойству 4, не всегда справедливо, когда речь идет о делимости на составное число.

Например, 8·9=72. 72 делится на 12, но ни один из сомножителей на 12 не делится.

5. *Если натуральное число больше* 1, *то оно имеет хотя бы один простой делитель.*

Доказательство. Предположим противное. Пусть наше утверждение неверно и существуют натуральные числа больше 1, которые не имеют ни одного простого делителя. Обозначим множество таких чисел A и пусть в этом множестве есть наименьший элемент a>1, который не имеет простых делителей. Это число a может быть либо простым, либо составным. Простым это число быть не может, т.к. a делится само на себя, а в множестве A нет чисел, имеющих простые делители. Значит, число a не может быть простым. Не может оно быть и составным, т.к. если бы число a было составным, то у него, по определению, был бы хотя бы один простой делитель b. Тогда, a= b·p и этот делитель b<a. Причем число b не принадлежало бы множеству A, т.к. a – минимальное число в множестве A.

Т.к. b не принадлежит A, то оно имеет хотя бы один простой делитель, т.е. b=p·q. Но раз b делится на p – то и a делится на b.

Но мы знаем, что a не имеет простых делителей. Значит, a не может быть числом составным и простым. Мы пришли к противоречию, а значит наше предположение о том, что существует некоторое множество A, которое не имеет ни одного простого делителя неверно, что и требовалось доказать.

6. Наименьший простой делитель составного числа а не превосходит $\sqrt{a}$

Доказательство. Пусть p – наименьший простой делитель числа a, а это значит, что $a=p\cdot b$, где p – наименьший простой делитель $p<b$, т.к. если бы было по-другому, то простой делитель b был бы меньше числа p.

Помножим обе части на p: $p\cdot p< b\cdot p$, $p^2<a$, $p<\sqrt{a}$.

Например, 149 – имеет простые делители $2<\sqrt{149}<13$.

Из данного утверждения следует, что если число а не делится ни на одно простое число, не превосходящее $\sqrt{a}$, то число а не имеет простых делителей, т.е. оно само простое.

По данному свойству простые делители числа 149 не превосходят $\sqrt{149}$. $\sqrt{149}<13$. Число 149 не делится ни на один простой делитель в промежутке от 1 до 13. Следовательно, число 149 не имеет простых делителей. Отсюда следует, оно само простое.

Метод нахождения простых чисел «Решето Эратосфена».

Эратосфен – уроженец г. Кирены (276-194 г. до н.э.). Образование получил в Др. Греции в г. Афины, был приглашен в Александрию в качестве воспитателя Птолемея IV. Заведовал Александрийской библиотекой.

Основные работы в области философии: «О добре и зле, о любви и ненависти», в географии, в математике.

Решето Эратосфена – один из способов нахождения простых чисел. Пусть заданы числа от 1 до 30.

1	2	3	4	5	~~6~~	7	~~8~~	~~9~~	~~10~~	11	~~12~~
13	~~14~~	~~15~~	~~16~~	17	~~18~~	19	~~20~~	~~21~~	~~22~~	23	~~24~~
~~25~~	~~26~~	~~27~~	~~28~~	29	~~30~~						

Из этих чисел вычеркиваем те, которые делятся на 2. Затем те, которые делятся на 3 (за исключением самих этих чисел), на 5, на 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29. Числа, оставшиеся после таких вычеркиваний и есть простые числа.

Единица не относится ни к простым, ни к составным.

Теорема. Множество простых чисел бесконечно.

Доказательство. Предположим противное. Пусть множество простых чисел конечно и состоит из следующих чисел: 2, 3, 5, 7, 11, 13 … p, где p – наибольшее простое число. Составим число n, равное $(2\cdot3\cdot5\cdot7\cdot11\cdot13\cdot\ldots\cdot p)+1$. Исследуем это число. Это число является либо составным, либо простым. Данное число не может быть составным, т.к. оно не делится ни на одно простое число, поскольку при делении его на любое простое число (например, на 2, 5, 7 … p) всегда в остатке будет 1. Это число не может быть простым, т.к. оно больше числа p, а мы предположили, что p – наибольшее простое число. Образовалось противоречие: среди натуральных чисел оказалось такое число n, которое не является единицей, не является простым и не является составным. Следовательно, наше предположение о том, что множество простых чисел конечно неверно. Отсюда следует, что множество чисел бесконечно.

Общие кратные. Наименьшее общее кратное (*НОК*). Общие делители. Наибольший общий делитель чисел (*НОД*).

Определение. Общим кратным натуральных чисел a и b называется число, которое делится и на число a, и на число b.

Например, 6 и 8. Общими кратными этих чисел являются 24, 48, 72 и т.д.

Общих кратных у чисел a и b – бесконечное множество. Наименьшее число из них и есть наименьшее общее кратное – оно всегда существует и единственно, обозначается K(a,b). В нашем примере наименьшим общим кратным является 24, т.е. K(6,8)=24.

Всегда общим кратным чисел a и b является их произведение. Но если числа a и b взаимно просты (они имеют только один общий делитель 1), то их произведение будет не просто общим кратным, а наименьшим общим кратным. $K(3,5)=3\cdot5=15$, $K(4,9)=36$.

Если возьмем A – множество чисел, кратных a, B – множество чисел, кратных b, то множество чисел, кратных a и b будет являться пересечением множеств A и B.

Пусть a=4, b =6 . $A = \{4;8;12;16;24;...4n\}$, $B = \{6;12;18;24...6n\}$. $A \cap B = \{12,24,36..\}$

Перечислим некоторые свойства наименьшего общего кратного чисел a и b.

1. Наименьшее общее кратное любых двух чисел a и b существует и оно единственно.

2. Наименьшее общее кратное двух чисел a и b не меньше большего из чисел a и b. Если a>b, то наименьшее общее кратное $K(a, b)\geq a$. Это следует из определения наименьшего общего кратного.

3. Любое общее кратное чисел a и b делится на его наименьшее общее кратное.

Доказательство. Пусть m– общее кратное чисел a и b, k – наименьшее кратное чисел a и b.

Предположим противное: пусть m не делится на k, а значит, m делится на k с остатком, т.е. $m= k\cdot q+r$. Причем, $r<k$, т.к. r – остаток от деления m на k.

Т.к. m представимо в виде суммы $k \cdot q + r$, и m (по условию) делится на числа a и b, произведение $k \cdot q$ тоже делится на числа a и b (потому что k – наименьшее общее кратное), то и r тоже должно делится на числа a и b. Но r меньше наименьшего общего кратного, следовательно, может делиться на числа a и b только при условии, если оно равно 0. Отсюда следует, что наше предположение о том, что любое общее кратно не делится на наименьшее общее кратное несправедливо. А значит, любое общее кратное чисел a и b делится на их наименьшее общее кратное.

Определение. Общим делителем натуральных чисел a и b называется такое число d, на которое делятся числа a и b.

Общих делителей чисел a и b может быть один, несколько, но наибольший общий делитель всегда один.

Определение. Наибольшее число из общих делителей чисел a и b называется наибольшим общим делителем чисел a и b и обозначается D(a,b).

Например, у чисел 3 и 5 или 4 и 9 общий делитель всегда один. Он равен 1 (он является и наибольшим общим делителем). А у чисел 8 и 12 общие делители – 1, 2, 4, а их наибольший общий делитель равен 4, т.е. D(8,12)=4.

Свойства общих делителей и наибольшего общего делителя чисел a и b.

1. Наибольший общий делитель чисел a и b всегда существует и он единственный.

2. Наибольший общий делитель чисел a и b не больше наименьшего из чисел a и b. Если a>b, то наибольший общий делитель $D(a, b) \leq b$.

3. Если d – общий делитель чисел a и b, то $\frac{a \cdot b}{d} = k$ - есть общее кратное этих чисел.

Доказательство. $a \vdots d \Rightarrow a = d \cdot a_1$, $b \vdots d \Rightarrow b = d \cdot b_1$. Составим произведение

$k = \frac{a \cdot b}{d} = \frac{d \cdot a_1 \cdot b}{d} = a_1 \cdot b$. А значит, число k делится на b

$k = \frac{a \cdot b}{d} = \frac{a \cdot d \cdot b_1}{d} = a \cdot b_1$. А значит, число k делится на a.

Если $\frac{a \cdot b}{d}$ делится и на a, и на b, значит, число $k=\frac{a \cdot b}{d}$ является общим кратным чисел a и b.

***4.** Наибольший общий делитель натуральных чисел a и b делится на любой общий делитель чисел a и b.*

Доказательство. Пусть d_1 – общий делитель чисел a и b, т.е. $a \vdots d_1$ и $b \vdots d_1$, тогда $k_1 = \dfrac{a \cdot b}{d_1}$ – есть общее кратное чисел a и b. По ранее доказанной теореме известно, что любое общее кратное делится на наименьшее общее кратное, т.е. $k_1 \vdots K$, где k_1 - любое общее кратное, а k – наименьшее общее кратное чисел a и b.

Пусть $k_1 \vdots k = m$. $k_1 = \dfrac{a \cdot b}{d_1}$ (1); $k = \dfrac{a \cdot b}{d}$, d наибольший общий делитель (2).

(1) разделим на (2) $\dfrac{k_1}{k} = \dfrac{a \cdot b \cdot d}{d_1 \cdot a \cdot b} = \dfrac{d}{d_1} = m$, что и требовалось доказать.

5. *Если K – наименьшее общее кратное чисел a и b, то* $d = \dfrac{a \cdot b}{k}$ *их наибольший общий делитель.*

Доказательство. Т.к. k – наименьшее общее кратное чисел a и b, то $k \vdots a$ и $k \vdots b$ (по определению). Т.к. $d = \dfrac{a \cdot b}{k}$, то $ab = kd$.

Из того, что $k \vdots a \Rightarrow kb \vdots ab \Rightarrow kb \vdots kd \Rightarrow b \vdots d$. Из того, что $k \vdots b \Rightarrow ka \vdots ab \Rightarrow ka \vdots kd \Rightarrow a \vdots d$ $b \vdots d$, $a \vdots d$, следовательно, d является общим делителем чисел a и b.

То, что d является общим делителем чисел a и b, мы доказали. Теперь докажем, что d – наибольший общий делитель чисел a и b.

Предположим, что существует делитель чисел a и b – некоторое число $d_1 > d$. Тогда $d_1 = \dfrac{ab}{k_1}$, где k_1 общее кратное чисел a и b. Причем, т.к. $d_1 > d$, то $k_1 < k$. Но k (по условию) – наименьшее общее кратное. А мы получили еще кратное R_1 чисел a и b, меньшее, чем k, что противоречит условию. Отсюда следует, что наше предположение о том, что существует число d_1, большее чем d, – неверно. А значит, d является наибольшим общим делителем чисел a и b.

6. *Наибольший общий делитель взаимнопростых чисел a и b равен* 1.

Доказательство. Т.к. числа a и b взаимнопросты, то наименьшее общее кратное этих чисел является произведением чисел $a \cdot b$. Тогда из формулы $K = \dfrac{a \cdot b}{d}$ получаем $a \cdot b = \dfrac{a \cdot b}{d}$. Отсюда следует $d = 1$.

7. Для любых натуральных чисел a и b произведение наименьшего общего кратного этих чисел на их наибольший общий делитель равно произведению этих чисел.

Доказательство. Из формулы связи наименьшего общего кратного и наибольшего общего делителя a и b получаем $K = \frac{a \cdot b}{d}$, а отсюда $a \cdot b = K \cdot D$, что и требовалось доказать.

8. Если произведение натуральных чисел a и b делится на натуральное число n, причем числа a и n взаимнопросты (наибольший общий делитель a и n равен 1), то b делится на n.

Доказательство. Т.к. $ab \vdots a$ и $ab \vdots n$, то ab является общим кратным чисел a и n. Наименьшим общим кратным чисел a и n является произведение этих чисел $a \cdot n$, т.к. числа a и n взаимнопросты. Но мы знаем, что любое общее кратное чисел делится на их наименьшее общее кратное (см. свойство 4). Отсюда следует, что произведение чисел ab делится на $a \cdot n$, следовательно, $b \vdots n$, что и требовалось доказать.

9. Если натуральное число делится на каждое из взаимнопростых чисел, то оно делится на их произведение.

Основная теорема арифметики.

Теорема. Всякое составное число можно единственным образом представить в виде произведения простых сомножителей.

Даная теорема называется основной, поскольку на ней основываются практически все свойства делимости и следствия из них.

Доказательство этой теоремы предполагает доказательство двух утверждений:

1) разложение составного числа на простые множители существует;
2) оно единственно.

Доказательство.

1. Возьмем произвольное составное число a. Как известно, у любого составного числа есть хотя бы один простой множитель. Пусть $a = p_1 a_1$, где p_1 – простой множитель и $1<a_1<a$.

Если a_1 тоже простой множитель числа a, то тем самым разложение числа a на простые множители закончено.

Если же a_1 – составное число, то разложение числа a на простые множители не закончено. Пусть число a_1 имеет простой делитель p_2 такой, что $a_1 = p_2 a_2$ и $a = p_1 p_2 a_2$, где $1<a_2<a_1<a$.

Если a_2 – простое число, то разложение числа a на простые множители закончено.

Если же a_2 – составное число, то его можно представить в виде произведения, которое содержит хотя бы одно простое число. Рассуждая таким образом далее, мы приходим к выводу, что на каком-то этапе число a будет представлено в виде простых множителей, т.к. последний множитель в разложении числа a будет являться простым из-за того, что натуральных чисел меньших, чем число a, конечное множество: $a = p_1 \cdot p_2 \cdot p_3 \cdot \ldots \cdot p_n$ (1).

2. Докажем вторую часть нашей теоремы о том, что данное разложение единственно. Предположим противное: пусть существует еще одно разложение числа a на простые множители. $a = q_1 \cdot q_2 \cdot q_3 \cdot \ldots \cdot q_l$ (2)

Значит, $p_1 \cdot p_2 \cdot p_3 \cdot \ldots \cdot p_n = q_1 \cdot q_2 \cdot q_3 \cdot \ldots \cdot q_l$ (3). Правая часть данного равенства делится на q_1, значит и левая делится на q_1.

Согласно свойству о том, что если произведение натуральных чисел делится на простое число, то хотя бы одно из них делится на это число. Следовательно, хотя бы один их множителей $q_1 \cdot q_2 \cdot q_3 \cdot \ldots \cdot q_l$ делится на p_1.

Переставляя, если нужно множители, считаем, что q_1 делится на число p_1. А это значит, что $p_1 = q$ и что обе части равенства можно разделить на одно и то же число $p_1 = q_1$.

Аналогично устанавливаем, что один из множителей разложения делится на p_2. Продолжая рассуждение, приходим к выводу, что при сокращении на p_1, p_2 ... p_n, сокращаются все сомножители q_1, q_2 ... q_n при условии, что n=l (т.е. число сомножителей в первом разложении равно числу сомножителей во втором разложении). Следовательно, мы можем сделать вывод о том, что эти два разложения составного числа a на простые множители ничем не отличаются, за исключением порядка следования множителей.

Если предположить, что число элементов в разложении (1) больше числа элементов в разложении (2), т.е. n>l, то поочередно сокращая правые и левые части равенства (3) на простые множители приходим к равенству $p_{l+1} \cdot p_{l+2} \cdot \ldots \cdot p_n = 1$, а произведение простых сомножителей, как известно, не может быть равно 1. Следовательно, n не может быть больше l.

Аналогично рассуждая, приходим к выводу, что l не может быть больше n, т.к. в противном случае получили бы $q_{n+1} \cdot q_{n+2} \cdot \ldots \cdot q_l = 1$, что невозможно.

Следовательно, мы доказали, что любое составное число представимо в виде произведения простых сомножителей и это представление единственно.

Если какие-то простые множители входят в разложение составного числа несколько раз, то их записывают в разложении в виде степени. В общем случае составное число a можем представить в виде разложения на простые множители следующим образом: $a = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdot p_3^{\alpha_3} \cdot \ldots \cdot p_n^{\alpha_n}$, где $\alpha_i \in N_0$, $p_1, p_2, p_3 \ldots p_n$ – различные простые числа.

Такое разложение составного числа на простые множители называется ***каноническим***.

Если задано несколько чисел a и b и дано их каноническое разложение на простые множители, то такие числа можно складывать, вычитать, умножать и делить.

Например, если число a представимо в виде $p_1^{\alpha_1}\cdot p_2^{\alpha_2}\cdot p_3^{\alpha_3}\cdot\ldots\cdot p_n^{\alpha_n}$, а число b в виде $p_1^{\beta_1}\cdot p_2^{\beta_2}\cdot p_3^{\beta_3}\cdot\ldots\cdot p_n^{\beta_n}$, то $a\cdot b = p_1^{\alpha_1+\beta_1}\cdot p_2^{\alpha_2+\beta_2}\cdot p_3^{\alpha_3+\beta_3}\cdot\ldots\cdot p_n^{\alpha_n+\beta_n}$.

При делении чисел a и b:

$a = p_1^{\alpha_1}\cdot p_2^{\alpha_2}\cdot p_3^{\alpha_3}\cdot\ldots\cdot p_n^{\alpha_n}$ (1)

$b = p_1^{\beta_1}\cdot p_2^{\beta_2}\cdot p_3^{\beta_3}\cdot\ldots\cdot p_n^{\beta_n}$ (2)

$a : b = p_1^{\alpha_1-\beta_1}\cdot p_2^{\alpha_2-\beta_2}\cdot p_3^{\alpha_3-\beta_3}\cdot\ldots\cdot p_n^{\alpha_n-\beta_n}$, $\alpha_1 \geq \beta_1$.

Общий признак делимости натуральных чисел, представленных в каноническом виде. Если натуральные числа a и b представлены в каноническом виде, то $a \vdots b$ в то и только в том случае, когда делимое a содержит все простые множители, содержащиеся в разложении делителя b, причем показатели этих множителей в делимом a не меньше, чем в делителе b.

Следствие 1. Если делимое a не содержит какой-либо простой множитель p, входящий в разложение делителя b, то a не разделится на b.

Следствие 2. Если какой-либо простой множитель, например p_1, является общим для делимого a и делителя b, но в делимое входит с показателем меньшим, чем в делителе, то a не делится на b.

Алгоритм нахождения наибольшего общего делителя данных натуральных чисел, представленных в каноническом виде. Чтобы найти наибольший общий делитель данных натуральных чисел, достаточно: 1) представить данные числа в каноническом виде и 2) взять произведение общих простых множителей, находящихся в данных числах, причем с наименьшими показателями из имеющихся в разложениях.

Алгоритм нахождения наименьшего общего кратного данных натуральных чисел, представленных в каноническом виде. Чтобы найти наименьшее общее кратное данных натуральных чисел: достаточно: 1) представить каждое данное число в каноническом виде; 2) взять произведение всех простых множителей, находящихся в данных числах, причем с наибольшими показателями из имеющихся в разложениях.

Признаки делимости на составное число. Признак делимости на 6, 15, 18.

Используем одно из свойств делимости, которое формулируется следующим образом: если число a делится на два любых из взаимнопростых числа, то оно делится на их произведение.

Справедливо и следующее утверждение: для того, чтобы число a делилось на некоторое составное число, необходимо и достаточно, чтобы оно делилось на простые множители, из которых состоит данное составное число.

Теорема. Для того, чтобы данное число делилось на число 6, необходимо и достаточно, чтобы оно делилось на 2 и 3.

Доказательство.

1. Необходимость: если число делится на 6, то оно делится на 2 и на 3.

Пусть $x \vdots 6$; $6 \vdots 2 \Rightarrow x \vdots 2$ (по свойству транзитности). $x \vdots 6$, $6 \vdots 3 \Rightarrow x \vdots 3$, ч.т.д.

2. Достаточность: если число делится на 2 и на 3, то оно делится на 6.

Доказательство.

Пусть $x \vdots 2$, $x \vdots 3$. Тогда по определению x будет являться общим кратным чисел 2 и 3. Наименьшим общим кратным чисел 2 и 3 является число 6. Но мы знаем, что любое общее кратное чисел делится на их наименьшее общее кратное Следовательно, x делится на 6.

Теорема. Для того, чтобы число делилось на 15, необходимо и достаточно, чтобы оно делилось на 3 и на 5.

Теорема. Для того, чтобы число делилось на 18, необходимо и достаточно, чтобы оно делилось на 2 и на 9.

Алгоритм Эвклида.

Отыскание наибольшего общего делителя чисел a и b предполагает предварительное разложение этих чисел на простые множители, что не всегда бываем простым делом. Существует другой способ нахождения наибольшего общего делителя чисел a и b, называемый алгоритм Эвклида. Действие этого алгоритма основывается на следующих трех утверждениях:

1. Если число a делится на число b, то наибольшим общим делителем чисел a и b является число b.

Т.к. a делится на b и b делится на b, то b будет являться общим делителем чисел a и b. Но любой общий делитель не превосходит наибольший общий делитель и не превосходит наименьшего числа (b). Значит, b является наибольшим общим делителем.

2. Если $a = b \cdot q + r$, где q – частное от деления числа a на b, а r – остаток от деления, то множество делителей чисел a и b совпадает со множеством делителей чисел b и r.

Доказательство.

a) Пусть d – общий делитель чисел b и r. Это значит, что $b \vdots d$, $r \vdots d$. Тогда по одному из свойств делимости, если $b \vdots d$, то и $(b \cdot q) \vdots d$.

Т.к. $(b \cdot q) \vdots d$ и $r \vdots d$, то по свойству делимости суммы $bq + r = a$ тоже делится на d. Т.е. мы показали, что если число d является общим делителем чисел b и r, то это число d является общим делителем чисел a и b

b) Пусть является делителем чисел a и b, тогда $b \cdot q$ тоже делится на d. По свойству разности $a - b \cdot q$ делится на d, но $a - b \cdot q = r$, следовательно, r делится на d, а значит, множество общих делителей чисел a и b равно множеству общих делителей чисел b и r.

c) Если $a = b \cdot q + r$, где $a, b, r \neq 0$, то наибольший общий делитель чисел a и b будет равен набольшему общему делителю чисел b и r, т.е. $D(a,b) = D(b,r)$.

Доказательство.

Поскольку в выше доказанном утверждении сказано, что множество общих делителей чисел a и b совпадает со множеством общих делителей чисел b и r, то в этих множествах должен быть наибольший общий элемент. Этим наибольшим общим элементом и является наибольший общий делитель чисел a и b.

Алгоритм Эвклида для нахождения наибольшего общего делителя чисел *a* и *b*.

Пусть число $a \geq b$. Если $a \vdots b$, то b является наибольшим общим делителем чисел a и b. Если при делении a на b получается остаток r, то $D(a,b) = D(b,r)$. И задача свелась к нахождению наибольшего общего делителя чисел b и r.

Если b делится нацело на r, то наибольшим общим делителем чисел b и r будет r (а соответственно $D(b,r) = D(a,b) = r$). Если b не делится нацело на r, то b можно представить в следующем виде: $b = rq_1 + r_1$. И тогда наибольший общий делитель чисел b и r равен наибольшему общему делителю чисел r и r_1, т.е $D(r, r_1) = D(b,r) = D(a,b)$.

Продолжая описанный принцип, получаем все меньшие и меньшие остатки. В конце концов, дойдем до остатка, на который будет делиться предыдущий остаток. Этот отличный от 0 остаток и будет наибольшим общим делителем чисел a и b.

Например, a=861, b=455, $a = b \cdot q + r$

1. 861:455=1 (ост. 406).
2. 455:406=1 (ост. 49)
3. 406:49=8 (ост. 14)
4. 49:14=3 (ост. 7)
5. 14:7=2 (ост. 0). Следовательно *НОД* (861, 455)=7.

Древнегреческий математик Эвклид известен в первую очередь не формулировкой рассмотренного выше алгоритма Эвклида, а фундаментальной работой «Начала», состоящей из 13 книг, на основе которых до сих пор строится наука геометрия. «Начала» Эвклида выдержали более 500 переизданий. В первой книге «Начал» Эвклида содержатся все знания о треугольниках, включая теоремы о равенстве сторон и углов треугольника, теорию параллельных прямых, понятие о параллелограмме и его площади. В этот же том были включены прямая и обратная теорема Пифагора. Во вторую книгу входят элементы геометрической алгебры, т.е. некоторые теоремы о равенстве фигур. Книга третья включает учение об окружности и круге, центральных и вписанных углах.

Вопросы и задания для самоконтроля:

1. Не пользуясь таблицами простых чисел, определить, являются ли следующие числа простыми: 253, 167, 571, 371, 463.
2. Используя известные признаки делимости чисел в десятичной системе, разложите на простые множители следующие составные числа: 306, 588, 1485, 3480.
3. Может ли сумма двух простых чисел быть простым числом?
4. Сформулируйте основные свойства простых чисел.
5. Найти с помощью канонического разложения и алгоритма Евклида наибольший общий делитель следующих чисел: 124 и 2684, 2520 и 1250.
6. Найдите a и b, если известно, что: а) a:b=11:13, D(a,b)=5; K(a,b)=165.
7. Сформулируйте алгоритм нахождения наименьшего общего кратного данных натуральных чисел и найдите *НОК* следующих чисел: 330, 1400 и 605.

§ 3. Системы счисления

Понятие числа возникло в глубокой древности. Тогда и возникла необходимость в названии и записи чисел.

Определение. Язык для наименования и записи чисел и выполнения действий над ними называют системой счисления.

Наибольшее распространение получила десятичная система счисления для записи чисел. Эта система счисления основана на группировании десятками и берет свое начало со счета по пальцам. Еще в 3 в. до н.э. основы десятичной системы счисления (СС) были даны Архимедом. Однако в том виде, в котором существует сейчас, десятичная СС была представлена в Индии. Арабы занесли ее в страны Западной и Восточной Европы. Распространению этого способа записи чисел способствовала книга среднеазиатского ученого аль Хорезми, названная «Об индийском счете». В Европе эта книга была издана в 11 в, а в России позиционная СС нашла достаточно полное отражение в известной арифметике Магницкого (1703 г. на славянском языке).

Однозначные числа назывались перстами, числа, состоящие из единиц и нулей – суставами, все остальные – сочинениями.

Различие позиционной и непозиционной СС

Определение. Позиционной СС называют такую СС, в которой знак для записи чисел обозначает различное число в зависимости от места его нахождения.

Например,125 и 251. В первом случае 1 обозначает число сотен, во втором – число единиц, аналогично и др. цифры в записи данных чисел.

Определение. Непозиционная СС характеризуется тем, что каждый знак всегда обозначает одно и то же число независимо от того, какое место оно занимает в записи числа.

Примерами непозиционной СС является римская и славянская нумерация. V – 5, X – 10, L – 50, С – 100, M – 1000, D – 500.

Славянская нумерация, которая использовалась в России в 11 в., является более удобной и стройной, чем римская. Данная СС является непозиционной. В этой СС числа обозначаются буквами славянского алфавита, над которыми для отличия ставится определенный знак – «титла»: а- «аз», $\tilde{а}$ - «1», б – "буки", $\tilde{б}$ – "2" и т.д.

К позиционным СС относятся десятичная СС, в которой для записи чисел используется десять цифр (0, 1, 2…9). Каждое число в десятичной СС записывается с помощью суммы разрядных слагаемых.

Например, $385=300+80+5=3\cdot10^2+8\cdot10^1+5$.

Определение. Десятичной записью натурального числа *x* называют его представление в виде $x = a_n\cdot10^n + a_{n-1}\cdot10^{n-1} + ...a_1\cdot10 + a_0$, где $a_0, a_1...a_n$ – цифры от 0 до 9.

Иногда для обозначения числа в десятичной системе СС используется следующая символика: $\overline{a_n a_{n-1} a_{n-2} ... a_1 a_0} = a_n\cdot10^n + a_{n-1}\cdot10^{n-1}... + a_1\cdot10 + a_0$.

Числа $1, 10, 10^2 ... 10^n$ при таком представлении называют разрядными единицами соответственно первого, второго и т.д. разрядов. Причем 10 единиц одного разряда представляют единицу следующего высшего разряда, т.е. отношение соседних разрядов равно 10 – основанию десятичной СС.

Три первых разряда десятичной записи числа объединяют в первую группу и называют классом единиц. В эту группу входят цифры, показывающие в записи числа число единиц, десятков и сотен.

Второй класс – класс тысяч – образуют следующие 3 разряда (4, 5 и 6-ой). В этот класс входят цифры, показывающие единицы тысяч, десятки тысяч и сотни тысяч.

Следующий класс – класс миллионов – состоит из 7, 8 и 9-го разрядов. Цифры в классе миллионов соответственно обозначают единицы миллионов, десятки и сотни миллионов.

567	891	234
класс миллионов	класс тысяч	класс единиц

Теорема. Любое натуральное число x можно представить в виде $x = a_n \cdot 10^n + a_{n-1} \cdot 10^{n-1} + \ldots + a_1 \cdot 10 + a_0$, где $a_n, a_{n-1}, \ldots, a_0$ принимают значения 0, 1, 2, 3, 4, 5, 7, 8, 9 и это представление единственно.

Теорема. Пусть даны два натуральных числа

1. n<m (Например, 1252 и 328) x и y, которые представлены в виде $x = a_n \cdot 10^n + a_{n-1} \cdot 10^{n-1} + a_{n-2} \cdot 10^{n-2} + \ldots + a_1 \cdot 10 + a_0$,

$y = b_m \cdot 10^m + b_{m-1} \cdot 10^{m-1} + b_{m-2} \cdot 10^{m-2} + \ldots + b_1 \cdot 10 + b_0$. Тогда число x меньше числа y, если выполняется одно из трех условий:

2. n=m, $a_n < b_n$ (Например, 456 и 782)

3. n=m, $a_n = b_n$, $a_{n-1} = b_{n-1}, \ldots$, $a_i < b_i$. (3423 и 3457).

Позиционные системы с основанием, не равным 10.

Кроме десятичной позиционной системы существуют другие позиционные системы с основанием большим либо равным двум (p≥2). Например, двоичная, троичная и т.д.

Любое число в p-ичной системе записывают с помощью цифр от 0 до p-1.

Любое число в p-ной системе записывают в следующем виде:

$x = a_n \cdot p^n + a_{n-1} \cdot p^{n-1} + \ldots + a_1 p^1 + a_0$ (1), где p – основание заданной СС.

Теорема. Пусть x – любое число в p-ичной позиционной системе. Тогда оно представимо единственным образом в виде суммы (1).

Например, $2012_3 = 2 \cdot 3^3 + 0 \cdot 3^2 + 1 \cdot 3^1 + 2$

Действия над числами в позиционной СС с основанием p выполняются по тем же правилам, что и в десятичной позиционной СС. Необходимо лишь иметь соответствующие таблицы, например, сложения или умножения в заданной позиционной СС.

Рассмотрим пример: $2012_3 + 111_3 = 2200_3$

Таблица сложения в троичной СС

	0	1	2
0	0	1	2
1	1	2	10
2	2	10	11

$$\begin{array}{r} + \begin{array}{r} 2012_3 \\ 111_3 \end{array} \\ \hline 2200_3 \end{array}$$

Таблица умножения в троичной СС

	0	1	2
0	0	0	0
1	0	1	2
2	0	2	11

$2012_3 \cdot 111_3 =$

$$\begin{array}{r} 2012_3 \\ \underline{111_3} \\ 2012 \\ 2012 \\ \underline{2012} \\ 1001102_3 \end{array}$$

Пусть в p-ичной СС задано число x, представленое в виде $x = a_n \cdot p^n + a_{n-1} \cdot p^{n-1} + ... + a_1 p^1 + a_0$. Найдем запись данного числа в десятичной СС. Число x представлено в виде суммы степеней основания p с коэффициентами. В этой сумме $a_n, a_{n-1} ... a_1, a_0$ цифры, принадлежащие десятичной СС. Поэтому выполнив в десятичной СС действия в записи (1), мы тем самым осуществим перевод числа x из p-ичной системы в десятичную. $2012_3 = 2 \cdot 3^3 + 0 \cdot 3^3 + 1 \cdot 3^1 + 2 = 54 + 3 + 2 = 59$ (в десятичной СС)

Может быть поставлена и обратная задача: число задано в десятичной СС, а его нужно перевести в p-ичную. Пусть задано число x в p-ичной СС в виде (1). Тогда это число можем переписать в следующем виде: $x = p(a_n \cdot p^{n-1} + a_{n-1} \cdot p^{n-2} + ... + a_1) + a_0$ (2). Из записи (2) видим, что при делении x на p получаем неполное частное, представленное в виде, записанном в скобках и a_0 – остаток, получаемый при делении x на p. Если же, продолжая дальше, это неполное частное разделить на p, то a_1 – будет остаток от этого деления.

Т.о., перевод числа x в p-ичную СС представляет собой следующий алгоритм:

1) число x делят на p. Остаток, полученный от деления дает последнюю цифру a_0 в p-ичной записи данного числа.

2) При делении полученного неполного частного на p получаем остаток a_1, который представляет собой предпоследнюю цифру в p-ичной записи данного числа и т.д.

Продолжая последовательное деление неполных частных, найдем данное число в p-ичной СС.

Например, 172092 нужно перевести в восьмеричную СС.

172092:8=21511 (ост. 4)

21511:8=2688 (ост. 7)

2688:8=336 (ост. 0)

336:8=42 (ост. 0)

42:8=5 (ост. 2)

$172092 = 520074_8$

Вопросы и задания для самоконтроля:

1. Что значит представить данное натуральное число a в позиционной системе при основании >1.

2. Что называют цифрами в данной позиционной системе? Сколько цифр в пятиричной системе? в двенадцатеричной системе? в системе с основанием p?

3. Сколько в десятичной системе счисления всего шестизначных чисел, у которых сумма цифр равна 2?

4. Приведите примеры задач разных видов, решаемых в начальных классах при изучении вопросов нумерации.

Глава 6

ПРОБЛЕМА РАСШИРЕНИЯ ПОНЯТИЯ ЧИСЛА

§ 1. Принцип расширения числовых систем и его реализация в методике обучения

Одним из путем введения новых для учащихся числовых множеств является применение способа, называемого расширением числовых систем. При этом более широкое числовое множество стремятся построить так, чтобы оно удовлетворяло определенным требованиям.

Пусть нам надо расширить числовое множество А до множества В. Тогда:

1. Множество А должно быть подмножеством множества В.

2. Важнейшие отношения (равно, больше, меньше) и арифметические действия на множестве В должны быть определены так, чтобы для элементов множества $A \subset B$ они совпадали с одноименными отношениями и операциями, определенными на множестве А до его расширения.

3. В расширенном множестве, множестве B_{+}, должна стать выполнимой та операция (в рассматриваемом нами примере это деление), которая была не всегда выполнимой в множестве А. (Как следует из определения этой операции, деление на 0, невыполнимо ни в каком числовом множестве.).

Данное требование является целевым, при несоблюдении которого теряет смысл сама идея расширения числового множества.

4. Расширение числового множества должно быть минимальным.

Это требование предупреждает излишнее для достижения некоторых поставленных целей усложнение теории и практики.

Перечисленные требования можно считать аксиомами расширения, т.к. в них отражены основные свойства числовых систем, находящихся в отношении включения. Они непременно должны быть соблюдены на каждом шаге перехода от уже известного числового множества к его расширению.

Например, $N \subset Q \subset R_{+} \subset R$.

Существует несколько способов расширения числового множества А до числового множества В.

а) можно сначала построить множество В изолированно от множества А, а затем установить, что в множестве В выполняются все аксиомы расширения;

б) можно дополнить известное множество чисел А новым множеством чисел С так, чтобы их объединение $B = A \cup C$ удовлетворяло аксиомам 1-4.

С методической точки зрения в обучении более предпочтительным является второй из названных способов. Именно он и реализуется, когда множество N_0 целых неотрицательных чисел дополняется множеством отрицательных целых чисел и образуется новое числовое множество Z – целых чисел. Аналогично строится и множество действительных чисел как объединение множества рациональных и множества иррациональных чисел $R = Q \cup I$.

Хотя логически наиболее целесообразной является следующая последовательность расширений $N \subset Z \subset Q \subset R \subset C$, где C – множество комплексных чисел, в школьном обучении прослеживается иной путь: $N \subset Q_+ \subset Q \subset R \subset C$. Такой подход отражает последовательность этапов исторического развития понятия о числе.

§ 2. Аддитивно-скалярная величина и этапы ее формирования в начальной школе

Потребности практической деятельности человека с давних времен связаны со сравнением и измерением физических, геометрических и тому подобных свойств реальных объектов. Такое сравнение привело в математике к понятию величины, под которой понимают свойство реальных объектов или явлений. В математике существует и другой подход к раскрытию понятия величины как всего того, что может быть измерено количественно.

Например, свойство тел иметь протяженность называют длиной; степень нагретости тела – температурой, меру инертности тел – массой.

Все величины можно разделить на однородные и разнородные. Однородные величины обладают следующими свойствами:

1) однородные величины можно сравнивать, т.е. можно сказать, что одна из них больше или меньше либо равна другой;

2) однородные величины можно складывать;

3) результат сложения двух однородных величин есть величина того же рода;

4) любую величину можно умножать на действительное число, такое, что $b = ka$, где k – некоторое действительное число, a – первоначальная величина, b – величина, полученная после умножения на число k;

5) величины одного рода можно разделить одну на другую.

1. Измерение величин.

Измерить величину – это значит сравнить ее с однородной величиной, принятой за единицу измерения.

Существует прямое и косвенное измерение величин. Прямое измерение – это непосредственное сравнение величины с единицей измерения (измерение длины тела путем его сравнения с единицей длины; измерение площади тела с помощью палетки; измерения массы тела путем взвешивания).

Косвенное измерение – это нахождение величины по формуле. Например, $S_{трап}$ = полусумма оснований, умноженная на высоту, $S = v \cdot t$, $I = \frac{U}{R}$, $S_{круга} = \pi R^2$, $S_{\Delta} = \frac{1}{2}ah$.

В 1960 г. во Франции была принята международная система измерения величин (СИ), в которую вошло 7 основных величин, 2 дополнительные, а остальные – производные от этих. Были предложены и основные единицы измерения этих величин.

Основные величины	Единицы их измерения
длина	1 метр
масса	1 килограмм
время	1 секунда
температура	1 градус Кельвин (1К°)
сила тока	1 ампер
сила света	1 свеча (1 канделла)
количество вещества	1 моль

Дополнительные величины	Единицы их измерения
измерение угла на плоскости	1 радиан
измерение пространственного угла	1 стерадиан

Кратные единицы измерения	Дольные единицы измерения
дека – (10^1)	деци – (10^{-1})
гекта – (10^2)	санти – (10^{-2})
кило – (10^3)	милли – (10^{-3})
мега – (10^6)	микро – (10^{-6})
	нано – (10^{-9})
	пико – (10^{-12})

Все величины делятся на скалярные, векторные и тензорные.

Скалярные величины определяются только числовым значением (длина, площадь, масса, время).

Векторные – определяются числовым значением и направлением $\bar{v}$ (скорость), $\bar{F}$ (сила), $\bar{a}$, $\bar{S}$ (перемещение).

Тензорные – задаются матрицей.

Измерение величин позволяет свести сравнение их к сравнению чисел, операции над величинами свести к операциям над числами.

1. Если величины a и b измерены при помощи единицы измерения e, то отношения между величинами a и b будут точно такими же, как отношения между их числовыми значениями.

Если a=b, то $f_e(a)=f_e(b)$;

если a>b, то $f_e(a)>f_e(b)$;

если a<b, то $f_e(a)<f_e(b)$.

2. Если величины a, b измерены при помощи единицы измерения e, то чтобы найти числовое значение суммы этих величин, достаточно сложить числовые значения этих величин $f_e(a+b)=f_e(a)+f_e(b)$.

3. Для того, чтобы величину умножить на действительное число, необходимо на это число умножить численные значения этой величины (если $a=k\cdot b$, $f_e(a)=k\cdot f_e(b)$).

В начальных классах у учащихся формируются некоторые интуитивные представления о величинах и об их измерении, т.е. используется интуитивный подход, в соответствии с которым формируется представление о величине как о некотором свойстве предметов или явлений, связанном прежде всего с измерением.

Для формирования общего представления о величинах и их измерении необходимо, чтобы деятельность учащихся при изучении конкретных величин характеризовалась некоторой общностью.

Основу этой общности составляет как математическая трактовка величины, так и те психологические особенности младших школьников, которые необходимо учитывать при построении обучения.

На этой основе можно выделить 8 этапов формирования представлений о величинах, в соответствии с которыми осуществляется деятельность учащихся, направленная на их усвоение.

1. Выяснение и уточнение имеющихся у школьников представлений, о данной величине (обращение к опыту ребенка).

2. Сравнение однородных величин (визуально, с помощью ощущений, наложением, приложением, путем использования различных мерок).

3. Знакомство с единицей данной величины и с измерительным прибором.

4. Формирование измерительных умений и навыков.

5. Сложение и вычитание однородных величин, выраженных в единицах одного наименования (при решении задач).

6. Знакомство с новыми единицами величин в тесной связи с изучением нумерации и сложения чисел. Перевод однородных величин, выраженных в единицах одного наименования, в величины, выраженные в единицах двух наименований, и наоборот.

7. Сложение и вычитание величин, выраженных в единицах двух наименований.

8. Умножение и деление величины на число.

2. Аксиоматическое определение аддитивно-скалярной величины. Пусть дано множество объектов М, которое обладает свойством А (так, например, множество М есть множество различных отрезков, каждый из которых имеет определенную длину, а А – это свойство отрезков иметь протяженность, т.е. длину).

Определение. Свойство А элементов множества М называется аддитивно-скалярной величиной, если существует отображение f множества М на множество положительных действительных чисел (R_+), обладающее следующими свойствами (аксиомами величины):

1. Существует элемент из множества М такой, что $f(e)=1$.

2. Если элемент а эквивалентен элементу b, причем $a,b\in M$, то $f(a)=f(b)$.

3. Если на множестве М определена операция сложения и a= b+c, a, b, $c\in M$, то $f(a)=f(b)+f(c)$.

4. Если на множестве М определены два отображения f_1 и f_2, удовлетворяющие аксиомам 1-3, то существует такое $k\in R_+$, что справедливо следующее равенство: $f_2(a)=k\cdot f_1(a)$.

1-ая аксиома утверждает, что при любом измерении существует эталон (единица измерения). Например, при измерении длины отрезка таким эталоном является длина отрезка, принятого за единичный.

2-ая аксиома утверждает, что равные величины имеют равные численные значения (при заданной единице измерения).

3-я аксиома говорит о том, что если на множестве М определено сложение, то сумма двух элементов из этого множества соответствует сумме их численных значений.

4-я аксиома говорит о том, что для того, чтобы изменить величину в k раз, нужно в k раз изменить числовое значение данной величины.

3. Длина отрезка и ее измерение.

Определение. Длиной отрезка называют аддитивно-скалярную величину, удовлетворяющую следующим требованиям:

1) за единицу (эталон длины) принимают длину единичного отрезка, т.е. f(e)=1;

2) равные отрезки имеют равные длины, т.е. если заданы отрезки a и b, которые равны между собой, то равны их численные значения, т.е. $f(a)=f(b)$;

3) если отрезок разбит на несколько составляющих его отрезков, то длина данного отрезка равна сумме длин отрезков, его составляющих. Пусть отрезок c состоит из отрезков a и b, тогда численное значение длины отрезка c равно сумме численных значений длин отрезков a и b.

Свойства длин отрезков.

1. При выбранной единице измерения длина любого отрезка однозначно определяется положительным действительным числом и наоборот: для каждого положительного действительного числа найдется отрезок, длина которого выражается этим положительным действительным числом.

2. Если два отрезка равны, то при выбранной единице измерения численные значения длин этих отрезков тоже равны и наоборот.

3. Если данный отрезок есть сумма нескольких отрезков, то численное значение длины отрезка равно сумме численных значений отрезков, его составляющих и наоборот.

4. Если длины отрезков a и b таковы, что $a = k \cdot b$, где k – положительное действительное число, а длины отрезков измерены при помощи одной единицы измерения e, то чтобы найти численные значения длины отрезка a, нужно численное значение длины отрезка b умножить на положительное действительное число k.

4. Площадь фигуры и ее измерение

Определение. Площадью фигуры называется аддитивно-скалярная величина, определенная для каждой фигуры следующим образом:

1. За единицу площади принимают площадь квадрата со стороной равной единичному отрезку ($S = e^2$).

2. Равные фигуры имеют равные площади, т.е. если $F_1 = F_2$, то $S(F_1) = S(F_2)$. (Фигуры называются равными, если они при наложении совпадают.)

3. Если фигура F состоит из нескольких фигур, например, F_1, F_2, то площадь данной фигуры равна сумме площадей фигур, ее составляющих, т.е. $S(F) = S(F_1) + S(F_2)$.

Измерить площадь фигуры – это значит, сравнить ее с площадью эталона (площадью единичного квадрата). Результатом сравнения является такое число c>0, такое, что $S(F) = c \cdot e^2$. Например, 5 см^2=5·1 см^2.

Свойства сравнения площадей.

1. Если фигуры F_1 и F_2 равны, то при одной и той же единице измерения равны численные значения их площадей.

2. Если фигура F состоит из фигур F_1 и F_2, то численное значение площади фигуры F равно сумме численных значений площадей F_1 и F_2.

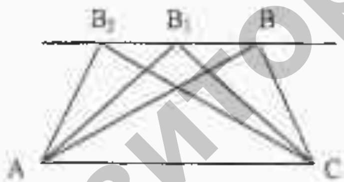
3. При замене единицы измерения площади численное значение площади увеличивается (уменьшается) во столько раз, во сколько раз новая единица измерения площади меньше (больше) старой.

4. При замене единицы измерения длины численное значение длины отрезка увеличивается (уменьшается), если единица измерения уменьшается (увеличивается).

Одним из способов измерения площади фигуры является измерение с помощью палетки – прозрачной пленки с нанесенными на ней квадратами единичной площади. Такое измерение площади называется прямым. На практике часто пользуются косвенным измерением площади, т.е. вычислением площади по формулам: $S_{\Delta} = \frac{1}{2}ah$, $S_{круга} = \pi R^2$, $S_{трап} = \frac{a+b}{2}h$.

Определение. Фигуры, которые имеют одинаковые площади, называют равновеликими.

Не всегда равновеликие фигуры являются равными, но всегда равные фигуры являются равновеликими.



Равновеликие треугольники

§ 3. Измерение отрезков. Равносильные дроби

Пусть дан отрезок AB и единичный отрезок e. Если в длине отрезка AB длина единичного отрезка e укладывается целое число раз, то длина отрезка AB выражается натуральным числом. Если же в длине отрезка AB единичный отрезок не укладывается целое число раз, то поступают следующим образом: разбивают единичный отрезок e на n равных между собой отрезков и вводят новый единичный отрезок e_1, равный $\frac{e}{n}$. Пусть единичный отрезок e_1 укладывается в длине отрезка AB m раз, т.е. $(AB) = me_1 = m\frac{e}{n} = \frac{m}{n}e$.

Тогда для выражения длины отрезка AB используется пара чисел (m, n), где вторая компонента показывает, на сколько равных частей делится единичный отрезок е, а первая – сколько таких частей укладывается в измеряемом отрезке АВ. Обычно такую пару записывают в виде $\frac{m}{n}$.

Определение. Пара чисел $\frac{m}{n}$, где т и п – натуральные числа, называется обыкновенной дробью.

Во втором классе учащиеся начальной школы знакомятся с понятием доли, а в третьем – с понятием дроби. Доля представляет собой дробь с числителем 1. Вначале рассматриваются дроби со знаменателем, не превышающим 10, и только правильные дроби (числитель больше знаменателя).

Если длина отрезка выражается дробью $\frac{m}{n}$, то длину этого отрезка можно выразить с помощью бесконечного множества обыкновенных дробей. Такие дроби называют эквивалентными или равносильными.

Определение. Дроби, выражающие длину одного и того же отрезка при единице измерения е, называют эквивалентными или равносильными дробями.

Например, $\frac{1}{2} \sim \frac{2}{4} \sim \frac{3}{6} \sim \frac{4}{8}$

Рассмотрим отношение равносильности дробей на множестве всех дробей. Оно обладает следующими свойствами:

1. рефлексивности – каждая дробь эквивалентна (равна) сама себе.
2. симметричности – если $\frac{a}{b} \sim \frac{c}{d}$, то $\frac{c}{d} \sim \frac{a}{b}$.
3. транзитивности – если $\frac{a}{b} \sim \frac{c}{d}$, $\frac{c}{d} \sim \frac{m}{n}$, то $\frac{a}{b} \sim \frac{m}{n}$.

Следовательно, отношение равносильности на множестве дробей является отношением эквивалентности и позволяет разбить все множество дробей на классы равносильных дробей.

Определение. Класс равносильных дробей называют положительным рациональным числом.

Поскольку класс равносильных дробей определяется любым своим представителем, любая дробь из класса равносильных дробей является рациональным числом. Чаще всего в этом качестве используют несократимую дробь.

Определение. Несократимой дробью называют дробь, числитель и знаменатель которой – взаимнопростые числа, т.е. наибольший общий делитель числителя и знаменателя равен 1.

Примеры классов равносильных дробей: $A = \left\{\frac{1}{2}, \frac{2}{4}, \frac{3}{6} \ldots\right\}$,
$B = \left\{\frac{1}{3}, \frac{2}{6}, \frac{3}{9} \ldots\right\}$.

Теорема 1 (о равносильности дробей). Дроби $\frac{m}{n}$, $\frac{p}{q}$ равносильны (эквивалентны), тогда и только тогда, когда $m \cdot q = p \cdot n$

Необходимость: если дроби $\frac{m}{n}$ и $\frac{p}{q}$ равносильны, то $m \cdot q = p \cdot n$

Доказательство. Т.к. дроби $\frac{m}{n}$ и $\frac{p}{q}$ являются равносильными, то они выражают длину одного и того же отрезка (следует из определения равносильности дробей).

Для измерения этого отрезка введем новую единицу измерения. И возьмем в качестве новой единицы измерения $\frac{1}{nq}$ часть единичного отрезка. Тогда длина данного отрезка выразится числом $\frac{m}{n} : \frac{1}{nq} = \frac{mnq}{n} = mq \leftarrow mq$.

Кроме того, длина данного отрезка может быть выражена следующим числом: $\frac{p}{q} : \frac{1}{nq} = \frac{p}{q} \cdot \frac{nq}{1} = p \cdot n$.

В новой единице измерения длина отрезка выражается числом $m \cdot q$ или числом $p \cdot n$, а т.к. эти числа выражают длину одного и того же отрезка, то они равны.

Достаточность. Если $m \cdot q = p \cdot n$, то дроби $\frac{m}{n}$ и $\frac{p}{q}$ являются равносильными.

Пусть дано $m \cdot q = p \cdot n$. Докажем, что $\frac{m}{n}$ и $\frac{p}{q}$ равны.

Доказательство. Т.к. числа $m \cdot q$ и $p \cdot n$ равны, то эти числа выражают длину одного и того же отрезка. Разделим обе части этого равенства на число $n \cdot q$. Получим в левой части выражение $\frac{m}{n}$, а в правой $\frac{p}{q}$. Получили 2 дроби, которые выражают длину одного и того же отрезка. Следовательно, эти дроби равносильны.

Теорема 2. Для каждого класса равносильных дробей существует одна несократимая дробь.

Доказательство. Предположим противное. Пусть в классе равносильных дробей существуют две несократимые дроби $\frac{m}{n}$ и $\frac{p}{q}$ $(\text{НОД}(m,n)=1; \text{НОД}(p,q)=1)$.

Т.к. эти две дроби принадлежат одному классу равносильных дробей, то дроби $\frac{m}{n}$ и $\frac{p}{q}$ равносильные, а значит, (по только что доказанной теореме) $m \cdot q = p \cdot n$ (1).

Поскольку левая часть равенства (1) делится на q, то и правая тоже делится на q. Произведение $p \cdot n$ будет делится на q, если один из сомножителей делится на q. Но p на q не делится, т.к. по условию $\text{НОД}(p,q)=1$. Значит, на q делится число n, т.е. n представимо в виде $n = k \cdot q$ (2).

Подставим (2) в (1):

$m \cdot q = p \cdot k \cdot n$

$m = p \cdot k$

$m = k \cdot p$.

Число $m = k \cdot p$ делится на k и число $n = kq$ делится на k. Отсюда следует $\frac{m}{n} = \frac{k \cdot p}{k \cdot q}$ и, значит, дробь $\frac{m}{n}$ является сократимой, т.к. числитель и знаменатель можно разделить на k, а это противоречит условию о том, что $\frac{m}{n}$ несократима. Следовательно, наше предположение о том, что в классе равносильных дробей существует две различные несократимые дроби неверно.

А значит, в классе равносильных дробей существует одна несократимая дробь.

Основное свойство дроби: числитель и знаменатель дроби можно умножить или разделить на одно и то же натуральное число. При этом получим дробь, равносильную данной.

Доказательство. Пусть дана дробь $\frac{m}{n}$ и пусть $m = km_1$, $n = kn_1$ (*).

Нужно доказать, что дроби $\frac{m}{n}$ и $\frac{m_1}{n_1}$ являются равносильными, т.е. по теореме 1 нужно доказать, что $m \cdot n_1 = n \cdot m_1$.

Рассмотрим равенство *. В 1-ом равенстве обе части его умножим на n_1. Во 2-ом равенстве обе части умножим на m_1.

Получим: $n_1 m = k n_1 m_1$
$m_1 n = k n_1 m_1$ (**)

В равенствах (**) правые части равны, следовательно, равны и левые, т.е. $n_1 m = m_1 n$, а значит, по теореме (1) дроби $\frac{m}{n}$ и $\frac{m_1}{n_1}$ являются равносильными.

§ 4. Множество положительных рациональных чисел и операции над ними

Покажем, что множество натуральных чисел включено во множество положительных рациональных чисел, т.е. каждое натуральное число является вместе с тем и рациональным.

Пусть длина отрезка а при выбранной единице измерения е выражается натуральным числом т, т.е. $a = m \cdot e$.

Разобьем единичный отрезок е на k равных частей и примем k-тую часть этого единичного отрезка за новую единицу измерения. k-тая часть единичного отрезка будет укладываться в отрезке а $m \cdot k$ раз, т.е. длина отрезка а будет равна $a = \frac{m \cdot k}{k} e$, а значит длина отрезка а с длиной, выраженной натуральным числом т может быть выражена рациональным числом $\frac{m \cdot k}{k}$. Т.о. любое натуральное число представимо в виде рационального числа, а значит, множество натуральных чисел N включено во множество положительных рациональных чисел Q_+.

Пусть даны отрезки а, b, с. Эти отрезки таковы, что $c = a + b$. Пусть дана выбранная единица измерения е. Длина отрезка а выражается числом $\frac{m}{n}$, т.е. $a = \frac{m}{n} e$. Длина отрезка b выражается числом $\frac{p}{q}$, т.е. $b = \frac{p}{q} e$.

Требуется найти длину отрезка с.

Т.о., чтобы найти длину отрезка с, необходимо сложить два рациональных числа $\frac{m}{n}$ и $\frac{p}{n}$. Причем возможны в этом случае два вариантаЕсли знаменатели этих дробей одинаковы, т.е. $n = q$, то сложение дробей происходит следующим образом: $\frac{m}{n} + \frac{p}{n}$. При этом результат сложения будет дробь, в числителе которой будет находиться число, равное сумме числителей двух дробей, а в знаменателе – общий для этих двух дробей знаменатель, т.е. $\frac{m}{n} + \frac{p}{n} = \frac{m + p}{n}$.

2. Возможна вторая ситуация, когда два рациональных числа, представленные в виде дробей, имеют разные знаменатели (n и q), и необходимо сложить числа $\frac{m}{n}$ и $\frac{p}{q}$. В этом случае поступают следующим образом:

1) приводят дроби к общему знаменателю, т.е. находят наименьшее общее кратное двух знаменателей;

2) наименьшее общее кратное чисел n и q делят вначале на знаменатель первой дроби и получают дополнительный множитель первой дроби; затем наименьшее общее кратное делят на знаменатель второй дроби и получают дополнительный множитель второй дроби;

3) дополнительный множитель первой дроби умножают на числитель первой дроби, дополнительный множитель второй дроби умножают на числитель второй дроби;

4) полученные произведения складывают и результат сложения будет являться числителем суммы двух дробей.

5) При необходимости дробь сокращают.

Как видим, сложение рациональных чисел по сути дела сводится к операциям над натуральными числами.

Например, $\frac{2^{\backslash 3}}{5}+\frac{1^{\backslash 5}}{3}=\frac{6}{15}+\frac{5}{15}=\frac{11}{15}$.

Определение. Под суммой положительных рациональных чисел понимают положительное рациональное число вида $\frac{m}{n}+\frac{p}{q}=\frac{mq+pq}{nq}$.

Теорема. Сумма двух положительных рациональных чисел всегда существует и единственна.

Сложение рациональных чисел, как и сложение натуральных чисел, обладает свойствами а) коммутативности и б) ассоциативности, т.е.

а) $\frac{m}{n}+\frac{p}{q}=\frac{p}{q}+\frac{m}{n}$

Доказательство. $\frac{m}{n}+\frac{p}{q}=\frac{mq+pn}{nq}=\frac{pn+mq}{mq}=\frac{pn}{nq}+\frac{mq}{nq}=\frac{p}{q}+\frac{m}{n}$

$НОД(n;q)=1$

б) Пусть дано три рациональных числа (положительных) $\frac{m}{n}$, $\frac{p}{q}$, $\frac{r}{s}$.

$\left(\frac{m}{n}+\frac{p}{q}\right)+\frac{r}{s}=\frac{m}{n}+\left(\frac{p}{q}+\frac{r}{s}\right)$

Доказать самостоятельно.

Определение. Пусть даны два положительных рациональных числа a и b. Рациональное число a>b, если существует такое рациональное число c, что a=b+c ($a>b \Leftrightarrow \exists c \in Q_+, a=b+c$).

Если число a представимо в виде дроби $\frac{m}{n}$, а число b – в виде дроби $\frac{p}{q}$, то число a будет больше числа b тогда и только тогда, когда mq будет больше pn.

Например, сравним два рациональных числа $\frac{3}{4}$ и $\frac{2}{3}$. $\frac{3}{4} > \frac{2}{3}$, т.к. $3 \cdot 3 > 2 \cdot 4$.

Если даны два рациональных числа с одинаковыми знаменателями: $\frac{m}{n}$ и $\frac{p}{n}$, то согласно этому правилу, если $mn > pn$, то первая дробь больше второй, т.к. $m > p$. При сравнении дробей с одинаковым знаменателем мы сравниваем числители (больше та, у которой числитель больше).

На множестве положительных рациональных чисел мы можем задать отношение порядка. Это значит, что для любых двух положительных рациональных чисел можно установить, какое из них больше другого. Отношение порядка, как известно, обладает свойствами антирефлексивности, асимметричности и транзитивности (для строгого порядка).

Произведение положительных рациональных чисел. Операция умножения на множестве положительных рациональных чисел.

Как известно, сложение положительных рациональных чисел можно обосновать, ссылаясь на сложение отрезков. Операция умножения отрезков не определена, следовательно, умножение рациональных чисел мы не можем связать с умножением отрезков.

Умножение положительных рациональных чисел можно увязать с переходом от одной единицы измерения к другой.

Пусть дан отрезок a и его длина при единице измерения e выражалась числом: $a = \frac{m}{n}e$ (1) $\Rightarrow a \cdot n = m \cdot e$.

Введем новый единичный отрезок e_1. Связь между старым единичным отрезком e и новым единичным отрезком e_1 устанавливается следующим образом: $e = \frac{p}{q} \cdot e_1$ (2) $\Rightarrow e \cdot q = p \cdot e_1$.

$a \cdot n = m \cdot e$ (умножим обе части равенства на q. Получим $anq = mqe$).

$e \cdot q = p \cdot e_1$ (умножим обе части равенства на m Получим $mqe = mpe_1$).

На основе свойства транзитивности $\Rightarrow$ $anq = mpe_1$

$$a = \frac{mp}{nq} e_1 = \frac{m}{n} \cdot \frac{p}{q} e_1 \Rightarrow \frac{m \cdot p}{n \cdot q} = \frac{m}{n} \cdot \frac{p}{q}.$$

Определение. Под произведением положительных рациональных чисел $\frac{m}{n}$ и $\frac{p}{q}$ понимают положительное рациональное число вида $\frac{m \cdot p}{n \cdot q}$.

Вычитание положительных рациональных чисел.

Вычитание на множестве положительных рациональных чисел вводится как операция, обратная сложению, т.е. такая операция, с помощью которой по известной сумме двух рациональных чисел и одному из слагаемых находится второе слагаемое.

Пусть сумма двух положительных рациональных чисел равна $\frac{p}{q}$, а одно из слагаемых равно $\frac{r}{s}$. Тогда второе слагаемое находится путем вычитания из суммы $\frac{p}{q}$ одного из слагаемых $\frac{r}{s}$. Т.е. находим разность $\frac{p}{q} - \frac{r}{s}$.

Определение. Разностью двух положительных рациональных чисел $\frac{p}{q}$ и $\frac{r}{s}$ называют рациональное число вида $\frac{p \cdot s - r \cdot q}{q \cdot s}$. Разность двух данных положительных рациональных чисел существует, если $p \cdot s > r \cdot q$.

Если данные две дроби имеют разные знаменатели, то разность находится путем приведения дробей к общему знаменателю, а дальше алгоритм нахождения разности идет по аналогичной схеме нахождения суммы рациональных чисел с разными знаменателями.

Если два положительных числа имеют один и тот же знаменатель, то вычитание этих рациональных чисел сводится к вычитанию числителей, причем нахождение разности возможно только в случае, когда $p > r$, т.е. числитель уменьшаемого будет больше числителя вычитаемого.

Операция вычитания на множестве положительных рациональных чисел является частично определенной. Это значит, что не для всякой пары положительных рациональных чисел при вычитании получится положительное рациональное число.

Вычитание на множестве положительных рациональных чисел определено, если уменьшаемое больше вычитаемого, единственно для заданных двух положительных рациональных чисел и сводится по существу к действиям на натуральными числами.

Деление на множестве положительных рациональных чисел

Определение. Деление на множестве положительных рациональных чисел является операцией, обратной умножению, т.е. таким действием, с помощью которого по известному произведению и одному из сомножителей находится второй сомножитель.

Выведем правило деления на множестве положительных рациональных чисел. Пусть $\frac{p}{q}$ – произведение двух положительных рациональных чисел, $\frac{r}{s}$ – один из сомножителей. Неизвестный сомножитель – $\frac{x}{y}$.

По определению произведения положительных рациональных чисел имеем: $\frac{r}{s}\cdot\frac{x}{y}=\frac{p}{q}$.

Используя правило о двух эквивалентных дробях, получаем $r\cdot x\cdot q=p\cdot s\cdot y$ (1).

Умножим обе части этого равенства на число, равное $\frac{1}{ryq}$;

$\frac{rxq}{ryq}=\frac{psy}{ryq}$, $\frac{x}{y}=\frac{ps}{rq}$, $\frac{x}{y}=\frac{p}{q}\cdot\frac{s}{r}$.

Для того, чтобы рациональное число $\frac{p}{q}$ разделить на рациональное число $\frac{r}{s}$, достаточно число $\frac{p}{q}$ умножить на число, обратное $\frac{r}{s}$.

Определение. Частным двух положительных рациональных чисел $\frac{p}{q}$ ($p>0$ и $q\neq 0$) и $\frac{r}{s}$ ($r>0$, $s\neq 0$) называют положительное рациональное число вида $\frac{p\cdot s}{q\cdot r}$.

Определение. Взаимнообратными называют числа, при умножении которых получаем единицу.

Множество положительных рациональных чисел обладает следующими свойствами:

1. Множество положительных рациональных чисел упорядочено.
2. На множестве положительных рациональных чисел нет наименьшего положительного рационального числа.

3. Множество рациональных чисел бесконечно, т.е. если предположить, что имеется какое-то максимальное рациональное число, то прибавив 1, мы получим число, больше предполагаемого.

4. Множество положительных рациональных чисел есть множество счетное, иначе: положительные рациональные числа можно пронумеровать, т.е. привести во взаимно однозначное соответствие с натуральными числами.

Множество всех положительных рациональных чисел может быть также получено как естественное расширение множества целых неотрицательных чисел, таких, что.

1. Множество натуральных чисел является собственным подмножеством положительных рациональных чисел, т.е. множество Q_+ содержит в себе множество натуральных чисел.

2. Во множестве положительных рациональных чисел Q_+ определены те же арифметические операции (сложение и умножение), что и на множестве целых неотрицательных чисел.

Эти операции ставят в соответствие любым двум положительным рациональным числам $(a, b \in Q_+)$ число с, принадлежащее этому же множеству.

3. Сложение и умножение на множестве положительных рациональных чисел обладают свойствами коммутативности и ассоциативности.

4. В расширенном множестве положительных рациональных чисел выполнима операция деления (кроме деления на нуль), которое во множестве целых чисел не всегда выполнимо. Частное двух положительных рациональных чисел принадлежит множеству Q_+.

§ 5. Иные расширения числовых систем

Ранее было последовательно проведено расширение множества натуральных чисел до множества целых чисел и расширение множества целых чисел до множества рациональных чисел. Множество всех рациональных чисел представляет собой множество, замкнутое относительно операций сложения, умножения, вычитания и деления (кроме деления на нуль), - сумма, произведение, разность и частное двух рациональных чисел опять будет рациональным числом.

Однако, оказывается, что существуют алгебраические и геометрические задачи, которые не имеют решения в множестве рациональных чисел. Так задачей, часто не имеющей решения в множестве рациональных чисел, является извлечение корня из положительного целого числа. Например, число $\sqrt{2}$ не является рациональным числом, т.е. его нельзя записать в виле $\frac{m}{n}$, где m и n – целые числа и $n \neq 0$. Исторически возникновение чисел, которые не могут быть представлены в виде $\frac{m}{n}$, т.е. не являются рациональными числам, связано с открытием несоизмеримости отрезков.

Определение. Соизмеримые отрезки – отрезки, длина которых выражается рациональным числом, несоизмеримые – иррациональным.

Если отрезок AB соизмерим с единичным отрезком, то длина отрезка AB выражается натуральным числом. Если длина отрезка AB соизмерима с какой то частью единичного отрезка, то длина отрезка AB выражается рациональным числом, которое может быть выражено в виде конечной десятичной дроби, либо чистой или смешанной периодической дроби.

Пусть задан отрезок AB и пусть длина отрезка AB больше n единичных отрезков и меньше $n+1$ единичных отрезков. Разделим единичный отрезок e на 10 частей и получим новую единицу измерения $e_1 = \frac{e}{10}$.

$AB_1 = e \cdot n$

$a_1 < e$

Измеряем длину отрезка a_1 с помощью новой единицы измерения e_1. При этом возможны следующие случаи:

1. отрезок e_1 укладывается в длине отрезка a_1 целое число раз Тогда длина всего отрезка AB выражется конечной десятичной дробью.

2. если отрезок e_1 не укладывается целое число раз в длине отрезка a_1, то вводят новый единичный отрезок, равный $\frac{e_1}{10} = \frac{e}{100}$.

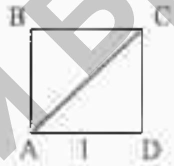
Теперь новый единичный отрезок сравниваем с длиной отрезка a_1, равного целому числу длин единичных отрезков e_1, то длина всего отрезка AB будет тоже выражаться конечной десятичной дробью.

Но возможна ситуация, когда ни при каком единичном отрезке принцип сравнения длины отрезка a_1 и единичного отрезка не заканчивается. И в этом случае длина отрезка выражается десятичной бесконечной дробью. Причем длина отрезка может выражаться как десятичной бесконечной периодической дробью (например, $2\frac{1}{3} = 2,(3)$) или десятичной бесконечной непериодической дробью.

Определение. Отрезок, длина которого выражается десятичной бесконечной непериодической дробью, называют отрезком, несоизмеримым с единичным. Пример несоизмеримых отрезков – диагональ квадрата несоизмерима с длиной его стороны.

Доказательство:

Пусть задан квадрат ABCD с длиной стороны, равной единичному отрезку. Предположим противное: пусть диагональ квадрата соизмерима с его строной. Значит, длина отрезка AC выражается рациональным числом. Т.е. длину диагонали AC можно записать в виде дроби $AC = \frac{m}{n}$, причем дробь $\frac{m}{n}$ – несократима. По теореме Пифагора имеем:



$$AC^2 = AD^2 + DC^2$$

$$\frac{m^2}{n^2} = 2 \qquad m^2 = 2n^2 \ (*)$$

Из этого следует, что квадрат числа m есть число четное, а значит и само число m четное. Отсюда следует, что число m может быть представлено в виде $m = 2p$. А значит формулу (*) можно записать:

$$(2p)^2 = 2n^2$$

$$4p^2 = 2n^2$$

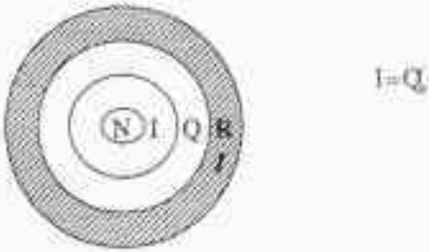
$$2p^2 = n^2.$$

Следовательно, число n – тоже четное и может быть представлено в виде $n = 2c$. А значит, длина диагонали выражается числом $\frac{m}{n}$ и эта дробь, на основе наших рассуждений, является сократимой – это противоречит предположению о том, что эта дробь является несократимой. Следовательно, наше предположение о том, что длина диагонали AC выражается рациональным числом вида $\frac{m}{n}$ – неверно. А значит, длина диагонали квадрата несоизмерима с его стороной и выражается числом $\sqrt{2}$.

Примеры десятичных бесконечных непериодических дробей: $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$, $\sqrt{7}$, число π, которое показывает отношение длины окружности к диаметру, основание натурального логарифма e ($e = 2{,}7186186\ldots$).

Множество всех десятичных бесконечных непериодических дробей образуют множество иррациональных чисел (I).

Покажем на кругах Эйлера расширение понятия числа



Множество иррациональных чисел есть дополнение множества рациональных чисел до множества действительных чисел.

Множество иррациональных чисел есть подмножество множества действительных чисел.

Множество всех действительных чисел таким образом может быть получено как естественное расширение множества всех рациональных чисел. Однако, в отличие от довольно простых способов расширений множества натуральных чисел до множества целых чисел и множества целых чисел до множества рациональных чисел, метод расширения (или пополнения) множества всех рациональных чисел до множества действительных чисел оказывается гораздо более сложным. Математически строгая теория действительных чисел была развита лишь в середине прошлого века в трудах Р. Дедекинда и Г. Кантора, и при ее создании был использован ряд весьма тонких результатов математического анализа.

Аксиоматическое построение множества действительных чисел

Множество всех действительных чисел может быть описано как множество, элементы которого удовлетворяют перечисленным ниже свойствам.

1. Множество действительных чисел бесконечно.

2. Множество действительных чисел упорядочено. Например, оно упорядочено отношением “больше”. И для двух любых действительных чисел a и b возможна одна из трех ситуаций:

$$a>b$$
$$a<b$$
$$a=b$$

3. Множество действительных чисел несчетно (нельзя занумеровать).

4. Множество действительных чисел непрерывно, имеет мощность континуума. Свойство непрерывности геометрически интерпретируется с помощью числовой прямой.

Между множеством действительных чисел и множеством точек прямой существует взаимно однозначное соответствие, и часто вовсе не различают эти два множества, говоря просто "числовая прямая".

5. Свойство операции сложения.

В множестве действительных чисел определена бинарная операция сложения, т.е. любой упорядоченной паре чисел $(a; b)$ ставится в соответствие единственное число, называемое суммой чисел a и b, обозначаемое $a+b$; при этом

1) для любой тройки чисел a, b, c

$(a+b)+c=a+(b+c)$ (асссоциативный закон сложения);

2) для любой пары чисел a и b

$a+b= b+a$ (коммутативный закон сложения);

3) существует число, обозначаемое символом 0 и называемое нулем, такое, что для любого числа a

$a+0=a$.

4) для любого a существует число, обозначаемое $-a$, такое что

$a+(-a)=0$;

5) если $a<b$, то для любого числа c

$a+c<b+c$.

Число $a>0$ называется положительным, а число $a<0$ – отрицательным.

Для любой упорядоченной пары чисел $(a; b)$ число $a+(-b)$ называется разностью чисел a и b и обозначается $a-b$:

$a-b= a+(-b)$.

6. Свойства операции умножения.

В множестве действительных чисел определена бинарная операция, называемая умножением, т.е. любой упорядоченной паре чисел $(a; b)$ ставится в соответствие единственное число, называемое их произведением и обозначаемое $a \cdot b$, причем

1) для любой тройки чисел a, b, c

$(a+b)+c=a+(b+c)$ (асссоциативность);

2) для любой пары чисел a и b

$a+b= b+a$ (коммутативный закон сложения);

3) существует число, обозначаемое символом 1 и называемое единицей, такое, что для любого числа a $a \cdot 1=a$;

4) для любого числа a, отличного от нуля, существует число, обозначаемое $\frac{1}{a}$, такое, что

$$a \cdot \frac{1}{a}=1,$$

число $\frac{1}{a}$ называют обратным числу a;

5) если $a<b$ и $c>0$, то $a \cdot c< b \cdot c$; если $a<b$ и $c<0$, то $a \cdot c>b \cdot c$.

Для любой упорядоченной пары чисел a и b (b отлично от нуля) число $a\cdot\frac{1}{b}$ называется частным от деления a на b и обозначается $\frac{a}{b}$:

$$\frac{a}{b}=a\cdot\frac{1}{b}.$$

7. Связь операций сложения и умножения.

Для любой тройки чисел a, b, c $(a+b)\cdot c=a\cdot c+b\cdot c$ (дистрибутивность умножения относительно сложения).

8. Свойство Архимеда.

Для любого числа a существует такое целое число n, что $n>a$. Из этого свойства, в частности, следует, что для любых чисел a и b при $a>0$ существует натуральное число n такое, что

$$n\cdot a>b.$$

Во множестве действительных чисел любым двум элементам a и b соответствует элемент $a+b$, называемый суммой и элемент $a\cdot b$, называемый их произведением и выполняется следующее условие.

1) коммутативность сложения $a+b=b+a$;

2) ассоциативность сложения: для любых трех элементов из множества действительных чисел a, b, c $(a+b)+c=a+(b+c)$;

3) обратимость сложения – для любых двух: $\forall a,b\in R,\exists c\in R|a+c=b$

4) коммутативность умножения $a\cdot b=b\cdot a$;

5) ассоциативность умножения $(a\cdot b)\cdot c=a\cdot(b\cdot c)$;

6) дистрибутивность умножения относительно сложения $(a+b)\cdot c=ac+bc$;

7) обратимость умножения $\forall a,b\in R,a\neq 0\exists q\in R|a\cdot q=b$;

8) (аксиома мощности) Множество R содержит, по крайней мере, два различных элемента и значит оно не пусто.

9) сумма и произведение положительных действительных чисел всегда положительное;

10) (аксиома Архимеда) Для любых a, b множества R $\forall a,b\in R$, $b>0,n\in N|b\cdot n>a$.

11) (аксиома полноты) Любая фундаментальная последовательность элементов множества R имеет предел в этом множестве.

Следующим расширением понятия числа является введение (обоснование существования) комплексных чисел.

С какой операцией связана необходимость такого введения?

Как известно, натуральная степень любого действительного числа опять будет действительным числом. Однако операция извлечения корня не всегда выполнима во множестве действительных чисел: не существует действительного числа a, четная степень которого была бы отрицательным числом. По-другому говоря, во множестве действительных чисел не существует числа которое было бы корнем уравнения $x^n=b$, где n – четное число, а b – отрицательное действительное число.

Следуя общему плану расширения числовых областей, как это уже неоднократно делалось (например, при введении понятий отрицательных чисел и рациональных чисел), множество действительных чисел можно расширить до множества чисел, которое будет замкнуто относительно операции извлечения корня. Забегая вперед, заметим, что при этом попутно будет получен существенно новый результат и для тех случаев, когда операция извлечения корня выполнима во множестве действительных чисел.

Одни из способов построения множества комплексных чисел заключается в том, что множество действительных чисел расширяется путем присоединения к множеству действительных чисел нового числового объекта – корня уравнения $x^2-1=0$. Полученное "расширенное" множество называется множеством комплексных чисел.

В задачу же нашего курса лекций не входит рассмотрение такого множества чисел. Здесь мы лишь остановились на существовании таковых.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Предложенный курс лекций раскрывает методологию математического знания, истории и логики развития учения о числе и операциях с числами. Изложение осуществлено по следующим направлениям:

1) историко-генетическое, при котором развитие понятий и идей берет свое начало из практических потребностей человека и поднимается до абстрактно-теоретического обобщения и обоснования;

2) аксиоматическое, когда в основу теории кладется соответствующая система аксиом, из которой абстрактно-дедуктивно выводятся все понятия и истины;

3) методическое направление, которое ориентировано на осознание будущими учителями начальных классов зависимости особенностей методики изучения отдельных вопросов из начального курса математики от трактовки математических понятий, отношений, арифметических действий и т.д. в математической науке.

По первому направлению показан процесс формирования понятия натурального числа, причем количественная теория изложена на основе элементарных понятий теории множеств. Аксиоматическая же теория натурального числа базируется на аксиоматике Пеано.

Натуральные числа служат тем фундаментом, на котором можно простроить все другие числовые множества: целые, рациональные, действительные, комплексные. Каждое из перечисленных числовых множеств содержит предыдущее. При этом при построении расширения числового множества учитывают следующее:

Если множество А расширяется до множества В, то:

1) А есть подмножество В;

2) Интересующие нас операции или отношения элементов множества А определены также и для элементов множества В;

3) Во множестве В должна быть выполнима операция, которая была не выполнима, или частично выполнима во множестве А. Например, для натуральных числе не всегда выполнима операция вычитания. В области целых чисел она уже выполнима всегда. Для целых чисел не всегда выполнима операция деления, а для рациональных чисел она выполнима всегда (кроме деления на нуль).

4) Расширение В должно быть минимальным из всех расширений множества А, обладающих свойствами 1-3. Так мы расширяем множество натуральных чисел до целых, потом рациональных, а не сразу до действительных.

По второму направлению излагается аксиоматическая теория рациональных чисел на основе дедуктивной логики.

Методическая направленность данного курса лекций реализована на основе установления межпредметных связей с курсом методика преподавания математики и трансформации полученных знаний на будущую профессиональную деятельность. Это, в свою очередь, создает основы как для сознательного освоения знаний по математике, так и для формирования самостоятельности учителей в творческом решении конкретных задач обучения математике.

СЛОВАРЬ МАТЕМАТИЧЕСКИХ ТЕРМИНОВ

1. **Аддитивность. 1.** В широком смысле – характеристика математических объектов, в определении которых существенную роль играет сложение. **2.** Свойство функции множества, заключающееся в том, что значение функции от суммы непересекающихся множеств равно сумме значений функции от слагаемых.
2. **Аксиома.** Исходное положение, принимаемое без доказательств при дедуктивном построении теории.
3. **Аксиоматизация.** Установление аксиоматики и вывод основных положении теории.
4. **Аксиоматика.** Система аксиом вместе с основными объектами и основными отношениями между ними, а также правила вывода основных положений теории.
5. **Алгебра. 1.** Часть математики, изучающая алгебраические операции над объектами произвольной природы. **2.** Кольцо, являющееся одновременно векторным пространством, причем умножение суммы на скаляр производится путем умножения каждого слагаемого на этот скаляр, а умножение произведения на скаляр – путем умножения первого сомножителя на этот скаляр.
6. **Алгоритм.** Точное формальное предписание, однозначно определяющее содержание и последовательность операций, переводящих заданную совокупность исходных данных в искомый результат.

   Алгоритм Евклида. Метод нахождения наибольшего общего делителя двух чисел или двух многочленов, а также общей меры двух отрезков.
7. **Алфавит.** Список конечного множества различных символов, из которых строятся все формулы какой-либо математической теории.
8. **Аргумент функции.** Независимая переменная, от значений которой зависит значение функции.
9. **Арифметика.** Часть математики, изучающая числа и элементарные действия над ними.
10. **Ассоциативность.** Свойство бинарной операции (*), выражаемое равенством $a * b * c = a * (b * c)$; сложение и умножение чисел ассоциативны: $(a + b) + c = a + (b + c)$, $(ab)c = a(bc)$; вычитание и деление чисел не обладает свойством ассоциативности.
11. **Бесконечность.** Понятие, возникающее в различных разделах математики в форме противопоставления понятию конечного.
12. **Биекция.** Взаимно однозначное отображение одного множества на другое множество.
13. **Биллион. 1.** В СССР, США – см. МИЛЛИАРД. **2.** В ФРГ, Великобритании, Франции - миллион миллионов, 10^{12}.
14. **Близнецы.** Два простых числа, разность которых равна двум.

15. **Величина.** Характеристика объекта или явления материального мира, качественно общая множеству объектов или явлений, но количественно индивидуальная для каждого из них.

Величины аддитивные. Числовые функции f, определенные на множестве *D*, для элементов которого задано сложение, и удовлетворяющие условию: $f(x+y)=f(x)+f(y)$. Примерами аддитивных величин могут служить объем тела, площадь поверхности, длина линии, масса, вес и т.д. Название аддитивных величин происходит от латинского слова additives – прибавленный.

Величины обратно пропорциональные. Величины, произведение которых постоянно.

Величины прямо пропорциональные. Величины, отношение которых постоянно.

16. **Вывод. 1.** Процесс получения какого-либо результата, проведенный в соответствии с указанными правилами.

Вывод логический. 1. Содержательное рассуждение, позволяющее от исходных допущений (посылок) перейти к новым утверждениям (заключениям), логически вытекающим из исходных. **2.** Результат этого рассуждения.

17. **Выражение.** Формула или ее часть.

Выражение алгебраическое. Запись в определенном порядке ряда алгебраических действий над совокупностью величин.

18. **Высказывательная форма**. Повествовательное предложение, содержащее одну или несколько переменных.
19. **Вычисление.** Процесс получения численного результата некоторым алгоритмом из исходных данных.
20. **Вычитаемое.** Число, которые вычитается из другого; термин употребляется в арифметике (см. Уменьшаемое).
21. **Вычитание.** Операция, обратная операции сложения, позволяющая по сумме и одному из слагаемых находить другое слагаемое: если $a+b=c$, то $a=c-b$ и $b=c-a$.
22. **Геометрическая фигура.** Множество точек на плоскости или в пространстве.
23. **Геометрия.** Часть математики, изучающая пространственные отношения и формы тел, а также их обобщения.
24. **Гипотеза.** Научное предположение, выдвигаемое для объяснения какого-либо явления и требующее проверки на опыте и/или теоретического обоснования.
25. **Гистограмма.** Графическое представление экспериментальных данных, при котором на оси абсцисс отмечаются (обычно через равные промежутки) точки, соответствующие значениям измеряемой величины $x_1, x_2, ..., x_{k+1}$ и на интервалах $[x_1, x_2)$, $(x_2, x_3]$, ..., $[x_k, x_{k+1}]$ парал-

лельно оси ординат строятся прямоугольники с площадями, пропорциональными числу наблюдений, в которых измеряемая величина попадала в соответствующий интервал.

26. **Граф.** Конечное множество точек (вершин графа), для некоторых пар которого установлены связи (ребра графа). При этом пара вершин может соединяться несколькими ребрами. Ребром может соединяться и вершина сама с собой. Рассматривают также ориентированные графы, на ребрах которых указаны направления.
27. **График. 1.** Множество точек координатной плоскости с координатами $(x, f(x))$, где $f(x)$ – данная функция. **2.** Множество пар вида $(x; f(x))$.
28. **Группа.** Множество с одной ассоциативной бинарной операцией, в котором имеется единица e и для каждого элемента a имеется обратный элемент x, обладающий свойством $a*x = x*a = e$.
29. **Гугол.** Единица со ста нулями, 10^{100}.
30. **Дедукция.** Общее название логических методов, позволяющих выводить новое утверждение из некоторых исходных утверждений.
31. **Действие алгебраическое.** Одна из семи операций над объектами произвольной природы, а именно: сложение, вычитание, умножение, деление, возведение в степень, извлечение корня, логарифмирование.
Действие арифметическое. Одна из четырех простейших операций над числами, а именно: сложение вычитание, умножение, деление.
32. **Деление.** Действие, обратное умножению, позволяющее находить по данному произведению и одному из сомножителей другой сомножитель; обозначается обычно знаком (:); так, если $a \cdot b = c$, то $a = c : b$; иногда знаками деления становятся косая или горизонтальная черта.
33. **Деление с остатком.** Нахождение по двум заданным целым числам a и b, $b \neq 0$ неполного частного x и остатка y так, чтобы было $a = bx + y$, где $0 \leq y < b$, x и y – целые.
34. **Делимость.** Свойство целого числа делиться без остатка на заданное целое; аналогично определяется делимость многочлена.
35. **Дизъюнкция.** Логическая операция над высказываниями, обозначаемая через $A \vee B$; имеет смысл разделительного «или», т.е высказывание $A \vee B$ истинно, когда истинно хотя бы одно из высказываний A и B.
36. **Дистрибутивность.** Свойство пары бинарных операций ($\times$ и $+$), выражаемое тождествами $a \times (b + c) = (a \times b) + (a \times c)$ и $(a + b) \times c = (a \times c) + (b \times c)$. В случае коммутативности операции $\times$ оба тождества равнозначны.
37. **Длина.** Числовая характеристика протяженности линии в метрическом пространстве; для отрезка прямой совпадает с расстоянием между его концами.

38. **Доказательство.** Способ обоснования истинности того или иного суждения с помощью других истинных суждений. Как правило, доказательство представляет собой цепочку правильных умозаключений, идущих от исходных для данной теории посылок (аксиом), признанных истинными, к доказываемому утверждению, теореме.

39. **Доказательство от противного.** Метод доказательства теоремы, состоящий в том, что доказывают не саму теорему, а теорему, противоположную обратной теореме, т.е. доказывают теорему, эквивалентную данной. Доказательство от противного используют всякий раз, когда прямую теорему доказать представляется затруднительным.

40. **Дробь.** Число, состоящее из одной или нескольких равных долей единицы.

Десятичная дробь есть форма записи действительного числа в десятичной позиционной системе счисления и записывается в виде $N,n_1n_2n_3...n_k...$ или $N+\frac{n_1}{10^1}+\frac{n_2}{10^2}+\frac{n_3}{10^3}+\frac{n_k}{10^k}...$, где N - целое число, а $n_1n_2n_3...n_k...$ - цифры десятичной системы счисления (стр. 70).

41. **Единица.** **1.** Наименьшее из натуральных чисел. **2.** Элемент e алгебраической системы, обладающий по отношению к бинарной операции $*$ свойством $a*e=e*a$ для любого элемента a. В кольце целых чисел единицей по отношению к операции умножения является число единица, а по отношению к операции сложения – число нуль.

42. **Зависимость.** Наличие той или иной связи между различными величинами.

43. **Задача** есть упражнение, которое выполняется, решается посредством умозаключения, вычисления и т.п.

Задача. Требование определить математический объект, удовлетворяющий заданным условиям.

44. **Закон исключенного третьего.** Закон классической логики, состоящий в том, что одно из двух высказываний «A» и «не A» обязательно является истинным.

45. **Знаменатель.** **1.** В арифметике – целое число, показывающее размеры долей единицы, из которых составлена дробь, в дроби a/b знаменателем является b. **2.** В алгебре – выражение B в алгебраической дроби A/B.

46. **Значение величины.** Результат оценки величины в виде произведения отвлеченного числа на принятую для нее единицу.

47. **Изоморфизм.** Взаимно однозначное соответствие между алгебраическими системами, сохраняющее операции и отношения между их элементами.

48. **Импликация.** Операция в алгебре логики; обозначается $A \Rightarrow B$ (или $A \to B$, или $A \supset B$), где A и B – высказывания; читается «если A, то B» или «из A следует B»; высказывание $A \Rightarrow B$ считается по определению истинным всегда, кроме случая, когда A – истинно, а B – ложно.
49. **Индукция.** Получение общего утверждения, исходя из частных случаев.
50. **Интервал.** Множество действительных чисел x, удовлетворяющих строгому двойному неравенству $a<x<b$, где a и b – действительные числа, называемые концами интервала; обозначается $(a;b)$ или $]a;b[$.

    Интервал бесконечный. Множество действительных чисел, удовлетворяющих неравенству $x<a$ (бесконечный слева) или $x>a$ (бесконечный справа) или вся числовая ось (бесконечный слева и справа).
51. **Информатика.** Комплекс научных дисциплин, изучающих различные аспекты понятия информации, ее извлечения, хранения, передачи, классификации, переработки и т.д.
52. **Информация.** Совокупность сведений, уменьшающих неопределенность в выборе различных возможностей.
53. **Инъекция.** Однозначно отображение множества A в множество B, при котором различные элементы из A имеют различные образы в B; при этом каждый элемент из A имеет образ в B, однако некоторые элементы из B могут не иметь прообраза в A.
54. **Квантор.** Логическая операция, которая по одноместному предикату строит высказывание, характеризующее его область истинности.

    Квантор всеобщности. Логическая операция, обозначаемая символом $\forall$, с помощью которой строится высказывание «для всех x справедливо свойство P», записывающееся в виде формулы $\forall xP$.

    Квантор общности. См. Квантор всеобщности.

    Квантор существования. Логическая операция, обозначаемая символом $\exists$, с помощью которой строится высказывание «существует x, для которого справедливо свойство P», записывающееся в виде формулы $\exists xP$.
55. **Кибернетика.** Наука об управлении, связи и переработке информации.
56. **Классификация.** Система соподчиненных понятий, составленная на основе учета общих признаков рассматриваемых объектов и закономерных связей между ними.
57. **Комбинаторика.** Раздел математики, в котором изучаются задачи выбора и расположения элементов из некоторого основного (обычно конечного) множества в соответствии с заданными правилами
58. **Коммутативность.** Свойство бинарной операции (*), которое определяется равенством $a*b=b*a$. Сложение и умножение чисел коммутативны, вычитание и деление чисел, умножение матриц некоммутативны.

59. **Конечность. 1.** Невозможность взаимно однозначного соответствия между множеством и его частью (для бесконечных множеств такое соответствие возможно). **2.** Ограниченность.
60. **Контрапозиция. 1.** Теорема, обратная противоположной; она равносильна прямой теореме. **2.** Логический принцип, согласно которому, если из одного утверждения следует другое, то отрицание последнего влечет отрицание первого.
61. **Координаты.** Числа, взятые в определенном порядке и характеризующие положение точки на линии, на плоскости, на поверхности, в пространстве.
62. **Кортеж.** Конечная последовательность каких-либо объектов, допускающая повторение; обозначается $(x_1,...,x_n)$ или $\langle x_1,...,x_n \rangle$.
63. **Кратное.** Число, равное данному числу, умноженному на целое.
    Кратное наименьшее общее. Наименьшее из всех общих кратных конечного множества натуральных чисел; для многочленов из общих кратных выбирается многочлен наименьшей степени.
    Кратное общее. Натуральное число, делящееся без остатка на каждое из данной совокупности натуральных чисел; аналогично определяется общее кратное совокупности многочленов.
64. **Круг.** Часть плоскости, ограниченная окружностью и содержащая ее центр.
65. **Куб. 1.** Правильный многогранник, имеющий 6 квадратных граней, 12 ребер и 8 вершин, в каждой из которых сходятся под прямым углом 3 ребра. **2.** Третья степень числа или алгебраического выражения; обозначается a^3.
66. **Логика математическая.** Раздел математики, изучающий математические доказательства и вопросы обоснования математики.
67. **Математика.** Наука о количественных отношениях и пространственных формах действительного мира.
    Математика высшая. Традиционное название совокупности разделов математики, изучаемых в высших учебных заведениях.
    Математика вычислительная. Направление в математике, рассматривающее круг вопросов, связанных с использованием ЭВМ для решения математических задач.
    Математика элементарная. Традиционное название совокупности разделов математики, изучаемых в средней школе.
68. **Математическое предложение** есть логическое предложение, выражающее суждение о математических объектах.
69. **Математическая формула** есть теорема, выраженная языком математических символов.

70. **Мера.** Неотрицательная аддитивная функция множества, равная нулю на пустом множестве, являющаяся обобщением понятий длины, площади, объема; обозначается для множества E через $\text{mes}E$.
71. **Метод.** Совокупность приемов или операций для получения искомого результата.
72. **Множество.** Объединение в единое целое определенных вполне различаемых элементов; задается либо перечислением его элементов, либо указанием их характеристического свойства.

    Множество, не являющееся конечным, есть **бесконечное**. Все бесконечные множества разбиваются на 2 класса: на класс множеств, эквивалентных множеству всех натуральных чисел (такие множества называются счетными) и на класс множеств, не эквивалентных множеству натуральных чисел (такие множества несчетные).

    Множество конечное. 1. Либо пустое множество, либо множество, содержащее n элементов, где n – натуральное число. **2.** Конечным множеством называется множество эквивалентное отрезку натурального ряда.

    Множество упорядоченное. Множество A называется упорядоченным множеством, если между его элементами установлено некоторое отношение, выражаемое словами "a предшествует b" и для его любых двух элементов a, b имеет место одно из следующих отношений порядка: либо $a<b$, либо $a>b$, либо $a=b$.
73. **Мощностью конечного множества** A называется количество элементов данного множества.
74. **Непротиворечивость.** Невозможность вывести из данной системы аксиом два противоположных утверждения.
75. **Несовместимость.** Свойство системы уравнений, заключающееся в отсутствии решения, удовлетворяющего всем уравнениям системы.
76. **Несоизмеримость.** Отсутствие у двух величин общей меры.
77. **Нумерация**. Совокупность приемов наименования и обозначения чисел. В истории развития математики различных народов были известны различные нумерации: римская (которой мы пользуемся для обозначения съездов, сессий, глав книг и т.д.), арабская (перешла из Индии) и др. Нумерация называется счислением.
78. **Область определения.** Множество всех первых элементов пар, совокупность которых определяет данное соответствие, в частности, функцию, оператор, отображение.
79. **Одночлен. 1.** Алгебраическое выражение, в котором последним действием является умножение или возведение в степень; примеры: $5xy^2$; p^4; $2(a+b)^2$. **2.** Многочлен, состоящий из одного члена.
80. **Окружность**. Множество точек плоскости, равноудаленных от одной общей точки, называемой центром окружности.

81. **Операция.** Отображение, сопоставляющее всякому упорядоченному набору n элементов данного множества определенный элемент этого же множества (число n фиксировано для данной операции).

Операция алгебраическая, определенная во всем множестве X есть отображение $(x, y) \to z$, ставящее в соответствие любой упорядоченной паре элементов (x, y) этого множества третий элемент z того же множества.

82. **Определение. 1.** Задание математического объекта, позволяющее однозначно отличить его от других.

83. **Отношение. 1.** Совокупность φ упорядоченных наборов из n элементов данного множества в каждом; про элементы, входящие в один набор, говорят, что они «находятся в отношении φ между собой» и обозначают это формулой $\varphi(a_1,...,a_n)$. **2.** Произвольное подмножество G множества A^n всех кортежей вида $(a_1,...,a_n)$, где $a_1,...,a_n$ суть элементы некоторого множества A; в этом случае говорят, что G есть n-местное отношение на A. Понятие отношение служит в математике для выражения на теоретико-множественном языке связей между объектами.

84. **Отрезок. 1.** Часть прямой, заключенная между двумя ее точками и включающая обе эти точки. **2.** Множество действительных чисел x, удовлетворяющих неравенствам $a \le x \le b$, обозначается $[a,b]$.

85. **Отрицание.** Логическая операция, обозначаемая $\neg A$ или $\bar{A}$ (читается «не-А»); по определению высказывание $\neg A$ истинно тогда, когда высказывание A ложно.

86. **Перестановка.** Расположение в определенном порядке элементов конечного множества; число перестановок P_n множества из n различных элементов равно $n!$.

87. **Перестановками** из n элементов называют всевозможные упорядоченные конечные множества, содержащие n различных элементов, которые можно получить из некоторого неупорядоченного множества, состоящего из n элементов.

88. **Периметр.** Общая длина границы плоской фигуры.

89. **Перпендикуляр прямой.** Прямая, пересекающая под прямым углом данную прямую.

90. **Плоскость.** Одно из основных понятий геометрии, определяемое аксиоматически своими отношениями с прямой и точкой. В трехмерном евклидовом пространстве это – множество точек, декартовы координаты которых удовлетворяют уравнению $Ax + By + Cz + D = 0$, где A, B и C не равны нулю одновременно.

91. **Площадь плоской фигуры.** Неотрицательная аддитивная функция геометрической фигуры на плоскости, сохраняющая свое значение при

движениях и удовлетворяющая условию, что единичный квадрат имеет площадь, равную единице.

92. **Предикат.** См. Высказывательная форма.

93. **Предложение логическое** можно рассматривать как грамматическое предложение, которое выражает определенное суждение.

94. **Признак.** Правило или условие для проверки выполнения или невыполнения данного утверждения.

95. **Проблема.** Задача, имеющая в данной области принципиальное значение.

96. **Произведение.** Результат операции умножения.

Произведение декартово. Множество, элементами которого являются кортежи $(a_1,...,a_n)$; при этом сомножителями декартова произведения считаются: множество всех a_1, множество всех a_2 и т.д.

97. **Прообраз. 1.** Любой элемент $x \in X$, образом которого при отображении $\varphi : X \to Y$ является данный элемент $y \in Y$. **2.** См. Полный прообраз.

Прообраз полный. Множество всех прообразов элемента или множества элементов при данном отображении.

98. **Пропорция.** Равенство двух отношений $a : b = c : d$, где ни одно из чисел, составляющих пропорцию, не равно нулю.

99. **Пространство.** Логически мыслимая структура, служащая средой, в которой осуществляются другие структуры, формы и те или иные конструкции, а также фиксируются отношения между ними.

100. **Прямая. 1.** Один из основных объектов геометрии, определяемый аксиоматически. **2.** Множество точек в евклидовой плоскости, прямоугольные декартовы координаты которых (x, y) удовлетворяют уравнению $ax + by + c = 0$, где a и b не равны нулю одновременно. **3.** Пересечение двух различных плоскостей в евклидовом трехмерном пространстве.

101. **Равенство.** 1. Бинарное отношение, являющееся частным случаем отношения эквивалентности; характеризуется тем, что в рамках данной теории объекты, связанные отношением равенства, взаимозаменяемы. **2.** Формула, состоящая из двух выражений, между которыми помещен знак «=».

102. **Равносильность.** Свойство двух или нескольких уравнений (неравенств) с одним неизвестным (или систем n уравнений (неравенств) с n неизвестными), заключающееся в том, что они имеют одно и то же множество корней (решений).

103. **Радиус окружности.** Отрезок, соединяющий центр окружности с любой точкой окружности.

104. **Размещение.** Конечная последовательность различных элементов данного множества; число различных размещений по k элементов данного

множества из n элементов обозначается через A_n^k или $(n)_k$ и равно $n!/(n-k)!$.

105. **Разность.** Результат вычитания, т.е. такое число $c = a - b$, что его сумма с b (вычитаемым) равна a (уменьшаемому).
106. **Разряд.** Место, занимаемое цифрой при написании числа в позиционной системе счисления. В десятичной системе счисления цифры 1-го разряда – единицы, цифры 2-го разряда – десятки и т.д., считая цифры числа справа налево.
107. **Рефлексивность.** Свойство бинарного отношения R если R определено на множестве M, то любой элемент этого множества находится в отношении R к самому себе.
108. **Решето Эратосфена.** Метод отсеивания составных чисел, при котором последовательно вычеркиваются числа, делящиеся на 2,3, 5 и т.д.; первое число, остающееся после каждого этапа, является простым.
109. **Симметричность.** Свойство бинарного отношения R если имеет место aRb, то справедливо и bRa.
110. **Симметрия. 1.** Свойство геометрического объекта совмещаться с собой при некоторых преобразованиях, образующих группу. **2.** Преобразование, совмещающее геометрический объект с самим собой при повторении.
111. **Скобки. 1.** Математические знаки, употребляемые обычно парами для выделения какой-либо части математической формулы или для обозначения различных математических понятий; наиболее употребительны круглые ( ), квадратные [ ], фигурные { } и угловые $\langle\ \rangle$ скобки; иногда используются жирные, ажурные, полускобки и др. виды скобок. **2.** Пара скобок в смысле (1.) вместе с заключенным в них выражением.
112. **Слагаемое.** Любой из элементов, над которым производится операция сложения.
113. **Соизмеримость.** Наличие общей меры у однородных величин.
114. **Сокращение дроби.** Тождественное преобразование дроби, заключающееся в одновременном делении числителя и знаменателя на их общий делитель.
115. **Соответствие.** Любая совокупность пар вида (a, b), где элемент a принадлежит множеству A, а элемент b – множеству B; при этом элементы a и b, входящие в любую пару, называют соответствующими друг другу; элементу a из A может не соответствовать ни один элемент из B, соответствовать один или несколько элементов из B, в то же время, элемент b из B может не соответствовать ни одному, соответствовать одному или нескольким элементам из A; множества A и B могут совпадать

116. **Сочетание.** Состоящее из k элементов подмножество множества, содержащего n элементов; число сочетаний из n по k обозначается C_n^k или $\binom{k}{n}$ и определяется формулой $C_n^k = n!/(k!(n-k)!)$.
117. **Суждение** есть мысль о предметах и явлениях действительности, об объектах данной науки и обладает следующими свойствами: а) оно что-либо утверждает или отрицает; б) оно является истинным или ложным.
118. **Сумма.** Результат операции сложения.
119. **Счет. 1.** Операция, имеющая целью установить, сколько элементов содержит данное конечное множество; **2.** Совокупность первых четырех операций, производимых над рациональными числами. В таком случае счет называют вычислением.
120. **Сюръекция.** Такое отображение $f: A \to B$ одного множества в другое, что любой элемент из B имеет прообраз в A.
121. **Теорема.** Предложение, истинность которого доказывается в данной аксиоматической теории; обычная запись теоремы $A \Rightarrow B$, где A – условие, B – заключение (или $A \Leftrightarrow B$).
122. **Теория. 1.** В широком смысле: развернутое учение; комплекс взглядов, представлений, идей, связанных с попытками объяснения или интерпретации определенной предметной области (проблемного поля). **2.** В более строгом и специальном смысле, форма организации научного знания, дающая целостное представление о закономерностях некоторой области действительности. По своей структуре естественнонаучная теория представляет собой систему законов определенной науки. Эта система строится таким образом, что некоторые из законов, носящие наиболее общий характер, составляют ее основу, другие же подчиняются основным или выводятся из них по логическим правилам.

Теория алгоритмов. Раздел математики, в котором изучаются общие свойства алгоритмов.

Теория вероятностей. Раздел математики, в котором изучаются связи между вероятностями случайных событий.

Теория Галуа. Изучение расширений полей с помощью их групп автоморфизмов; дает условия разрешимости уравнений в радикалах.

Теория графов. Изучение графов и их обобщений.

Теория групп. Раздел алгебры, в котором изучаются свойства групп.

Теория игр. Теория математических моделей принятия оптимальных решений в условиях конфликтов.

Теория информации. Раздел математики, в котором рассматриваются закономерности передачи, хранения, извлечения и классификации информации.

Теория массового обслуживания. Раздел теории вероятностей, в котором изучаются математические модели систем массового обслуживания.

Теория матриц. Раздел линейной алгебры, изучающий свойства матриц.

Теория множеств. Раздел математики, посвященный свойствам множеств, преимущественно бесконечных.

Теория надежности. Математические методы расчета и оценки надежности технических систем и изготовляемых изделий.

Теория очередей. 1. См. Теория массового обслуживания. **2.** Теория систем с ожиданием.

Теория ошибок. Раздел математической статистики, в котором исследуются погрешности результатов измерений.

Теория функций. 1. См. Теория функций действительного переменного. **2.** См. Теория функций комплексного переменного.

Теория функций действительного переменного. Область математического анализа, в которой изучаются вопросы представления и приближения функций, заданных на числовой оси, их локальные и глобальные свойства.

Теория функций комплексного переменного. Теория функций, областью определения которых является некоторое множество точек комплексной плоскости (функции одного комплексного переменного) или множество точек комплексного евклидова пространства (функции многих комплексных переменных).

Теория чисел. Раздел математики, посвященный свойствам натуральных чисел и связанным с ними свойствам других видов чисел.

123. **Тождество.** Равенство выражений с одной или несколькими переменными, левая и правая части которого принимают равные значения при всех допустимых значениях переменных. Примеры: $\cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1$ при любых α; $\log(xy) = \lg x + \lg y$ при x>0 и y>0.

Тождество – это равенство, которое выполняется при всех допустимых значениях входящих в него букв.

124. **Точка. 1.** Элемент какого-либо пространства, рассматриваемого как множество. **2.** Исходный объект геометрии, косвенное определение которого дается в аксиомах геометрии. 3. Значение аргумента функции.

125. **Угол. 1.** Геометрическая фигура, образованная двумя лучами, выходящими из одной точки. **2.** Мера поворота луча вокруг его начала. **3.** Часть плоскости, ограниченная двумя лучами, исходящими из одной точки. **4.** 1) Геометрическая фигура, образованная двумя полуплоскостями, исходящими из одной прямой. 2) Часть пространства, ограниченная двумя полуплоскостями, исходящими из одной прямой. **5.** Часть пространства, ограниченная одной из двух полостей

ва, ограниченная одной из двух полостей конической поверхности, направляющая которой гомеоморфна окружности.

Угол прямой. Угол, равный своему смежному.

Углы смежные. Углы, имеющие общую вершину, одну общую сторону, а две другие их стороны лежат на одной прямой.

126. **Уменьшаемое.** Тот из элементов, участвующих в операции вычитания, из которого вычитается другой; если вычитание записано как $c = a - b$, то a – уменьшаемое.

127. **Умножение чисел.** Бинарная операция над числами, обозначаемая знаками «$\cdot$», «$\times$» или постановкой сомножителей рядом без знака между ними; обладает свойствами коммутативности и ассоциативности, а также дистрибутивности по отношению к сложению; с учетом этих свойств определяется поэтапно для различных видов чисел: 1) для натурального множителя, $a \cdot 1 = a$, $a \cdot n = a + \ldots + a$ (n раз); 2) $n : a \cdot 0 = 0\,(-1)a = -a$; 3) для дробного множителя b/c: $a \cdot (b/c) = ab/c$; 4) для иррационального множителя β: $a \cdot \beta = \lim(a \cdot b_n)$ при $b_n \to \beta$; 5) для комплексных сомножителей $(a + bi)(c + di) = (ac - bd) + (ad + bc)i$.

128. **Уравнение.** Запись в форме равенства задачи об отыскании значений аргументов, при которых значения двух данных функций равны.

129. **Условие достаточное.** Условие, при выполнении которого данное утверждение заведомо верно.

Условие необходимое. Условие, без выполнения которого данное утверждение не может быть верным.

130. **Формула.** Символическая запись, состоящая из цифр, букв и специальных знаков, расположенных в определенном порядке, и являющаяся носителем информации.

Формула логическая. Сложное высказывание, которое образуется с помощью элементарных высказываний при помощи логических операций.

131. **Центр. 1.** Центр симметрии кривой, поверхности или тела.

132. **Цифра.** Символ алфавита, с помощью которого обозначаются натуральные числа.

133. **Частное.** Результат деления; обозначается $a : b$, a/b или $\frac{a}{b}$.

134. **Число.** Одно из основных понятий математики, содержание которого менялось в разные исторические эпохи. Возникло в древнейшие времена первоначально в виде натурального числа, как результат счета предметов. В результате последовательных обобщений (дробные, отрицательные, иррациональные, мнимые числа) возникло наиболее общее понятие комплексного числа, включающее в себя все предыдущие; ко-

гда речь идет просто о числе, дальнейшие обобщения (гиперкомплексные, трансфинитные числа) обычно не имеются в виду.
Число действительное. Конечная или бесконечная десятичная дробь со знаком «+» или «-».
Число иррациональное. Действительное число, не являющееся рациональным.
Число иррациональное. Действительное число, десятичная запись которого является бесконечной непериодической десятичной дробью.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Адронов И.К., Окунь А.К. Арифметика рациональных чисел. Пособие для учителей. – М.: Просвещение, 1971. – 399 с.
2. Беляев Е.А., Перминов В.Я. Философские и методологические проблемы математики. – М.: Изд-во МГУ, 1981. – 217 с.
3. Виленкин Н.Я., Пышкало А.М., Рождественская В.Б. и др. Математика. Учебн. пособие для студ. пед. институтов по спец. № 2121. – М.: Просвещение, 1977. – 352 с.
4. Кожух І. Матэматыка. – М.: Вышэйшая школа, 1993. – 350 с.
5. Кравец Е.В., Радьков А.М. Числа и функции в тестах: Учебно-методическое пособие. – Мн.: Изд-во В.М. . Скакун, 2000. – 192 с.
6. Математика в понятиях, определениях, терминах. Ч. І. Пособие для учителей. / Под ред. Сабинина Л.В. – М.: Просвещение, 1978. – 320 с.
7. Математика в понятиях, определениях, терминах. Ч. 2. Пособие для учителей. / Под ред. Сабинина Л.В. – М.: Просвещение, 1982. – 351с.
8. Математический энциклопедический словарь. / Гл. ред. Ю.В. Прохоров. – М.: Сов. энциклопедия, 1988. – 847 с.
9. Микиша А.М., Орлов В.Б. Толковый математический словарь. – М.: Рус. яз., 1989. – 244 с.
10. Сендер А.Н. История и методология начального курса математики. – Брест: Изд-во БрГУ имени А.С. Пушкина, 2003. – 155 с.
11. Столяр А.А., Лельчук М.П. Математика. – Мн.: Вышэйшая школа, 1975. – 272 с.
12. Стойлова Л.П.Виленкин Н.Я., Лаврова Н.Н. Математика. В 2 ч. Ч. І. Просвещение, 1990. – 175 с.
13. Теоретические основы методики обучения математики в начальных классах. Пособие для студентов факультета подготовки учителей начальных классов заочного отделения. / Под ред. Н.Б. Истоминой. – М.: Изд-во Институт практической психологии, Воронеж: НПО "МОДЭК", 1996. – 224с.

Учебное издание

Сендер Анна Николаевна

МЕТОДОЛОГИЯ ФОРМИРОВАНИЯ ПОНЯТИЯ О ЧИСЛЕ В НАЧАЛЬНОМ КУРСЕ МАТЕМАТИКИ

Курс лекций
для студентов-заочников психолого-педагогических
факультетов университетов

Ответственный за выпуск С.К.Гребельная

Подписано в печать 15.10.2003. Формат 60x84/16. Бумага офсетная.
Гарнитура Таймс. Ризография. Усл. печ. л. 9,65. Уч.-изд. л. 9,78.
Тираж 50 экз. Заказ № 450.
Издатель и полиграфическое исполнение:
УО «Брестский государственный университет им. А.С.Пушкина».
224665, Брест, ул. Советская, 8.
Лицензия ЛВ № 307 1.07.98.
Лицензия ЛП № 260 30.04.98.