УЧРЕЖДЕНИЕ ОБРАЗОВАНИЯ

«Брестский государственный университет имени А.С. Пушкина»

ОСНОВНЫЕ НАПРАВЛЕНИЯ РАБОТЫ С ИНТЕЛЛЕКТУАЛЬНО ОДАРЕННЫМИ ДЕТЬМИ

электронное учебно-методическое пособие
для студентов педагогических специальностей ВУЗов,
учителей общеобразовательных школ,
слушателей курсов повышения квалификации

Брест, 2012

Кафедра алгебры и геометрии

Автор:

Гринько Елена Петровна — доцент кафедры алгебры и геометрии Брестского государственного университета имени А.С. Пушкина, кандидат педагогических наук, доцент

Редактор:

Сохор Ирина Леонидовна — преподаватель кафедры информатики и прикладной математики Брестского государственного университета имени А.С. Пушкина

Рецензенты:

В.Ф. Савчук — кандидат физико-математических наук, доцент, зав. кафедрой информатики и прикладной математики БрГУ имени А.С. Пушкина

А.Ф. Ревинский — заведующий кафедрой общей физики Брестского государственного университета имени А.С. Пушкина, доктор физико-математических наук, профессор

Данное пособие посвящено вопросам совершенствования работы с интеллектуально одаренными детьми. В книге освещены основные направления работы с интеллектуально одаренными детьми, показаны конкретные возможности реализации этой деятельности в общеобразовательных учреждениях.

Пособие адресовано студентам педагогических специальностей университетов, слушателям курсов повышения квалификации, учителям общеобразовательных школ.

СОДЕРЖАНИЕ

Предисловие

Уровень развития любой страны находится в прямой зависимости от её интеллектуального потенциала. Умственные способности людей являются существенным резервом человеческой цивилизации, их актуализация способна резко повысить качество жизни общества. Появление нового знания, нестандартных решений проблем обеспечивает только человеческий интеллект. Еще Ян Амос Коменский обращался к властям с просьбой не жалеть средств на обучение молодежи, цитируя слова Мартина Лютера: «Где на построение городов, крепостей, памятников, арсеналов расходуется одна золотая монета, там нужно израсходовать сто золотых монет на правильное образование одного юноши, который возмужав, может показать путь другим ко всему честному; он имеет большее значение, чем блестящие дворцы, груды золота и серебра, медные ворота и железные засовы» [5, с. 24]. В Беларуси многое делается для развития природных задатков и способностей подрастающего поколения: реализуются государственные программы, создаются и успешно функционируют специальные фонды по поддержке молодых дарований, активизировалась деятельность учреждений образования в направлении развития детской одаренности. Вложения материальных, физических и душевных сил в обучение и воспитание одаренных детей — это самый надежный способ обеспечить стране подъем. Для становления ребенка как интеллектуально одаренной личности необходимы не только природные задатки. Уроки, факультативы, кружки, научно-исследовательская деятельность, умело организованная управляемая самостоятельная работа, различные формы дистанционного обучения — необходимая среда для развития интеллектуальных способностей учащихся. Оригинальность мышления, пристрастие к решению сложных проблем и задач, исключительное упорство в поисках решения, трудолюбие, пристальный интерес к предмету — качества, которые должны развиться у них за годы обучения в школе [22].

Интеллектуальная одаренность — это генетически обусловленный компонент способностей, который совместно со средой и воспитанием определяет как результат, так и темп развития человека и общества. Проблемами одаренности занимались известные психологи и педагоги: К. Тэкэкс, Ф. Гальтон, Дж. Рензулли, Р. Стернберг, И.А. Соколянский, А.В. Петровский и др. Общие аспекты теории способностей представлены в трудах Л.С. Выготского, А.Н. Леонтьева, Н.Ф. Талызиной, Б.М. Теплова. Математические способности и механизмы их развития рассматривались А.Н. Колмогоровым, В.А. Крутецким, Н.А. Менчинской, Н.В. Метельским, А.Я. Хинчиным, Ж. Адамаром, А. Пуанкаре и др. Исследованием интеллектуального развития в процессе обучения занимались Б.Г. Ананьев, Д.Н. Блонский, В.А. Крутецкий, Н.Д. Левитов, Н.С. Лейтес, С.Л. Рубинштейн, Ю.А. Самарин и др.

Известный российский психолог М.А. Холодная выделила шесть типов интеллектуального поведения, которые в рамках разных исследовательских подходов соотносятся с проявлением интеллектуальной одаренности:

1) лица с общим уровнем развития «общего интеллекта», имеющие показатели IQ более 135–140 единиц («сообразительные»);

2) лица с высоким уровнем академической успешности в виде показателей учебных достижений («блестящие ученики»);

3) лица с высоким уровнем развития дивергентных способностей в виде показателей беглости и оригинальности порождаемых идей («креативы»);

4) лица с высокой успешностью в выполнении тех или иных конкретных видов деятельности, имеющие большой объем предметно-специфических знаний, а также значительный практический опыт работы в соответствующей предметной области («компетентные»);

5) лица с экстраординарными интеллектуальными достижениями, которые нашли свое воплощение в некоторых реальных, объективно новых, в той или иной мере общепризнанных формах («талантливые»);

6) лица с высоким уровнем интеллектуальных возможностей, связанных с анализом, оценкой («мудрые») [75].

Детей с такими характеристиками в общеобразовательных учреждениях России, Беларуси и других стран немало.

В пособии освещаются основные направления организации работы с интеллектуально одаренными детьми в учреждениях образования. Книга написана по итогам многолетних исследований и состоит из двух глав. Первая глава посвящена теоретическим основам организации работы с интеллектуально одаренными детьми.

Вторая глава посвящена практическим аспектам организации работы с интеллектуально одаренными детьми. Она содержит большой объем методических разработок, адресованных педагогам.

Материал структурирован таким образом, чтобы обеспечить наибольшие удобства в работе учителя. Необходимую информацию по важнейшим теоретическим и практическим вопросам работы с интеллектуально одаренными детьми, педагог найдет в соответствующих параграфах.

ГЛАВА 1
Теоретические основы организации работы с интеллектуально одаренными детьми

1.1 Интеллектуальная одаренность как предмет научных исследований

Педагогическая наука не сразу сформировала теоретический аппарат, способный описать такой сложный феномен как интеллектуальная одаренность. Историко-педагогическое исследование показывает, что интерес к обучению и воспитанию одаренных детей возник задолго до того, как стал предметом научных разработок в мировой и отечественной науке. Истоки теории мы находим в недрах философии. Размышления Сократа (469–399 гг. до н. э.), Платона (427–347 гг. до н. э.), Аристотеля (384–322 гг. до н. э.), Демокрита (460–370 гг. до н. э.) и др. пронизаны идеями, связанными с вопросами воспитания человека, формирования его личности, определения места в жизни. Они были сориентированы на природные силы и способности человека, на их саморазвитие. Так, Сократ, обладая прекрасным логическим мышлением, учил своих учеников логически мыслить. Его девиз — все подвергать критическому анализу, думать и рассуждать, ничего не принимать на веру. Платон (ученик Сократа) и Конфуций, жившие более 2,5 тысяч лет назад, считали, что необходимо выявлять наиболее способных детей и обучать их тому, что полезно для государства. А в Китае, еще за тысячу лет до новой эры, использовались тесты, с помощью которых можно было определить уровень логического мышления, памяти, творчества. В научных трактатах древних философов часто встречается термин «гений» (от лат. *genius* — дух) — мифологическая фигура, соединяющая в себе представление о сочетании божественного духа с человеком. Учения о гении и гениальности разрабатывались первоначально автономно от социально-педагогической практики, однако философы прошлого были глубоко убеждены, что божественная предопределенность гениальности не исключает значимости воспитания и образования [59, 65].

В эпоху Возрождения попытку осмыслить проблему одаренности предпринял испанский врач Хуан Уарте. Его работа посвящалась изучению индивидуальных различий в способностях людей с целью дальнейшего профессионального отбора на государственную службу. За счет использования потенциала одаренных людей он надеялся возродить могущество Испанской империи. Х. Уарте попытался ответить на вопросы:

1) какими качествами обладает та природа, которая делает человека способным к одной науке и не способным к другой;

2) какие виды дарований имеются в человеческом роде;

3) какие искусства и науки соответствуют каждому дарованию в частности;

4) по каким признакам можно узнать соответствующее дарование.

Способности Х. Уарте сопоставил с темпераментом и с различиями в сферах деятельности, требующих определенных дарований. К основным способностям он причислил фантазию, память и интеллект, а одаренность человека определил пропорцией, в которой присутствовали эти составляющие. Х. Уарте провел психологический анализ деятельности представителей различных профессий. Он убедился, что талант зависит от природы, воспитания и труда. Х. Уарте предложил диагностировать одаренность по внешним признакам (форме частей лица, тела, типу волос) [68]. Надо заметить, что современная генетика подтверждает правомерность существования такого метода.

И. Кант в трактате «О гении» дал характеристику этому феномену. По его мнению, гениальность — это прирожденная способность к созданию образцовых произведений искусства, аристократ, избранник духа, способный возвыситься над плоским уровнем обычной логики, а талант — это способность создавать то, для чего не может быть никаких определенных правил, поэтому оригинальность — первое его свойство. И. Кант пояснил природу гениальности и составил сравнительную характеристику гения в искусстве и гения в науке [59].

Большую роль в становлении принципов обучения и воспитания одаренных детей сыграл Я.А. Коменский (1592–1670). В «Великой дидактике» и «Законах благоустроенной школы» Я.А. Коменский обобщил огромный, накопленный в школах многих стран и проверенный личной практикой опыт и указал на необходимость использования различий в способностях учащихся в учебно-воспитательном процессе. Известный педагог писал: «У одних способности острые, у других — тупые, у одних гибкие и податливые, у других — твердые и упрямые, одни стремятся к знанию ради знания, другие увлекаются механической работой. Из этого трижды двойного рода сочетания способностей возникает шестикратное их сочетание» [5, с. 19]. Я.А. Коменский предложил метод обучения, «приспособленный к средним способностям, чтобы сдерживать преждевременное истощение наиболее даровитых и подгонять вялых» [5, с. 20]. Педагог считал, что «надо, чтобы более медленные смешивались с более быстрыми, более тупые с более умными, упрямые с послушными и учились бы по одним правилам и примерам до тех пор, пока нуждаются в руководстве. Кого учитель признает более способным, к тому он присоединит для обучения двух или трех отстающих» [5, с. 20]. Дидактика Я.А. Коменского построена на принципах целесообразности и природосообразности. Он был убежден, что каждый должен посвятить себя тому виду занятий, к которому, как это можно заключить по верным признакам, его предназначила природа. Ибо по природным дарованиям один является музыкантом, поэтом, оратором, физиком и т. д., в то время как другие более склонны к богословию, медицине, юриспруденции. Я.А. Коменский верил в огромные творческие силы и способности человека, которые могут быть развиты в процессе обучения и воспитания.

Великий швейцарский педагог Иоганн Генрих Песталоцци (1746—1827) утверждал, что цель обучения — в развитии присущих человеческой природе сил, в соответствии со свойственным ребенку стремлением к всесторонней деятельности. Его последователь — немецкий педагог Фридрих Адольф Вильгельм Дистервег (1790—1866) под природосообразностью понимал возбуждение врожденных задатков ребенка в соответствии с заложенным в нем стремлением к развитию. Самодеятельность Дистервег считал решающим фактором, определяющим личность человека. Он сформулировал 33 закона и правила о развивающем обучении [5, 65].

В России глубокая разработка педагогических идей осуществлялась К.Д. Ушинским (1824—1870). Воспитание он рассматривал как общественное явление, считал, что его предметом является человек, и если педагогика хочет воспитывать человека всесторонне, то она должна прежде узнать его во всех отношениях. Особое внимание К.Д. Ушинский обратил на влияние общественной среды, её культуры и передовых общественных идеалов на воспитание подрастающего поколения. Цель воспитания (в широком смысле) К.Д. Ушинский видел в формировании активной и творческой личности, подготовке человека к физическому и умственному труду как высшей форме человеческой деятельности. Его система воспитания исключала авторитарность, она строилась на силе положительного примера, на разумной деятельности ребёнка. К.Д. Ушинский требовал от учителя развития активной любви к человеку, создания атмосферы товарищества. К.Д. Ушинский сформулировал принцип воспитывающего обучения, который представляет собой единство обучения и воспитания. Он ставил вопрос об исследовании и использовании воспитательных возможностей окружающей среды [73].

Английский ученый Ф. Гальтон попытался доказать, что выдающиеся способности (гениальность) — результат действия в первую очередь наследственных факторов. Подтверждение этому мы находим в его книге «Наследственность таланта: ее законы и последствия», в которой автор проводит статистический анализ фактов биографий представителей английской элиты. Ф. Гальтон обследовал 300 семей. По его мнению, причина высоких достижений людей кроется в самом человеке и передается биологическим путем из поколения в поколение: на каждые десять знаменитых людей, имеющих выдающихся родственников, приходятся три-четыре выдающихся отца, четыре или пять выдающихся братьев и пять или шесть выдающихся сыновей. Он был сторонником искусственного поддержания и совершенствования интеллектуального потенциала в человеческом сообществе. Истоки психодиагностики и психометрии также связывают с именем Ф. Гальтона, который ввел в обиход понятие «тест» (от англ. *test* — проба). Ученый считал, что интеллектуальную одаренность можно определять по степени сенсорной чувствительности; что возможности рассудка тем выше, чем тоньше органы чувств улавливают и дифференцируют различия (он проводил определенную параллель между интеллектуально одаренными и умственно отсталыми людьми [68].

Английский математик К. Пирсон усовершенствовал метод, позволяющий сделать заключение о степени случайности связи (между уровнем интеллекта и успеваемостью, между уровнем развития интеллекта и внешними характеристиками человека и др.), и положил начало развитию факторного анализа, получившего большое распространение в психологии.

В начале XX века появились труды Е. Гурьянова, Г. Россолимо, В. Штерна, В. Экземплярского и др., посвящённые проблемам детской одаренности. В психологии началось активное изучение познавательных процессов человека: внимания, восприятия, мышления. В рамках данных исследований шла разработка диагностических заданий и методов измерения индивидуальных различий детей и взрослых. Г. Россолимо (1910) впервые создал в России наиболее полную систему диагностики уровней одаренности, включающую измерение пяти основных составляющих (внимания, воли, восприимчивости, памяти, ассоциативных процессов). Вся же его система включала 11 основных процессов. Диагностика ассоциативных процессов давала оценку качества осмысления, комбинаторных способностей, сметливости, воображения, наблюдательности. Методика психологических профилей Г. Россолимо позволила впервые осуществлять графическое сопоставление уровней одаренности. В это время была разработана диагностика познавательных процессов и диагностика умственной одаренности, активно создавались методики для измерения интеллектуального развития ребенка с целью выявления различных диагностических уровней интеллекта в каждом возрасте [80].

В. Штерн определил сущность умственной одаренности. По его мнению, умственная одаренность есть общая способность сознательно направлять свое мышление на новые требования, есть общая умственная способность приспособления к новым задачам и условиям жизни; умственно одарен только тот, кто в состоянии легко приспособиться к новым требованиям при различных условиях и в различных областях. В. Экземплярский включил в понятие одаренности эмоциональную и волевую сферы жизни человека. Популярными стали диагностические комплексы, разработанные А. Бине и Т. Симоном. Эти комплексы позволяли диагностировать интеллектуальный потенциал детей. С помощью диагностической шкалы можно было найти интегральный эквивалент всем познавательным процессам и соотнести индивидуальные потенциальные возможности ребенка с его интеллектуальным развитием, включая учебную деятельность. А. Бине ввел величину интеллектуального потенциала, которая в дальнейшем получила название интеллектуальный коэффициент (IQ). Уровень интеллекта стали измерять по темпам и интенсивности интеллектуального развития детей. Л. Термен разработал конкретные числовые значения уровней интеллектуального коэффициента детей разного возраста. Специалисты сделали вывод о том, что шкала Бине-Термена может применяться в практике обучения детей [68].

В исследованиях советских ученых одаренность рассматривалась с точки зрения способностей. Б.М. Теплов в книге «Способности и одаренность» обратил внимание на то, что понятие «одаренность» лишается смысла, если его рассматривать как биологическую категорию. Понимание одаренности, по мнению Теплова, зависит от того, какая ценность придается тем или другим видам деятельности и что подразумевается под успешным выполнением каждой конкретной деятельности. В работах этого автора освещен качественный подход к изучению интеллекта, в соответствии с которым основным является определение своеобразия интеллектуальных возможностей человека. Ученый изучал так называемый «практический интеллект», который, по его мнению, является не менее ценным и важным для человека, чем теоретический. В книге Б.М. Теплова «Ум полководца» интеллект представлен в связи с волевыми и эмоциональными особенностями личности [72].

О.К. Тихомиров занимался изучением структуры интеллекта как деятельности. Н.С. Лейтес, Ю.Н. Кулюткин, Г.С. Сухобская, В.С. Юркевич исследовали интеллект в процессе изучения умственной деятельности и саморегуляции личности.

В зарубежной психологии проведено множество исследований структуры интеллекта с применением метода факторного анализа. Л. Терстон разработал мультифакторную схему, согласно которой существует ряд «первичных умственных способностей», между которыми в дальнейшем были обнаружены корреляционные связи, указывающие на существование общего фактора. Дж. Гилфорд разработал «единую структуру интеллекта», выделив в нем три стороны (одни факторы характеризуют выполняемые умственные операции; другие — особенности материала, используемого в тестах; третьи — получаемый продукт или результат мышления). Р. Кэттелл предложил концепцию о двух видах интеллекта: «текучий» (fluid) и «кристаллизованный» (crystallized). По Р. Кэттеллу «текучий» интеллект выступает в задачах, решение которых требует приспособления к новым ситуациям; он зависит от действия фактора наследственности; «кристаллизованный» интеллект выступает при решении задач, требующих соответствующих навыков, использования прошлого опыта, и зависит от влияний среды. Согласно взглядам Ж. Пиаже, интеллект — это структурирование, придающее определенные формы взаимодействиям субъекта со средой; специфика интеллекта зависит от природы «форм», которые он конструирует. Автор выделил четыре типа таких «форм»:

1) формы низшего типа, образуемые инстинктом и непосредственно вытекающие из анатомо-физиологической структуры организма;

2) целостные формы, образуемые навыком и восприятием;

3) целостные необратимые формы оперирования, образуемые интуитивным мышлением;

4) мобильные, обратимые формы, способные группироваться в различные сложные комплексы, образуемые «операциональным» интеллектом [68, 80].

М.А. Холодной проведен глубокий анализ психологических механизмов интеллектуальной одаренности. По отношению к проявлениям интеллектуальной одаренности, обнаружившей себя в экстраординарных интеллектуальных достижениях, в качестве их психического носителя, с ее точки зрения, выступает индивидуальный познавательный опыт субъекта, а точнее — особенности его состава и строения [74–76].

Предположение о том, что в основе экстраординарных интеллектуальных достижений лежат специфические формы организации познавательного опыта человека, в том или ином виде встречается в работах разных авторов. К примеру, А. Де Гроот считает, что любой творческий продукт не является результатом врожденной одаренности, а есть следствие специфического саморазвития личности, связанного с длительным накоплением и дифференциацией полезного для данной области деятельности опыта [81].

Дж. Уолтерс и Х. Гарднер описывают явление кристаллизации опыта, возникающее в условиях избирательного взаимодействия человека с определенными аспектами своего окружения и проявляющееся в изменениях его представлений о соответствующей предметной области и самом себе. Происходящая радикальная перестройка индивидуального познавательного опыта и является толчком к появлению тех или иных творческих продуктов. Х. Гарднер утверждает, что человеческая экстраординарность (в виде реальных творческих достижений) является следствием длительно и многократно повторяющихся встреч человека с соответствующей проблемной областью. По мнению этого автора, причина кроется не столько в изменениях когнитивной сферы, сколько в образовании новых форм социальных связей с другими людьми, а также новых форм осознания самого себя [75, с. 34].

Огромный интерес исследователей вызывает и такая форма организации индивидуального познавательного опыта, как база знаний человека. Особое внимание при этом сосредоточивается на явлении компетентности как условии экстраординарных интеллектуальных достижений реальной жизнедеятельности человека. Многими авторами было показано, что одаренные дети и взрослые имеют более богатую базу знаний, она у них в большей мере структурирована и легкодоступна в плане возможной актуализации [76].

М.А. Холодная убеждена, что когнитивные структуры, база знаний человека участвуют в порождении субъективного ментального пространства отражения, которое, будучи формой организации индивидуального познавательного опыта, играет ключевую роль в феномене интеллектуальной одаренности. Она утверждает, что индивидуальные различия в степени развернутости и динамичности этого ментального пространства, гибкости и проницаемости его границ, дифференцированности и иерархизированности его компонентов, интегрированности различных языков кодирования информации и т. д., несомненно, влияют на своеобразие познавательного отношения человека к миру, предопределяя тем самым его интеллектуальные возможности и соответственно основные проявления его интеллектуальной активности [75].

Основные проявления интеллектуальной одаренности, по мнению М.А. Холодной, могут быть представлены на трех основных уровнях, характеризующих разные стороны работы интеллекта:

1) уровне интеллектуальных способностей (последние обнаруживают себя в показателях интеллектуальной продуктивности, индивидуального своеобразия интеллектуальной деятельности и креативности);

2) уровне интеллектуального контроля (в виде метакогнитивных способностей, связанных с осознанием собственных интеллектуальных качеств и сформированностью регулятивных процессов);

3) уровне интеллектуальных критериев (в виде интеллектуальных интенций субъекта) [74].

М.А. Холодная утверждает, что для понимания механизмов интеллектуальной одаренности в первую очередь следует учитывать не столько характеристики деятельности, сколько особенности психологической организации субъекта деятельности, ибо те или иные параметры деятельности производны по отношению к психологическим ресурсам личности. Автор считает, что своего рода принижению роли интеллекта, отождествляемого, как правило, с логическим, рациональным аналитическим началом, в определенной мере способствовал все возрастающий в последние годы интерес отечественных авторов к иррациональным субъективным состояниям, трактовке человеческого познания как выражения творческой активности личности. В результате, в плане профессионального психологического анализа, «человек переживающий» оказался более привлекательным, чем «человек разумный» [76].

М.А. Холодная считает, что, если для западной психологии проблема интеллекта попала в разряд двусмысленных тем исследования (действительно, стоит ли браться за изучение интеллекта, если его существование в качестве реального психического качества подвергается сомнению), то в отечественной психологии она приобрела репутацию неинтересной темы. Автор справедливо замечает, что мы часто сталкиваемся с феноменом неприятия интеллекта: «Нельзя не заметить, как разительно контрастирует в обществе настороженное и даже агрессивное отношение к людям, художественно одаренным (певцам, композиторам, поэтам, мастерам по вышивке бисером и т. п.). Социально-государственный инстинкт отвержения «чересчур умных», несомненно, связан с боязнью инакомыслия как явления, способного разрушить общепринятые социальные ценности. Поэтому по характеру ориентации общества на свою интеллектуальную элиту можно судить о том, здорово ли оно либо, напротив, поражено вирусом тоталитаризма (независимо от того, исповедуется ли при этом коммунистическая, национальная, демократическая или религиозная идеология). Наконец, на обыденно-житейском уровне существует стойкий стереотип о необязательности и даже нежелательности интеллекта в ряду других психологических качеств человека. «Горе от ума» — с этой констатацией готовы согласиться очень многие» [76, с. 35]. В одном из исследований, проведенных М.А. Холодной, испытуемые, определяя свое положение на оси с полюсами «глупый — умный», стремились сместить себя к середине шкалы. Общее мнение высказал в объяснении своего выбора один из испытуемых, заявив: « не настолько глуп, чтобы быть умным». Игнорирование роли интеллекта, обусловлено не только влиянием жизненных реалий, но и действием психологической самозащиты личности, связанной с потребностью избегания опасности «погибнуть от истины» [76, с. 35].

М.А. Холодная убеждена, что создание какой-либо системы работы с интеллектуально одаренными людьми (в первую очередь с детьми), ориентированной на максимальное содействие развитию их интеллектуальных возможностей и создание для них режима наибольшего социального благоприятствования, предполагает предварительную ломку вышеуказанных стереотипов. И, говоря о необходимости особо внимательного отношения общества к своей интеллектуальной элите, автор напоминает о том, что основное значение интеллектуально одаренных людей заключается в их участии в процессе порождения идей: «И этот слой идей в общественной атмосфере подобен озоновому в обычной земной атмосфере. Чем меньше в обществе интеллектуально одаренных людей, тем больше озоновых дыр и тем выраженнее хаос социальной организации. Поэтому борьба за людей с высоким интеллектуальным потенциалом оборачивается в буквальном смысле слова борьбой за выживание человечества» [76, с. 36].

Интеллектуальная одаренность и деятельность мозга тесно взаимосвязаны. Изучение деятельности человеческого мозга — одна из актуальных проблем современной науки. Она непосредственно связана с общим решением вопроса о соотношении биологического и социального в развитии человека и определением как путей и методов активного влияния на интеллектуальную деятельность, так и их допустимых (с социально-этических и гуманистических точек зрения) пределов и форм. Современная нейрофизиология находится в процессе бурного развития, которое, несомненно, приведет к решению главных вопросов, поставленных наукой о мозге и интеллекте. Это касается изучения деятельности мозга не только на клеточном и молекулярном уровнях, но и в целом, то есть во всем многообразии системных связей и взаимодействий. Фундаментальное значение в этом аспекте имеют идеи и подходы И.П. Павлова, развитые с учетом современных данных науки о мозге П.К. Анохиным. В его теории функциональных систем, системообразующую роль в деятельности системы и ее адаптации к новым условиям играет результат, функционально определяющий формирование органа, в данном случае — мозга человека. Универсальная организация мозга человека, определяющая уже на молекулярном уровне специфическую способность нервных клеток к системному функционированию, обеспечивает возможность проявления интеллекта.

Организация мозга, по мнению нейрофизиологов, в существенной степени зависит также от наследственных детерминант, поэтому в науке ставится задача расшифровки нейрофизиологического кода психических явлений, решение которой будет способствовать более эффективному использованию резервов мозга. Многие ученые, признавая допустимость искусственного влияния на работу мозга, выражают серьезные опасения по поводу отрицательных последствий, которые могут при этом возникнуть. П.К. Анохин предупреждает, что если когда-то состоятся попытки сделать интеллектуальные способности продуктом химических и обучающих лабораторий, то вполне может случиться так, что при последующем развитии науки, с более высокого ее уровня мы увидим, что внесли в мозг человека необратимые изменения, которые, к несчастью, уже нельзя будет устранить. Ученые сходятся на том, что для повышения активности интеллекта эффективнее использовать уже имеющиеся ресурсы мозга, которые пока заключены в неведомых тайниках. Кибернетическое моделирование нейрофизиологических механизмов человека и их техническое воспроизводство в ЭВМ с целью создать искусственный интеллект, который мог бы выполнять неограниченно широкий круг функций естественного интеллекта, открывают новые пути в исследовании интеллектуальной одаренности. Биокибернетические исследования будут способствовать существенному расширению интеллектуальных возможностей человека.

В разработке программ обучения интеллектуально одаренных детей в мировой практике используют такие концептуальные модели, которые условно называются «Свободный класс», «Структура интеллекта Гилфорда», «Три вида обогащения учебной программы» Рензулли, «Таксономия целей обучения» Блума, когнитивно-аффективная модель Уильямса. Эти модели дают принципы и основы для организации и осуществления процесса обучения интеллектуально одаренных детей [10,13, 68, 80].

В модели «Свободный класс» упор делается на индивидуальной исследовательской деятельности учащихся. Эта модель больше подходит для использования в дошкольных учреждениях и начальной школе. Дети сами определяют интенсивность и продолжительность занятий, сами выбирают темы для изучения и планируют свое время. Задача учителя — поддержать, поощрить инициативу, самостоятельность, изобретательность, исследовательский и творческий подходы, то есть все те качества, которые присущи одаренным детям. При этом методе обучения особенно актуально звучит известный лозунг: «Учитель, помоги мне это сделать самому!». Психолого-педагогическая литература и педагогический опыт подсказывают, что для развития своих талантов одаренные дети должны свободно распоряжаться пространством и временем, чувствовать заботу и внимание со стороны учителя. Хорошо в эту модель вписывается Дальтон-технология. Будучи свободным в выборе программ и методов обучения, учитель волен стимулировать и направлять естественное любопытство, самостоятельность, интеллектуальные и творческие способности одаренного ребенка [67, 80].

Модель Гилфорда (SOI) стала моделью интеллектуальной деятельности, которую высоко ценят педагоги, работающие с одаренными детьми. Модель позволяет использовать самые разнообразные методы обучения. SOI содержит описание разных типов когнитивных способностей, в ней представлены 120 различных интеллектуальных процессов (способностей), которые нет необходимости запоминать, а важно понять основные принципы. Важнейшим параметром модели Гилфорда являются операции. Этот параметр отражает характер и способы умственной деятельности при переработке информации. К числу операций относятся: познание, память, дивергентное продуктивное мышление, конвергентное продуктивное мышление и оценка. Познание включает в себя процессы восприятия, узнавания, осознания и понимания информации, процесс открытия, осуществляющийся при помощи всех пяти органов чувств, понимание идей, концепций и принципов. Однако познание — это только один из путей переработки информации и поэтому не может доминировать в учебном процессе. Второй операцией является память. Это механизм сохранения и воспроизведения информации. Информация, которую человек может восстановить в памяти, в значительной степени совпадает с тем, что он усваивает. Дивергентное продуктивное мышление опирается на воображение и служит средством порождения оригинальных идей и самовыражения. Дивергентное мышление предполагает, что на один вопрос может быть несколько правильных ответов. Это мышление является важнейшим элементом творческой деятельности. Конвергентное продуктивное мышление проявляется в задачах, имеющих единственный правильный ответ. Оценочное мышление является как бы инструментом сравнения со стандартами или установленными критериями и предполагает вынесение суждений [68, 80].

В модели SOI различается четыре типа содержания мыслительных процессов, то есть каждая из пяти описанных выше операций может применяться в отношении фигуративной, символической, семантической и поведенческой информации. К фигуративному содержанию относят наглядно-образную информацию, соотносящуюся с образами восприятия или памяти (форма, цвет, структура). Символическая информация связана со знаками (буквы, числа, коды). Семантическое содержание охватывает вербальные идеи и понятия. В фокусе внимания здесь находится смысл, передаваемый с помощью слов или изображения. Под поведенческим содержанием условно объединяют чувства, мысли, настроения и желания людей, взаимоотношения между ними. Третья функция модели SOI описывает, каким образом организуются конечные результаты мыслительного процесса. Практическую апробацию модели SOI впервые осуществили в Илли-нойском университете в 1973 году для обучения одаренных детей. Глубокое знание данной модели помогает педагогам задавать своим одаренным учащимся такие вопросы, ответы на которые требуют выхода за границы базового уровня мышления. Модель эффективно стимулирует развитие дивергентного, конвергентного и критического мышления.

Модель Рензулли «Три вида обогащения учебной программы» начала широко применяться при обучении одаренных детей с 1977 года. Эта модель отвергает тезис о том, что потенциальные возможности одаренных детей могут быть реализованы путем простой интенсификации усвоения того же самого материала, который рассчитан на детей со средними способностями. Рензулли доказывает, что индивидуализация интенсивности обучения без изменения его содержания и организации усвоения и методов преподавания совершенно недостаточна для полноценной реализации возможностей одаренных и талантливых детей. Программа, построенная на основе этой модели, должна быть ориентирована на достижение двух основных целей:

1) обеспечение возможности учащимся посвящать большую часть времени тем видам деятельности, которые представляют для них наибольший интерес;

2) оказание помощи каждому ребенку в постановке перед собой посильных задач, отвечающих его интересам, и овладении методами и исследовательскими навыками, необходимыми для решения этих задач. В задачу учителя входит также

необходимость найти соответствующее применение результатам деятельности учащихся [64].

Модель Рензулли предлагает три вида обогащения учебных программ. Первые два вида применимы для всех категорий учащихся, но особенно полезны для одаренных детей. Это объясняется следующими причинами:

1) они основываются на стратегии расширения круга интересов учащихся и развития процессов мышления и восприятия;

2) эти два усовершенствования служат в качестве логического введения и основания для третьего вида усовершенствования, который предназначается в основном для одаренных учащихся.

Третий вид обогащения учебной программы применим как к отдельным учащимся, так и к небольшим группам, занимающимся конкретными практическими проблемами. Согласно рекомендациям автора модели, этому виду занятий должна быть отведена примерно половина времени, посвященного развитию и совершенствованию одаренных детей [64].

Рензулли выделяет три направления деятельности одаренных детей: общая познавательная деятельность, групповое обучение, исследование и решение задач индивидуально и в малых группах. Общая познавательная деятельность предполагает знакомство учащихся с самыми различными областями и предметами изучения, которые могут их заинтересовать. В результате такого ознакомления у одаренных детей появляется возможность определить те области знания, которые они хотели бы изучать более глубоко. Выбор конкретного предмета является обязательным условием. Процесс обучения призван развивать у детей способности к мышлению и восприятию. Во время группового обучения учащиеся приобретают мыслительные навыки достаточно высокого уровня, позволяющие им более успешно осваивать учебный материал. Приобретенные навыки и знания необходимы для решения широкого круга проблем из самых различных областей и служат надежной основой для перехода к более сложным познавательным процессам. Исследование и решение задач индивидуально и в малых группах существенно отличается от группового обучения. Здесь ребенок принимает активное участие, как в постановке проблемы, так и в определении методов ее решения. Не существует ни стандартного метода решения, ни однозначно правильного ответа. Имеется лишь определенная техника исследования, на которую можно опереться, и критерии, по которым можно судить о результатах. Выбранная область исследования отражает круг интересов самих учащихся. Интерес детей к исследовательской деятельности поддерживается предоставлением им возможности распоряжаться результатами своего труда. Учитель при этом является руководителем и советчиком. В его задачу входит оказание умелой методической помощи [13, 68, 80].

Модель Б. Блума «Таксономия целей обучения» ориентирована на сферу познавательных функций. Таксономия — это система классификации предметов, принципов или фактов в соответствии с их сущностными и логическими взаимосвязями. Блум, Энгельхарт, Фурст и Кратволь предложили несколько вариантов использования «Таксономии целей обучения» в работе с одаренными детьми. Ученые советуют при составлении учебного плана наметить широкий диапазон возможных целей или результатов в когнитивной сфере. По их мнению, сравнивая цели, заложенные в учебных планах, с принципиально возможными результатами, педагоги могут определить типы заданий и дополнительные цели для включения в свой учебный план, рассчитанные на одаренных детей. Блум и его коллеги считают, что таксономия оказывает существенную помощь учителям в определении целей, облегчает планирование учебного процесса и способствует выработке методики и процедур оценки. Таксономия является эффективным инструментом для анализа влияния обучения на развитие у детей способностей к запоминанию, осмыслению и решению задач. Выдвинутые Блумом идеи и методы подробно изложены в книге «Таксономия целей обучения» (1956). В этой работе имеются шесть основных разделов: знание, понимание, применение, анализ, синтез и оценка. Эти разделы отражают иерархию целей обучения (табл. 1.1). Первый уровень означает умение узнавать факты, структуры на основе распознавания. Второй уровень (понимание) позволяет осуществлять воспроизведение материала, не гарантируя применение его в решении других задач. Третий уровень уже связан с деятельностью, обеспечивающей решение определенного класса задач. Все остальные уровни предполагают усвоение деятельности, лежащей в основе решения продуктивных (творческих) задач [5].

Таблица 1.1. Таксономия целей обучения

Уровень	*Ключевые слова и фразы*
Познание	Соотнесите, перечислите, расскажите, сформулируйте, установите, опишите, назовите
Понимание	Расскажите своими словами; опишите, что вы чувствуете относительно ...; суммируйте; покажите взаимосвязь; объясните смысл
Применение	Продемонстрируйте; объясните цель применения; воспользуйтесь этим, чтобы решить ...
Анализ	Разложите на составляющие; объясните причины; сравните; разложите по порядку; классифицируйте; объясните, как и почему ...
Синтез	Разработайте новый тип задач; создайте; что произойдет, если..., придумайте другой вариант; есть ли другая причина
Оценка	Что вы думаете о ...; выскажите критические замечания; выберите то, что вам больше всего нравится; взвесьте возможности

Когнитивно-аффективная модель Уильямса направлена на объединение когнитивных и аффективных аспектов развития одаренных детей. Модель содержит три раздела. В первом разделе представлены основные предметы изучения: математика, филология, естествознание, обществоведение, музыка, изобразительное искусство. Во втором рассматриваются различные стратегии преподавания и поведения учителя: его умение вводить определения, привлекать аналогии, видеть расхождения и противоречия, прибегать к использованию парадоксов, задавать наводящие вопросы, организовывать поисковую активность, прививать исследовательские навыки и т. д. В центре внимания третьего раздела находятся показатели развития учащихся, как в познавательной, так и в эмоционально-личностной сферах: быстрота, гибкость, оригинальность и точность мышления, любознательность, готовность рисковать, воображение и т. п. Уильямс убежден, что аффективное развитие тесно связано с когнитивным. Дети, достаточно уверенные в своих силах, исключительно активны и настойчивы в своей познавательной деятельности [68].

В практической деятельности при организации работы с интеллектуально одаренными детьми педагоги используют положения из разных концепций отечественных и зарубежных ученых. Все приведенные выше модели являются основой для выбора форм и методов обучения, разработки индивидуализированных программ.

1.2 Определение и сущность феномена интеллектуальной одаренности

В настоящее время не существует четких определений интеллектуальной одаренности и одаренности вообще. В научных изданиях, работах известных педагогов и психологов мы находим различные подходы к трактовке этого понятия. Термин «интеллектуальная одаренность» состоит из двух слов, каждое из которых несет определенный смысл. В педагогическом словаре под редакцией Г.М. Коджаспировой, А.Ю. Коджаспирова: «Одаренность — это качественно своеобразное сочетание способностей, обеспечивающее успешное выполнение деятельности; общие способности, обусловливающие широту возможностей человека; умственный потенциал или интеллект, целостная индивидуальная характеристика познавательных возможностей и способностей к обучению; совокупность задатков, природных данных, характеристика степени выраженности и своеобразия природных предпосылок способностей; талантливость; наличие внутренних условий для выдающихся достижений в деятельности» [43]. А.С. Лейтес определяет одаренность как способность к выдающимся достижениям в любой социально значимой сфере человеческой жизни [51].

В словаре русского языка С.И. Ожегова: «Интеллект — это мыслительная способность, умственное начало у человека», «одаренный — то же, что и талантливый», «талантливый — обладающий талантом, проявляющий талант», «талант — выдающиеся врожденные качества». Д.Г. Левитес определяет интеллект как сложное психическое образование, включающее разные познавательные процессы и функции (мышление, память, внимание) в их взаимосвязи. В психологическом словаре: «Интеллект (от лат. intellectus — понимание, познание) — в широком смысле — совокупность всех познавательных функций индивида: от ощущений и восприятия до мышления и воображения; в узком смысле — мышление» [63].

Психологи выделяют три разновидности в понимании функции интеллекта:

1) способность к обучению;

2) оперирование символами;

3) способность к активному овладению закономерностями окружающей нас действительности.

Они убеждены, что формирование интеллекта происходит в процессе целенаправленной деятельности и утверждают, что термин «интеллект» часто применяют для того, чтобы подчеркнуть специфику человеческой психической деятельности. Способность иметь дело с абстрактными символами и отношениями — это только одна сторона интеллекта; не менее важна и такая его сторона, как конкретность мышления. Нередко интеллект трактуют, как возможность приспосабливаться к новым ситуациям, использовать ранее приобретенный опыт. В данном случае интеллект отождествляется со способностями к учению. Психологи указывают и на то, что интеллект заключает в себе продуктивное начало. Самое существенное для человеческого интеллекта состоит в том, что он позволяет отражать закономерные связи и отношения предметов и явлений окружающего мира и тем самым дает возможность творчески преобразовывать действительность. Целостность структуры интеллекта человека подчеркнута в трудах Б.Г. Ананьева, С.Л. Рубинштейна, Б.М. Теплова [2, 66, 72].

В течение многих лет высокий интеллект, установленный с помощью специальных стандартизированных тестов, служил рабочим определением «интеллектуальной одаренности». Рензулли предложил определение, основанное на свойствах, отмеченных у взрослых людей. По его мнению, одаренность является результатом сочетания трех характеристик: интеллектуальных способностей, превышающих средний уровень, творческого подхода и настойчивости [64]. Исследования ученых показывают, что эти характеристики или их сочетания подвержены изменениям, поэтому очень важен для одаренных детей ранний опыт обучения, оказывающий благотворное влияние на проявления одаренности в последующей взрослой жизни.

При всем многообразии и многозначности научных и бытовых определений понятий «интеллект» и «одаренность» термин «интеллектуальная одаренность» в психологии и в педагогике приобрел вполне определенный смысл в результате развития в начале XX в. психодиагностики и психометрии. В начале XX века во Франции осуществлялась реформа в системе образования, суть которой — в переходе к всеобщему начальному обучению. В рамках реализации этой реформы надо было отобрать детей, которые были не способны к обучению. Решением этой проблемы занималась группа психологов и педагогов под руководством А. Бине. Концепция этих исследователей предполагала биологически детерминированное развитие интеллекта в онтогенезе, подчеркивая при этом высокую значимость средовых факторов. Методики, разработанные в период осуществления исследовательской работы, строились на представлениях о когнитивной сложности интеллекта. А. Бине и его сподвижники пытались выявить общие способности к познавательной деятельности. Интеллект они оценивали с учетом сформированных познавательных функций и усвоения социального опыта. А. Бине считал, что факторы среды играют большую роль в развитии интеллекта, и указывал на необходимость создания соответствующих условий. Ученый ввел в научный обиход понятия «умственный возраст» и «хронологический возраст» [68].

Ряд других ученых (Г. Мюллер, Э. Торндайк, В. Штерн и др.) были сторонниками концепции фиксированного интеллекта. По их мнению, интеллект — генотипическая установка. Его можно измерить в детском возрасте (примерно, лет в 7–8) и этот коэффициент интеллекта будет показателем интеллектуальной развитости человека в течение всей его жизни. Основное внимание исследователей первой половины XX века было направлено на разработку диагностических методик (тестов) для определения «коэффициента интеллекта». При этом контраст между универсальностью коэффициента интеллекта и специфичностью индивидуальных личностных проявлений в учебной деятельности многие ученые считали доказательством того, что интеллект статичен.

Понятие «генотипический интеллект» (генетически предопределенный, унаследованный интеллект) ввел канадский ученый Д. Хебб. Генотипический интеллект, взаимодействуя с внешней средой, образует «фенотипический интеллект», который измеряется тестами на интеллект. Д. Хебб отдавал предпочтение наследственным факторам, утверждая, что содержание интеллекта есть продукт социально-культурной среды и опыта субъекта, но способность этот опыт ассимилировать и использовать на 80% зависит от унаследованной генотипической структуры. Исследования ученых не подтвердили идею фиксированного интеллекта, решающую роль наследственных факторов в становлении интеллекта.

В настоящее время существуют два основных метода исследования интеллекта: метод проблемных ситуаций и метод тестирования. Оба эти подхода оказали существенное влияние на выяснение сущности понятий «одаренность, интеллект, творчество, продуктивное мышление», вне их невозможно представить и саму разработку теоретических моделей данных личностных свойств [3, 71].

Возвращаясь к истории развития представлений об одаренности, необходимо отметить, что А. Бине, как и многие его современники и последователи, прекрасно понимал, что об умственной одаренности, об интеллекте человека нужно судить не только по тому, что он может сделать на основе следования алгоритму. Одаренность, интеллект проявляются в ситуациях открытия новых (даже только для себя) знаний, в способности к переносу этих знаний в новые ситуации, при решении оригинальных, новых проблем. Но разработанные им методики еще не позволяли выявлять данные качества [68].

Разработка методов определения способностей и одаренности начата в психологии и первоначально была направлена на оценку индивидуальных различий и личностных особенностей. Многие исследователи считают, что одаренность — это единство общих моментов способностей, обусловливающее диапазон интеллектуальных возможностей человека, уровень и своеобразие его деятельности. По их мнению, одаренность представляет собой основу развития самых различных способностей и во многом является результатом развития специальных способностей. Существует определенная возрастная последовательность проявления одаренности в разных областях. Особенно рано может проявиться одаренность к музыке, затем — к рисованию. В научной области раньше других формируется одаренность к математике. Интеллектуальная одаренность может выступить в необычно высоком уровне умственного развития (при прочих равных условиях) и в качестве своеобразия умственной деятельности. Для одаренных детей характерны увлеченность занятиями и проявления творческих моментов в деятельности. Одаренность ребенка не бывает дана от природы в готовом виде. Врожденные задатки — только одно из условий сложного процесса формирования индивидуально-психологических особенностей, в огромной степени зависящих от окружающей среды, от характера деятельности. Фундаментальное исследование Термена (1959 г.) в этом направлении привело к тому, что интеллект стал рассматриваться как главный показатель одаренности [63].

Имеющиеся в психологии подходы позволяют выделить три категории одарённых детей:

– с необыкновенно высоким уровнем умственного развития при прочих равных условиях;

– с признаками специальной умственной одарённости, например, к математике или языкам;

– с яркой познавательной активностью, отличающиеся оригинальностью психического склада, незаурядными умственными способностями [63].

Значительные трудности в определении понятий способности и одарённости связаны с общепринятым, бытовым пониманием этих терминов. Если мы опять обратимся к толковым словарям, то увидим, что очень часто термины «способный», «одарённый», «талантливый» употребляются как синонимы и отражают степень выраженности способностей. Но еще более важно подчеркнуть, что понятием «талантливый» подчеркиваются природные данные человека. Так, в толковом словаре В. Даля «способный» определяется как «годный к чему-либо или склонный, ловкий, пригодный, удобный», а в словаре С. Ожегова, как обладающий способностями к чему-нибудь, одаренный; могущий что-нибудь сделать; обладающий каким-нибудь свойством. Наряду со «способным» используются понятия «способливый» и «способляться». Способливый человек характеризуется как находчивый, изворотливый, умеющий способиться; а способляться, в свою очередь, понимается как умение сладить, управиться, устроить дело. Способный фактически понимается как умелый, а умение определяется С.И. Ожеговым, как способность делать что-нибудь, приобретенная знанием, опытом. Таким образом, понятие «способный» определяется через соотношение с успехами в деятельности.

По С. Ожегову «способность — это природная одаренность, талантливость; умение, а также возможность производить какие-либо действия». В психологическом словаре «способности» — это индивидуально-психологические особенности, являющиеся субъективными условиями успешного осуществления определенного рода деятельности. Способности не сводятся к имеющимся у индивида знаниям, умениям и навыкам. Они обнаруживаются в быстроте, глубине и прочности овладения способами и приемами деятельности. В изучении способностей выделяют три основные проблемы: происхождение и природа способностей; типы и диагностика отдельных видов способностей; закономерности развития и формирования способностей. Способности имеют комплексную структуру, складывающуюся из разнообразных компонентов. Важное место в психологии и педагогике занимает проблема формирования способности к конкретным видам деятельности. В них показана возможность развития способностей через создание личностной установки на овладение предметом деятельности.

Проблемам развития способностей, в том числе и математических, посвящен ряд психолого-педагогических исследований. Общие аспекты теории способностей представлены в трудах Л.С. Выготского, А.Н. Леонтьева, Н.Ф. Талызиной, Б.М. Теплова. Математические способности и механизмы их развития рассматривались А.Н. Колмогоровым, В.А. Крутецким, Н.А. Менчинской, Н.В. Метельским, А.Я. Хинчиным, Ж. Адамаром, А. Пуанкаре и др.

Под способностями к математике В.А. Крутецкий подразумевает индивидуально-психологические особенности (прежде всего особенности умственной деятельности), отвечающие требованиям учебной математической деятельности и обусловливающие при прочих равных условиях успешность творческого овладения математикой как учебным предметом, в частности относительно быстрое, легкое и глубокое овладение знаниями, умениями и навыками в области математики [48].

В.А. Крутецкий выделил основные компоненты математиче-ских способностей:

1) способность к формализации математического материала, к отделению формы от содержания, абстрагированию от конкретных количественных отношений и пространственных форм и оперированию формальными структурами, структурами отношений и связей;

2) способность обобщать математический материал, вычленяя главный, отвлекаясь от несущественного, видеть общее во внешне различном;

3) способность к оперированию числовой и знаковой символикой;

4) способность к последовательному, правильно расчлененному логическому рассуждению, связанному с потребностью в доказательствах, обосновании, выводах;

5) способность сокращать процесс рассуждения, мыслить свернутыми структурами;

6) способность к обратимости мыслительного процесса (к переходу от прямого к обратному ходу мысли);

7) гибкость мышления, способность к переключению от одной умственной операции к другой, свобода от сковывающего влияния шаблонов и трафаретов;

8) математическая память (на обобщения, формализованные структуры, логические схемы);

9) способность к пространственным представлениям [48].

Высокий уровень развития способностей часто связывают с талантом. В словаре С. Ожегова «талант» — это выдающиеся врожденные качества, особые природные данные. В психологическом словаре «талант» — это совокупность способностей (одаренность), позволяющая получить продукт деятельности, который отличается новизной, высоким совершенством и общественной значимостью. При определении понятия «талант» подчёркивается его врожденный характер. Талант определяется как дарование к чему-либо, а дарование как способность, данная богом (свыше, природой). Иными словами, талант — это врождённые способности, обеспечивающие высокие успехи в деятельности. В словаре иностранных слов также подчеркивается, что талант (гр. talanton) — выдающееся врожденное качество, особые природные способности. Одарённость рассматривается, как состояние таланта, как степень выраженности таланта. Формирование и развитие таланта в огромной степени зависит от условий жизни и деятельности личности. Для талантливых людей характерна потребность в занятиях определенным видом деятельности. Сочетание частных способностей, составляющих талант, в каждом случае бывает особым, присущим конкретной личности.

Из сказанного можно сделать вывод, что способности, с одной стороны, одарённость и талант, с другой, выделяются как бы по разным основаниям. Говоря о способности, исследователи подчеркивают возможность человека что-то делать, а говоря о таланте (одарённости), подчеркивают Определение и сущность феномена интеллектуальной одаренности) врождённый характер данного качества (способности) человека. Однако все убеждены, что и способности, и одарённость проявляются в успешности деятельности. В трудах С.Л. Рубинштейна и Б.М. Теплова сделана попытка дать классификацию понятий «способности», «одарённость» и «талант» по успешности деятельности. Способности рассматриваются как индивидуально-психологические особенности, отличающие одного человека от другого, от которых зависит возможность успеха деятельности, а одарённость — как качественно своеобразное сочетание способностей (индивидуально-психологических особенностей), от которого также зависит возможность успеха в деятельности. Иногда способности считают врожденными, «данными от природы». Однако научный анализ показывает, что врожденными могут быть лишь задатки, а способности являются результатом развития задатков [66, 72].

В словаре С. Ожегова «задатки» — это зачатки каких-либо способностей, качеств. В психологическом словаре «задатки» — врождённые анатомо-физиологические особенности организма. К ним относятся, прежде всего, особенности строения головного мозга, органов чувств и движения, свойства нервной системы, которыми организм наделен от рождения. Задатки представляют собой лишь возможности и предпосылки развития способностей, но ещё не гарантируют, не предопределяют появления и развития тех или иных способностей. Возникая на основе задатков, способности развиваются в процессе и под влиянием деятельности, которая требует от человека определенных способностей. Вне деятельности никакие способности развиваться не могут. Ни один человек, какими бы задатками он не обладал, не может стать талантливым математиком, музыкантом или художником, не занимаясь много и упорно соответствующей деятельностью. К этому нужно добавить, что задатки многозначны. На основе одних и тех же задатков могут развиваться неодинаковые способности, в зависимости опять-таки от характера и требований деятельности, которой занимается человек, а также от условий жизни и особенно воспитания. Задатки и сами развиваются, приобретают новые качества. Поэтому анатомо-физиологической основой способностей человека являются не просто задатки, а развитие задатков, то есть не просто природные особенности его организма (безусловные рефлексы), но и то, что приобретено им в процессе жизни — системы условных рефлексов. На развитие способностей оказывают влияние особенности высшей нервной деятельности. Так, от скорости образования и прочности условных рефлексов зависят быстрота и прочность овладения знаниями и навыками; от быстроты выработки дифференцированного торможения на сходные раздражители — возможность тонко улавливать сходство и различие между предметами или их свойствами; от скорости и легкости образования и переделки динамического стереотипа — приспособляемость к новым условиям и готовность быстро переходить от одного способа выполнения деятельности к другому [63].

Способности различаются по качеству, широте, структуре и степени развития. Качество способностей определяется той деятельностью, условием успешного выполнения которой они являются. О человеке обычно говорят не просто, что он способен, а к чему способен, то есть указывают качество его способностей. По качеству способности делятся на математические, технические, художественные, литературные, музыкальные, организаторские, спортивные и т. д. По широте различаются общие и специальные способности [63].

Специальные способности являются условными, необходимыми для успешного выполнения какого-либо одного конкретного вида деятельности. К ним относятся, например, музыкальный слух, музыкальная память и чувство ритма у музыканта, «оценка пропорций» у художника, педагогический такт у учителя и т. п. Общие способности необходимы для выполнения различных видов деятельности. Например, такая способность, как наблюдательность, нужна и художнику, и писателю, и врачу, и педагогу; организаторские способности, внимание, критичность и глубина ума, хорошая зрительная память, творческое воображение должны быть присущи людям многих профессий. Эти способности принято называть общими. Самой общей и в то же время основной способностью человека является аналитико-синтетическая способность. Благодаря ей, человек различает отдельные предметы или явления в сложном их комплексе, выделяет главное, характерное, типичное, улавливает самую суть явления, объединяет выделенные моменты в новом комплексе и создаёт что-то новое, оригинальное. Никакая отдельная способность не может быть достаточной для успешного выполнения деятельности. Надо, чтобы у человека было много способностей, которые находились бы в благоприятном сочетании. Качественно своеобразное сочетание способностей, необходимых для успешного выполнения какой-либо деятельности, называют одарённостью [63].

Интеллектуально одаренные дети отличаются особым мышлением. В словаре С. Ожегова «мышление» — способность человека рассуждать, представляющая собою процесс отражения объективной действительности в представлениях, суждениях, понятиях. В психологическом словаре «мышление» — это наиболее обобщенная и опосредованная форма психического отражения, устанавливающая связи и отношения между познаваемыми объектами. Мышление радикально расширяет возможности человека в его стремлении к познанию всего окружающего мира, вплоть до невидимого, поскольку оно оперирует не только первичными и вторичными образами, но и понятиями. Процесс мышления представляет собой сложную умственную деятельность, включающую следующие мыслительные операции: анализ, синтез, сравнение, абстрагирование, обобщение, конкретизацию, классификацию, систематизацию. Анализ — это мысленное расчленение целого на составные части, компоненты и выделение отдельных признаков, элементов, свойств, связей, отношений. Синтез — мысленное воссоединение выделенных компонентов целого. Сравнение — неразрывное единство анализа и синтеза, с помощью которого устанавливается сходство и различие отдельных объектов. Абстрагирование обеспечивает выделение одних признаков и отвлечение от других. Обобщение — выделение относительно устойчивых инвариантных свойств предметов и отношений. Конкретизация — это разделение и последующее объединение предметов или явлений более общим понятием, означающим классы тех или иных предметов или явлений. Систематизация —мысленное расположение классов, предметов или явлений в определенном порядке, в соответствии с существующими между ними связями. Благодаря систематизации явления объективного мира отражаются в сознании не разобщенно, а в определенной системе, что позволяет глубже понять их взаимосвязь и правильно использовать эти знания в практической деятельности [63].

В зависимости от содержания решаемой задачи в психологии принято выделять следующие виды мышления: наглядно-действенное, наглядно-образное, словесно-логическое (теоретическое и практическое, интуитивное и аналитическое, продуктивное и репродуктивное и др.). Наглядно-действенное мышление — вид мышления, опирающийся непосредственно на восприятие предметов, реальное преобразование ситуации в процессе действий с предметами. Наглядно-образное мышление — вид мышления, характеризующийся опорой на представления и образы; функции образного мышления связаны с представлением ситуаций и изменений в них, которые человек хочет получить в результате своей деятельности. Словесно-логическое мышление — вид мышления, осуществляемый при помощи логических операций с понятиями. Теоретическое и практическое мышление различают по типу решаемых задач и вытекающих отсюда структурных и динамических особенностей. Теоретическое мышление — это познание законов, правил. Основная задача практического мышления — подготовка физического преобразования действительности: постановка цели, создание плана, проекта, схемы. Проводится различие между интуитивным и аналитическим (логическим) мышлением. Для этого обычно используют три признака: временной (время протекания процесса), структурный (членение на этапы), уровень протекания (осознанность, неосознанность). Аналитическое мышление развернуто во времени, имеет четко выраженные этапы, в значительной степени представлено в сознании самого мыслящего человека. Интуитивное мышление характеризуется быстротой протекания, отсутствием четко выраженных этапов, является минимально осознанным. Важным является различие продуктивного и репродуктивного мышления, основанного на степени новизны получаемого в процессе мыслительной деятельности продукта по отношению к знаниям человека. Как и другие психические процессы, мыслительная деятельность людей отличается значительными индивидуальными различиями. Индивидуальные особенности мыслительной деятельности — это, прежде всего, результат развития его ума в процессе познания действительности, в процессе обучения. Индивидуальные различия в мыслительной деятельности одаренных детей могут проявляться в таких качествах мышления, как широта, глубина, самостоятельность, гибкость мышления, быстрота и критичность ума. Широта мышления — это способность охватить весь вопрос целиком, не упуская частностей.

Глубина мышления выражается в умении проникать в сущность сложных вопросов. Самостоятельность характеризуется умением человека выдвигать новые задачи и находить пути их решения, не прибегая к помощи других людей. Гибкость мысли выражается в свободе от сковывающего влияния, закрепленных в прошлом приемов и способов решения задач, в умении быстро менять действия при изменении обстановки. Быстрота ума — это способность человека быстро разобраться в новой ситуации, обдумать и принять правильное решение. Критичность ума — умение человека объективно оценивать свои и чужие мысли, тщательно и всесторонне проверять все выдвигаемые аргументы [43, 63].

Многолетние исследования творческой деятельности, в частности, структуры одарённости, дают определённые основания для попытки построения некоторых новых теоретических положений относительно динамики и организации творческого процесса, сущности творчества [9, 12, 18]. Одарённость — это своего рода мера генетически и опытно предопределённых возможностей человека адаптироваться к жизни. Основные функции одарённости — максимальное приспособление к миру, окружению, нахождение решения во всех случаях, когда создаются новые, непредвиденные проблемы, требующие именно творческого подхода. Специальная одарённость характеризуется наличием у субъекта чётко проецируемых вовне (проявляющихся в деятельности) возможностей — мнений, навыков, быстро и конкретно реализуемых знаний, проявляющихся через функционирование стратегий планирования и решения проблем. В целом же многие исследователи представляют одарённость как систему, включающую следующие компоненты:

– биофизиологические, анатомо-физиологические задатки;

– сенсорно-перцептивные блоки, характеризуемые повышенной чувствительностью;

– интеллектуальные и мыслительные возможности, позволяющие оценивать новые ситуации и решать новые проблемы;

- эмоционально-волевые структуры, предопределяющие длительные доминантные ориентации и их искусственное поддерживание;
- высокий уровень продуцирования новых образов, фантазия, воображение и целый ряд других [53].

А.М. Матюшкин выдвинул следующую синтетическую структуру творческой одарённости, включив в неё:

- доминирующую роль познавательной мотивации;
- исследовательскую творческую активность, выражающуюся в обнаружении нового, в постановке и решении проблемы;
- возможности достижения оригинальных решений;
- возможности прогнозирования и предвосхищения;
- способности к созданию идеальных эталонов, обеспечивающих высокие этические, нравственные, интеллектуальные оценки [53].

В своих трудах А.М. Матюшкин отмечает, что одарённость, талантливость необходимо связывать с особенностями собственно творческой деятельности, проявлением творчества, функционирования «творческого человека». Его исследования позволили выделить в системе творческого потенциала следующие составляющие:

- задатки, склонности, проявляющиеся в повышенной чувствительности, определённой выборочности, предпочтениях, а также в динамичности психических процессов;
- интересы, их направленность, частота и систематичность их проявления, доминирование познавательных интересов;

– любознательность, стремление к созданию нового, склонность к решению и поиску проблем;

– быстрота в усвоении новой информации, образование ассоциативных массивов;

– склонность к постоянным сравнениям, сопоставлениям, выработке эталонов для последующего отбора;

– проявление общего интеллекта — схватывание, понимание, быстрота оценок и выбора пути решения, адекватность действий;

– эмоциональная окрашенность отдельных процессов, эмоциональное отношение, влияние чувств на субъективное оценивание, выбор, предпочтение и т. д.;

– настойчивость, целеустремлённость, решительность, трудолюбие, систематичность в работе, смелое принятие решений;

– интуитивизм — склонность к сверхбыстрым оценкам, решениям, прогнозам;

– сравнительно более быстрое овладение умениями, навыками, приёмами, овладение техникой труда, ремесленным мастерством;

– способности к выработке личностных стратегий и тактик при решении общих и специальных новых проблем, задач, поиск выхода из сложных, нестандартных, экстремальных ситуаций и т. п. [53, 54].

В психолого-педагогической литературе проявление одарённости представляется через:

– доминирование интересов и мотивов;

– эмоциональную погруженность в деятельность;

– волю к успеху;

– общую и эстетическую удовлетворённость от процесса и продуктов деятельности;

– понимание сущности проблемы, задачи, ситуации;

– бессознательное, интуитивное решение проблемы («внелогическое»);

– стратегиальность в интеллектуальном поведении (личностные возможности продуцировать проекты);

– многовариантность решений;

– быстроту решений, оценок, прогнозов;

– искусство находить, выбирать (изобретательность, находчивость) [3, 9, 10, 16, 71].

Признаками проявления творческого поиска служат: реконструктивное творчество; комбинаторное творчество; творчество через аналогии. Проявление интеллекта фиксируют по пониманию и структурированию исходной информации; постановке задачи; поиску и конструированию решений; прогнозированию решений (разработке замыслов решения), гипотез [72].

Уровни достижений определяют по задачам, которые ставит перед собой субъект, или же по самим достигнутым успехам. Здесь, как правило, выделяются три условия:

– желание превзойти существующие достижения;

– желание достичь результата высшего класса;

– желание реализовать сверхзадачу.

В плане эмоционального реагирования ребенка на выполнение деятельности, увлечённости ученые выделяют три типа: вдохновенный (иногда эйфорический); уверенный; сомневающийся. Предлагаемая структура довольно многообразно описывает различные типы одарённости, их доминирующие характеристики, своеобразие сочетаний наиболее важных качеств [66].

Огромный интерес представляет концепция врождённой одарённости, предложенная В.В. Клименко. По его словам, задатки (чувствительность человека) обеспечивают около 10 млрд. сенсорных каналов односторонней связи с окружающей средой. Такая чувствительность достигается необыкновенной оснасткой человеческого тела: рецептором, воспринимающим энергию и информацию как извне, так и из самого тела; кондуктором — проводником воспринятого; участком мозга, где осуществляется (или не осуществляется — просто сохраняется) превращение их в факт сознания. Из задатков человека может быть создано столько работающих способностей, сколько существует каналов связи между окружающей средой и человеком с его внутренним миром. Однако реально количество способностей зависит от организации учения и деятельности человека. Способности — процесс материализации исполнительными органами психики и моторики природной чувствительности и смыслов, отраженного в предметные конструкции [39, 45]. Материализация продуктов чувствительности состоит из трёх видов способностей:

– способности отражать внешний мир и себя в нём как мыслящей частицы природы (мы слышим, видим, нюхаем и т. д. — все органы чувств работают на этот процесс);

– способности проектировать внешнюю среду, в том числе и себя (создание иной, рукотворной природы мысленно, работой воображения, создание гипотез);

– способности создавать в процессе своей деятельности продукты и предметы, удовлетворяющие устремления и потребности человека.

Способность отражения и психомоторику человек научился усиливать многократно с помощью огромного множества приборов, устройств, машин: от обыкновенных очков до космических станций. Но способность к созиданию, а особенно к творчеству, пока еще не усиливается ничем. Человеческая психика и психомоторика обладают неисчислимыми возможностями создания механизмов. Они — новообразования, не закреплённые ни за определённым органом чувств, ни за конкретной способностью: это — система способностей со свойствами, которыми не обладает ни одна из составляющих целостности. Причем это новообразование одновременно действующее и познающее: действуя — человек познает, а, познавая — действует, решает задачи умственные и психомоторные. Количество механизмов бесконечно. Изменив условия работы человека, создают тем самым новые механизмы, новые способы действий.

Таким образом, феномен «интеллектуальная одаренность» — очень сложная система. В психологической и педагогической литературе имеется не один десяток определений. Интеллектуальную одаренность рассматривают как гениальность; как своеобразное сочетание способностей; как сочетание интеллектуальных, творческих способностей и мотивационного компонента. Наиболее точно, на наш взгляд, *интеллектуальную одаренность* можно определить как уровень развития врожденных когнитивных задатков личности, характеризующийся успешностью в реальной интеллектуальной деятельности.

1.3 Интеллектуально одаренные дети

Одаренные «...люди ясно, просто, естественно могут изъясняться на языке высшего бытия, языке поэтов, мистиков, пророков, глубоко религиозных людей, людей, живущих в мире платоновских идей, Спинозы и вечности. Им, по сравнению с обычными людьми, лучше понятен смысл притч, иносказаний, парадоксов, музыкального искусства, невербальных коммуникаций и т. д.» [75, с. 26]. Интеллектуально одаренного ребенка можно сразу выделить из группы сверстников. Первое, что бросается в глаза — это печать особой одухотворенности на его лице, цепкий осмысленный взгляд. Интеллектуально одаренные дети, как правило, немногословны. На конкретный вопрос дают четкий, лаконичный ответ. Многие психологи отмечают у интеллектуально одаренных детей высокий энергетический уровень и слабо развитую моторику. Одаренным детям свойственно холистическое (целостное) мышление, не ограниченное рамками стереотипов, требующее свободы и открытости. Но главное, что объединяет всех интеллектуально одаренных детей и в определенной степени отличает их других — умственная активность, связанная с потребностью в познавательной деятельности. Именно эта потребность является движителем их развития. Интеллектуальная одаренность ребенка имеет множество граней. Б.М. Теплов писал о широте самой одаренности: «Возможность успешно действовать в различных областях объясняется, прежде всего, наличием некоторых общих моментов одаренности, имеющих значение для разных видов деятельности. В этом — центр научной проблемы многосторонних дарований»[72, с. 19]. По мнению А.Г. Асмолова, профиль способностей одаренного человека имеет множество пиков. Это разнообразие обеспечивает ему, его психике определенную устойчивость. Как правило, большинству одаренных детей присуща высокая духовность, стремление к красоте и гармонии [65].

Однако интеллектуально одаренный ребенок — это и множество различных проблем. К.Г. Юнг писал, что личности одаренного ребенка может быть присуща дисгармония, которая выражается в том, что той или иной сфере личности может доставаться так мало внимания, что можно говорить о ее выпадении из общего развития. «Прежде всего, есть громадные различия в степени зрелости. В сфере одаренности при одних обстоятельствах господствует аномальная скороспелость, в то время как при других духовные функции лежат ниже нормального порога того же возраста.

Из-за этого порой складывается такой внешний образ, который вводит в заблуждение. Перед нами вроде бы недоразвитый и духовно отсталый ребенок, и мы никак не ожидаем от него сверхнеобычных способностей» [50, с. 141]. По мнению К.Г. Юнга, одаренный ребенок может иметь неблагоприятные характеристики: разбросанность, голова полна шалостей; он — нерадивый, халатный, невнимательный, озорной, своенравный, он может даже производить впечатление заспанного. Отмеченные особенности могут иметь защитный характер, быть обороной против внешних влияний, цель которых спокойно и без помех предаваться внутренним процессам фантазии. У одаренного ребенка его душевная наклонность вращается в широком диапазоне противоположностей, ведь дарование чрезвычайно редко характеризует все душевные области более или менее равномерно [50].

К. Тэкэкс писала об одаренных: «Они более мужественные и в то же время более информированные, более конформны, в то же время более нонконформны, более автономны и более зависимы, более серьезны и больше склонны к игре, более робки и более бесстрашны, больше уверены в себе и больше склонны к сомнениям в своих силах, более восприимчивы и более самостоятельны по сравнению с менее творческими коллегами. Они интегрируют эти полярные противоположности в своем мышлении и потому обладают необъяснимой способностью решать проблемы, которые, казалось бы, не поддаются логически разумному разрешению» [82, с. 296]. По мнению Э. Ландау, одаренный ребенок способен «концентрировать и ассоциировать несколько индивидуальностей в своей собственной, поскольку носит в себе как бы живое общество» [50, с. 147].

У одаренных детей сильно развито чувство справедливости, они требовательны к себе и окружающим, рано пытаются разобраться в социальном устройстве общества, в котором живут, чутко реагируют на социальные изменения. Одаренные дети испытывают трудности в социализации, иногда попадают в категорию склонных к девиантному поведению, иногда — в группу риска. Среди них часто встречаются дети с высоким уровнем нервно-психического напряжения, что с одной стороны энергетически обеспечивает их широкие познавательные процессы и возможности, а с другой стороны, лежит в основе неуравновешенности, провоцируя острые эмоциональные реакции, различные расстройства. Одаренные дети чутко на все реагируют, зачастую относят все происходящее на свой счет, и проблемы, которые не задевают обычного ребенка, способны больно ранить ребенка одаренного.

Многие исследователи отмечают сложный характер взаимоотношения одаренных людей с культурой. К примеру, А.Г. Маслоу, сравнивая этих людей с другими членами нашего общества, чрезмерно социализированными, роботизированными, этноцентричными, вынужден признать, что если их мировоззрение и не позволяет нам счесть их создателями особой субкультуры, то все-таки мы имеем дело с особой группой «сравнительно неокультуренных» индивидуумов, которые сумели не поддаться нивелирующему влиянию окружающей их культуры» [63].

Огромное влияние на развитие личности интеллектуально одаренного ребенка оказывает семья и школа. Н.С. Лейтес, посвятивший проблематике одаренности множество работ, отметил, что у детей с ранним умственным подъемом есть свои специфические трудности. Так, в семье часто бывают встревожены необычайностью такого ребенка. В результате одаренный ребенок наталкивается на непонимание со стороны самых близких ему людей — родителей. Часто бывает и по-другому. Ребенка в семье окружает атмосфера захваливания, происходит неумеренная демонстрация его успеха [51]. Обе эти ситуации оказывают одинаково травмирующее воздействие на психику ребенка.

Г. Линдсей, К. Холл и Р. Томпсон отметили в своих работах социальный характер ряда препятствий для реализации интеллектуальной одаренности. По их мнению, основным таким препятствием является конформизм, трактуемый авторами как желание одаренного ребенка быть похожим на других: «Человек опасается высказывать необычные идеи из-за боязни показаться смешным или очень умным. Подобное чувство может возникнуть еще в детстве» [68, с. 156]. Исследователи указывают причины возникновения данного препятствия — это, прежде всего, непонимание, возникающее со стороны взрослых и второе — внутренняя цензура. Последнее возникает в том случае, когда ребенок ощущает боязнь перед собственными идеями. Этот страх приводит к тому, что он начинает пассивно реагировать на все происходящее вокруг и не пытается решать возникающие проблемы. И, наконец, третье препятствие — ригидность. Авторы отмечают, что данное препятствие возникает чаще всего в процессе школьного обучения. К. Хеллер в статье «Диагностика и развитие одаренных детей и подростков» выделил особые причины для консультирования одаренных детей и в качестве наиболее значимых отметил проблемы социального поведения (40,6%), и проблемы, связанные со школьной успеваемостью (31%) [68].

Имея многолетний опыт работы и общения с интеллектуально одаренными детьми, хочу отметить, что важно с раннего детства в семье создавать необходимые условия для развития и воспитания ребенка. Во всех направлениях необходим разумный баланс (это касается видов деятельности и общения). Родителям зачастую очень сложно найти оптимальные пути решения воспитательных задач, и они сами создают предпосылки проблем. К примеру, многие родители одаренных детей считают, что их ребенок обязательно должен достичь одинаково высоких результатов по всем школьным предметам, уверены в том, что их сын или дочь обязательно должны быть отличниками. В результате у ребенка развивается «комплекс отличника», при котором низкая оценка воспринимается в семье, да и самим ребенком, как драма. Вспоминается случай, происшедший с одним одаренным ребенком. Ученица 6-го класса А.Г. была круглой отличницей. Однажды на уроке пения она получила отметку «три». Девочка очень переживала. Хорошо, что родители объяснили ей, что человек не может одинаково хорошо справляться с разными делами, у одних одно лучше получается, а у других — другое.

Однако одаренные дети часто не находят поддержки в семье. Если они не оправдывают ожиданий, то родители попросту демонстрируют свое недовольство. Это давление имеет сильное влияние на формирование Я-концепции одаренного ребенка, так как именно родители являются самыми авторитетными и значимыми людьми, и именно они должны обеспечить психологическую безопасность, сформировать атмосферу понимания. Во многих семьях, где растет ребенок, опережающий по ряду показателей, прежде всего когнитивных, своих сверстников, родителям трудно бывает избежать крайностей в воспитании. Создается атмосфера либо захваливания ребенка, либо к ребенку предъявляются завышенные требования. В последнем случае родители связывают достижение их ребенком успехов с реализацией собственных амбиций. Такое искажение ролевых установок может привести к эмоциональному срыву и утрате интереса к тому виду деятельности, который раньше приносил успехи или вызывал постоянное напряжение. Это связано с тем, что выполнение ребенком любой деятельности будет подвержено сравнению результата с ожидаемыми запросами. Если ребенок не дотягивает до уровня, определенного социальной средой, то его самооценка стремительно снижается, в силу требовательности и критичности по отношению к себе.

Исследователи детской одаренности отмечают в своих работах, что случаи диссинхронии в развитии интеллектуальной одаренности нередки (Ж.-Ш. Террасье, П. Мерш и др.). Диссинхрония проявляется, по утверждению этих исследователей, на двух уровнях: внешнем (социальном) и внутреннем. Внешняя (социальная) диссинхрония выражается в разрыве между одаренным ребенком и его окружением. Внутренняя диссинхрония проявляется в несоответствии уровней развития отдельных функций, или в несбалансированном развитии отдельных способностей. Учебные достижения часто связываются с владением навыками устной и письменной речи. Для многих учителей важна не столько оригинальность идеи, а, прежде всего, форма, в которую облечена эта идея. Для интеллектуально одаренного ребенка такое положение вещей неприемлемо, так как для него более важна суть, сущность, содержание, а не внешняя оболочка. Быстрое схватывание, великолепная память, любознательность и независимость суждений под влиянием уже освоенной программы расходуются вхолостую. И в результате одаренный ребенок приспосабливается к своим обычным сверстникам и его поведение становится похожим на поведение одноклассников, он подстраивает выполнение заданий под соответствующие ожидания учителей [21, 80].

Многочисленные проблемы интеллектуально одаренных детей связаны также с тем, что одной из основных задач школьного обучения остается формирование разносторонней личности. При этом совершенно не учитываются специальные сферы интересов интеллектуально одаренных детей. В этом случае, действительно, специфическая одаренность может обуславливать отсутствие должного уровня развития других способностей, а иногда и невысокую заинтересованность любым другим предметом, не связанным напрямую с любимым делом. Часто в учреждении образования интеллектуально одаренный ребенок ощущает недостаток внимания со стороны взрослых, так как большинство учителей ориентируется на «средних». На уроках учителя чаще всего формулируют вопросы и сами отвечают на них, будучи уверенными, что дети не смогут самостоятельно найти правильный ответ. Интеллектуально одаренный ребенок часто воспринимается как определенная помеха, создающая трудности в работе преподавателя. Для него, особенно на ранних ступенях обучения, стремление правильно выполнить задание учителя, быстрее других ответить на его вопрос — просто интересная умственная игра, своего рода состязание, и он раньше других поднимает руку. Это раздражает учителя и вызывает отрицательные эмоции у одноклассников. Такого ученика часто называют «выскочкой».

Причина социальной дезадаптации интеллектуально одаренных детей, прежде всего, кроется в стремлении ребенка к единению с коллективом и жажде признания. Каждый человек испытывает потребность в идентификации. Интеллектуально одаренный ребенок связывает удовлетворение этой потребности, прежде всего, с использованием имеющихся у него выдающихся способностей, которыми можно удивить одноклассников и учителей. Обладая отличной памятью, богатым воображением, хорошим словарным запасом и острым чувством юмора, одаренный ребенок демонстрирует свое превосходство. И в ответ, вместо ожидаемого признания, он наталкивается на отчуждение и непонимание сверстников [13]. «Одаренные дети, в отличие от их обычных сверстников, намного быстрее проходят начальные уровни социальной адаптации (послушание и примерное поведение, ориентированное на получение положительной оценки взрослых), в подростковом возрасте они уже, миновав стадию детского конформизма, оказывают серьезное сопротивление стандартным правилам, групповым нормам и ориентированности группы на конкретных лидеров» [21, с. 33]. В сознании одаренного ребенка происходит борьба двух ведущих потребностей — обособления, возникающего раньше, чем у его сверстников, вследствие индивидуального темпа развития, и идентификации — выступающей, как неизменное условие, обеспечивающее относительно бесконфликтное существование. В силу различных причин большинству учителей просто некогда заботиться об интеллектуально одаренном ребенке. Невысокий психологический уровень подготовки учителей для работы с интеллектуально одаренными детьми приводит к тому, что учителя отмечают в них, прежде всего, желание все делать по-своему, истеричность, нежелание, а порой и неумение следовать принятым образцам. Подобные оценки — следствие неадекватного понимания педагогами личностных особенностей и закономерностей развития интеллектуально одаренных детей. Результаты многочисленных исследований показывают, что у детей, обладающих незаурядными умственными способностями, часто обнаруживаются трудности в общении, более низкий уровень социальной компетентности, большинство из них — интроверты. Таким образом, можно говорить о наличии интеллектуально-социальной диссинхронии, которая характеризуется наличием высокого уровня развития интеллекта и недостаточно сформированными социальными навыками.

Характерной чертой интеллектуально одаренных детей является нонконформизм. Им всегда сложно привыкать к устоявшимся нормам и правилам и некоторые из них решаются на противостояние. Согласно Инвестиционной Теории Р. Стернберга, идеи неизменно натолкнутся на сопротивление толпы и, скорее всего, вначале будут отвергнуты: «Толпа, не тратясь на оценку идей, осознает, что творческие личности стремятся быть чем-то вроде оппозиционеров, находит это поведение раздражающим или даже оскорбительным, и часто агрессивно реагирует на вызов творческой личности» [64, с. 190].

Другой важнейшей особенностью одаренных детей, вызывающих проблемы в социальной сфере, является обостренное чувство справедливости. Такой ребенок стремится быть всегда правым, так как в детстве его особенно хвалили и награждали за то, что он прав. «Для большинства одаренных детей оказаться неправым — мучительно» [13, с. 56]. Он осознает, что другим так же неприятно оказаться в аналогичном положении. Именно это чувство порождает у ребенка искреннее желание прийти на помощь, избежать этого мучительного состояния. Следовательно, как только кто-то делает ошибку, одаренный ребенок тут же стремится оказать ему помощь. В результате этот порыв навлекает на себя гнев одноклассников и учителей. Подобные стратегии поведения ведут к серьезному нарушению психологической адаптации одаренных детей и выработке неадекватных механизмов психологической защиты. Степень осознания актуальности и важности этой проблемы обществом в настоящий момент не приводит пока к ее решению. Часто интеллектуально одаренные дети вынуждены самостоятельно, без помощи взрослых, пытаться решать возникающие сложности во взаимоотношении их с окружающим миром.

Интеллектуально одаренные дети, как правило, отличаются высокой интеллектуальной продуктивностью, определяемой мерой эффективности процессов поступления и переработки информации. По мнению М.А. Холодной, интеллектуальная продуктивность представлена тремя базовыми свойствами интеллекта:

1) уровневыми свойствами, характеризующими достигнутый уровень развития отдельных познавательных психических функций и лежащими в основе точности и скорости познавательного отражения (сенсорное различение, скорость восприятия, пространственная визуализация, оперативная и долговременная память, запас слов, категориально-логические способности);

2) комбинаторными свойствами, характеризующими возможность выявления раз-

ного рода соотношений между различными впечатлениями, представлениями, понятиями, включая способность обнаруживать заданные связи, самостоятельно формировать те или иные новые связи, а также конструировать невозможные связи;

3) процессуальными свойствами, характеризующими операции, приемы и стратегии интеллектуальной деятельности, вплоть до элементарных информационных процессов.

Для интеллектуально одаренных детей достаточно типичным является ярко выраженный индивидуализированный характер интеллектуальной активности. В частности, речь идет о своеобразии способов структурирования информации. Этот аспект интеллектуальной деятельности представлен в проблематике когнитивных стилей, определенные полюса которых, при определенных условиях, могут рассматриваться в качестве индикаторов интеллектуальных способностей [74].

Интеллектуально одаренные дети обнаруживают высокий уровень готовности к генерации идей (креативности, в узком значении этого термина, или дивергентному мышлению). Креативность традиционно описывается следующими основными свойствами:

1) беглостью (количество идей, возникающих в единицу времени);

2) оригинальностью (возможность производить редкие идеи, отличающиеся от общепринятых познавательных стандартов);

3) восприимчивостью (чувствительность к деталям, противоречиям, неопределенности);

4) метафоричностью (возможность создавать фантастические идеи при сохранении, тем не менее, определенной объективной связи с исходной проблемной ситуацией, умение в простом видеть сложное, а в сложном — простое и т. д.).

Интеллектуальная продуктивность, индивидуализированные способы восприятия действительности, креативность — это разные формы проявления интеллектуальных способностей, так как все эти аспекты работы интеллекта имеют прямое отношение к успешности разрешения тех или иных проблем [75].

Следующий уровень когнитивного «устройства» интеллектуальной одаренности представлен у М.А. Холодной метакогнитивными способностями. Метакогнитивные способности, будучи основой интеллектуальной рефлексии, предполагают возможность произвольного управления субъектом своими когнитивными ресурсами. В первую очередь, следует сказать о метакогнитивной осведомленности, предполагающей знание своих познавательных качеств, оценивание их сильных и слабых сторон, прослеживание хода протекания своей умственной деятельности, а также сознательное использование приемов настройки и стимулирования работы собственного интеллекта. Кроме того, к метакогнитивным способностям относятся и регулятивные процессы, отвечающие за координацию различных форм познавательной активности, смену стратегий переработки информации, сдерживание либо полное прекращение тех или иных интеллектуальных операций, предсказание, планирование [74].

М.А. Холодная выделила шесть типов интеллектуального поведения, которые в рамках разных исследовательских подходов соотносятся с проявлением интеллектуальной одаренности:

1) лица с общим уровнем развития «общего интеллекта», имеющие показатели IQ более 135–140 единиц («сообразительные»);

2) лица с высоким уровнем академической успешности в виде показателей учебных достижений («блестящие ученики»);

3) лица с высоким уровнем развития дивергентных способностей в виде показателей беглости и оригинальности порождаемых идей («креативы»);

4) лица с высокой успешностью в выполнении тех или иных конкретных видов

деятельности, имеющие большой объем предметно-специфических знаний, а также значительный практический опыт работы в соответствующей предметной области («компетентные»);

5) лица с экстраординарными интеллектуальными достижениями, которые нашли свое воплощение в некоторых реальных, объективно новых, в той или иной мере общепризнанных формах («талантливые»);

6) лица с высоким уровнем интеллектуальных возможностей, связанных с анализом, оценкой («мудрые») [75].

Детей с такими характеристиками в общеобразовательных учреждениях России, Беларуси и других стран немало.

Для констатации интеллектуальной одаренности эффективен метод комплексной оценки. Дж. Рензулли акцентирует внимание на трех составных частях одаренности: интеллектуальные способности выше среднего уровня; гибкость и оригинальность мышления; высокая мотивационная включенность в деятельность [64].

Мы рассмотрели основные характеристики интеллектуально одаренных детей, наиболее часто встречающиеся в психолого-педагогической литературе.

1.4 Стратегии диагностики интеллектуальной одаренности детей

Для выявления интеллектуально одаренных детей разработаны различные методики. В практике работы учреждений образования наиболее популярны диагностики Р. Амтхауэра, А. Бине, Д. Векслера, К. Гуревича, Р. Мейли, Дж. Равенна, А. Савенкова.

Существуют несколько подходов к процессу установления интеллектуальной одаренности, которые основываются как на системе единой оценки, так и на системе комплексной оценки. Примером системы единой оценки является шкала Стандфорд-Бине, по которой ребенок, претендующий на статус одаренного, должен набрать более 135 баллов. Система комплексной оценки включает множество оценочных процедур (результаты индивидуального тестирования, группового тестирования, сведения педагогов и родителей). Эта система многомерна, опирается на различные источники информации, поэтому имеет серьезное преимущество перед другими методиками. Стандартизированные методы измерения интеллекта наиболее широко применяемы для выявления одаренных детей. Тесты могут быть направлены на определение как вербальных, так и невербальных способностей. Наибольшее предпочтение отдается методикам, которые позволяют определить уровень когнитивного развития ребенка. Шкала Стандфорд-Бине направлена на измерение умственных способностей у людей, начиная с 2-х летнего возраста. В заданиях теста делается упор на вербальную сферу. Этот тест позволяет выявить уровень IQ и умственный возраст MA (mental age). С помощью данной шкалы можно квалифицировать человека как одаренного, если его уровень IQ составляет 124 балла и выше (среднее значение уровня IQ равно 100) [13, 63].

Существуют методики, позволяющие проанализировать оценки мыслительных способностей детей, полученные по системе Стандфорд-Бине, исходя из модели структуры интеллекта, разработанной Гилфордом. Векслеровская шкала интеллекта для дошкольников и младших школьников («WPPSI») применяется для измерения общих умственных способностей. Она состоит из двух частей: вербальной шкалы, содержащей 5 субтестов, и шкалы действия, в которую включены также 5 субтестов. Первые включают задания на осведомленность, понимание, арифметические задания, нахождение сходства, словарный запас. Вторые включают задания на конструирование из кубиков, лабиринты, завершение картинок, кодирование [13, 68, 70].

Для измерения уровня интеллекта у детей и взрослых используют тест Слоссона («SIT»), который позволяет определить умственный возраст и IQ. Квалификационным результатом в этом случае является цифра 120 и выше. В процессе установления одаренности детей важной составляющей является оценка творческих способностей. На практике наиболее широко используется характеристика творчества, основанная на исследованиях Гилфорда, которая включает такие параметры как беглость, гибкость, оригинальность и точность мышления, а также воображение. Оценка творческих способностей проводится и на основе методик Торренса. Тесты Торренса на вербальное творческое мышление охватывают такие характеристики, как умение задавать вопросы, устанавливать возможные причины и следствия применительно к различным ситуациям, изображенным на серии картинок, предлагать оригинальные способы применения различных предметов, строить гипотезы [13, 63].

В современной школе чаще всего используют разовые обследования или экспресс-диагностику. Однако существует и сложная, многоуровневая, продолжительная по времени система обследования, которая оценивает интеллект и креативность, уровень личностного развития и др. Примером такой диагностики является «резервуарная модель» Дж. Гауэна, в которой на основании многих оценочных процедур, в том числе результатов группового тестирования, рекомендаций классного руководителя (воспитателя), очерчивается круг кандидатов. Ребенок должен либо показать высокие результаты в любых трех (из четырех возможных) видах оценки, либо набрать определенную сумму баллов по шкале Станфорд-Бине. Отбор интеллектуально одаренных детей производится на основании этих результатов [63].

Американскими специалистами в области обучения одаренных детей (Дж. Рензулли, С. Рейс и Л. Смит и др.) разработан подход к диагностированию одаренности, который назван «принцип турникета». По мнению названных авторов процесс идентификации одаренных детей обязательно должен основываться на длительном наблюдении за ними. Детей-претендентов включают в специальным образом организованную деятельность. У каждого ребенка есть возможность свободного выхода в зависимости от его достижений. Авторы используют совокупность методов: традиционные методы оценки; методы, основанные на использовании трех параметров деятельности (способностях, интересах и стилях обучения). В течение всего периода обследования собирается информация, которая акцентирует внимание на достоинствах ученика (не на недостатках), на основании которой создается «досье». «Досье» используется при принятии решения о возможностях развития способностей на обычных школьных занятиях, в группах обогащения и при работе по специальным программам [64].

В педагогике известен и проект «RAPYHT» (М. Карне и др.), в котором при первичной оценке одаренности детей используют специальные анкеты для учителей и родителей. С целью проверки полученных таким образом данных, всех детей привлекаются к занятиям в небольших группах в соответствии с характером их одаренности. По итогам этих занятий набирается группа одаренных детей, которых затем обучают по специальным программам [68].

Выявление уровня одаренности детей в учреждениях образования нашей страны актуализируется в момент их поступления в школу. Вначале администрация, педагоги и психологи собирают предварительную информацию о ребенке от родителей и самих детей. Для этого используют анкеты, проводят беседы, наблюдают за детьми. Для определения уровня интеллектуального развития психологи применяют тесты Д. Векслера, Дж. Равенна, П. Торренса и др. Затем первичная информация уточняется в ходе специальных занятий. Проявление у ребенка склонности к повышенным интеллектуальным нагрузкам — важнейший показатель одаренности. Сегодня психологи используют методики для выявления доминирующих мотивов, методики диагностики уровня конвергентного мышления и уровня дивергентного мышления. Наиболее популярны матрицы Дж. Равенна, тест Д. Векслера, тесты П. Торренса, а также методики, направленные на определение эффективности познавательных процессов, которые отвечают основным требованиям, предъявляемым к диагностическим методикам (валидность, надежность и др.), не требуют больших затрат времени при обследовании и обработке результатов [13, 63, 68, 80].

В целях исследования и анализа развития творческого мышления младших школьников можно использовать систему, состоящую из пяти тестов на выявление творческих характеристик, разработанную Дж. Гетцельсом и Ф. Джексоном. Эта система нашла широкое распространение в США.

Тест 1. *«Употребление вещи». Испытуемому даются названия пяти различных предметов (например, ручка, лист бумаги, кирпич, зубочистка, чернильница), и для каждой вещи должно быть указано как можно большее количество различных употреблений. Время на ответы не ограничивается. Полученные ответы сравнивают по количеству названных употреблений для каждой вещи, по разнообразию типов употреблений, по оригинальности и неожиданности их употреблений.*

Тест 2. *Тест аналогичен первому и направлен на выявление умения ассоциировать слова. Задача состоит в том, чтобы к каждому из пяти слов списка подобрать слова, связанные с ним. Процедура проведения и способ оценки такие же, как и в предыдущем тесте.*

Тест 3. *Выявление умения ставить проблемы. Испытуемому дается небольшой, но сравнительно законченный текст, содержащий различные числовые показатели. По материалу этого текста он должен составить возможно большее число арифметических задач. Предметом оценки может быть количество, разнообразие и оригинальность задач.*

Тест 4. *Выявление наблюдательности и особенностей восприятия. Испытуемому предлагается отыскать замаскированные в рисунке фигуры.*

Тест 5. *Выявление особенностей завершения фабулы. Испытуемому предлагается закончить начатый рассказ тремя возможными способами: морализирующее, юмористическое или трагическое окончание [68].*

Существуют тесты, предназначенные для оценки возможностей индивида в овладении знаниями, умениями и навыками, носящими общий и специфический характер. Разные тесты, входящие в эту категорию, позволяют оценивать интеллектуальные способности.

Н.Д. Левитов разработал систему показателей умственного развития:

1) самостоятельность мышления;

2) быстрота и прочность усвоения учебного материала;

3) быстрота умственной ориентировки (находчивости) при решении нестандартных задач;

4) глубокое проникновение в сущность изучаемых явлений (умение отличить существенное от несущественного);

5) критичность ума.

Основным критерием умственного развития, по мнению Д.Б. Эльконина, является наличие правильно организованной структуры учебной деятельности, включая постановку задачи, выбор средств, самоконтроль, а также правильное соотношение предметных и символических планов учебной деятельности [66].

Н.А. Менчинская в качестве показателей умственного развития выделила быстроту усвоения материала, гибкость мыслительного процесса, тесную связь наглядных и отвлеченных компонентов мышления, различный уровень аналитико-синтетической деятельности [58]. Основным критерием умственного развития, по мнению Е.Н. Кабановой-Меллер, является широкий и активный перенос приемов умственной деятельности, сформированных на одном объекте, на другой объект, межпредметное обобщение приемов умственной деятельности. З.И. Калмыкова предложила следующие критерии умственного развития: темп продвижения, который определяется количеством однотипных упражнений, необходимых для формирования обобщения; экономичность мышления, то есть количество рассуждений, на основании которых учащиеся выделяют закономерность.

В настоящее время все чаще в учреждениях образования используются методы диагностики умственного развития школьников, которые связаны с оценкой и измерением таких параметров, как классификация учебного материала; приемы умственной деятельности и возможности их переноса; самостоятельная работа по приобретению новых знаний, их углублению; экономичность мышления; темп продвижения от частного к общему; внутренний план действий и др.

1.5 Стратегии обучения интеллектуально одаренных детей

Обучение и интеллектуальное развитие неразрывно связаны. Исследованием интеллектуального развития в процессе обучения занимались Б.Г. Ананьев, Д.Н. Блонский, В.А. Крутецкий, Н.Д. Левитов, Н.С. Лейтес, Н.А. Менчинская, С.Л. Рубинштейн, Ю.А. Самарин и др. Б.Г. Ананьев писал об умственном развитии как о сложной психической особенности человека. Он связывал успех в умственном развитии с постановкой и решением различных познавательных задач [2].

Н.С. Лейтес отмечал, что самое существенное для человеческого интеллекта состоит в том, что он позволяет отражать связи и отношения предметов и явлений окружающего мира и тем самым творчески преобразовывать действительность; в свойствах высшей нервной деятельности коренятся некоторые предпосылки активности и саморегуляции, представляющие собой существенные внутренние условия формирования умственных способностей [51]. Н.Д. Левитов утверждал, что общие умственные способности прежде всего включают в себя такие качества, как сообразительность, то есть быстроту умственной ориентировки, вдумчивость, критичность. Ю.А. Самарин исследовал природу умственной деятельности на основе системного подхода, классифицировал уровни умственной деятельности в зависимости от характера объединения ассоциаций в системы соответствующего уровня.

Н.А. Менчинская связала умственное развитие человека с двумя категориями явлений: накоплением знаний и приобретением знаний. По ее мнению, характерной чертой умственного развития является накопление особого фонда хорошо отработанных и прочно закрепленных умственных приемов, которые относятся к интеллектуальным. Д.Н. Богоявленский и Н.А. Менчинская провели всесторонний анализ умственных операций школьников, выделили уровни продуктивного мышления, определяемые уровнями аналитико-синтетической деятельности. В основе этих уровней выделены связи между анализом и синтезом; средства, с помощью которых осуществляются эти процессы; степени полноты анализа и синтеза. Исследованиям подверглись и умственные приемы как системы операций, специально формируемых для решения задач определенного типа из одной или разных областей знаний [58]. Л.В. Занков, изучая развитие школьников в процессе обучения, пришел к выводу, что решающим в плане умственного развития является объединение в определенную функциональную систему таких способов действия, которые разнохарактерны по своей природе [63].

Каковы практические аспекты обучения интеллектуально одаренных детей? В психолого-педагогической литературе [67] все специалисты сходятся в том, что в каком-либо виде ускорение должно входить в любую программу обучения детей с высоким умственным развитием. Считается, что ускорение — наилучшая стратегия обучения детей с математическими способностями и с одарённостью к иностранным языкам. Важное значение имеет обогащение обучения, ориентирующее на развитие самих умственных процессов учащихся. Психологи очень много внимания уделяют процессу решения задач, проблемному обучению. Ускорение и обогащение могут переходить друг в друга в зависимости от поставленных целей и задач.

Стратегия ускорения предполагает увеличение темпа прохождения учебного материала. Интеллектуально одаренные дети имеют явное превосходство перед своими сверстниками благодаря умению видеть сущность проблемы, любознательности, хорошей памяти, независимости в суждениях и многим другим качествам. Стратегия ускорения позволяет одаренному ребенку оптимизировать темп собственного обучения, что благотворно сказывается на его интеллектуальном развитии и развитии вообще. Ускорение может осуществляться в следующих формах:

1) ускоренный темп изучения учебного материала всеми учащимися (если класс «сильный»);

2) перевод интеллектуально одаренного ребенка в следующий класс (если им усвоена программа своего класса) [4, 10].

Позитивную роль в реализации этой стратегии играет внешняя дифференциация, при которой в отдельные классы отбирают детей, опережающих своих сверстников по уровню и темпу умственного развития, а также по всем основным параметрам развития. Прохождение обязательной программы в таких классах может быть сокращено на год и более, так как интеллектуально одаренные дети в состоянии освоить обязательный уровень в течение более короткого времени. А в старших классах этим учащимся целесообразно заниматься по авторским программам талантливых учителей школы, но уже без «ускорения». На этом этапе обучения хорошо было бы проводить работу с ними по стратегии «обогащения».

Альтернативой стратегии ускорения является стратегия интенсификации, которая предполагает изменение не темпа усвоения, а увеличение объема знаний. Содержание учебной деятельности интеллектуально одаренных детей должно иметь не просто иные количественные параметры, а качественно отличаться от содержания образования их «обычных» сверстников. В зарубежной и отечественной психолого-педагогической науке ведется активная разработка и модернизация учебных программ для интеллектуально одаренных, разрабатываются более глобальные подходы: целеполагание на уровне философии образования; формулируются новые концепции содержания обучения. По утверждению Дж. Рензулли, содержание учебной программы для одаренных должно:

– выходить за рамки общепринятой программы;

– учитывать специфику интересов учащихся;

– соответствовать их стилю усвоения знаний;

– не ограничивать стремление детей глубоко вникать в сущность той или иной изучаемой темы [64].

Большой интерес представляют принципы разработки учебных программ для одаренных детей известного американского ученого Х. Пассова. Он считает, что учебная программа для одаренных детей должна:

– содержать углубленное и всестороннее изучение важнейших проблем и идей, которые интегрируют знания со структурами мышления;

– предусматривать развитие продуктивного мышления, а также практических навыков его применения;

– давать им возможность приобщаться к постоянно меняющемуся, развивающемуся знанию и к новой информации, прививать стремление к приобретению знаний;

– предусматривать наличие и свободное использование соответствующих источников;

– поощрять их инициативу и самостоятельность в учебе и развитии;

– способствовать развитию их сознания и самосознания, пониманию связей с другими людьми, природой, культурой и т. д.;

– оцениваться в соответствии с ранее обозначенными принципами.

Автор особое внимание уделяет развитию мышления детей, их творчества. Программы для интеллектуально одаренных детей, как правило, отличаются от традиционных тем, что предусматривают:

– наличие вопросов, которые не предусмотрены базовой программой;

– глубокую проработку каждой темы;

– наличие более сложных видов деятельности, требующих абстрактных понятий и мыслительных процессов достаточно высокого уровня;

– большую мыслительную гибкость в отношении используемых материалов, времени и ресурсов;

– наличие самостоятельной работы (в изучении теории, овладении методами решения задач, исследованиях);

– предоставление возможностей для самовыражения и самореализации (конкурсы, олимпиады, турниры и др.);

– создание условий и предпосылок для расширения базы знаний [68].

Какими принципами должны руководствуются педагоги, обучающие интеллектуально одаренных детей? Индивидуализация обучения является одним из основных принципов обучения интеллектуально одаренных детей, качественного изменения содержания их образования. Развитие всех видов мышления учащихся в ходе учебной деятельности относится к числу важнейших задач педагогов, качественной перестройки содержания образования одаренных детей. Учеными проведен глубокий анализ состояния данной проблемы (М.В. Кларин, О.М. Дьяченко, И.В. Дубровина и др.). Одним из первых обратил внимание на возможность разработки серии обучающих процедур, позволяющих повысить качество функционирования интеллекта, основатель тестологии А. Бине. Задачи, которые он разработал для диагностики детского интеллекта, навели ученого на мысль о том, что может быть создана система, позволяющая развивать и совершенствовать его. Ряд важнейших исследований, направленных на изучение процесса развития интеллектуальных способностей детей и взрослых, проведен в США (Дж. Гилфорд, В. Лоуэнфельд, К. Макиннон, К. Осборн и др.) [68].

Многие педагоги на практике уделяют пристальное внимание целенаправленному развитию интеллектуальных функций, обучению детей технике мыслительных действий, процессам эффективной познавательной деятельности. Для развития мышления интеллектуально одаренных детей учитель должен использовать проблемное обучение, особенно его эвристические и исследовательские методы. Во Франции старшеклассников и студентов обучают эвристическим методам. Основными эвристическими методами являются:

1. Метод аппликации теории (применение одной теории в той же области, но в неизвестном секторе).
2. Метод соединения (комбинирования двух теорий).
3. Метод дифиниций (определение тех явлений, которые предстоит изучить).
4. Метод экспериментального беспорядка. В его основе лежит детская игра, в «процессе которой играющий заведомо беспорядочно создает конструкции, полагаясь на интерес, возникающий при анализе каждого действия и рождающейся композиции».
5. Метод противоречий (состоит в том, чтобы опровергнуть суще-ствующее в науке мнение по определенному вопросу).
6. Метод критики.
7. Метод обновления (например, пересказ современным языком «Слова о полку Игореве»).
8. Метод рекодификации (выражение какого-либо явления другим кодом).

9. Метод представления (показа) [5, с. 244].

Важно активизировать познавательную деятельность, придав ей исследовательский, творческий характер, передав учащемуся инициативу в организации познания. Известный немецкий дидакт и психолог А. Дистервег много лет назад справедливо заметил, что плохой учитель преподносит истину, а хороший учит ее находить [5]. Как актуальны его слова сегодня!

Самостоятельная исследовательская практика детей — важнейший фактор развития творческих способностей. В исследовательском методе дети не получают знания в готовом виде, а приобретают их своим трудом. Говоря о сущности исследовательского метода обучения, известный педагог М.В. Кларин замечает, что обучение, в котором учащийся ставится в ситуацию, когда он сам овладевает понятиями и подходом к решению проблем в процессе познания, в большей или меньшей степени организованного (направляемого) учителем. Учебный процесс в этом случае строится на основе самостоятельного поиска учащимся новых познавательных ориентиров, что позволяет добиться не только усвоения новой информации, но и овладения методами познания.

Стратегия обогащения содержания образования подразумевает широкий спектр мер по качественной перестройке содержания образования таким образом, чтобы оно наиболее полно отвечало задаче развития интеллектуального потенциала личности учащегося. Модель известного американского ученого Дж. Рензулли — «Три вида обогащения учебных программ» наиболее популярна в мире.

Первый вид обогащения предполагает знакомство учащихся с самыми разными областями и предметами изучения. Второй вид обогащения предполагает ориентацию на специальное развитие мышления ребенка. Он включает занятия на тренировку наблюдательности, способности оценивать, сравнивать, строить гипотезы, анализировать, синтезировать, классифицировать, выполнять другие мыслительные операции. И, наконец, третий вид обогащения — проведение самостоятельных исследований и решение творческих задач (индивидуально и в малых группах). Учащиеся принимают участие в постановке проблемы, в выборе методов ее решения. Приобщение к творческой, исследовательской работе, по справедливому заключению автора, является важным условием не только обучения, но и воспитания одаренного ребенка [68]. Однако при всей привлекательности названная выше модель не может быть использована в полной мере в условиях системы образования Республики Беларусь, которая по многим параметрам отличается от американской. Отдельные ее положения используются педагогами как своеобразные ориентиры в работе с интеллектуально одаренными детьми.

Педагогическая наука разработала достаточное количество методических приемов и технологий обучения. Слово «технология» (от гр. *techne* — искусство, ремесло) — совокупность знаний о способах и средствах проведения производственных процессов. Педагогическая технология — это конкретное, научно обоснованное, специальным образом организованное обучение для достижения конкретной, реально выполнимой образовательной цели. Педагогическая технология подразумевает постановку не просто общей цели; характерной ее особенностью является разработка целей по этапам обучения, содержание, способы и средства достижения этих целей, ведущих, в конечном счете, оптимальным путем к конечной цели [5, 67].

При разработке технологии обучения прогнозируется совершенно конкретная деятельность учителя и учащихся. Педагогическая технология строится, как правило, на научном анализе деятельности, четком отборе содержания обучения, анализе средств педагогической коммуникации (учебники, пособия, ТСО, методические разработки и указания), конкретизации деятельности учителя и учащихся. После научного анализа всего указанного выше следует этап разработки самой технологии обучения на основе системного подхода, подразумевая, что все компоненты тесно связаны между собой и работают как единый живой организм. Далее следует проверка разработанной технологии в опытном обучении, ее коррекция и реализация в естественных условиях обучения [67].

Рассмотрим более подробно те технологии, формы и методы, которые на наш взгляд, наиболее эффективны при обучении интеллектуально одаренных детей.

Технология уровневой дифференциации

Основу технологии уровневой дифференциации составляет индивидуализация. «Индивидуализация (от лат. *individuatio*) — это проявление живой и неживой природы как множества неповторимых индивидов — сходных, но не тождественных» [63, с. 64]. В философском аспекте индивидуализация рассматривается как одна из форм развития. «Всякое различие, — утверждал В. Соловьев, — есть выделение индивидуальных образований из первопричинной слитности и неопределенности» [17, с. 78]. В аналитической психологии индивидуализация — это процесс становления личности, ее созревания. За процессом индивидуализации, по К.Г. Юнгу, стоит особая скрытая направляющая тенденция, исходящая из своеобразного центра душевной жизни человека называемой «самостью» [63]. В «Педагогической энциклопедии» индивидуализация определяется как «...организация учебного процесса, при котором выбор способов, приемов, темпа обучения учитывает индивидуальные различия учащихся, уровень развития их способностей к обучению» [65, с. 201]. В педагогике понятия «индивидуализация» и «индивидуальный подход» различаются. В первом случае имеем дело с принципом обучения, а во втором — с осуществлением этого принципа, которое имеет свои формы и методы. В педагогических отношениях индивидуализация имеет две характерные особенности:

1) она направлена на создание, развитие и усовершенствование духовного богатства индивида, при которых субъект-субъектные отношения являются ведущими;

2) личность совершенствуется и при помощи собственной деятельности, и в процессе воспитания.

Следовательно, педагогическая деятельность включает и субъект-объектные отношения.

В нашем исследовании под *индивидуализацией* будем понимать принцип обучения и воспитания, учитывающий индивидуальные качества учащихся. Необходимость индивидуализации обучения интеллектуально одаренных детей давно обоснована специалистами в области образования. Они единогласно отмечают, что необходимо больше уделять внимания развитию у детей творческих способностей, интеллектуальной инициативы, мышления. Многие из них сходятся на том, что содержание обучения должно обязательно выходить за рамки обязательной программы; необходимо учитывать специфику интересов учащихся и не ограничивать стремление их глубоко вникать в сущность той или иной темы. Программы их обучения должны качественно превосходить обязательные, быть более усложненными, а темп обучения должен быть ускоренным. В условиях классно-урочной системы обучения детей в Беларуси не обойтись без дифференциации. Дифференциация выступает частью целой системы формирования личности на уровне ее индивидуализации. Дифференциация — это организация и подбор специальных условий для обучения учащихся с целью эффективного развития их индивидуальных и личностных качеств. Между понятиями «индивидуализация» и «дифференциация» существует взаимосвязь, определяемая следующим соотношением: дифференциация обучения учащихся является важным условием индивидуализации всего педагогического процесса [63].

Особую актуальность дифференциация получила в 50–60 гг. XX столетия. При этом акцентировалось внимание на создании в старших классах такой системы обучения, которая позволила бы учащимся наряду с получением среднего образования, более углубленно изучать предметы в избранной ими области знаний.

В настоящее время в мировой образовательной практике сложилось 5 моделей дифференциации:

– селективно-поточная (три потока — облегченный, основной, продвинутый. Классы внутри потоков гомогенные, переход из потока в поток возможен только в конце учебного года);

– селективно-уровневая (внутри классов выделяются группы облегченного обучения, основная и продвинутая: переход из группы в группу возможен два или три раза в год. Допускается некоторый выбор предметов учениками, иногда гомогенные группы комбинируются с гетерогенными);

– смешанных способностей (классы немногочисленны и гомогенны. Изучение темы дети начинают вместе, затем проводится тестирование и класс делится на два потока: в одном она изучается на продвинутом уровне, а в другом повторяется в облегченном варианте, затем класс сливается для работы по следующей теме);

– интегративная (группы смешанных способностей, родственные предметы сгруппированы и часто интегрированы в предметные области. Гетерогенные группы переменного состава, большое внимание уделяется развитию личности);

– инновативная (внутри класса или группы существуют малые автономные группы, границы предмета размыты, программы обучения совершенствуются с учетом мнения учащихся) [67].

Во многих странах Западной Европы и США дифференцированное обучение организовано на основе принципа селекции учащихся по результатам тестовых исследований, уровню успеваемости, интересам и профессиональным намерениям.

Внутренняя дифференциация представляет собой различное обучение детей в достаточно большой группе учащихся (класс), подобранной по случайным признакам. Эта форма основана на возможно более полном учете индивидуальных и групповых особенностей учащихся. Она предполагает вариативность темпа изучения материала, дифференциацию учебных заданий, выбор разных видов деятельности, определение характера и степени дозировки помощи со стороны учителя. При этом возможно разделение учащихся на группы внутри класса с целью осуществления учебной работы с ними на разных уровнях и разными методами. Эти группы, как правило, мобильны, гибки, подвижны.

Особенность внутренней дифференциации на современном этапе — ее направленность на интеллектуально одаренных детей. Внутренняя дифференциация может осуществляться как в традиционной форме учета индивидуальных особенностей учащихся (дифференцированный подход), так и в системе уровневой дифференциации на основе планирования результатов обучения.

Смысл уровневой дифференциации заключается в том, чтобы адаптировать учебный процесс к познавательным возможностям каждого ученика, предъявить соответствующие уровню его развития требования, программы, учебники, методы и формы обучения. Под уровневой дифференциацией понимается обучение учащихся одного и того же класса на трех уровнях обучения: базовом, продвинутом и высоком. Базовый уровень — определенный программой и учебником, максимум знаний и умений, достижение которого обязательно учащимися всего класса. Продвинутый уровень — некоторые, выходящие за рамки программы и учебника дополнительные сведения (знания) и формирование прочных умений по применению этих знаний в различных ситуациях. Высокий уровень — дополнительные сведения, углубляющие знания учащихся по теме и формирующие умения решать задачи повышенной сложности.

В педагогической теории и практике наработан большой арсенал методов и средств дифференциации в условиях урочных (общеклассных) форм обучения. Они отличаются по своей сложности и продуктивности:

- разноуровневое изложение материала;
- вначале упрощенное изложение, затем усложненное;
- целостное изложение основного, затем детализация и конкретизация по частям;

– использование наглядности в разных видах, в различных сочетаниях со словом (для детей с разными типами восприятия, мышления, внимания);

– дифференцированная работа с учебной литературой;

– дифференцированные задания с учетом успеваемости, уровня развития, интересов учащихся, целевой направленности обучения;

– дифференцированная самостоятельная работа (по интересам, по уровню сложности, продуктивности (по индивидуальным карточкам с заданиями разной сложности; по образцу решения, показанному учителем или учеником у доски; с комментированным управлением способом выполнения заданий: в паре, группе; полностью самостоятельная работа без чьей-либо помощи с выбором способа выполнения);

– групповые формы работы с целью взаимообучения и взаимоконтроля, КСО, работа в парах:

– индивидуальный опрос (по заранее данным ученику вопросам; по плану, данному учителем; письменный ответ на устные вопросы; предварительный ответ товарищу или в группе, а затем перед классом; ответы не на все вопросы сразу, а по частям; дозирование сложности вопросов; индивидуальный ответ во внеурочное время или шепотом учителю в классе);

– дифференцированный контроль (уровневые задания, задания с выбором, индивидуализация критериев оценки);

– программированный контроль;

– дифференциация темпов изучения.

Дифференцированные группы (по 2—5 человек) могут формироваться по следующим признакам:

– по уровню развития мышления, творческого потенциала, интересов;

– по наличию базовой подготовки;

– по склонностям, интересам к определенному виду деятельности, выбору вида деятельности. Группы по своему характеру подвижны, учащиеся на разных предметах могут работать в разных группах [34, 37].

В основе технологии уровневой дифференциации лежит создание гомогенных групп, объединяющих учащихся, равных по уровню развития, что очень важно для обучения интеллектуально одаренных детей.

Целевые ориентации технологии уровневой дифференциации таковы:

– обучение каждого на уровне его возможностей и способностей;

– приспособление (адаптация) обучения к особенностям различных групп учащихся.

Н.П. Гузик предложил на основе такого приспособления строить весь учебный процесс. Он считает, что до появления в классе учитель должен провести большую предварительную работу: проанализировать материал курса и составить три типа дифференцированных программ разной степени сложности, причем в каждой теме самой простой программы отобрать тот минимум, который позволит обеспечить неразрывную логику изложения учебного материала. Н.П. Гузик выделил пять типов уроков и предложил на всех уроках осуществлять уровневую дифференциацию. Лишь при повторении материала он отказывается от гомогенных групп и детям предоставляет свободный выбор разноуровневых заданий [34].

Технология уровневой дифференциации позволяет в условиях классно-урочной системы уделить должное внимание интеллектуально одаренным детям.

Проблемное обучение — одна из самых *эффективных технологий* обучения интеллектуально одаренных детей. Она более других соответствует их умственным потребностям. Разработка урока по технологии проблемного обучения требует от педагога глубоких знаний ее теоретических основ, большого педагогического мастерства. Рассмотрим более детально сущность технологии проблемного обучения.

Проблемное обучение это не абсолютно новое педагогическое явление, оно имеет довольно древнюю и богатую историю. Его основоположником можно назвать Сократа (469—399 до н.э.), широко применявшего эвристический метод обучения в виде бесед, особых вопросов и рассуждений. В трудах ученых, писателей и философов эпохи Возрождения усматриваются зародыши проблемного обучения. Так, Ж.Ж. Руссо (1712—1778) писал: «Пусть он (учащийся) достигает знания не через вас (учителя), а через самого себя, пусть он не заучивает науку, а постигает ее сам» [5, с. 32]. Он говорил о необходимости самостоятельности и активности учащихся в процессе обучения, а в качестве основной цели образования выделял развитие своих воспитанников.

Швейцарский педагог И.Г. Песталоцци (1746—1827) ввел концепцию элементарного образования, основными принципами которого были деятельностный подход к процессу обучения и активная самостоятельная работа учащихся в противовес катехизисному (догматическому) обучению. Русский педагог К.Д. Ушинский (1824—1870) одной из основных целей образования считал развитие активной и творческой личности учащегося. По его мнению, в процессе обучения важно создать атмосферу товарищества, сотрудничества ученика и педагога, и наиболее эффективным методом обучения считал майевтический метод Сократа. К.Д. Ушинский призывал передавать ученику не только те или иные познания, но и развивать в нем желание и способность самостоятельно, без учителя, приобретать новые познания [73].

Разработку концепции И.Г. Песталоцци продолжил немецкий педагог А. Дистерверг (1790—1866), сформулировав 33 закона и правила развивающего обучения. Основными принципами эффективного обучения он считал, в частности, заинтересованность, самодеятельность и активность учащихся, что также предполагается в проблемном обучении. Именно А. Дистервергу принадлежит известный афоризм: «Плохой учитель преподносит истину, хороший — учит ее находить» [5, с. 27].

В XX-м веке развитие теории проблемного обучения связано, в первую очередь, с именем американского психолога и педагога Дж. Дьюи (1859—1952). Его педагогическая теория получила название инструментальной педагогики или «обучения путем делания» и заключалась в том, что ребенок должен получать опыт и знания в процессе самостоятельного исследования, изготовления различных макетов и схем, производства опытов, нахождения ответов на спорные вопросы и так далее. Дж. Дьюи декларировал важность применения в педагогическом процессе игровых и проблемных методов, разработал принципы и методику формирования критического мышления, способствующего активному и сознательному усвоению учебного материала, а также разработал основные правила нового специфического метода обучения, названного исследовательским, в котором обучение воспроизводит ход реальных событий, имевших место в науке и технике [63].

В СССР исследования в области проблемного обучения в полной мере начались в 60-х годах XX-го века. Дидакты М.Л. Данилов и В.П. Есипов сформулировали правила активизации процесса обучения, которые отражают принципы организации проблемного обучения:

– вести учащихся к обобщению, а не давать им готовые определения, понятия;

– эпизодически знакомить учащихся с методами науки;

– развивать самостоятельность их мысли с помощью творческих заданий.

Идеи и принципы проблемного обучения разрабатывались советскими психологами С.Л. Рубинштейном, Д.Н. Богоявленским, Н.А. Менчинской, А.М. Матюшкиным, а в применении к школьному обучению такими дидактами, как М.Н. Скаткин, Т.В. Кудрявцев, Д.В. Вилькеев, И.Я. Лернер, Ю.К. Бабанский, М.И. Махмутов. Исследования в этом направлении ведутся и сейчас.

В педагогической литературе даются различные определения понятия «технология проблемного обучения», в той или иной мере отражающие отношение автора к педагогическому процессу. Например, И.Я. Лернер, под технологией проблемного обучения подразумевает, такое обучение, при котором учащиеся систематически включаются в процесс решения проблем и проблемных задач, построенных на содержании программного материала [52]. В. Оконь под технологией проблемного обучения понимает совокупность таких действий, как организация проблемных ситуаций, формулирование проблем, оказание учащимся необходимой помощи в решении проблем, проверка этих решений и, наконец, руководство процессом систематизации и закрепления приобретенных знаний [61]. Д.В. Вилькеев под проблемным обучением подразумевает такой характер обучения, который имеет некоторые черты научного познания [16]. По мнению Г.К. Селевко, проблемное обучение — это такая организация учебных занятий, которая предполагает создание под руководством преподавателя проблемных ситуаций и активную самостоятельную деятельность учащихся по их разрешению, в результате чего и происходит творческое овладение знаниями, навыками и умениями и развитие мыслительных способностей. Т.В. Кудрявцев суть процесса проблемного обучения видит в выдвижении перед учащимися дидактических проблем, в их решении и овладении учащимися обобщенными знаниями и принципами проблемных задач [49]. Такое понимание имеется и в работах Ю.К. Бабанского [4].

М.И. Махмутов считает, что «проблемное обучение — это тип развивающего обучения, в котором сочетаются систематическая самостоятельная поисковая деятельность учащихся с усвоением ими готовых выводов науки, а система методов построена с учетом целеполагания и принципа проблемности; процесс взаимодействия преподавания и учения ориентирован на формирование познавательной самостоятельности учащихся, устойчивости мотивов учения и мыслительных (включая и творческие) способностей в ходе усвоения ими научных понятий и способов деятельности, детерминированных системой проблемных ситуаций» [55].

В нашем исследовании под *проблемным обучением* будем понимать такой тип развивающего обучения, содержание которого представлено системой проблемных задач различного уровня сложности, в процессе решения которых учащиеся овладевают новыми знаниями и способами действия, что способствует формированию: продуктивного мышления, воображения, познавательной активности, мотивации деятельности.

Каждое из приведенных определений раскрывает одну из сторон проблемного обучения, а в сумме подчёркиваются главные признаки, которые лежат в основе моделирования уроков в режиме технологии проблемного обучения:

1) создание проблемных ситуаций;

2) обучение учащихся в процессе решения проблем;

3) сочетание поисковой деятельности и усвоения знаний в готовом виде [56].

Проблемное обучение обеспечивает возможности творческого участия обучаемых в процессе освоения новых знаний, формирование познавательных интересов и творческого мышления, высокую степень органичного усвоения знаний и мотивации учащихся. Фактически основой для этого является моделирование реального творческого процесса за счет создания проблемной ситуации и управления поиском решения проблемы. При этом осознание, принятие и разрешение этих проблемных ситуаций происходит при оптимальной самостоятельности учащихся, но под общим направляющим руководством педагога в ходе совместного взаимодействия.

Цель проблемного обучения: усвоение не только результатов научного познания, но и самого пути, процесса получения этих результатов; она включает и формирование познавательной деятельности ученика, и развитие его творческих способностей (помимо овладения системой знаний, умений и навыков). В проблемном обучении акцент делается на развитие мышления. В основе организации процесса проблемного обучения лежит принцип поисковой учебно-познавательной деятельности учащегося (основанной на закономерности проблемности усвоения знаний), то есть открытия им выводов науки, способов действия, «изобретения» новых предметов или способов приложения знаний к практике [49].

В проблемном обучении несколько изменяется иерархия образовательных целей:

1) развитие интеллекта, познавательной самостоятельности и творческих способностей учащихся;
2) усвоение учащимися системы знаний и способов умственной практической деятельности;
3) формирование всесторонне развитой личности [4].

Проблемному образованию приписываются следующие специальные функции:

– воспитание навыков творческого усвоения знаний (применение отдельных логических приемов и способов творческой деятельности);
– воспитание навыков творческого применения знаний (применение усвоенных знаний в новой ситуации) и умение решать учебные проблемы;
– формирование и накопление опыта творческой деятельности (овладение методами научного исследования и творческого отображения действительности);
– формирование мотивов обучения, социальных, нравственных и познавательных потребностей [54].

При проблемном обучении существенно усиливается роль самостоятельного образования, инициативность. Групповая организация работы учащихся в процессе проблемного обучения приводит к укреплению межличностных отношений, учащиеся получают навыки коллегиального решения рабочих проблем. У каждого из них есть возможность самореализации в процессе обучения. Постоянная постановка и решение проблемных задач являются наиболее приемлемыми для поддержания неослабевающего интереса и активности интеллектуально одаренных учащихся.

Основными достоинствами проблемного обучения, по нашему мнению, являются:

1) специфическая интеллектуальная деятельность учащегося по самостоятельному усвоению новых понятий путем решения учебных проблем, которая обеспечивает сознательность, глубину и прочность знаний;

2) активное развитие в процессе обучения всех видов мышления (дивергентного, конвергентного, оценочного, критического).

3) реализация дидактического принципа связи обучения с жизнью (важнейшее средство создания проблемных ситуаций и критерий оценки правильности решения учебных проблем);

4) возможность сочетания разнообразных типов и видов самостоятельной работы учащихся, требующих как актуализации ранее приобретенных, так и усвоения новых знаний и способов деятельности;

5) возможность осуществления индивидуального подхода к каждому в обучении (учащиеся выдвигают разнообразные гипотезы и ищут пути их доказательства);

6) динамичность (одна ситуация переходит в другую естественным путем на основе диалектического закона взаимосвязи и взаимообусловленности всех вещей и явлений материального мира);

7) эмоциональная активность учащихся (проблемная ситуация является источником ее возбуждения, детерминирует активность мыслительной деятельности);

8) проблемное обучение обеспечивает новое соотношение индукции и дедукции (усиление значения второго пути познания) и новое соотношение репродуктивного и продуктивного, в том числе творческого, усвоения знаний, повышая роль именно творческой познавательной деятельности учащихся.

В педагогической литературе выделяются следующие *виды проблемного обучения*:

1. *Проблемное изложение знаний.* При таком изложении учитель не только сообщает учащимся те или иные положения, но, «рассуждая вслух», ставит проблему и показывает процесс её решения. Такое объяснение учителя, являясь более доказательным, учит детей мыслить, вести познавательный поиск.

2. *Привлечение учащихся к поиску* на отдельных этапах изложения знаний. В этом случае учитель выдвигает перед учащимися проблему, сам излагает учебный материал, но в ходе изложения формулирует вопросы, которые требуют от них включенности в процесс поиска и самостоятельного решения той или иной познавательной задачи.

3. *Исследовательский метод обучения.* При работе этим методом, осознав поставленную проблему, учащиеся сами намечают план поиска, строят предположения, обдумывают способ их проверки, проводят наблюдения, опыты, фиксируют факты, сравнивают, классифицируют, обобщают, доказывают, делают выводы [4, 49, 53].

М.И. Махмутов классифицирует виды проблемного обучения следующим образом:

1) *научное творчество* (теоретическое исследование, то есть поиск и открытие учащимися нового правила, закона, теоремы и т. д.). В основе этого вида проблемного обучения лежит постановка и решение теоретических учебных проблем;

2) *практическое творчество* (поиск практического решения, то есть поиск способа применения известного знания в новой ситуации, конструирование, изобретение). В основе этого вида проблемного обучения лежит постановка и решение практических учебных проблем;

3) *художественное творчество* (художественное отображение действительности на основе творческого воображения, включающее в себя литературные сочинения, рисование, написание музыкального произведения, игру и т. п.) [55].

Каждый вид проблемного обучения имеет сложную структуру, дающую в зависимости от множества факторов различную результативность обучения. Каждый из перечисленных видов проблемного обучения может протекать с различной степенью познавательной активности учащегося. М.И. Махмутов в зависимости от характера взаимодействия учителя и учащихся условно выделяет четыре уровня проблемного обучения:

– *уровень несамостоятельной активности* (восприятие учащимися объяснения учителя, усвоение образца умственного действия в условиях

– *уровень полусамостоятельной активности* (применение прежних знаний в новой ситуации и участие школьников в поиске способа решения поставленной учителем проблемы);

– *уровень самостоятельной активности* (выполнение работы репродуктивно-поискового типа; учащийся сам применяет прежние знания в новой ситуации, конструирует, решает задачи среднего уровня сложности, доказывает гипотезы с незначительной помощью учителя);

– *уровень творческой активности* (выполнение самостоятельной работы, требующей творческого воображения, логического анализа и догадки, открытия нового способа решения учебной проблемы, самостоятельного доказательства; самостоятельные выводы и обобщения, изобретения) [56].

Каждый уровень проблемного обучения может иметь различные варианты организации, в зависимости от разных факторов психолого-педагогического характера. Перевод учащихся с первого на более высокий уровень является результатом проблемного обучения и одновременно процессом управления их учебно-познавательной деятельностью. Эти показатели характеризуют уровень интеллектуального развития учащихся и могут применяться учителем как видимые показатели продвижения учащегося в учебном развитии, в качестве основного содержания обратной информации.

Анализ психолого-педагогической литературы по вопросам проблемного обучения показывает, что проблемным это обучение называется не потому, что весь учебный материал учащиеся усваивают только путем самостоятельного решения проблем и «открытия» новых понятий. Здесь присутствуют и объяснения учителя, и репродуктивная деятельность учащихся, и постановка задач, и выполнение учащимися упражнений. Но организация учебного процесса базируется на принципе *проблемности*, а систематическое решение учебных проблем — характерный признак этого типа обучения. Принцип проблемности, реализуется через различные типы учебных проблем и через сочетание репродуктивной, продуктивной и творческой деятельности учащегося.

Проблемная ситуация и учебная проблема являются основными понятиями проблемного обучения, которое рассматривается не как механическое сложение деятельности преподавания и учения, а как диалектическое взаимодействие и взаимосвязь этих двух видов деятельности.

Проблемное преподавание определяется как деятельность учителя по созданию системы проблемных ситуаций, изложению учебного материала с его (полным или частичным) объяснением и управлению деятельностью учащихся, направленной на освоение новых знаний (как традиционным путем, так и путем самостоятельной подготовки учебных проблем и их решения).

Проблемное учение — это учебно-познавательная деятельность учащихся по усвоению знаний и способов деятельности путем восприятия объяснений учителя в условиях проблемной ситуации, самостоятельного (или с помощью учителя) анализа проблемных ситуаций, формулировки проблем и их решения посредством выдвижения предположений (гипотез), их обоснования и доказательства, а также путем проверки правильности решения.

Независимо выбора метода изложения материала и организации учебного процесса, в основе (при проблемном обучении) лежит последовательное и целенаправленное создание проблемных ситуаций, мобилизующих внимание и активность учащихся. Формы представления проблемных ситуаций: учебные задачи и вопросы. Вместе с тем, если в традиционном обучении эти средства применяются для закрепления учебного материала и приобретения навыков, то в проблемном обучении они служат предпосылкой для познания. Задача становится проблемной, если она носит познавательный, а не закрепляющий, тренировочный характер.

М.И. Махмутов определяет проблемную ситуацию как интеллектуальное затруднение человека, возникающее в случае, когда он не знает, как объяснить возникшее явление, факт, процесс действительности, не может достичь цели известным ему способом, что побуждает человека искать новый способ объяснения или новый способ действия [56].

Проблемной мы будем назвать ситуацию, в которой учащийся не может объяснить для себя объективно возникшее противоречие, не может дать ответ на объективно возникший вопрос, поскольку ни имеющиеся знания, ни содержащаяся в проблемной ситуации информация не содержат на них ответ и не содержат метод его нахождения.

Проблемные ситуации подразделяются по нескольким основаниям: по области научных знаний или учебной дисциплине (физике, математике и т. п.); по направленности на поиск недостающего нового (новых знаний, способов действия, выявления возможности применения известных знаний и способов в новых условиях); по уровню проблемности (очень острые противоречия, средней остроты, слабо или неявно выраженные противоречия); по типу и характеру содержательной стороны противоречий (например, между житейскими представлениями и научными знаниями, неожиданным фактом и неумением его объяснить и т. п.). Дидактически и методически основанные способы создания проблемных ситуаций могут быть найдены только в том случае, если учителю известны общие закономерности их возникновения.

В литературе по проблемному обучению встречаются попытки сформулировать эти закономерности в виде *типов проблемных ситуаций:*

1. Проблемная ситуация возникает при условии, если учащийся не знает способ решения поставленной задачи, не может ответить на проблемный вопрос, дать объяснение новому факту в учебной или жизненной ситуации, то есть в случае осознания учащимся недостаточности прежних знаний для объяснения нового факта.

2. Проблемная ситуация возникает при столкновении учащихся с необходимостью использовать ранее усвоенные знания в новых практических условиях.

3. Проблемная ситуация возникает в том случае, если имеется противоречие между теоретически возможным путем решения задачи и практической неосуществимостью избранного способа.

4. Проблемная ситуация возникает тогда, когда имеется противоречие между

практически достигнутым результатом выполнения учебного задания и отсутствием у учащихся знаний для его теоретического обоснования [4, 53].

Создание проблемных ситуаций в учебном процессе преследует следующие *дидактические цели:*

- привлечь внимание учащегося к вопросу, задаче, учебному материалу, возбудить у него познавательный интерес и другие мотивы деятельности;
- привлечь внимание учащегося к вопросу, задаче, учебному материалу, возбудить у него познавательный интерес и другие мотивы деятельности;
- поставить его перед таким познавательным затруднением, продолжение которого активизировало бы мыслительную деятельность;
- помочь ему определить в познавательной задаче, вопросе, задании основную проблему и наметить план поиска путей выхода из возникшего затруднения; побудить учащегося к активной поисковой деятельности;
- помочь ему определить границы актуализируемых ранее усвоенных знаний и указать направление поиска наиболее рационального пути выхода из ситуации затруднения [56].

Джон Дьюи предлагал следующие способы создания проблемных ситуаций: подведение детей к противоречию и предложение им самим найти решение; столкновение противоречий практической деятельности; изложение различных точек зрения на один и тот же вопрос; предложение рассмотреть явление с различных позиций; побуждение делать сравнения, обобщения, выводы [5]. В современной теории проблемного обучения выделяется десять дидактических способов создания проблемных ситуаций, которые могут быть взяты педагогами за основу:

1. Побуждение учащихся к теоретическому объяснению явлений, фактов, внешнего несоответствия между ними.

2. Использование учебных и жизненных ситуаций, возникающих при выполнении учащимися практических заданий в школе, дома или на производстве, в ходе наблюдений за природой и т. д. Проблемные ситуации в этом случае возникают при попытке самостоятельно достичь поставленной практической цели. Обычно учащиеся в итоге анализа ситуации сами формулируют проблему.

3. Постановка учебных проблемных заданий на объяснение явления или поиск путей его практического применения. Примером может служить любая исследовательская работа учащихся на учебно-опытном участке, в мастерской, лаборатории или учебном кабинете, а также на уроках по гуманитарным предметам.

4. Побуждение учащегося к анализу фактов и явлений действительности, порождающему противоречия между житейскими представлениями и научными понятиями об этих фактах.

5. Выдвижение предположений (гипотез), формулировка выводов и их опытная проверка.

6. Побуждение учащихся к сравнению, сопоставлению фактов, явлений, правил, действий, в результате которых возникает проблемная ситуация.

7. Побуждение учащихся к предварительному обобщению новых фактов. Учащиеся получают задание рассмотреть некоторые факты, явления, содержащиеся в новом для них материале, сравнить их с известными и сделать самостоятельное обобщение.

8. Ознакомление учащихся с фактами, несущими как будто бы необъяснимый характер и приведшими в истории науки к постановке научной проблемы.

9. Организация межпредметных связей.

10. Варьирование задачи, переформулирование вопроса [4].

Ситуации в учебной деятельности могут различаться степенью самой проблемности. *Высшая степень проблемности* присуща такой учебной ситуации, в которой учащийся:

1) сам формулирует проблему (задачу);

2) сам находит ее решение;

3) сам решает;

4) сам контролирует правильность этого решения [56].

В качестве проблемной ситуации на уроке могут быть:

– проблемные задачи с недостающими, избыточными, противоречивыми данными, с заведомо допущенными ошибками;

– поиск истины (способа, приема, правила решения);

– различные точки зрения на один и тот же вопрос;

– противоречия практической деятельности.

Пути, которыми учитель может привести учеников к проблемной ситуации:

– побуждающий диалог;

– подводящий диалог;

– применение мотивирующих приёмов.

Основными условиями использования проблемных ситуаций на уроке математики являются:

Со стороны учащихся:

– новая тема («открытие» новых знаний);

– умение учащихся использовать ранее усвоенные знания и переносить их в новую ситуацию;

– умение определить область «незнания» в новой задаче;

– активная поисковая деятельность.

Со стороны учителя:

– умение планировать, создавать на уроке проблемные ситуации и управлять этим процессом;

– формулировать возникшую проблемную ситуацию путем указания учащимся на причины невыполнения поставленного практического учебного задания или невозможности объяснить им те или иные продемонстрированные факты [53].

Правила создания проблемных ситуаций:

1. Проблемные ситуации обязательно должны содержать посильное познавательное затруднение. Решение задачи, не содержащей познавательного затруднения, способствует только репродуктивному мышлению и не позволяет достичь целей, которые ставит перед собой проблемное обучение. С другой стороны,

проблемная ситуация, имеющая чрезмерную для учащихся сложность, не имеет существенных положительных последствий для их развития, в перспективе снижает их самостоятельность и приводит к демотивации учащихся.

2. Несмотря на то, что проблемная ситуация имеет абстрактную ценность для развития творческих способностей учащихся, наилучшим вариантом является совмещение с материальным развитием — усвоением новых знаний, умений, навыков. С одной стороны, это служит непосредственно образовательным целям, а, с другой стороны, благоприятствует мотивации учащихся, которые осознают, что их усилия в итоге получили определенное выражение, более осязаемое, нежели повышение творческого потенциала.

3. Проблемная ситуация должна вызывать интерес учащихся своей необычностью, неожиданностью, нестандартностью. Такие положительные эмоции, как удивление, интерес служат благоприятным подспорьем для обучения [56].

Основные функции учебной проблемы:

1. Определение направления умственного поиска, то есть деятельности учащегося по нахождению способа решения проблемы.

2. Формирование познавательных способностей, интереса, мотивов деятельности ученика по усвоению новых знаний.

К выдвигаемой проблеме предъявляют несколько *требований:*

1. Проблема должна быть *доступной* пониманию учащихся.

2. Проблема должна быть *посильной* учащимся.

3. Проблема должна *заинтересовать* учащихся.

4. Важна *естественность* постановки проблемы.

Постановка учебной проблемы осуществляется в несколько *этапов:*

a) анализ проблемной ситуации;

b) осознание сущности затруднения — видение проблемы;

c) словесная формулировка проблемы.

Процесс постановки учебной проблемы должен осуществляться с учетом основных логических и дидактических правил:

1) отделение (ограничение) известного от неизвестного;

2) локализация (ограничение) неизвестного;

3) определение возможных условий для успешного решения;

4) наличие в формулировке проблемы неопределенности.

Решение любой проблемы начинается с ее правильной и четкой формулировки. Процесс формулировки означает, что учащийся уже понимает возникшую перед ним задачу и в известной мере видит, «нащупывает» пути ее решения, то есть, составляет план решения, затем осуществляет план и «оглядывается назад» (изучает и анализирует полученное решение).

Существует три вида проблемы в зависимости от наличия у решающего определенного опыта в отношении данного класса проблемных задач:

1. Решение задач, относительно которых у решающего нет никакого прежнего опыта. В этих случаях учащийся идет путем проб и ошибок до тех пор, пока одна из проб более или менее случайно не приведет к решению проблемы.

2. Ситуации, относительно которых у учащегося имеются в запасе некоторые формулы, схемы, другие виды опыта. Решение происходит в форме узнавания в предложенной ситуации одной из имеющихся схем.

3. У учащегося имеется некоторый опыт, но опыт этот во всей его совокупности не позволяет решить данную проблему. Решение состоит в том, что на основе анализа условия задачи создается новая схема действий.

Логика решения учебной проблемы:

a) составление плана решения проблемы (обязательно план включает в себя выбор вариантов решения);

b) выдвижение предположения и обоснование гипотезы;

c) доказательство гипотезы;

d) проверка решения проблемы;

e) анализ процесса решения проблемы.

Решение проблемы может быть либо аналитическим, либо эвристическим, либо сочетанием того и другого. Начальным этапом эвристического решения проблемы является выдвижение первоначальной идеи, предположительного хода решения. Гипотеза является неотъемлемым элементом проблемного обучения именно потому, что она определяет направление познавательной деятельности учащегося в создавшейся проблемной ситуации. Построение гипотезы возможно только на основе тщательного изучения явлений, фактов, данных задачи. Ход мысли при построении гипотезы идет от суждений о первоначальных, неясных, нечетких понятиях и представлениях к умозаключению. Дальнейшая деятельность требует проверки, обоснования правильности выдвинутого предположения. Развитие гипотезы дедуктивным способом может идти двумя путями:

– путем переноса действия общих законов и принципов в конкретную ситуацию;

– путем аналогии.

Процесс доказательства гипотезы осуществляется путем выведения из нее следствий, которые подвергаются практической проверке (проверяются на фактах или сопоставляются с другими понятиями и законами).

На уроках математики складывается благоприятная атмосфера для введения элементов проблемного обучения, так как проблемным способом целесообразно изучать такой материал, который содержит причинно-следственные связи и зависимости, который направлен на формирование понятий, законов и теорий [61].

Примерная схема организации урока математики в форме проблемного обучения:

1) создание учебной проблемной ситуации (реальной или формализованной) с целью возбуждения у учащихся интереса к данной учебной проблеме и мотивирования целесообразности ее рассмотрения);

2) постановка познавательной задачи (или задач), возникающей из данной проблемной ситуации, четкая ее формулировка;

3) изучение различных условий, характеризующих поставленную задачу, обсуждение возможностей моделирования ее условия или замены имеющейся модели более простой и наглядной;

4) процесс решения поставленной задачи (обсуждение задачи в целом и деталях; выявление подзадач и последовательности их решения; разработка возможных направлений решений основной задачи; отбор, воспроизведение известных теоретических положений, которые могут быть использованы в указанном направлении решения задачи; сравнительная оценка направления решения и выбор

одного из них; разработка плана решения задачи в выбранном направлении; детальная реализация плана решения задачи и обоснование правильности всех шагов решения);

5) исследование решения задачи, обсуждение результатов, выявление нового знания;

6) применение нового знания посредством решения специально подобранных учебных задач для его усвоения;

7) обсуждение возможных расширений и обобщений результатов решения задачи в рамках исходной проблемной ситуации;

8) изучение полученного решения задачи и поиск других более экономичных или более изящных способов ее решения;

9) подведение итогов проделанной работы, выявление существенного в содержании, способах решения, результатах, обсуждение возможных перспектив применения новых знаний и опыта [4].

Учителю рекомендуется обратить внимание на:

– точное определение объема и содержания учебного материала, предназначенного для изучения на уроке;

– систематизацию учебного материала в соответствии с логикой учебного предмета, его структурой, а также в соответствии с принципами дидактики;

– деление учебного материала на легко усваиваемые и тесно между собой связанные части;

– усвоение частей, сопровождающихся контролем и корректированием результатов обучения;

– учет индивидуальных темпов усвоения учебного материала школьниками и темпов работы группы.

Проблемное обучение позволяет эффективно сочетать как индивидуальную, так и групповую работу учащихся на уроке.

Специфика целей и методов проблемного обучения существенно изменяет роль преподавателя в педагогическом процессе и обуславливает появление новых требований к педагогу. Можно выделить следующие основные задачи, которые ставит перед преподавателем проблемное обучение:

– информативное обеспечение;

– направление исследования;

– изменение содержания и (или) структуры учебного материала;

– поощрение познавательной активности учащихся.

Под информативным обеспечением понимается, конечно, не предоставление знаний в готовом виде. Во-первых, речь идет о постановке проблемных ситуаций, в ходе которых учащимся дается тот самый минимум информации, который необходим для возникновения противоречия. А во-вторых, речь идет об информации, требуемой для успешного решения проблемной задачи, которая на данном этапе выходит за рамки зоны ближайшего развития учащегося. Поиск всей остальной информации осуществляется учащимися самостоятельно или при помощи педагога, но все же в рамках поиска, а не усвоения.

Следующая задача — направление исследования — характеризует положение педагога при проблемном обучении. Педагог перестает быть источником знаний, а становится помощником или руководителем в поиске этих знаний, в зависимости от конкретного метода обучения и уровня проблемности ситуации для учащихся. Особенность проблемного обучения заключается в том, что педагог одновременно выступает и как координатор или партнер (в ходе каждого этапа обучения), и как руководитель обучения (если рассматривать обучение как единое целое). Педагог организует весь процесс обучения и, в случае необходимости, включается в него для поддержания процесса в требуемом русле. Кроме того, к отдельному аспекту этой задачи педагога можно отнести организацию и методическое обеспечение выполнения задания в команде, группе учащихся, если такое вмешательство объективно необходимо [4].

Задача по изменению содержания и (или) структуры учебного материала стоит не только перед конкретным педагогом, а перед всей образовательной системой: по сравнению с традиционной концепцией обучения при проблемном, в силу объективных причин, может быть изучен меньший объем конкретного материала [49].

В современной дидактике признается приоритет интеллектуальной активности, происходящей от внутренней мотивации учащихся, от осознанной потребности в усвоении знаний и умений, что обеспечивает большую эффективность учебного процесса. При проблемном обучении мышление учащихся активизируется путем создания проблемных ситуаций, формирования постоянного познавательного интереса, освоения учащимися навыков работы с неизвестным, проблемами и противоречиями, что в итоге при правильном подходе формирует основу личности, естественным образом закрепляется в ее характеристиках [53].

Организация проблемного обучения требует от учителя умения анализировать реальный ход учебного процесса и на этой основе строить прогноз его дальнейшего развертывания, изменяя в соответствии с ним условия учебной задачи. В таких условиях педагог должен обладать способностями рефлексии и критическим мышлением [54]. Педагог должен проявлять терпимость к ошибкам учащихся, которые допускаются ими при попытках найти собственное решение, а также к неумению сформулировать, обосновать и (или) защитить свою позицию. Будучи априори авторитетным в глазах учащихся, он может повысить их учебную активность, если будет культивировать и подчеркивать личную значимость каждого, формировать у учащихся веру в себя, уверенность в своих силах. Для развития творческого потенциала педагогу следует стимулировать стремление к самостоятельному выбору целей, задач и средств их решения в сочетании с ответственностью за принятые решения.

В итоге можно заметить, что проблемное обучение, нацеленное во многом на мобилизацию творческих сил учащихся, требует в такой же степени наличия творческих характеристик и у самого педагога. В таких условиях обучение преподавателей проблемным методикам, по-видимому, должно вестись также в рамках проблемного обучения.

Итак, мы подробно рассмотрели теоретические основы технологии проблемного обучения. По нашему убеждению, эту технологию должны взять на вооружение все педагоги, работающие с интеллектуально одаренными детьми.

Технология укрупнения дидактических единиц

Технология укрупнения дидактических единиц позволяет в полной мере реализовать основные стратегии обучения интеллектуально одаренных детей — ускорение и обогащение.

Вся математика, по утверждению автора этой технологии П.М. Эрдниева, состоит из контрастных парных знаний. Традиционная система преподавания не придерживается этого принципа и сильно обедняет логическое мышление учащихся. Обычно прямые и обратные операции (сложение и вычитание, умножение и деление, показательная и логарифмическая функции, дифференцирование и интегрирование и др.) разводятся по времени, иногда их разделяют десятки страниц учебника, а чаще, к сожалению, они разбросаны по учебникам разных классов [79].

По системе УДЕ учебный материал подается крупными блоками. Детям, а интеллектуально одаренным в особенности, интереснее целостные знания, чем элементарно простые. Понятия, отношения, операции сводятся в пары, каждая из которых берется как одна и та же укрупненная дидактическая единица. По мнению автора, УДЕ — это технология обучения, обеспечивающая самовозрастание знаний учащегося благодаря активизации у него подсознательных механизмов переработки информации посредством сближения во времени и пространстве взаимодействующих компонентов доказательной логики и положительных эмоций [79].

Понятие «укрупнение единицы усвоения» достаточно общее, его автор представляет технологию УДЕ как интеграцию конкретных подходов к обучению:

- создание блоков изучаемого материала, содержащих большой объем информации;
- совместное и одновременное изучение взаимосвязанных действий, операций, функций, теорем и т. п. (в частности, взаимно обратных);
- обеспечение единства процессов составления и решения задач (уравнений, неравенств и т. п.);
- рассмотрение во взаимопереходах определенных и неопределенных заданий (в частности, деформированных упражнений);
- обращение структуры упражнения как создание условия для противопоставления исходного и преобразованного заданий;
- выявление сложной природы математического знания, достижение системности знаний;

– осуществление принципа дополнительности в системе упражнений (достижение понимания в результате межкодовых переходов образного и логического мышления, сознательного и подсознательного компонентов) [67].

При этом используются фундаментальные закономерности мышления (вкупе оптимизирующие познавательный процесс): закон единства и борьбы противоположностей; перемежающееся противопоставление контрастных раздражителей (И.П. Павлов); принцип обратных связей, системности и цикличности процессов (П.К. Анохин); обратимости операций (Ж. Пиаже); переход к сверхсимволам, то есть оперирование более длинными последовательностями символов (кибернетический аспект).

Укрупненная дидактическая единица (УДЕ) — это локальная система понятий, объединенных на основе их смысловых логических связей и образующих целостно усваиваемую единицу информации. Целостным образам, формирующимся в процессе обучения, предшествует стадия анализа, выделения в воспринимаемом объекте его элементов и их взаимоотношений.

Обучение строится по следующей схеме:

– стадия усвоения недифференцированного целого в его первом приближении;

– выделение в целом элементов и их взаимоотношений;

– формирование на базе усвоенных элементов и их взаимоотношений более совершенного и точного целостного образа.

Учащимся предлагается:

– изучать одновременно взаимно обратные действия и операции: сложение и вычитание, умножение и деление, возведение в степень и извлечение корня, заключение в скобки и раскрытие скобок, логарифмирование и потенцирование и т. п.;

– сравнивать противоположные понятия, рассматривая их одновременно: прямая и обратная теоремы; прямая и противоположная теоремы; прямая и обратная функции; периодические и непериодические функции; возрастающие и убывающие функции; неопределенные и «определенные» уравнения; непротиворечивые и противоречивые уравнения, неравенства; прямые и обратные задачи вообще;

– сопоставлять родственные и аналогичные понятия: уравнения и неравенства, арифметические и геометрические прогрессии, одноименные законы, свойства действий первой и второй степени; определения и свойства синуса и косинуса, свойства прямой и обратной пропорциональности и т. д.;

– сопоставлять этапы работы над упражнением, способы решения, например: графическое и аналитическое решение системы уравнений; аналитический и синтетический способы доказательства теорем (решения задач); геометрическое и аналитическое (через координаты) определение вектора; доказательство «рассуждением» и с помощью граф-схемы и т. п.

Таким образом, главной особенностью содержания технологии П.М. Эрдниева является перестройка традиционной дидактической структуры материала внутри учебных предметов, а в ряде случаев и внутри блока родственных учебных предметов. В качестве основного элемента методической структуры взято понятие «математическое упражнение» в самом широком значении этого слова, как соединяющее деятельность ученика и учителя, как элементарную целостность двуединого процесса «учения — обучения» [79].

Ключевой элемент идеи УДЕ — это упражнение-триада, элементы которой рассматриваются на одном занятии:

а) исходная задача;

b) ее обращение;

c) обобщение.

В работе над математическим упражнением (задачей) отчетливо выделяются четыре последовательных и взаимосвязанных этапа: составление математического упражнения; выполнение упражнения; проверка ответа (контроль); переход к родственному, но более сложному упражнению. Традиционное же обучение ограничивается большей частью вторым из указанных этапов.

Одной из характерных особенностей системы укрупнения знаний выступает применение «метода обратных задач». Этот метод означает, что работу над задачей нецелесообразно завершать получением ответа к ней; надо приемом обращения составлять и решать в сравнении с исходной (прямой) задачей новую, обратную задачу, извлекая тем самым дополнительную информацию, заключающуюся в связях между величинами решенной исходной задачи. Для этого в условие исходной задачи вводится ее ответ, а некоторые числа из условия переводятся в разряд искомых. В задаче целесообразно различать три элемента: сюжетную сторону (например, задачи на движение); числовые данные; математические зависимости и действия, посредством которых решается задача. Существенным элементом, от которого зависит в основном тип (вид) задачи, сложность ее решения, является третий элемент. При подборе упражнений в учебниках по какой-либо теме варьируют обычно сюжеты и числа, сохраняя неизменными математические зависимости. Это приводит к тому, что в той или иной группе задач, рассматриваемых совокупно во «времени и пространстве», оказываются только однотипные; структурно противоположные задачи зачастую рассматриваются отдельно друг от друга, раздельно по времени, нередко в виде особой темы. Между тем, обращение задания позволяет сравнить прямую и обратную задачи в пределах единого укрупненного задания. Признанный учителями интерес детей к приему преобразования исходной задачи в задачу обратной структуры объясняется прежде всего тем, что такой путь устанавливает разнообразие связей, заключенных в содержании изучаемого материала.

В процессе преобразования прямой задачи в обратную учащийся выявляет и использует взаимно обратные связи между величинам задачи: если в прямой задаче, скажем, определялась стоимость по цене товара и его количеству, то в обратной задаче определяется цена или количество товара. Решая обратную задачу, учащиеся самостоятельно перестраивают суждения и умозаключения, использованные при решении прямой задачи. При этом они овладевают практически как новыми связями между известными им мыслями, так и новыми, более сложными формами рассуждений. Таким образом, ценны для развития мышления не прямые и обратные задачи, взятые как таковые сами по себе; наиболее важный познавательный элемент заключается здесь в процессе преобразования одной задачи в другую, то есть в тех «невидимых» и трудноуловимых при логическом анализе элементах мысли, которые связывают процессы решения обеих задач. Благодаря этой особенности метод обратных задач выполняет наиболее сложную и ценную функцию обучения, содействуя становлению зачатков диалектического мышления учащихся.

Важно отметить и другую структурную особенность подобных укрупненных упражнений: совокупность прямой и обратной задач, каждая из которых есть, скажем, задача в 2–3 действия, в дидактическом плане есть не только всего лишь две отдельные задачи в 2–3 действия; по существу, это двуединое, качественно новое упражнение в 4–6 действий; вторая часть такого сложного упражнения целиком выступает продуктом творчества учащихся, будучи логическим продолжением первой части. Прием составления новых задач, обратных данным, является почти универсальным: он применим для любых разделов математики, и всегда приводит ученика к постановке новых проблем, получению существенно иных разновидностей задач. Умение решать прямую и обратную задачи является важным критерием достигнутой учеником глубины понимания изучаемого раздела математики. Имеет поэтому смысл рассматривать в методике математики составление и решение обратных задач как достаточно простой и удобный критерий развития творческого мышления, как один из путей саморазвития ума учащихся.

Опыт обучения на основе укрупнения единиц усвоения показал, что основной формой упражнения должно стать многокомпонентное задание, образующееся из нескольких логически разнородных, но психологически объединенных в некоторую целостность частей, например:

a) решение обычной «готовой» задачи;

b) составление обратной задачи и ее решение;

c) составление аналогичной задачи по данной формуле (тождеству) или уравнению и решение ее;

d) составление задачи по некоторым элементам, общим с исходной задачей;

e) решение или составление задачи, обобщенной по тем или иным параметрам по отношению к исходной задаче [79].

Как это актуально в плане развития мышления! Разумеется, вначале в укрупненное упражнение могут войти лишь некоторые из указанных вариаций. Лейтмотивом урока, построенного по системе УДЕ, служит правило: не повторение, отложенное на следующие уроки, а преобразование выполненного задания, осуществляемое немедленно на этом уроке, через несколько секунд или минут после исходного, чтобы познать объект в его развитии, противопоставить исходную форму знания видоизмененной. Методы обучения реализуются путем выполнения упражнений и объективируются в знаниях. При этом не одно только количественное разнообразие методов и упражнений важно само по себе. Лишь набор определенных упражнений, сконструированных на основе принципа укрупнения, в четкой их последовательности обеспечивает прочность и сознательность усвоения знаний. Таким образом, УДЕ позволяет:

– применять обобщение в текущей учебной работе на каждом уроке;

– устанавливать больше логических связей в материале;

– выделять главное и существенное в большой дозе материала;

– понимать значение материала в общей системе ЗУН;

– выявить больше межпредметных связей;

– более эмоционально подать материал;

– сделать более эффективным закрепление материала [79].

Урок математики, построенный сознательно на необходимости укрупнения знаний, заботится об окружении основного понятия, о наращивании знаний вокруг логического ядра урока, о повторении материала через его развитие, преобразование. Идеями УДЕ подчеркивается необходимость изучения не всего понемногу, а многого об одном, о главном, постигая многообразие в едином, в целом! Автор технологии рекомендует сначала рассказать план всей темы, затем постоянно к нему возвращаться, точно указывая место, в котором мы находимся. Понимание конкретного теоретического вопроса возможно только в контексте, почти всегда обязателен взгляд назад. Уроки, где изучается трудный для понимания материал, целесообразно вести как диалог с множеством провоцирующих вопросов. Идеи технологии укрупнения дидактических единиц актуальны в аспекте обучения интеллектуально одаренных детей.

Информационные технологии и дистанционное обучение

Все информационные технологии связаны с компьютерным обучением. В Республике Беларусь активно осуществляется информатизация процесса обучения и воспитания; создается национальная информационная среда, в которую интегрируются все учреждения образования; создается единая система дистанционного образования. Наша страна принимает активное участие в международных программах, связанных с новыми информационными технологиями в образовании.

Информационные технологии способствуют формированию единого образовательного пространства в рамках всего мирового сообщества. Они оказывают социализирующее воздействие на личность, способствуют развитию саморегуляции, стимулируют целепорождающую деятельность интеллектуально одаренных детей.

В настоящее время практически у каждого интеллектуально одаренного ребенка есть компьютер, а, значит, и выход в Интернет. Интернет представлен специализированными сайтами, материалами электронных конференций, возможностью участвовать в дистанционных олимпиадах и др. Интернет дает возможность учащимся получить любую интересующую их информацию из самых разных источников на свой электронный адрес. Особенно привлекательны для интеллектуально одаренных учащихся виртуальные интеллектуальные клубы, позволяющие общаться и обсуждать разнообразный спектр вопросов и проблем с самым широким кругом участников, тем самым развивать свой умственный потенциал, удовлетворять познавательные запросы.

В последние годы все больший интерес учителей, работающих с интеллектуально одаренными детьми, вызывают дистанционные формы обучения. Эти формы работы привлекательны в системах образования многих стран. К примеру, в России с 1995 года разрабатывается система дистанционного образования (СДО), которая дополняет заочную и очную формы обучения. Россия является инициатором и разработчиком международной программы «Открытая образовательная система XXI века», один из проектов которой — «Дистанционное образование в новой информационной среде (DESCOP)».

В 2001 году на базе Белорусского государственного университета открылся первый в Беларуси республиканский центр Федерации Интернет-образования, который стал базой для обучения Интернет — технологиям учителей всей республики. На базе БГУ функционирует очно-заочная школа по математике для учащихся 5–11 классов общеобразовательных школ республики. С 2001 года все учащиеся очно-заочной школы пользуются системой дистанционного обучения.

Дистанционное обучение в работе с интеллектуально одаренными детьми может выступать как составная часть процесса обучения, позволяющая дифференцировать долю прямого обучения и самостоятельной работы. Белорусская система дистанционного обучения интеллектуально одаренных детей нуждается в хорошем дидактическом обеспечении. На современном этапе необходим комплекс взаимосвязанных, педагогически целесообразных информационных продуктов, направленных на развитие интеллектуальных способностей учащихся (возможно даже создание специальных учебно-методических комплексов).

Дистанционное обучение может индивидуализировать работу с интеллектуально одаренными детьми, привлечь их к работе в команде над каким-либо интересным проектом, может стать мощным средством развития. Сегодня нет сомнения, что совсем скоро в Беларуси дистанционное обучение интеллектуально одаренных детей займет достойное место в системе образования.

Итак, мы рассмотрели теоретические аспекты технологий, которые, на наш взгляд, наиболее оптимальны при обучении интеллектуально одаренных детей. Они лучше других вписываются в учебный процесс в условиях классно-урочной системы обучения, способствуют развитию мышления учащихся. К сожалению, в методической литературе недостаточно практических разработок для учителей по использованию технологии проблемного обучения и УДЕ. Вместе с тем, использование даже отдельных их идей может положительным образом сказаться на развитии умственных способностей учащихся.

Одно из важнейших направлений работы с интеллектуально одаренными детьми — научно-исследовательская деятельность. Практика подтверждает, что одаренный школьник может и должен заниматься научно-исследовательской работой. Он способен формулировать исследовательские вопросы, понимать, строить и развивать, анализировать логически непротиворечивые научно-исследовательские модели. Интеллектуально одаренный школьник может отслеживать закономерности, делать обобщения и выводы, прогнозировать и находить приложения. Творческие работы учащихся должны быть выполнены с помощью корректной с научной точки зрения методики, иметь собственный экспериментальный материал.

Можно начать обучение с небольших фрагментов:

– дискуссия по выбранной теме исследования;
– подбор литературы;
– осмысление собранного научного материала;
– разработка целей, задач и плана исследования;
– разработка и защита гипотез;
– разработка плана исследования;
– коллективная исследовательская деятельность;
– оформление результатов исследования;
– презентация работы (устный доклад);
– выставка научно-исследовательских работ.

Тема научного исследования учащегося входит в круг его интересов и вытекает, как правило, из анализа материала, имеющегося в литературе, возможностей и готовности учащегося решить исследовательскую задачу. Актуальность выбора темы исследования обосновывается с позиции того, насколько она отвечает интересам школьной практики. Объект исследования — это поле научных поисков учащегося, а предмет исследования — это конкретная проблема в самой теме. В формулировке темы исследования важно отразить предмет исследования. Неправильное формулирование темы исследования ведет к произвольному толкованию проблемы и иногда стихийному сбору научных фактов. В соответствии с темой выдвигаются цель и задачи исследования. Целью исследования школьников является получение новых знаний, проверка их на непротиворечивость существующим представлениям и оформление их в виде той или иной системы. Гипотеза — это допущение или предположение, истина которого еще не доказана, но вероятна. Гипотеза выступает исходным элементом поиска истины, который помогает существенно экономить время и силы, целенаправленно собрать необходимые факты. Основное требование к гипотезе ученического исследования — ее логичность, опора на имеющиеся сведения, факты, наблюдения, лаконичность. Гипотеза определяет стратегию исследовательского поиска, это своеобразный прообраз будущей работы. С учетом цели, задач и гипотезы осуществляется планирование научного исследования учащегося. Учитель рекомендует порядок изложения материала, знакомит с правилами оформления работы (титульный лист, оглавление, введение, основная часть работы, заключение, список использованной литературы). Он подсказывает учащимся как лучше представить свою исследовательскую работу на конференции или конкурсе [46].

Удобнее всего осуществлять презентацию по следующему плану:

– актуальность темы исследования;

– цель и задачи исследования;

– методы исследования;

– суть исследования;

– результаты и выводы.

Выступая с докладом, учащиеся не должны зачитывать работу, перегружать ее перечислениями и цифрами. Вся цифровая информация может быть представлена с помощью мультимедиа-средств. Учащиеся должны быть информированы и о критериях оценивания научно-исследовательских работ. При оценивании учитывается: грамотность формулировки темы, актуальность темы исследования, степень новизны, степень самостоятельности выполнения работы, глубина изложения теории вопроса, качество выполнения практической части, выводов, соблюдение требований к оформлению работы.

Занятия научно-исследовательской работой развивают общий интеллектуальный потенциал одарённого ребёнка. При этом повышается качество мотивационной составляющей его деятельности, формируются и совершенствуются умения и навыки исследовательской, творческой работы, а также общие волевые характеристики личности. Эти занятия развивают самостоятельность и потребность в целевой интеллектуальной деятельности. Здесь сливаются воедино цели образования и воспитания. Занятия наукой помогают выявить доминирующую компоненту одаренности посредством того, что школьник пробует себя и в естественно-математических, и в гуманитарных науках, работая как индивидуально, так и в коллективе. Раннее выявление доминанты одарённости позволяет своевременно создать адекватные условия для её развития и совершенствования, что, в свою очередь, способствует достаточно ранней и обоснованной самоидентификации личности. Учащийся может раньше сделать свой главный выбор и принести наибольшую пользу себе и обществу. При этом реализуется принцип: не потерять одарённости, не рассеять будущий интеллектуальный капитал общества, а по возможности, сохранить его и приумножить.

Научно-исследовательская работа учащихся в школе устанавливает преемственность и «непрерывность» науки в цепочке: школа – вуз – общество. Тем самым создаются оптимальные условия эффективного функционирования научного потенциала общества. Наука в современной школе закладывает добротную основу и фундамент ноосферы общества XXI века. И широкая, разнообразная научная тематика отвечает этим целям, отвечает свободно развивающемуся интеллекту одарённого ребёнка, мышление которого не закрепощено никакими догмами, условностями и стереотипами с неизбежностью, присущими взрослому. И в будущем, взращённый таким образом интеллектуал, будет в состоянии сделать то, что сегодня считается невозможным, парадоксальным или противоречащим здравому смыслу. Наконец, наука в школе непосредственным и опосредованным образом влияет на весь учебно-воспитательный процесс, поднимает все его параметры на более высокий уровень. Результатами такой работы являются заметки, статьи, доклады и сообщения на всякого рода конференциях, представлениях и конкурсах, от школьного до международного уровней. При этом оценками работ служат оценки специалистов, различного рода «рейтинговые» баллы, дипломы, места, сертификаты и т. п.

Все творческие работы учащихся можно разделить на реферативные, познавательные, поисково-проблемные, научно-исследовательские и прочие. Творческой является работа, выполненная учеником самостоятельно, в которой была достигнута поставленная цель, в которой были использованы различные литературные источники, изложены оригинальные авторские идеи. Это законченное и цельное произведение, оформленное надлежащим образом. Реферативная работа соединяет в себе уже известные знания, выстроенные в систему под заданным учебным процессом углом зрения. Реферат может содержать следующие разделы:

1. Введение (обоснование темы, ее актуальность с позиции науки и социальных запросов общества).

2. Глава 1. История и теория проблемы. Данная глава должна содержать ответы на следующие вопросы:

- кто из ученых прошлого занимался данной проблемой, какие идеи высказал?
- в чем сущность проблемы?
- каковы побудительные факторы, обусловливающие развитие изучаемого явления или процесса?
- какие пути решения проблемы раскрывались учеными?
- какие аспекты проблемы слабо разработаны и почему?

3. Глава 2. Решение проблемы в современных условиях. В этой главе приводится:
   - анализ процесса или явления в настоящее время;
   - фактология состояния проблемы в настоящее время;
   - трактовка других взглядов или позиций по проблеме;
   - научный анализ практики, имеющей отношение к проблеме.
4. Заключение (основные выводы, идеи мысли учащегося, его предложения).
5. Литература (список использованной литературы, оформленный надлежащим образом).

Познавательная работа носит образовательный характер, выходя, однако, за рамки требований стандартного учебного процесса. Устанавливает систему известных знаний, исходя из целей самого исследователя. Работа поисково-проблемного характера преследует целью выявление какого-либо рода знаний в виде связанной системы фактов, установление противоречия между имеющимися знаниями и связанными с ними фактами, которые не могут быть объяснены на основе этих знаний. Результатом такой работы является постановка вопросов, на которые, по имеющейся у исследователя информации, ещё нет ответов.

Исследование — это процесс и результат выявления известных или предполагаемых фактов (знаний) под тем или иным углом зрения (гипотеза) для получения новых знаний и умений. Исследование считается научным, если получены новые знания на уровне дополнений, объяснений, фактов, тенденций, законов и закономерностей, которые доказаны теоретически и подтверждены экспериментально. Эти знания должны иметь самостоятельное значение и востребованность при получении новых знаний и умений в различных областях человеческой деятельности. Научно-исследовательская работа понимается как разновидность творческой работы, которая имеет форму исследования со всеми присущими ему атрибутами научности. Можно рекомендовать следующий план (порядок) оформления научно-исследовательской работы:

1. Введение.
2. Тема, актуальность, цель, гипотеза, задачи и этапы исследования.
3. Основная часть:
   - определения, функции и связи предмета исследования;
   - состояние предмета исследования на данный момент;
   - методика теоретической и экспериментальной части (модель исследования);
   - развитие структуры модели исследования в соответствии с поставленными целями и задачами;
   - анализ полученных результатов и выявленных закономерностей.
4. Выводы (обобщение результатов, выдвижение перспективных вопросов и прогнозирование, практические рекомендации).

5. Приложения (графики, диаграммы, алгоритмы и т. п.).

6. Литература.

Факультативные курсы

На факультативных занятиях школьники имеют возможность углубить и расширить знания, получаемые на уроках, приобрести умения решать более трудные и разнообразные задачи. Факультативные курсы должны учитывать различия в возможностях и потребностях учащихся, отличаться по содержательному наполнению.

В среднем звене целесообразно изучение в доступной, занимательной форме различных тем (не обязательно взаимосвязанных между собой), имеющих внутрипредметную и прикладную значимость. При этом факультативное занятие должно быть обеспечено качественными содержательными задачами. В старших классах работа на факультативах преследует две основные цели: подготовка к продолжению образования и к централизованному тестированию. Наряду с углублением основного курса математики целесообразно и определенное его расширение в основном по линии актуальных приложений.

Работа на факультативных занятиях по всем основным направлениям (углубление основного курса, развитие интереса к математике, расширение кругозора и формирование мировоззрения, раскрытие прикладных аспектов математики, профориентация) должна быть обеспечена не одной, а несколькими программами. Педагогам, работающим с интеллектуально одаренными детьми, следует предусмотреть усложнение содержания учебной деятельности за счет углубления и большей абстрактности предлагаемого материала. Это продиктовано тем, что интеллектуально одаренные дети имеют более высокий уровень развития продуктивного мышления. Поэтому учебный материал должен обладать относительно высокой степенью абстрактности и глубиной.

При отборе задач необходимо отдавать предпочтение тем заданиям, которые способствуют развитию дивергентного мышления, предполагающего, что на один вопрос может быть несколько, а то и множество правильных ответов. Этот тип мышления является важнейшим элементом творческой деятельности. Подавляющее большинство решаемых в школе задач направлено на развитие конвергентного мышления (задачи, имеющие единственно правильный ответ). Это, скорей всего, оправданно при обучении детей, обладающих «средними» способностями.

Разработка содержания факультативов, ориентированных на обучение интеллектуально одаренных детей, должна строиться иначе — задачи дивергентного типа должны доминировать. Содержание учебного материала должно быть ориентировано на совершенствование способностей самостоятельного приобретения знаний, а не на объем. Учебная деятельность на факультативах должна строиться так, чтобы ребенок имел возможности самовыражения, проявления своих возможностей; важное значение имеет стимулирование деятельности интеллектуально одаренных детей, развитие мотивации углубления знаний.

Кружковая работа

Математический кружок — одна из наиболее действенных и эффективных форм работы с интеллектуально одаренными детьми. В основе кружковой работы лежит принцип добровольности. Как правило, занятия математического кружка посещают те школьники, которые испытывают неподдельный интерес к математике. Занятия кружка проводятся один раз в неделю. Тематика кружковых занятий в современных общеобразовательных учреждениях самая разнообразная. Здесь находят место вопросы, связанные с историей математики, жизнью и деятельностью известных математиков, методами решения олимпиадных задач и др. В настоящее время математические кружки для школьников ведут не только учителя, но преподаватели вузов. Существует также немалое количество математических кружков, занятия в которых проводятся дистанционно. В рамках математических кружков проводятся соревнования, турниры, бои и олимпиады.

Большой популярностью у школьников пользуются математические кружки, функционирующие при вузах. На занятиях таких кружков профессора и доценты для учащихся читают обзорные лекции, проводят практические занятия по решению нестандартных задач.

Основные цели и задачи математического кружка — развитие математического мышления, пространственного воображения, исследовательских навыков; создание среды, способствующей раскрытию способностей, побуждение школьников к самостоятельным занятиям.

Управляемая самостоятельная работа

Роль самостоятельной работы интеллектуально одаренных детей в их познавательной деятельности чрезвычайно велика. Одной из основных задач школы является воспитание сознательного отношения учащихся к овладению теоретическими и практическими знаниями, привитие им привычки к напряженному интеллектуальному труду. Важно, чтобы интеллектуально одаренные дети не просто приобретали знания, но и овладевали способами их добывания, то есть необходимо научить этих детей учиться, что часто бывает важнее, чем вооружить конкретными определенными знаниями.

Учитель создает такие условия, при которых интеллектуально одаренный учащийся знает какие знания и зачем ему нужны, как их можно приобрести. Педагогическая ценность управляемой самостоятельной работы заключается в обеспечении активной познавательной деятельности. Задачи управляемой самостоятельной работы:

– совершенствование умений и навыков, в том числе исследовательских;

– пополнение и расширение знаний.

Роль учителя при организации управляемой самостоятельной работы интеллектуально одаренных детей сводится к тому, чтобы подобрать индивидуальные задания; обеспечить необходимой литературой; подсказать более рациональный путь выполнения задания; провести консультацию. Важно продумать и разнообразные виды заданий, способствующих формированию умений и навыков самостоятельной работы. К примеру, при самостоятельной работе с литературой учащемуся можно дать задание: выделить главные мысли; что-то обосновать, сообщить, описать, охарактеризовать, определить, обсудить, объяснить, сравнить; сделать выводы. Такие задания обучают работе с литературой, повышают внимание учащихся, развивают мышление.

Для обеспечения творческих условий самостоятельной познавательной деятельности необходимо:

– приучать интеллектуально одаренных детей к работе с первоисточниками, научными статьями;

– научить приемам просмотрового чтения для быстрого нахождения нужной информации;

– проводить дискуссии, круглые столы, создавая в доброжелательной обстановке возможность свободы обмена мнениями, что развивает воображение, гибкость и дивергентность мышления.

Результаты управляемой самостоятельной работы должны быть востребованы и оценены.

1.6 Особенности работы с интеллектуально одаренными детьми в современных общеобразовательных учреждениях

Поддержка интеллектуальной одаренности является важнейшим приоритетом государственной политики Республики Беларусь. С 1996 года функционирует Специальный фонд Президента, который выделяет стипендии для лучших студентов государственных вузов; премии и стипендии победителям международных олимпиад и конкурсов учащихся и студентов; премии победителям республиканских олимпиад и конкурсов учащихся и студентов; премии преподавателям и ученым, которые добились высоких показателей в работе с одаренными учащимися и студентами. Фонд оказывает финансовую поддержку творческим объединениям учащихся и студентов, достигшим в своей работе высоких показателей, которые получили общественное признание. В республике создан банк одаренной молодежи, в котором на сегодняшний день более 18 000 фамилий.

Государственные программы «Одаренные дети» и «Молодые таланты Беларуси» предусматривают:

- разработку методики по выявлению одаренных детей;
- создание центров развития ребенка;
- осуществление дифференцированного обучения;
- открытие лицеев и гимназий;
- совершенствование практики проведения олимпиад, конкурсов, конференций;
- разработку и издание специальной учебно-методической литературы, используемой в работе с одаренными детьми;
- сотрудничество учреждений образования;

– моральную и материальную поддержку одаренных детей и преподавателей, работающих с ними.

В стране проводятся конкурсы, интеллектуальные турниры и бои, предметные олимпиады. Республиканская олимпиада является одним из самых престижных и массовых интеллектуальных состязаний учащихся. Олимпиада проводится в течение учебного года в четыре этапа. Первый этап — это школьная олимпиада, которая проводится в ноябре по текстам, составленным учителями. Принимают в ней участие все желающие из 5–11 классов. Второй этап — районные (городские) олимпиады. Проводятся в декабре. Победители рекомендуются к участию в третьем этапе — областной олимпиаде, которая проводится в январе по текстам Министерства образования. Из победителей формируется команда области для участия в заключительном четвертом этапе — республиканской олимпиаде, которая проводится в марте. Интеллектуально одаренные дети Беларуси принимают участие в международных олимпиадах, где неоднократно становились победителями. Победы белорусских школьников на международных олимпиадах способствуют укреплению авторитета нашей страны на мировой арене.

Ежегодно в республике проводятся конкурсы исследовательских работ по математическим, естественнонаучным, общественно-гуманитарным учебным курсам и предметам. В Беларуси работают республиканская летняя научно-исследовательская школа учащихся и учителей, республиканская заочная школа, летние оздоровительные профильные лагеря для одаренных детей, школы юных математиков, физиков, филологов и др.

Интеллектуально одаренные дети из различных школ страны охотно участвуют в международной математической игре «Кенгуру», которая проводится для учащихся 2–11 классов. О популярности этой игры свидетельствует рост числа участников. Если в 1994 году их было всего 100 человек, то в последние годы эта цифра приближается к 100 000, несмотря на то, что конкурс проводится за счет взносов участников.

В течение 2003–2007 годов нами изучались вопросы, связанные с особенностями обучения и воспитания интеллектуально одарённых детей в общеобразовательных учреждениях Брестской области. Объектами наблюдения выступали: диагностика одарённости, педагогические кадры, условия жизнедеятельности одарённых детей, процесс их обучения, внеклассная и внеурочная работа по математике, результаты участия в олимпиадах, конкурсах, итоги выпускных экзаменов и вступительных испытаний.

Нами выявлен ряд противоречий, существующих при организации работы с интеллектуально одарёнными детьми. Это противоречия:

– между возросшей потребностью общества в развитии природных задатков, способностей детей и отсутствием у педагогов умения создать для этого оптимальные условия;

– между заинтересованным отношением учащихся, их родителей к проблеме личностного развития, саморазвития, самореализации личности и невозможностью создать для этого благоприятную среду в учреждении образования (особенно ярко данное противоречие проявляется в сельских школах);

– между необходимостью целенаправленной системной работы в направлении развития одарённой личности и фрагментарностью её осуществления в общеобразовательных учреждениях.

Анкетирование, проведённое среди учителей математики, позволяет констатировать высокий интерес педагогов к организации эффективной работы с интеллектуально одарёнными детьми, методике её проведения. Об этом свидетельствуют 98% утвердительных ответов на вопрос анкеты. В то же время в ходе исследования выявлено, что педагогам не хватает специальных теоретических знаний по предмету и методике, по психологии (86% опрошенных); испытывают затруднения при моделировании образовательного поля для одарённых детей — 75% респондентов; в отборе содержания обучения — 62%; в установлении конструктивного взаимодействия с «научным миром» — 68%. Убеждены в необходимости специальной подготовки к работе с интеллектуально одарёнными детьми 100% опрошенных учителей математики.

Нами выявлено, что интеллектуально одарённые дети в учреждениях образования зачастую остаются без должного внимания педагогов (это следует из ответов школьников на вопросы анкеты), не имеют необходимой педагогической поддержки и сопровождения. Уровень организации работы с интеллектуально одарёнными детьми в сельских школах остаётся низким. Недостаточный психологический уровень подготовки педагогов для работы с детьми, проявляющими нестандартность в поведении и мышлении, приводит к неадекватной оценке их личностных качеств и всей их деятельности. Многие талантливые педагоги отказываются проводить занятия с интеллектуально одаренными детьми из разных школ (межшкольные факультативы), мотивируя это нежеланием работать за других и готовить конкурентов своим детям.

Важнейшими целями и задачами, поставленными Министерством образования Республики Беларусь перед педагогами, являются следующие:

– повышение качества знаний, сохранение и укрепление здоровья учащихся, удовлетворение их образовательных запросов с учётом способностей и возможностей;

– создание оптимальных условий для развития личности каждого учащегося;

– обновление содержания образования;

– внедрение современных образовательных технологий в учебно-воспитательный процесс;

– повышение профессионализма педагогов.

Последипломное образование является важнейшей частью единой системы непрерывного образования педагогов, включающей профессионализацию, повышение роли самостоятельной работы. Современный педагог должен уметь адаптироваться к складывающимся экономическим, социокультурным условиям, быть гибким в своей профессиональной деятельности. Он должен быть знаком с новейшими технологиями, уметь пользоваться компьютером, базами и банками данных, обобщающими весь мировой опыт, развивать в себе черты творческой личности, формировать навыки исследователя.

Огромную роль в повышении качества работы с интеллектуально одаренными детьми в нашей стране играет методическая работа. Основные задачи методической работы:

– формирование концептуальных воззрений педагогов с учётом достижений современных наук;

– приращение теоретических знаний, практических умений и навыков по основным аспектам работы с одаренными детьми;

– выработка потребности в рефлексии, само- и взаимокоррекции деятельности, преодолении стереотипов в подходах к организации учебного процесса;

– формирование умений решать учебные и педагогические задачи;

– стимулирование творчества педагогов.

С целью решения поставленных задач проводятся курсы повышения квалификации, работают творческие группы, методические объединения учителей-предметников, педагоги ведут активный самостоятельный поиск по совершенствованию форм и методов работы с интеллектуально одаренными детьми.

По многим параметрам эффективность работы с одаренными детьми зависит от позиции отделов образования. В Брестской области наиболее эффективна деятельность Ленинского, Московского и Барановичского отделов, в которых, во-первых, прослеживается системность в организации всех видов работы с одаренными детьми и, во-вторых, видны реальные результаты (победы учащихся на различных конкурсах, олимпиадах). Как правило, за всем этим стоит личность определенного человека, обладающего хорошими организаторскими способностями и качественно выполняющего свою работу. Так, в Ленинском отделе образования г. Бреста на протяжении многих лет работа с интеллектуально одаренными детьми в школах осуществляется под руководством Галины Васильевны Скоковец. Галина Васильевна создала свою оригинальную систему работы в учреждениях образования района и особую среду для развития интеллектуального потенциала школьников, повышения мастерства работы учителей. Причем, характерной особенностью этой системы является не наличие каких-либо разрозненных разовых мероприятий, а продуманный оптимальный их набор. Район известен своими традициями и инновациями, педагогическая работа здесь насыщена и эффективна. Отделом образования систематически проводятся консультации по проблемам работы с интеллектуально одаренными детьми, работают творческие группы учителей-предметников. Педагоги района имеют возможность на семинарах обсудить вопросы, связанные с обучением и воспитанием одарённых детей, выработать стратегические подходы и приступить к их реализации.

Отдел образования администрации Ленинского райисполкома тесно сотрудничает с высшими учебными заведениями г. Бреста. Представители высшей школы ведут спецкурсы и факультативы в общеобразовательных учреждениях, руководят научно-исследовательской деятельностью школьников, участвуют в решении вопросов повышения профессионализма учителей. На семинарах, посвящённых организации работы с одарёнными детьми, педагоги района имели возможность глубже познакомиться с темами, необходимыми для подготовки учащихся к олимпиадам высокого уровня. Занятия для учителей математики по данной тематике были проведены преподавателями Брестского государственного университета им. А.С. Пушкина. В районе налажено тесное сотрудничество с ГУО «Лицей БГУ» (г. Минск). Татьяна Петровна Бахтина — преподаватель этого лицея, автор известных книг: «Раз задачка, два задачка», «Математикон 7», «Математикон 8» и др. неоднократно встречалась с учителями математики района, делилась с ними своими методическими находками. Членами районной творческой группы учителей математики разработан ряд интересных проектов по организации работы с одарёнными детьми. Школьники района активно участвуют в конкурсе «Кенгуру», математических турнирах и боях, научно-исследовательских конференциях, олимпиадах (республиканской и заочных).

В Ленинском районе создана и эффективно функционирует разветвлённая методическая сеть, включающая районное методобъединение учителей математики, школу передового опыта, школу молодого учителя, работают творческие группы и лаборатории учителей математики, постоянно действующие семинары. Отделом образования проделана значительная работа по созданию общественно-педагогической среды, стимулирующей и обеспечивающей потребности учителей математики в профессиональном совершенствовании, инновационной и исследовательской деятельности, содействующей совершенствованию профессионализма педагогов (по вопросам оптимизации учебно-воспитательного процесса, внедрению совре-менных образовательных технологий в учебный процесс).

В районе систематически проводятся занятия межшкольного факультатива по разбору решений заданий непрерывной олимпиады, работает районная школа юного математика. Для учащихся 5–7 классов ежегодно проводятся математические олимпиады, конкурсы смекалистых, конкурсы на лучший реферат по математике по темам: «Вклад белорусских учёных в развитие математики», «Исторический материал при изучении математики» и др. Отдел образования изучает эффективность педагогической практики в районе, распространяет опыт работы лучших учителей, постоянно организует взаимопосещения уроков, стимулирует творчество педагогов, помогает в адаптации молодым специалистам.

В гимназии № 1 г. Бреста многое делается для развития математических способностей учащихся. Особой оценки заслуживает научно-исследовательская работа учащихся, работа научного общества. Исследовательские работы учащихся характеризуются актуальностью, новизной и практической направленностью. Учреждением образования накоплен ценный опыт по созданию и использованию мультимедийных презентаций на уроках математики и во внеурочной работе, создана богатейшая медиатека. Все выпускники гимназии успешно сдали вступительные испытания по математике в высшие учебные заведения не только Беларуси, но ближнего и дальнего зарубежья. Этому способствовали не только эффективная работа на уроках, но и на факультативах, индивидуальные занятия и дифференцированный подход к учащимся. Учителя математики гимназии (Л.И. Долженкова, В.И. Речкина, О.П. Бурда и др.) творчески подходят к организации учебного процесса.

Научное общество учащихся в СШ № 9 г. Бреста создано с целью развития природных задатков учащихся, ассоциативного мышления и продуктивного воображения, формирования исследовательской культуры. Ежегодно проводится в школе конференция ученических исследовательских работ «Математика вокруг нас». Здесь же ведётся целенаправленная работа по раннему выявлению одарённых детей, индивидуализации их обучения и воспитания.

Учителя математики СШ № 9 активно повышают свой профессиональный уровень на курсах, через работу в методических объединениях, самообразование. Каждым математиком выбрана актуальная методическая тема, постоянно пополняются папки по самообразованию (портфолио учителя). Среди изучаемых самостоятельно тем, такие как индивидуально-дифференцированный подход в обучении математике; новые педагогические технологии на уроках математики; методы решения «сложных» задач; организация управляемой самостоятельной работы учащихся; системный подход в организации работы с одаренными детьми; технологии обучения математике как средство повышения качества знаний учащихся; развитие мотивации учащихся; разноуровневые задания как форма контроля знаний; эффективные методы осуществления контроля за результатами деятельности учащихся на различных этапах урока; диагностика и исследование в системе работы учителя математики. Несколько лет подряд на базе СШ № 9 работает летний лагерь для одарённых детей.

Интересный опыт работы с интеллектуально одаренными детьми накоплен и в гимназии города Дрогичина. Кафедра учителей математики, физики и информатики работает над проблемой: практическое совершенствование педагогической деятельности, направленной на создание благоприятных условий для раскрытия и проявления творческого потенциала учащихся и развитие их логического мышления.

В плане работы кафедры: выявление одаренных учащихся; планирование индивидуальной работы с интеллектуально одаренными детьми; разработка тем научно-исследовательской работы учащихся; организация работы групп интенсива по подготовке учащихся к олимпиадам; организация индивидуальной работы интеллектуально одаренных учащихся с дополнительной литературой; организация и проведение внутригимназических олимпиад; индивидуальные консультации для интеллектуально одаренных учащихся; подготовка учащихся к конкурсу «Кенгуру»; подготовка и участие в заочных олимпиадах при вузах и др. Многие учащиеся гимназии г. Дрогичина занимаются в очно-заочной математической школе при БГУ.

Педагоги гимназии являются участниками исследования по теме: «Создание оптимальных условий для интеллектуального развития каждого ребенка», поддерживают тесную связь с другими общеобразовательными учреждениями (гимназией № 1 г. Пинска, гимназией г. Ганцевичи, СШ № 3 г. Малорита, лицеем № 1 г. Бреста), с высшими учебными заведениями республики (БрГУ им. А.С. Пушкина, АПО, МЭУ). В учреждении образования работает научное гимназическое общество, интеллектуальный клуб «Сова», ежегодно поводятся интеллектуальные игры «Умники и умницы», «Брейн-ринг», «Что? Где? Когда?», «Счастливый случай», «Звездный час», «Конкурс эрудитов», «Интеллект-шоу». Уроки математики, физики, информатики проводятся с использованием таких технологий, как проектное обучение, КСО, педагогических мастерских, модульного обучения, проблемного обучения, Дальтон-технологии. Педагоги активно обмениваются опытом (систематически проводятся заседания кафедры, взаимопосещения и обсуждения уроков).

Заслуживает внимания опыт работы учителя математики высшей категории лицея г. Барановичи Тамары Ивановны Хаяровой. Ее система преподавания приближена к вузовской. Учитель считает, что в школе учащемуся должно быть интересно, а для этого надо иметь возможности «программной свободы», которая достигается за счет подачи учебного материала крупными блоками и быстрым темпом. Педагог уверен, что растянутое во времени обучение не способствует развитию интеллектуальных способностей учащихся.

Т.И. Хаярова работает как бы в режиме опережения, но зато потом, возвращаясь к пройденным темам, учитель и ее ученики погружаются в них очень глубоко, наслаждаясь новой теорией и купаясь в обилии задач. Под ее руководством в лицее работает интеллектуальный клуб «Апогей», ее учащиеся постоянно принимают участие в Московском интеллектуальном марафоне, причем неоднократно становились призерами. Учитель и ее ученики участвовали в математических конкурсах, которые проходили в Турции и Югославии. Ученики Хаяровой — постоянные участники «Турнира городов». Местное телевидение и пресса широко освещают победы юных интеллектуалов, пропагандируют престиж интеллектуальной деятельности. С гордостью учитель рассказывает о своих подопечных, которые стали призерами международной олимпиады по математике в Вашингтоне и Глазго.

Тамара Ивановна кропотливо взращивает участников олимпиад. Ее работа в этом направлении состоит из трех этапов:

1) воспитание интереса к предмету;

2) выявление одаренных детей;

3) индивидуализированное обучение наиболее способных.

В основе работы с одаренными детьми лежит парный принцип: демократизм и элитарность. С одной стороны, учитель стремится дать возможность получить полноценное математическое образование всем детям, на всех этапах обучения, оставляя двери открытыми для талантливых детей. А с другой стороны, обеспечивает высокий уровень подготовки одаренных детей, тем самым создает научную элиту.

Т.И. Хаярова ведет в лицее постоянно действующий семинар «Олимпиадные задачи». Задачи различных математических олимпиад учитель находит в специальных изданиях, газетах, на сайтах. Общелицейская олимпиада по математике проводится в сентябре, ее победители имеют право свободного посещения уроков. Они в основном работают в кабинете математики по индивидуальным программам, а непрофильные предметы сдают экстерном (в виде зачетов, рефератов или докладов). Все это создает резерв времени и возможность углубления в предмет, обогащения содержания обучения математике и способствует творческому росту одаренных детей.

Следующий парный принцип работы Тамары Ивановны Хаяровой с одаренными детьми — комфортность и многоступенчатость. Система олимпиад, являющаяся важнейшим элементом работы с интеллектуально одаренными детьми, да и сам процесс обучения нередко образуют жесткую конкурентную среду. И эта среда может самым губительным образом воздействовать на хрупкую психику ребенка (душа одаренного ребенка очень ранима). Поэтому педагог считает своим долгом определить для каждого ребенка ту ступень, на которой он сможет комфортно работать. Слишком высокий уровень может оказаться просто непосильным для ученика, и он потеряет веру в себя, в свои силы. Одновременно нельзя одаренному школьнику задерживаться и на низком уровне. Особенно четко эту многоступенчатость педагог прослеживает в системе олимпиад, где разрыв между школьной и международной олимпиадой огромен.

Т.И. Хаярова призывает своих учеников осторожно относиться к успехам на олимпиадах, цитируя при этом слова А.Н. Колмогорова: «Участие в школьных математических кружках и олимпиадах может помочь каждому оценить свои собственные способности, серьезность и прочность своего увлечения математикой. Пути к серьезной работе в области математики разнообразны. Одним легче дается решение замысловатых задач, другие вначале не выделяются на этом поприще, но, двигаясь медленно, овладевают глубоко и серьезно теорией и несколько позднее научатся работать самостоятельно. В конечном итоге при выборе математики как предмета основного интереса и работы на будущее, каждый должен руководствоваться собственной самооценкой, а не числом наград ...» [76, с. 22].

Лицей г. Барановичи поддерживает тесную связь со школой-интернатом имени А.Н. Колмогорова, СУНЦем при МГУ, практикуются творческие обмены учителями и учащимися. Очень радует, что барановичские лицеисты неоднократно выигрывали в математических регатах и боях у московских школьников, у команды Аничкова лицея из Санкт-Петербурга. Имея богатый опыт общения с педагогами и одаренными детьми из разных стран, Тамара Ивановна Хаярова сравнивает различные системы работы. По ее мнению, работа с интеллектуально одаренными детьми в нашей стране сильно отличается от аналогичной работы в других странах. Например, в СУНЦе при МГУ, школах США (Хаярова неоднократно посещала эту страну) наполняемость классов в два раза меньше, чем у нас, и там работают одновременно два учителя, один из которых проводит основную линию урока, и оба вместе непосредственно за рабочими местами своих учеников, разъясняют непонятные места, консультируют. Математических предметов в СУНЦе три — алгебра, геометрия и математический анализ, на изучение которых отводится от 9 до 14 часов в неделю. В аттестат выносятся оценки за каждый из этих предметов. Общее проявляется, прежде всего, в стремлении сделать учение более интересным, вся школьная жизнь и там и здесь пронизана решением задач, обсуждением решений: обычные занятия, контрольные работы, зачеты, экзамены, тестирования, олимпиады, конкурсы, математические бои и собственные исследования школьников.

Вопросы для обсуждения

1. Государственные программы и проекты по развитию интеллектуальной одаренности.
2. Философский аспект интеллектуальной одаренности. Определение понятий «одаренность», «одаренные дети», «интеллект», «интеллектуально одаренные дети».
3. Исторический обзор становления знания об интеллектуальной одаренности.
4. Биологический, психологический, педагогический и социальный аспекты интеллектуальной одаренности.
5. Особенности развития интеллектуально одаренных детей.
6. Особенности воспитания интеллектуально одаренных детей.
7. Методы диагностики интеллектуальной одаренности.
8. Концептуальные модели интеллектуальной одаренности.
9. Основные стратегии обучения и воспитания интеллектуально одаренных детей.
10. Учитель для интеллектуально одаренных детей.

ГЛАВА 2
Основные направления работы с интеллектуально одаренными детьми

2.1 Модель организации работы с интеллектуально одаренными детьми

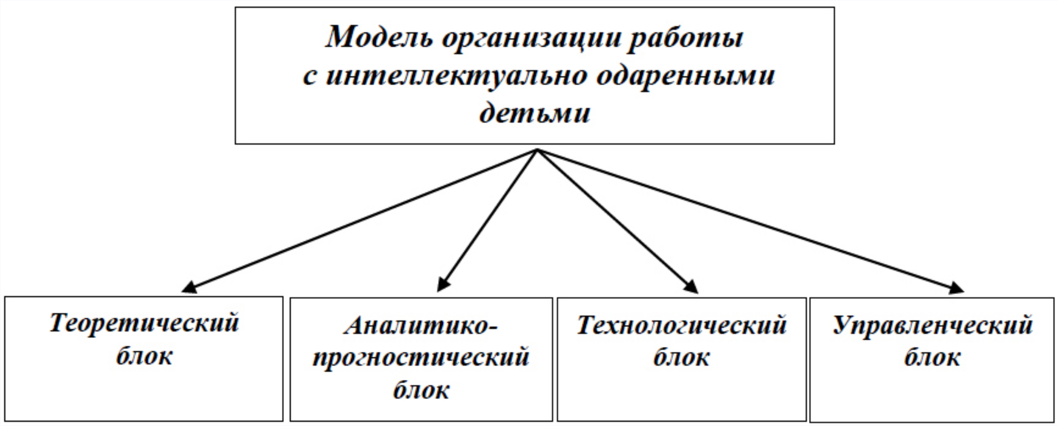


Рис. 2.1. Структура модели организации работы с интеллектуально одаренными детьми

Модель организации работы с интеллектуально одаренными детьми состоит из четырех блоков.

Теоретический блок модели включает необходимые теоретические сведения (сущность феномена интеллектуальной одаренности, психолого-педагогические характеристики интеллектуально одаренных детей, основные стратегии диагностики, обучения и воспитания); принципы организации работы с интеллектуально одаренными детьми; цель и задачи.

Аналитико-прогностический блок ориентирует на диагностику и анализ работы с интеллектуально одаренными детьми, планирование и прогноз, коррекцию деятельности.

Технологический блок предписывает учёт природных задатков, интересов личности интеллектуально одаренного учащегося, педагогических возможностей учреждения образования и региона; создание разветвлённой системы связей и взаимодействий в направлении развития умственного потенциала интеллектуально одаренных учащихся; выбор оптимальных видов деятельности и содержания деятельности, адекватного потребностям интеллектуально одаренных детей.

Управленческий блок задает алгоритм управленческих действий по организации работы с интеллектуально одаренными детьми и требует интеграции всех блоков в целостную систему.

В разработке модели организации работы с интеллектуально одаренными детьми можно выделить следующие *приоритетные направления*: специальную подготовку педагогов к работе с интеллектуально одаренными детьми; диагностику интеллектуальной одаренности; моделирование образовательного поля для интеллектуально одаренных детей (индивидуальной траектории их развития, индивидуальной развивающей среды, педагогической поддержки и сопровождения); использование эффективных образовательных технологий на уроках; внеклассную и внеурочную деятельность (факультативы, научно-исследовательскую работу, олимпиады, интеллектуальные конкурсы и соревнования, дистанционные формы обучения, управляемую самостоятельную работу); воспитание интеллектуально одаренных детей.

В качестве *цели специальным образом организованной работы с интеллектуально одаренными детьми* может быть взято повышение удовлетворенности интеллектуально одаренных детей, их родителей, педагогов, общества процессом и результатом обучения и воспитания, условиями для личностного развития.

Основными компонентами системы работы с интеллектуально одаренными детьми являются:

1) субъекты системы (интеллектуально одаренные дети; педагоги, взаимодействующие с интеллектуально одаренными детьми; родители);

2) диагностика интеллектуальной одаренности;

3) среда обучения и воспитания интеллектуально одаренных детей;

4) содержание обучения и воспитания интеллектуально одаренных детей;

5) технологии обучения и воспитания интеллектуально одаренных детей;

6) критерии и показатели эффективности обучения и воспитания интеллектуально одаренных детей.

Факторами, оптимизирующими процесс обучения и воспитания интеллектуально одаренных детей, выступают: ранняя диагностика; ускоренное и обогащенное обучение, применение эффективных педагогических технологий; возможность методов математики, физики, информатики и др. в развитии мышления, формировании индивидуального стиля учебно-познавательной деятельности; образовательная среда, адекватная интеллектуальным потребностям учащихся; педагогическая поддержка и сопровождение; реализация системного подхода в организации их обучения и воспитания.

Рассмотрим более подробно каждый из блоков, представленной модели организации работы с интеллектуально одаренными детьми.

Теоретический блок модели организации работы с интеллектуально одаренными детьми

При разработке модели организации работы с интеллектуально одаренными детьми нами соблюдались следующие принципы:

1. *Принцип научности* (опора на научные представления о сущности, закономерностях, механизмах развития интеллектуально одаренной личности).

2. *Принцип системности* (организация работы с интеллектуально одаренными детьми — сложная система, состоящая из совокупности взаимосвязанных и взаимодействующих компонентов).

3. *Принцип аттрактивности* (модель организации работы с интеллектуально одаренными детьми должна быть привлекательной для субъектов).

4. *Принцип целесообразности* (модель должна соответствовать поставленным целям, быть реальной, практически полезной).

5. *Принцип оптимальности* (выбор наилучшего варианта организации работы с интеллектуально одаренными детьми в условиях региона).

6. *Принцип мобильности* (модель должна быть гибкой, способной к корректировке).

7. *Принцип развития* (в ходе функционирования модели должен осуществляться переход с одного уровня развития на другой, более высокий).

Цель организации работы с интеллектуально одаренными детьми: создать оптимальные условия для развития личности каждого интеллектуально одаренного учащегося. Интеллектуально одаренные дети, работа с интеллектуально одаренными детьми — сложноорганизованные системы. Этим детям необходим путь развития, который близок их внутренним потребностям, значим для них.

Модель организации работы с интеллектуально одаренными детьми предполагает:

1) аналитическое обоснование: анализ организации работы с интеллектуально одаренными детьми в конкретном учреждении образования; диагностику способностей, возможностей учащихся; выявление их интересов; анализ педагогических возможностей учреждения образования и региона;

2) моделирование образовательной среды для интеллектуально одаренных детей;

3) подготовку педагогов к работе с интеллектуально одаренными детьми;

4) организацию взаимодействия субъектов для работы с интеллектуально одаренными детьми;

5) организацию деятельности интеллектуально одаренных детей;

6) создание условий для обеспечения качества работы с интеллектуально одаренными детьми.

Важнейшим компонентом разработанной нами модели организации работы с интеллектуально одаренными детьми является педагог. Педагоги обладают огромным креативным потенциалом и способны организовать пространство, позволяющее интеллектуально одаренным учащимся удовлетворить свои умственные запросы и потребности, развить лучшие человеческие качества. Однако они должны быть подготовлены к работе с интеллектуально одаренными детьми. Эту работу необходимо начинать на педагогических специальностях в вузе как можно раньше.

Будущие учителя должны иметь не только хорошую подготовку по предмету своей профессиональной деятельности, но и знать психологию интеллектуально одаренных детей, методику организации работы с ними. Имеет смысл проводить дифференциацию студентов на предмет возможности в будущем работать с названной выше категорией детей. Готовность педагога к встрече с интеллектуально одаренным ребенком требует и знаний, и мастерства, и способности найти нестандартные решения различного рода проблем, возникающих в процессе обучения и воспитания.

Уже на 3-м курсе можно предложить студентам *темы для курсовых работ*:

1. Психологический портрет интеллектуально одаренного ребенка (младшего школьника, подростка, выпускника).
2. Методы диагностики интеллектуальной одаренности.
3. Проблемы интеллектуально одаренных детей.
4. Творческий потенциал личности.
5. Концептуальные модели обучения интеллектуально одаренных детей.
6. Технологии обучения интеллектуально одаренных детей.
7. Технология проблемного обучения.
8. Технология укрупнения дидактических единиц.
9. Дальтон-технология.
10. Технология обучения математике на основе системы эффективных уроков.
11. Технология обучения как учебного исследования.
12. Технология обучения математике на основе решения задач.
13. Особенности развития интеллектуально одаренных детей.
14. Роль среды в развитии интеллектуальной одаренности.
15. Интеллектуальная одаренность в педагогической литературе.
16. Внеклассная и внешкольная работа с интеллектуально одаренными детьми.

17. Факультативы для интеллектуально одаренных детей.
18. Методические аспекты подготовки интеллектуально одаренных детей к олимпиадам различного уровня.
19. Организация научно-исследовательской работы с интеллектуально одаренными детьми.
20. Творческая деятельность интеллектуально одаренных детей.
21. Социализация интеллектуально одаренных детей.
22. Интеллектуально одаренный ребенок как нестандартное явление в школе.
23. Методы индивидуального, группового и коллективного обучения интеллектуально одаренных детей.
24. Особенности обучения и развития интеллектуально одаренных детей в сельской школе.
25. Конструирование задач творческого характера для интеллектуально одаренных детей.
26. Учитель для интеллектуально одаренных детей.
27. Модель организации работы с интеллектуально одаренными детьми в условиях сельской школы.
28. Модель организации работы с интеллектуально одаренными детьми в условиях районного центра.
29. Модель организации работы с интеллектуально одаренными детьми в условиях областного центра.

30. Изучение опыта работы учителей, работающих с интеллектуально одаренными детьми.

31. Менторство в работе с интеллектуально одаренными детьми.

32. Семья интеллектуально одаренного ребенка.

33. Информационные технологии в развитии интеллектуальной одаренности.

34. Дистанционное обучение в развитии интеллектуальной одаренности.

35. Управляемая самостоятельная работа в развитии интеллектуальной одаренности.

36. Организация и содержание клубных форм работы с интеллектуально одаренными детьми.

37. Предметное направление в летнем лагере для интеллектуально одаренных детей.

38. Формы взаимодействия с семьей интеллектуально одаренного учащегося.

39. Педагогическая поддержка и сопровождение интеллектуально одаренных детей.

40. Государственные программы и проекты по развитию интеллектуальной одаренности.

41. Государственная поддержка интеллектуально одаренных детей.

42. Проблемы профессионального самоопределения интеллектуально одаренных детей.

43. Формы взаимодействия школы и семьи интеллектуально одаренного ребенка.

44. Принципы моделирования образовательного пространства для интеллектуально одаренных детей.

45. Теоретические подходы к исследованию творчества и одаренности в психолого-педагогической литературе.

Целесообразно проведение *спецкурса* для студентов различных специальностей, ориентированных на работу с интеллектуально одаренными детьми. В содержание спецкурса необходимо включить изучение междисциплинарной проблематики интеллектуальной одаренности и тем, предусматривающих овладение способами решения комплексных задач педагогической деятельности. Будущему педагогу необходимо знать, как осуществлять диагностику, ставить цели и достигать их в процессе обучения и воспитания, проводить отбор содержания обучения интеллектуально одаренных детей, как моделировать образовательное пространство, взаимодействовать с семьей и др.

Цель спецкурса — подготовить студентов к реализации их профессионального, личностного и творческого потенциала в работе с интеллектуально одаренными детьми (развитии, обучении, воспитании).

Задачи спецкурса:

– сформировать представление о феномене интеллектуальной одаренности;

– актуализировать значимость эффективной профессиональной деятельности с интеллектуально одаренными детьми;

– очертить круг психолого-педагогических и социальных проблем развития интеллектуальной одаренности;

– изучить концептуальные модели обучения интеллектуально одаренных детей;

– изучить принципы моделирования открытой образовательной среды для интеллектуально одаренных детей;

– сформировать установку на использование системного подхода при обучении и воспитании интеллектуально одаренных детей;

– содействовать профессиональному развитию будущих педагогов.

Спецкурс позволит студентам изучить одно из самых приоритетных направлений педагогической деятельности, сформировать представление об интеллектуальной одаренности, увидеть проблемы, определить способы достижения результатов. На наш взгляд, разработанная нами программа спецкурса, будет способствовать развитию профессиональной компетенции будущих учителей по проблематике интеллектуальной одаренности детей.

Программа спецкурса по проблематике интеллектуальной одаренности

I. *Выявление и обучение интеллектуально одаренных детей как одно из направлений Государственной политики в Республике Беларусь.*

II. *Феномен интеллектуальной одаренности*

1. Философский аспект интеллектуальной одаренности. Определение понятий «одаренность» «одаренные дети» «интеллект», «интеллектуально одаренные дети».
2. Исторический обзор становления знания об интеллектуальной одаренности.
3. Биологический, психологический, педагогический и социальный аспекты интеллектуальной одаренности.

4. Особенности развития интеллектуально одаренных детей.
5. Особенности воспитания интеллектуально одаренных детей.
6. Методы диагностики интеллектуальной одаренности.
7. Методы диагностики творческих способностей.

III. *Концептуальные модели интеллектуальной одаренности*

1. Факторные модели интеллекта.
2. Концепция творческой одаренности.
3. Концепция М.А. Холодной.
4. Лонгитюдные исследования творчества и одаренности.

IV. *Подходы и технологии обучения и воспитания интеллектуально одаренных детей*

1. Деятельностный подход в развитии интеллектуальной одаренности.
2. Системный подход в организации работы с интеллектуально одаренными детьми.
3. Индивидуализация и дифференциация в обучении интеллектуально одаренных детей.
4. Технологии обучения интеллектуально одаренных детей.
5. Научно-исследовательская деятельность интеллектуально одаренных детей.
6. Методика организации управляемой самостоятельной работы.
7. Организация и проведение внеклассной работы по предмету с интеллектуально одаренными детьми.

8. Моделирование открытого образовательного пространства для интеллектуально одаренных детей.
9. Взаимодействия в направлении развития одаренности (с семьей, педагогами, психологами, учреждениями образования, вузами).
10. Содержание и методика подготовки к олимпиадам по предмету.
11. Профессионально-личностная позиция педагога.
12. Эффективная педагогическая практика работы с интеллектуально одаренными детьми.

Содержание программы

I. *Выявление и обучение интеллектуально одаренных детей как одно из направлений Государственной политики в Республике Беларусь.*

Государственные программы «Одаренные дети» и «Молодые таланты Беларуси». Политика государства в отношении одаренных детей. Государственная поддержка талантливых и одаренных детей.

II. *Феномен интеллектуальной одаренности*

1. Философский аспект интеллектуальной одаренности. Определение понятий «одаренность», «одаренные дети», «интеллект».

Интеллект как философская категория. Разнообразие определений «одаренности», «одаренные дети». Задатки, способности, мышление, воображение. Типологии одаренных детей. Методологические подходы и основания к исследованию и организации работы с интеллектуально одаренными детьми. Деятельность как условие развития одаренности.

2. Исторический обзор становления знания об интеллектуальной одаренности. Одаренность в научной и художественной литературе. Этапы исследования одаренности. Изучение уровня когнитивных процессов, диагностика уровня интеллекта, исследование способностей и творческого потенциала.
3. Биологический, психологический, педагогический и социальный аспекты интеллектуальной одаренности. Биогенетические и социогенетические теории развития. Роль задатков и способностей в развитии человека. Гетерохронность созревания полушарий головного мозга. Психогенетика общих и специальных способностей. Взаимодействие генотипа и среды. Психогенетика интеллекта. Психогенетика креативности. Роль обучения и среды в развитии задатков.
4. Особенности развития интеллектуально одаренных детей.

Отличительные черты интеллектуально одаренных детей (в познавательной и социальной сферах, в физическом развитии). Особенности умственного развития. Увлеченность. Творческий потенциал.

5. Особенности воспитания интеллектуально одаренных детей.

Конформность, погружение в философские проблемы, несоответствие между физическим, интеллектуальным и социальным развитием, перфекционизм, чувство неудовлетворенности, сверхчувствительность, нетерпимость, потребность во внимании взрослых. Преодоление стереотипов.

6. Методы диагностики интеллектуальной одаренности.

Подходы к установлению одаренности. Проявляющаяся и потенци-альная интеллектуальная одаренность. Признаки одаренности, степень их выраженности. Требования к достоверности и объективности процесса распознавания интеллектуально одаренных детей. Диагностика интеллекта. Система комплексной оценки.

7. Методы диагностики творческих способностей.

Творческие способности. Параметры творческого потенциала. Творческое самовыражение. Оценка творческих способностей. Тесты.

III. *Концептуальные модели интеллектуальной одаренности*

1. Факторные модели интеллекта. Модели Д. Гилфорда, Р. Кеттелла, Ч. Спирмена, Л. Стренберга, Л. Терстоуна. Свободный и кристаллизованный интеллект. Тестирование интеллекта.
2. Концепция творческой одаренности. Концепция одаренности П. Торренса. Идеи Д.Б. Богоявленской, А.М. Матюшкина, Я.А. Понаморева. Креативность и ее диагностика. Черты творческих людей (независимость, открытость, толерантность, стремление к прекрасному).
3. Концепция М.А. Холодной. Интеллектуальная одаренность как проявление своеобразия индивидуального ментального опыта. Ментальный опыт (когнитивный опыт, метакогнитивный опыт, интенциональный опыт), интеллектуальная зрелость. Тенденции развития системы образования и задачи интеллектуального воспитания учащихся.
4. Лонгитюдные исследования творчества и одаренности. Лонгитюдное исследование Л. Термена (подтверждение устойчивости рано проявляющейся высокой одаренности). Мюнхенская модель одаренности. Лонгитюдное исследование Тэплио (творческая внешкольная активность как прогностический признак высоких профессиональных достижений). Методы опроса и наблюдения.

IV. *Подходы и технологии обучения интеллектуально одаренных детей*

1. Деятельностный подход в развитии интеллектуальной одаренности. Ведущая деятельность (деятельность, которая в главном и основном определяет развитие ребенка). Активное взаимодействие со средой. Познавательная деятельность. Типы творчества (Д.Б. Богоявленская). Взаимодействие когнитивной и аффективной сфер. Деятельностный подход, рассматривающий человека как объекта и субъекта общественных отношений и деятельности (Л.И. Новикова, М.М. Поташник, С.Л. Рубинштейн, Н.Л. Селиванова и др.).
2. Системный подход в организации работы с интеллектуально одаренными детьми. Способ организации деятельности и воспитания интел-лектуально одаренных детей, представляющий собой целостную и упорядоченную совокупность взаимодействующих компонентов, способствующих развитию природных задатков, способностей.
3. Индивидуализация и дифференциация в обучении интеллектуально одаренных детей. Организация учебного процесса, при котором выбор способов, приемов, темпа обучения, учитывает индивидуальные различия учащихся, уровень развития их способностей к обучению. Внешняя и внутренняя уровневая дифференциация. Индивидуализированные программы обучения. Конструирование заданий для интеллектуально одаренных детей.
4. Эффективные технологии обучения интеллектуально одаренных детей. Рациональная организация деятельности интеллектуально одаренных детей. Технология проблемного обучения. Технология укрупнения дидактических единиц. Дальтон-технология. Технология обучения математике на основе системы эффективных уроков. Технология обучения как учебного исследования. Информационные технологии. Дистанционное обучение.

5. Научно-исследовательская деятельность интеллектуально одаренных детей. Формы научно-исследовательской деятельности. Методика организации научно-исследовательской деятельности. Требования, предъявляемые к научно-исследовательским работам учащихся. Научные конференции, семинары, «круглые столы».
6. Методика организации управляемой самостоятельной работы. Сущность и назначение управляемой самостоятельной работы. Деятельность педагога по организации управляемой самостоятельной работы. Деятельность учащихся по реализации самостоятельной работы.
7. Организация и проведение внеклассной работы по предмету с интеллектуально одаренными детьми. Факультативы, конкурсы, олимпиады, турниры, командные соревнования. Методика подготовки.
8. Моделирование открытого образовательного пространства для интеллектуально одаренных детей. Моделирование системы работы с интеллектуально одаренными детьми. Оптимальный баланс — соотношение взаимно связанных видов деятельности. Определение конкретного поля возможностей учреждения образования, региона, позволяющих интеллектуально одаренным учащимся удовлетворить свои образовательные запросы. Индивидуальная траектория развития. Координация деятельности. Стратегии обучения. Перспективы развития ребенка. Необходимость творческого поведения значимых взрослых.
9. Взаимодействия в направлении развития одаренности (с семьей, педагогами, психологами, учреждениями образования, вузами). Коммуникационная деятельность в направлении развития интеллектуальной одаренности. Педагогическая поддержка и сопровождение интеллектуально одаренных детей. Менторство. Стратегия родительского поведения и воспитания. Позитивная семейная педагогика.

10. Содержание и методика подготовки к олимпиадам по предмету. Олимпиадное движение. Типы олимпиадных задач и методы их решения. Непрерывные олимпиады, республиканская олимпиада. Итоги олимпиад.

11. Профессионально-личностная позиция педагога. Характеристика типов учителей. Качества, необходимые учителю для работы с интеллектуально одаренными детьми. Деятельность педагога по обогащению образовательного пространства, по познанию психологических особенностей

12. Эффективная педагогическая практика работы с интеллектуально одаренными детьми. Передовой педагогический опыт. Методы работы учителей-практиков с интеллектуально одаренными детьми. Реальные проблемы и пути их преодоления.

Содержащиеся в программе вопросы, целесообразно обсуждать и на целевых курсах повышения квалификации и на заседаниях методических объединений учителей.

Для будущих учителей математики на математическом факультете Брестского государственного университета имени А.С. Пушкина читается дисциплина по выбору «Методы решения алгебраических олимпиадных задач».

Таблица 2.1. Примерный тематический план для специальности 1-02 05 03 Математика. Дополнительная специальность (1-02 05 03-02 Математика. Информатика)

№ п/п	Наименование темы	Количество часов		
		Всего	Лекц.	Практ.
1.	История развития математических олимпиад. Старинные олимпиадные задачи	2	2	
2.	Уравнения и системы уравнений, методы их решения	6	2	4

Таблица 2.1 (продолжение)

№ п/п	Наименование темы	Количество часов		
		Всего	Лекц.	Практ.
3.	Неравенства и системы неравенств, методы их решения	6	2	4
4.	Целые числа. Четность и нечетность. Делимость и остатки	4	2	2
5.	Многочлены и тригонометрические полиномы	4	2	2
6.	Последовательности	4	2	2
7.	Графы и отношения, стратегии и алгоритмы	6	4	2
8.	Систематизация основных методов, принципов и идей решения алгебраических олимпиадных задач	2	2	
	Всего часов	34	18	16

Цель дисциплины по выбору — углубление профессиональной подготовки студентов к предстоящей работе с интеллектуально одаренными детьми (в аспекте овладения методами решения алгебраических олимпиадных задач). Дисциплина по выбору «Методы решения алгебраических олимпиадных задач» включает: знакомство с историей математических олимпиад; систематизацию знаний студентов об основных типах алгебраических олимпиадных задач; научное обоснование методов, принципов, идей решения алгебраических олимпиадных задач; анализ литературы по методам решения алгебраических олимпиадных задач; установление межпредметных связей (школьный курс математики и курсы вузовской алгебры и теории чисел). В результате изучения дисциплины по выбору «Методы решения алгебраических олимпиадных задач» студент должен овладеть следующими знаниями и умениями:

знать типы алгебраических олимпиадных задач; знать основные методы решения алгебраических олимпиадных задач, уметь ими пользоваться.

При кафедре алгебры и геометрии работает творческая группа студентов математического факультета над темой «Эффективные технологии обучения интеллектуально одаренных детей». Студенты проводят исследования по названной выше тематике, во время педагогической практики внедряют наработки в реальный учебный процесс, готовят публикации.

Кафедра алгебры и геометрии работает над темой «Система работы с интеллектуально одаренной учащейся и студенческой молодежью». Это одна из тем кафедры, прошедшая государственную регистрацию. Основные задачи и исходные данные для выполнения НИР следующие: разработка теоретической модели и методических оснований системы работы с интеллектуально одаренной учащейся и студенческой молодежью; выявление педагогических условий функционирования модели; определение и обоснование критериев и показателей эффективности работы с интеллектуально одаренной учащейся и студенческой молодежью. Учитель для интеллектуально одаренных детей должен быть хорошо подготовлен к встрече с ними. Интеллектуально одаренные дети отличаются друг от друга и степенью одаренности и познавательным стилем и сферами интересов. Неподготовленные учителя часто не могут выявить одаренных детей (они просто не знают их особенностей), не могут их понять, иногда враждебно к ним настроены (такие дети им мешают на уроке), используют неэффективные методы в работе. Как показывает практика, исследования ученых, — интеллектуально одаренные дети нуждаются в особом учителе. Какими качествами должен обладать этот учитель? Учитель для интеллектуально одаренных детей должен: иметь высокий уровень собственного интеллектуального развития; обладать высоким уровнем креативности; знать психологические особенности интеллектуально одаренных детей; знать концептуальные модели обучения интеллектуально одаренных детей; владеть технологиями обучения интеллектуально одаренных детей; быть целеустремленным и настойчивым, обладать качествами лидера; обладать позитивной Я-концепцией; быть высоко духовным человеком; быть чутким и внимательным к детям, толерантным, профессионально гибким; обладать высокой степенью альтруизма; иметь хорошие коммуникативные навыки; обладать чувством юмора; быть готовым к постоянному самосовершенствованию.

Теоретический блок разработанной нами модели, включает необходимые теоретические сведения (сущность феномена интеллектуальной одаренности, психолого-педагогические характеристики интеллектуально одаренных детей, основные стратегии диагностики, обучения и воспитания). Эти сведения достаточно подробно изложены в первой главе.

Ведущими принципами работы с интеллектуально одаренными детьми в общеобразовательных учреждениях являются: сочетание обязательных и осуществляемых по выбору содержания, форм, методов и приемов обучения; принцип индивидуального подхода к каждому интеллектуально одаренному ребенку; принцип обогащения мотивации деятельности; историко-культурный синтез в отборе содержания обучения.

Аналитико-прогностический блок модели организации работы с интеллектуально одаренными детьми

Аналитико-прогностический блок ориентирует на диагностику и анализ работы с интеллектуально одаренными детьми, планирование и прогноз, коррекцию деятельности. Можно выделить следующие *основные компоненты* этого блока:

1. Диагностика интеллектуальной одаренности.

2. Планирование работы с интеллектуально одаренными детьми.

3. Анализ работы с интеллектуально одаренными детьми.

Нами разработан ряд простых диагностических комплексов, с помощью которых можно констатировать интеллектуальную одаренность у ребенка. Первый комплекс можно применять в дошкольном и младшем школьном возрасте (табл. 2.2). Он поможет оценить наличие и степень развитости основных интеллектуальных способностей. Педагогу или родителю надо внимательно присмотреться к ребенку, обратить внимание на ряд его качеств и оценить их (объективно). Степень выраженности качеств оценивается по следующей шкале:

5 — оцениваемое свойство личности развито хорошо, четко выражено, проявляется часто в различных видах деятельности и поведения.

4 — свойство заметно выражено, но проявляется непостоянно, при этом и противоположное ему проявляется очень редко.

3 — оцениваемое и противоположное свойства личности выражены нечетко, в проявлениях редки, в поведении и деятельности уравновешивают друг друга.

2 — более ярко выражено и чаще проявляется свойство личности, противоположное оцениваемому.

1 — четко выражено и часто проявляется свойство личности, проти-воположное оцениваемому, оно фиксируется в поведении и во всех видах деятельности.

0 — сведений для оценки данного качества нет (не имею).

Если в сумме получится 48–50 баллов, значит, ребенок обладает прекрасными интеллектуальными способностями.

Таблица 2.2. Диагностика интеллектуальных способностей детей дошкольного возраста

Качества	*Проявления качеств*	*Баллы*
1. Любознательность	Задает большое количество вопросов, много читает	
2. Память	Долго удерживает в памяти различную информацию	
3. Внимание	Замечает все вокруг	

Таблица 2.2 (продолжение)

textitКачества	*Проявления качеств*	*Баллы*
4. Продуктивность мышления	Генерирует множество различных идей	
5. Анализ и синтез	Рассуждает как взрослый, аргументирует свои высказывания	
6. Воображение	Придумывает различные истории	
7. Перфекционизм	Старательно выполняет любые дела	
8. Увлеченность	Долго может заниматься интересным для него делом	
9. Гибкость мышления	Быстро находит правильный выход из любой ситуации	
10. Оригинальность мышления	Выдвигает нестандартные идеи	

Вторая диагностика в большей степени адресована педагогам (табл. 2.3). Методика направлена на то, чтобы помочь педагогам систематизировать собственные представления об умственных способностях детей.

Таблица 2.3. Диагностика интеллектуальных способностей детей школьного возраста

Сфера	*Качества*	*Проявление качеств*

Таблица 2.3 (продолжение)

Сфера	*Качества*	*Проявление качеств*
Мышление	*Оригинальность мышления* (способность выдвигать новые неожиданные идеи, отличающиеся от широко известных, общепринятых)	Проявляется в мышлении и поведении ребенка, в общении со сверстниками и взрослыми во всех видах его деятельности
	Гибкость мышления (способность быстро находить новые стратегии решения, устанавливать ассоциативные связи и переходить (в мышлении и поведении) от явлений одного класса к другим)	Проявляется в умении находить альтернативные стратегии решения проблем, оперативно менять направление поиска решения проблемы
	Продуктивность (беглость мышления, способность к генерированию большого числа идей)	Проявляется и может оцениваться по количеству и качеству вариантов решения разнообразных проблем и задач

Таблица 2.3 (продолжение)

Сфера	*Качества*	*Проявление качеств*
	Способность к анализу и синтезу	Наиболее ярко проявляется при решении логических задач. Это качество может быть выявлено практически в любом виде деятельности ребенка
	Способность к классификации и категоризации	Проявляется при решении специальных логических задач, в разных видах деятельности ребенка (коллекционировании, систематизации материала)
Внимание	*Высокая концентрация внимания*	Проявляется в склонности к сложным и долговременным занятиям одним делом

Таблица 2.3 (продолжение)

Сфера	*Качества*	*Проявление качеств*
Память	*Способность запоминать факты, события, абстрактные символы, различные знаки* (и в нужной ситуации пользоваться ими)	Проявление различных видов памяти можно обнаружить в процессе общения с ребенком
Интересы	*Увлеченность предметом и широта интересов*	Проявляется в деятельности и поведении ребенка; в стремлении заниматься самыми разными, непохожими друг на друга, видами деятельности, в желании попробовать себя в самых разных сферах. Доминирующая мотивация может выявляться путем наблюдения и бесед

Таблица 2.3 (продолжение)

Сфера	*Качества*	*Проявление качеств*
Личностное развитие	*Перфекционизм*(характеризуется стремлением доводить продукты своей деятельности до соответствия их самым высоким требованиям)	Проявляется в самых разных видах деятельности, выражается в упорном стремлении делать и переделывать до соответствия самым высоким личным стандартам
	Социальная автономность (способность и стремление противостоять мнению большинства)	Проявляется в готовности отстаивать собственную точку зрения, даже если она противостоит мнению большинства, в стремлении действовать и поступать нетрадиционно, оригинально
	Лидерство (доминирование в межличностных отношениях)	Проявляется в совместных играх и деятельности детей

Таблица 2.3 (продолжение)

Сфера	*Качества*	*Проявление качеств*
	Склонность к конкурентным формам взаимодействия	Проявляется в склонности либо нежелании участвовать в деятельности, предполагающей конкурентные формы взаимодействия
	Чувство юмора	Проявляется в общении и деятельности
	Погружение в философские проблемы	Проявляется в индивидуальных беседах

Каждое качество можно оценить по пятибалльной шкале:

5 — оцениваемое свойство личности развито хорошо, четко выражено, проявляется часто в различных видах деятельности и поведения.

4 — свойство заметно выражено, но проявляется непостоянно, при этом и противоположное ему проявляется очень редко.

3 — оцениваемое и противоположное свойства личности выражены нечетко, в проявлениях редки, в поведении и деятельности уравновешивают друг друга.

2 — более ярко выражено и чаще проявляется свойство личности, противоположное оцениваемому.

1 — четко выражено и часто проявляется свойство личности, проти-воположное оцениваемому, оно фиксируется в поведении и во всех видах деятельности.

0 — сведений для оценки данного качества нет (не имею).

Результат будет более объективным, если привлечь к выставлению отметок других педагогов и родителей, хорошо знающих этих детей.

Параметры, по которым проводится оценка, характеризуют основные мыслительные операции и мышление в целом.

Важно также получить целостное представление о личности одаренного ребенка. Этому может способствовать разработанный нами диагностический комплекс (табл. 2.4).

Таблица 2.4. Диагностический комплекс, формирующий целостное представление о личности учащегося

Структурный компонент	*Цель*	*Методика*
1	2	3
Учебные возможности	Самоопределение путей интеллектуального развития в учебной деятельности	Школьный тест умственного развития — ШТУР (авторы: К.М. Гуревич и др.)
	Определение уровня учебной мотивации, её источника и направленности	Мотивы учебной деятельности (А.К. Маркова)
	Определение умственных способностей учащихся	ТУС (Р. Амтхауэр)
Психофизиологическое развитие	Выявление степени утомления или напряжения физиологических систем	Определение вегетативного индекса Кердо (Г.В. Бородкина,Г.И. Бограш и др.)

Таблица 2.4 (продолжение)

1	2	3
	Оценка самочувствия	Опросник субъективных жалоб (Г.В. Бородкина, Г.И. Бограш и др.)
	Изучение режима дня	Сборник «Медико-психологическое обеспечение учебного процесса» (Г.В. Бородкина, Г.И. Бограш и др.) НМЦ «ДАР» имени Л.С. Выготского
	Самооценка психических состояний: выявление уровня тревожности, фрустации, агрессивности, ригидности	Методика Г. Айзенка
	Определение преобладающего типа темперамента	Метод идентификации по А. Белову
	Определение переживания социального стресса, проблем и страхов в отношении с учителями. Определение показателя общей тревожности	Тест школьной тревожности Филипса

Таблица 2.4 (продолжение)

1	2	3
Социально-психологические особенности	Познание с помощью психолога слабых и сильных сторон своего характера, с последующей выработкой социально-психологической позиции в структуре взаимоотношений	Методика экспресс-диагностики характерологических особенностей личности (Г. Айзенк)
	Определение уровня самооценки Определение социометрического статуса каждого интеллектуально одаренного учащегося в классе	Тест «Самооценка» (В.Я. Назмутдинов) Метод социометрических измерений
	Оценка психологической атмосферы в классном коллективе Рейтинг учителей, выявление слабых и сильных сторон деятельности учителя с точки зрения интеллектуально одаренного учащегося	Методика А.Ф. Фидлера Анкета «Учитель глазами учащихся»
	Самопознание и самоанализ	Мини-сочинение «Кто я? Какой я?»

Таблица 2.4 (продолжение)

1	2	3
	Выявление области наиболее целесообразного применения сил интеллектуально одаренных учащихся в будущем, психологические типы профессий	Дифференциально-диагностический опросник «Я предпочтений» (ДДО) (Е.А. Климов)
	Определение характеристик социальной адаптации интеллектуально одаренных учащихся	Опросник СПА (К. Роджерс, Р. Даймонд)
	Выявление отношений интеллектуально одаренных учащихся к матери и отцу. Изучение установок поведения и методов воспитания родителей глазами детей	Тест «ADOR — подростки о родителях» (П.И. Вассерман и др.)
	Определение коммуникативных и организаторских склонностей интеллектуально одаренных учащихся	КОС-2, КОС (А.А. Деркач)
	Определение профессиональных установок интеллектуально одаренных учащихся	ОПУП (И.М. Кондаков)

Таблица 2.4 (продолжение)

1	2	3
	Оказание помощи в выборе профессии	Тест «Опросник профессиональных предпочтений» (Д. Холланд)
Состояние здоровья	Изучение физического здоровья интеллектуально одаренных учащихся	Изучение медкарт, беседа с учащимися и их родителями
Круг интересов	Изучение запросов, потребностей, интересов интеллектуально одаренных учащихся	Беседа, опрос, анкетирование

При отборе детей в лицеи и гимназии, мы рекомендуем использовать следующие модели.

Модель 1. *Суть этой модели состоит в следующем: проводится конкурсный письменный экзамен по предмету и обязательное собеседование с тем, чтобы поступающий мог проявить свои творческие способности. Придается большое значение подбору самих экзаменаторов. В комиссию, кроме учителей-предметников необходимо включить научных работников (правильно оценивать творческие дарования может только активно работающий научный работник).*

Для каждого из поступающих, получивших, по крайней мере, удовлетворительную отметку по письменному экзамену, решающим экзаменационным испытанием является собеседование с группой из двух-трех экзаменаторов. Собеседование имеет целью выявить степень развития поступающего, характер способностей, уровень мышления и его склонность к научно-исследовательской работе. Собеседование должно носить непринужденный характер, чтобы застенчивость и нервозность не мешали проявиться индивидуальности экзаменующегося.

Модель 2. *Устный экзамен. Основная задача этого экзамена – выявить не количество накопленных учащимся знаний, а то, как он умеет пользоваться приобретенными знаниями. Особенность экзамена в том, что учащемуся задаются задачи и вопросы, экзаменующийся перед ответом имеет право пользоваться книгами, журналами, записками и даже консультациями. При ответе от учащегося требуется четкое понимание данной области математики или физики, нужное для умения пользоваться своими знаниями при решении задач.*

Задачи не совсем обычного типа: в них задание ставиться в более общей форме и, главное, от учащегося требуется указать путь решения и дать количественную оценку искомого решения. На экзамене учащемуся предоставляется возможность ответить на вопрос по его собственному выбору. Таким образом, можно выяснить, насколько учащийся способен самостоятельно интересоваться той или иной темой и насколько глубоко может в ней разбираться.

Аналитико-прогностический блок разработанной нами модели нацеливает педагогов на систематическую аналитическую деятельность, направленную на обеспечение качества работы с интеллектуально одаренными детьми.

Технологический блок модели организации работы с интеллектуально одаренными детьми

Технологический блок предписывает учёт природных задатков, интересов личности интеллектуально одаренного учащегося, педагогических возможностей учреждения образования и региона; создание разветвлённой системы связей и взаимодействий в направлении развития умственного потенциала интеллектуально одаренных учащихся; выбор оптимальных видов деятельности и содержания деятельности, адекватного потребностям интеллектуально одаренных детей.

Моделирование образовательного поля интеллектуально одаренного учащегося. Важно создать условия для развития природных задатков интеллектуально одаренных детей, используя возможности не только своей школы, но и района, области и республики. К примеру, интеллектуально одаренный учащийся может повышать свой уровень знаний на уроках математики, факультативах. В школе он может посещать кружок по решению задач повышенной трудности, принимать участие в непрерывной заочной математической олимпиаде, заниматься самообразованием, участвовать в ежегодной школьной математической олимпиаде.

В районе можно создать межшкольный факультатив по математике и поручить проведение занятий талантливому учителю, который хорошо решает нестандартные олимпиадные задачи. Учащийся может участвовать в работе межшкольного факультатива, в районной олимпиаде. Ежегодно для одарённых детей работают летние лагеря, в которых занятия проводят, наряду со школьными учителями, и преподаватели высших учебных заведений. А для победителей областной олимпиады на базе вузов проводятся недельные сборы по подготовке к республиканской олимпиаде.

В создании условий для развития, саморазвития и самореализации интеллектуально одарённого учащегося задействованы республиканские, областные, районные структуры управления образованием, преподаватели вузов, администрация школы, педагоги и родители (рис. 2.2).

На каждой ступени обучения интеллектуально одаренных детей педагогам необходимо формировать концепцию (систему взглядов на обучение и воспитание интеллектуально одаренных детей) (табл. 2.5).

Таблица 2.5. Педагогическая концепция организации работы с интеллектуально одаренными детьми

1	2

Таблица 2.5 (продолжение)

1	2
Принципы моделирования работы с интеллектуально одаренными детьми	1. Принцип научности 2. Принцип системности 3. Принцип аттрактивности 4. Принцип целесообразности 5. Принцип оптимальности 6. Принцип мобильности 7. Принцип развития
Ведущие педагогические идеи	Идеи, изложенные в трудах Б.Г. Ананьева, Ш.А. Амонашвили, А. Бине, Б. Блума, Д.Б. Богоявленской, Р. Кеттелла, Н.С. Лейтеса, А.М. Матюшкина, Дж. Рензулли, Г.С. Сухобской, Б.М. Теплова, П. Торренса, М.А. Холодной, В.С. Юркевич и др.
Цель	Развитие личности каждого интеллектуально одаренного учащегося, его индивидуальности, культуры, творческих способностей; повышение уровня воспитанности.
Педагогические теории	Теории обучения и воспитания одаренных детей, педагогика гуманизма; педагогика сотрудничества; педагогика общей заботы; теория воспитательных систем.

Таблица 2.5 (продолжение)

1	2
Образовательное поле интеллектуально одаренных детей	Образовательное (информационное, культурное, социальное, природное) поле.
Субъекты образовательного поля	Учащиеся, их родители, педагоги; руководители кружков; интеллектуально одаренные сверстники; преподаватели вузов, интеллектуальные клубы.
Отношения	Сотрудничество, соревновательность, совместная деятельность, сотворчество.
Деятельность	Диагностическая, учебно–познавательная, интеллектуальная, научно-исследовательская, общественно–полезная, ценностно–ориентировочная, трудовая, спортивно–оздоровительная, художественно–творческая, коррекционная, рефлексивная.
Технологии, методики	Проблемное обучение, технология уровневой дифференциации, технология укрупнения дидактических единиц, метод проектов, технология обучения математике на основе решения задач, методика коллективной творческой деятельности.

Эта система взглядов реализуется в *программе работы с интеллектуально одаренными детьми.* В программе должны быть отражены цели и приоритетные направления учебно-познавательной, интеллектуальной и воспитательной работы, задачи на определённом этапе обучения и воспитания, конкретные формы работы с

Рис. 2.2. Модель образовательного поля интеллектуально одаренного учащегося

интеллектуально одаренными детьми и ее содержание.

На всех уровнях системы образования необходимо осуществлять мониторинг качества работы с интеллектуально одаренными детьми, своевременно вносить коррективы. Интеллектуально одаренные дети – главное достояние нашей страны. И развитие этих детей значительно выигрывает от доступа их к образовательной системе, соответствующей их естественным и уникальным способностям. Важно не пропустить, не проглядеть ни одного ребенка.

Управленческий блок модели организации работы с интеллектуально одаренными детьми

Управленческий блок, разработанной нами модели, задает алгоритм управленческих действий по организации работы с интеллектуально одаренными детьми, требует интеграции всех блоков в целостную систему с целью её развития и представляет собой совокупность трёх взаимосвязанных процессов – педагогического руководства, самоорганизации, саморегуляции (табл. 2.6).

Таблица 2.6. Управленческий блок модели

Педагогическое руководство	*Самоорганизация и саморегуляция*
Организация деятельности интеллектуально одаренных учащихся по определению целей и задач обучения и воспитания	Осмысление целей и задач
Стимулирование эмоционального отношения к познавательной и интеллектуальной деятельности	Развитие и углубление потребностей и мотивов
Определение содержания познавательной, интеллектуальной и воспитывающей деятельности	Восприятие, осмысление содержания познавательной, интеллектуальной и воспитывающей деятельности

Таблица 2.6 (продолжение)

Педагогическое руководство	*Самоорганизация и саморегуляция*
Организация личностно и общественно значимой деятельности учащихся по достижению целей	Проявление личностно–смыслового отношения к интеллектуальной деятельности и волевых усилий в процессе этой деятельности
Контроль, регулирование и коррекция образовательного процесса	Самоконтроль и самокоррекция интеллектуальной деятельности
Рефлексия результатов познавательной, интеллектуальной и воспитывающей деятельности учащихся и педагогической деятельности	Рефлексия результатов познавательной, интеллектуальной деятельности, воспитательного процесса и себя в нём

Педагогическое руководство организацией работы с интеллектуально одаренными детьми включает планирование, организацию, контроль, коррекцию, сопровождение и основывается на взаимодействии и общении субъектов. Основу педагогического руководства деятельностью интеллектуально одаренных детей составляют следующие действия педагога: помощь, совет, сотрудничество, сотворчество, поддержка.

Личность интеллектуально одаренного учащегося – субъект управления, и эффективность управления во многом зависит от того, насколько у него сформированы механизмы самоуправления собственной деятельностью. Одним из таких механизмов является саморегуляция, основанная на рефлексии собственных действий (самоанализе, самооценке с учётом оценок других).

Управление качеством работы с интеллектуально одаренными детьми есть моделирование педагогического процесса, которое неминуемо приводит к задачам измерения определенных его сторон. Умение педагогов правильно оценивать качественные характеристики, определяющие уровень развития мышления школьника, позволяет быстро и научно обоснованно подбирать соответствующие режимы организации и управления учебно-познавательной деятельностью на всех этапах обучения.

Рассматривая организацию работы с интеллектуально одаренными детьми с позиции системного подхода, следует отметить важное положение: управление деятельностью обучаемого со стороны педагога строится с учетом рассогласования между целями, которые ставятся педагогом на каждом этапе обучения и реальными результатами деятельности школьника. Наличие такого типа рассогласований ведет к тому, что педагог должен осуществлять коррекцию в управлении деятельностью интеллектуально одаренного учащегося, меняя или усиливая различные формы, методы и средства воздействия.

Таким образом, знание результатов деятельности интеллектуально одаренных детей на различных этапах, позволяет педагогам не только осуществлять управление их интеллектуальной деятельностью, но, главное, последовательно формировать у них соответствующие социально-психологические и личностные качества.

Обобщение результатов целого ряда научных работ в области педагогики и психологии позволяет говорить о возможности моделирования или количественной интерпретации многих аспектов, касающихся работы с интеллектуально одаренными детьми. Причем это направление деятельности требует перехода к локальным и промежуточным моделям в рамках мониторинговых исследований (табл. 2.7).

Таблица 2.7. Мониторинг качества работы с интеллектуально одаренными детьми

Образовательное поле	*Деятельность*	*Результаты деятельности*	*Анализ деятельности*	*Выводы, рекомендации*
1. Уроки				

Таблица 2.7 (продолжение)

Образовательное поле	*Деятельность*	*Результаты деятельности*	*Анализ деятельности*	*Выводы, рекомендации*
2. Факультативы				
3. Управляемая самостоятельная работа				
4. Олимпиады				
5. Научно-исследовательская работа				
6.Внеклассная работа по предмету				
7. Взаимодействие с вузами				

Педагогам необходимо оценивать качество знаний интеллектуально одаренных учащихся. Для этого целесообразно использовать сравнение результатов учебной деятельности (по полученным отметкам) при прохождении различных тем. Полезна и методика Г.Н. Петровского (вычисление абсолютного коэффициента динамики итогов контрольных работ) [62]. Суть методики состоит в следующем.

Вводится в рассмотрение величина К, которая определяется формулой:

$$K = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m}\sqrt{10-p_p} = \frac{1}{m}\left(\sqrt{10-p_1}+\sqrt{10-p_2}+\ldots\ \sqrt{10-p_n}\right),$$

где m — количество учащихся класса; p_i - отметка по контрольной работе. K_1 —

величина, подсчитанная по предыдущей контрольной работе, а по последней — K_2. Абсолютным коэффициентом динамики итогов контрольных работ называют величину Дабс., вычисляемую по формуле: $Д_{абс.} = K_1 - K_2$. Величина Д характеризует динамику качества знаний учащихся (если эта величина положительная, то качество улучшается, а если отрицательная, то ухудшается).

Об определенном уровне сформированности у учащегося того или иного приема мышления (анализ, синтез, обобщение, абстрагирование и др.) судят по тому, как он умеет пользоваться соответствующей мыслительной операцией. Педагогам необходимо обращать самое пристальное внимание на качество решения учащимися различных проблемных задач (на логичное, обоснованное, доказательное изложение своей точки зрения на ту или иную учебную проблему).

В ходе учебной работы учащиеся усваивают приемы мыслительной деятельности, самостоятельно их применяют и переносят на новые учебные ситуации. В работе с интеллектуально одаренными детьми целесообразно использование методики (табл. 2.8), дающей представления о динамике развития их умственных способностей.

Параметры, по которым проводится оценка, характеризуют основные мыслительные операции и мышление в целом, наблюдаемые в ходе взаимодействия с учащимися.

Таблица 2.8. Основные показатели умственных способностей

Качества	*Проявление качеств*
1. Оригинальность мышления (способность выдвигать новые неожиданные идеи, отличающиеся от широко известных, общепринятых)	Проявляется в мышлении и поведении учащегося, в общении со сверстниками и взрослыми во всех видах его деятельности

Таблица 2.8 (продолжение)

Качества	*Проявление качеств*
2. Гибкость мышления (способность быстро находить новые стратегии решения, устанавливать ассоциативные связи и переходить (в мышлении и поведении) от явлений одного класса к другим, часто далеким по содержанию)	Проявляется в умении находить альтернативные стратегии решения проблем, оперативно менять направление поиска решения проблемы
3. Продуктивность (беглость мышления, способность к генерированию большого числа идей)	Проявляется и может оцениваться по количеству и качеству вариантов решения разнообразных проблем и задач
4. Способность к анализу и синтезу	Наиболее ярко проявляется при решении логических задач. Это качество может быть выявлено практически в любом виде деятельности учащегося
5. Способность к классификации и категоризации	Проявляется при решении задач, при систематизации учебного материала

Полученные в ходе наблюдения за интеллектуально одаренными детьми данные (за период изучения определенной темы), заносят в таблицу, получая вариационный ряд (табл. 2.9). По данным таблиц, составленных в конце изучения каждой темы, целесообразно вычислить отношение частоты проявления каждого качества у отдельно взятого учащегося к общему количеству учащихся всей выборки. Таким способом можно найти относительную частоту проявления каждого качества мышления у конкретного учащегося.

Таблица 2.9. Проявления умственных способностей учащихся (за период изучения темы)

№	*Учащиеся*	*Качества мышления (частота проявлений)*				
1						
2						
3						
4						
5						

Для наглядного представления статистического распределения качеств мышления отдельно взятого интеллектуально одаренного учащегося (за период изучения темы) можно использовать графическое изображение (полигон). Для построения полигона на оси абсцисс прямоугольной системы координат откладывают значения признака (номера качеств мышления), в них восстанавливают перпендикуляры, длины которых пропорциональны частотам проявления качеств, а затем концы соседних перпендикуляров соединяют отрезками прямых. В результате получается замкнутая фигура в виде многоугольника, которую в математической статистике называют полигоном. Сопоставив построенные по ряду тем полигоны, можно отслеживать динамику мыслительной деятельности каждого учащегося, вносить коррективы в работу (направляя педагогические усилия на развитие тех или иных качеств мышления учащегося).

Выявлению качественных и количественных педагогических закономерностей обучения и воспитания интеллектуально одаренных детей во многом способствует создание математических моделей (информационно-логической модели содержания обучения; структурно-функциональной модели содержания обучения; структурно-функциональной модели управления деятельностью интеллектуально одаренных детей).

Благодаря ЭВМ, сегодня значительно расширены границы доступа к любой информации, ее оперативному использованию в решении задач обучения и воспитания интеллектуально одаренных детей. ЭВМ сейчас активно внедряется в сферу научной деятельности педагогов-исследователей. И мы надеемся, что в скором времени широкий круг психолого-педагогических задач, связанных с обучением и воспитанием интеллектуально одаренных детей (многосторонний статистический анализ, моделирование отдельных педагогических, психологических, дидактических ситуаций; создание оптимальных учебных программ, учебников, планов), будет осуществляться с помощью ЭВМ.

На данном этапе развития системы образования эффективность работы с интеллектуально одаренными детьми определяется качеством позитивных изменений, происходящих в воспитанниках и их деятельности под влиянием внешних (образовательное поле, среда обучения и воспитания) и внутренних (генотип человека, собственный познавательный опыт) факторов. Основными показателями интеллектуального развития личности являются:

– самостоятельность мышления;

– прочность усвоения учебного материала;

– гибкость мыслительных процессов;

– глубина знаний;

– критичность ума;

– владение широким спектром умственных действий;

– успешность в интеллектуальной деятельности.

2.2 Технологии и методы обучения интеллектуально одаренных детей

Урок — это логически законченный, целостный, ограниченный определенными временными рамками этап учебно-воспитательного процесса. Моделируя урок, учителю необходимо определить не только какие знания и на каком уровне должны быть усвоены учащимися, не только определить структуру урока, не только правильно сформулировать цели и задачи, но и самое пристальное внимание уделить развивающему и воспитательному аспектам. Огромным потенциалом в плане развития мышления интеллектуально одаренных детей обладают такие школьные предметы как математика, физика, химия и информатика.

Математика занимает особое место среди школьных предметов. Именно этот предмет помогает усваивать школьникам общенаучные приемы и методы анализа, синтеза, индукции, аналогии, обобщения, конкретизации, абстрагирования, дедукции. На уроках математики у школьников закладываются основы опыта творческой деятельности: они знакомятся с методами научного познания, усваивают эвристические приемы, формируют умения отслеживать закономерности, развивают процессуальные черты, характерные для творчества. Надо отдать должное современным авторам, в учебных пособиях которых приоритетное место отведено развивающей компоненте. В них содержится большое количество задач, которые направлены на развитие логики рассуждений и сообразительности, овладение новыми методами решения. Используя богатый задачный материал учебных пособий, учителю нет необходимости тратить время на поиск заданий для осуществления уровневой дифференциации.

Так, в учебном пособии авторов Л.А. Латотина и Б.Д. Чеботаревского «Математика, 5» представлены задачи повышенной трудности, которые целесообразно предлагать на уроках интеллектуально одаренным детям для самостоятельного решения, причем решать их необходимо арифметическими методами.

Пример 1. *В учебнике* 296 *страниц. Сколько цифр нужно записать, чтобы их* *пронумеровать? Сколько раз будет использована каждая из цифр?*

Решение.

Задача решается методом перебора. Замечаем, что для нумерации страниц используют 9 однозначных чисел, 90 — двузначных и 197 — трехзначных. Общее количество цифр: $9 + 2 \cdot 90 + 3 \cdot 197 = 780$.

Определим, сколько раз будет использована каждая цифра. Начнем с нуля. В двузначных числах содержится 9 нулей, в трехзначных — 40. Значит, цифра 0 использована 49 раз. Цифра 1 использована 160 раз; цифра 2 — 157 раз; цифра 3 — 60 раз; цифра 4 — 60 раз; цифра 5 — 60 раз; цифра 6 — 60 раз; цифра 7 — 59 раз; цифра 8 — 59 раз; цифра 9 — 56 раз.

Пример 2. *Перед соревнованием по плаванию четыре участника дали интервью. Алесь сказал: «Я буду первым», Богдан: «Я не буду последним», Виталий: «Я не буду ни первым, ни последним», Глеб: «Я буду последним». После заплыва выяснилось, что только один из участников был неточным. Кто ошибся?*

Решение.

Задача решается методом последовательного заполнения таблиц (матричный метод).

Ситуация 1. Распределение мест самими участниками:

	1	2	3	4
Алесь	+			
Богдан	+	+	+	
Виталий		+	+	
Глеб				+

Ситуация 2. Распределение мест при условии, что ошибся Глеб:

	1	2	3	4
Алесь	+			
Богдан	+	+	+	
Виталий		+	+	
Глеб	+	+	+	

Невозможная ситуация.
Ситуация 3. Распределение мест при условии, что ошибся Виталий:

	1	2	3	4
Алесь	+			
Богдан	+	+	+	
Виталий	+			+
Глеб				+

Невозможная ситуация.
Ситуация 4. Распределение мест при условии, что ошибся Богдан:

	1	2	3	4
Алесь	+			
Богдан				+
Виталий	+			+
Глеб				+

Невозможная ситуация.

Ситуация 5. Распределение мест при условии, что ошибся Алесь:

	1	2	3	4
Алесь		+	+	+
Богдан	+	+	+	
Виталий		+	+	
Глеб				+

Единственно возможная ситуация, так как в этом случае места легко распределяются между всеми участниками соревнований.

Пример 3. *Дети сложили из кубиков такую фигуру, что если посмотреть на нее спереди, то видно* 10 *кубиков, а если сбоку —* 7 *(рис. 2.3).*

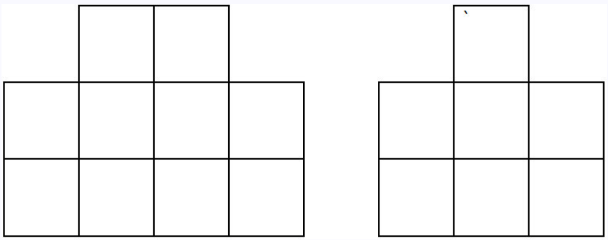


Рис. 2.3

Какое наибольшее количество кубиков могло быть использовано для такой фигуры? Какое наименьшее? Сколько кубиков может содержать эта фигура? Ответ запишите двойным неравенством.

Ответ: наименьшее количество кубиков — 10, а наибольшее — 26.

Пример 4. *О дате Грюнвальдской битвы известно следующее. Количество столетий в году вдвое больше порядкового номера месяца, в котором она произошла, и на единицу меньше числа этого месяца. Число, когда произошла битва, на 5 больше количества лет от начала столетия. Кроме того, третья часть числа равна половине количества лет от начала столетия. Когда произошла Грюнвальдская битва?*

Решение.

Число: $2X + 1$

Номер месяца:X

Число столетий:$2X$

По условию задачи не больше 10 и $2X + 1$ делится на 3. Значит, может быть равным $4, 7, 10$. При этих значениях число равно: $9, 15$ или 21 и количество лет от начала столетия соответственно: $4, 10, 16$. В условии задачи сказано, что третья часть числа равна половине количества лет от начала столетия. Этому условию удовлетворяют числа 15 и 10. Значит, битва произошла 15 числа, а от начала столетия — 10 лет. Получается, что $2X+1 = 15$ и $X = 7$. Седьмой месяц — июль, число столетий $2 \cdot 7 = 14$. Получаем, 15.07.1410.

Пример 5. *Между цифрами «1 2 3 4 5 6 7 8 9» в определенных местах нужно поставить знаки «+» или « − » так, чтобы в результате получилось выражение со значением 100. Сколькими способами вы можете это сделать?*

Решение.

Приведем несколько примеров решения этой задачи:

$$1 + 23 - 4 + 5 + 6 + 78 - 9 = 100,$$

$$123 + 4 - 5 + 67 - 89 = 100,$$

$$123 - 45 - 67 + 89 = 100.$$

Пример 6. *Три человека смогли переправиться через реку, хотя лодка, которую они использовали, вмещает только одного. Как могло такое произойти?*

Решение.

Такое могло произойти, если бы двое и лодка оказались на одном берегу, а третий человек — на другом.

Пример 7. *Из 4-х монет — одна фальшивая. Она отличается от остальных только весом. Когда две монеты положили на чашечные весы, то:*

a) их равновесие нарушилось. Как с помощью еще одного взвешивания найти фальшивую монету?

b) весы остались в равновесии. Как с помощью еще одного взвешивания найти, какая из монет фальшивая?

Решение.

a) так как равновесие весов нарушилось, значит одна из монет на весах фальшивая. Снимем одну из монет с весов и положим вместо нее любую другую из остальных, не лежавших на весах. Если весы окажутся в равновесии, значит, снятая монета — фальшивая; если же равновесие весов нарушится, то фальшивой является монета, которая все время лежала на весах;

b) так как весы находятся в равновесии, то обе монеты не являются фальшивыми. Снимем одну из монет и положим вместо нее другую их тех, что не лежали на весах. Если весы останутся в равновесии, то фальшивая монета — монета, которая не участвовала во взвешивании; если же равновесие весов нарушилось, то фальшивая та монета, которую мы только что положили на весы.

Пример 8. *Три понедельника пришлись на четные числа. Каким днем недели было 19 число этого месяца?*

Решение.

Наибольшее число понедельников в одном месяце — 5. Если понедельники пришлись на числа: 1, 8,15, 22, 29, то видно, что здесь только два четных числа (не удовлетворяет условию задачи). Рассмотрим числа: 2, 9, 16, 23, 30. Здесь три четных числа, что удовлетворяет условию задачи. Рассмотрим еще числа: 3, 10, 17, 24, 31 — не подходит; 4, 11, 18, 25 — не подходит (все последующие множества будут содержать по два четных и два нечетных числа). Следовательно, условию задачи удовлетворяет только одна ситуация, когда понедельники приходились на 2, 9, 16, 23 и 30 числа. Значит, 19-ое число — четверг.

Пример 9. *Один человек купил* 30 *птиц за* 30 *монет. Из этих птиц за каждых трех воробьев уплачена одна монета, за каждые две горлицы — также одна монета и за каждого голубя — по две монеты. Сколько было птиц каждого вида?*

Решение.

Самые дорогие птицы в задаче — голуби, их можно купить меньше, чем 15 штук. У человека 30 монет. Если он купит 14 голубей (за 28 монет), то сможет за две оставшиеся монеты купить еще 5 птиц. Тогда в сумме он будет иметь 19 птиц, что не удовлетворяет условию задачи. Если голубей купит 13, то у него останется 4 монеты, за которые можно купить либо 6 воробьев и 4 горлицы, либо 3 воробья и 6 горлиц, либо 9 воробьев и 2 горлицы. В сумме получится либо 23, либо 22, либо 24, что не удовлетворяет условию задачи. Осуществляя таким образом перебор, найдем, что было куплено 11 голубей, 9 воробьев и 10 горлиц. Конечно, эту задачу легко можно решить с помощью системы уравнений, но в 5 классе при решении текстовых задач используются только арифметические методы.

Пример 10. *В семье четверо детей, которым* $5, 8, 13$ *и* 15 *лет. Их зовут Алла, Борис, Вера и Галя. Сколько лет каждому, если одна девочка ходит в детский сад, Алла старше Бориса, а сумма возрастов Аллы и Веры делится на* 3*?*

Решение.

Возможна только следующая ситуация:

	1	2	3	4
Алла			+	
Борис		+		
Вера	+			
Галя				+

В ходе обучения интеллектуально одаренных детей необходимо уделять особое внимание развитию дивергентного, конвергентного и оценочного видов мышления. Дивергентное мышление проявляется в задачах, имеющих несколько правильных ответов, а конвергентное — в задачах, имеющих единственно правильный ответ. Оценочное мышление позволяет анализировать условие, ход и результат решения задачи, формулировать собственные суждения и умозаключения. Развитию дивергентного мышления способствуют задачи с параметром, задачи на исследование, то есть задачи, охватывающие различные ситуации и возможности. Рассмотрим ряд примеров.

Пример 11. *Решите уравнение* $(a+5)x = a-1$

Решение.

Прежде, чем решить данное уравнение, учащимся необходимо ответить на вопросы:

1. Каким действием находим значение переменной x? (делением)
2. При каком условии выполнимо деление? (при $a \neq -5$ $x = \frac{a-1}{a+5}$)
3. Какой вид примет уравнение при $a = -5$? ($0 \cdot x = -6$)

4. Имеет ли корни полученное уравнение? (корней нет)

Ответ: при $a = -5$ корней нет; при $a \neq -5$ $x = \frac{a-1}{a+5}$.

На начальном этапе обучения решению задач с параметром важно обратить внимание учащихся на следующие аспекты:

1. Параметр играет роль коэффициента.

2. Анализ условий, при которых выполнимо то или иное действие.

3. Форма записи ответа.

Пример 12. *При каких значениях параметра a уравнение*

$$x^2 - (5a-6)\cdot \mid x \mid +4a^2 - 6a = 0$$

имеет четыре различных решения? В ответе указать пять последовательных целых значений a.

Решение.

Обозначим $|x| = y$, получим уравнение

$$y^2 - (5a-6) \cdot y + 4a^2 - 6a = 0,$$

которое имеет четыре решения при условии, если y_1, y_2 — положительны. Найдя дискриминант, получим, что

$$y_1 = 4a - 6, y_2 = a.$$

Этот же результат можно получить и по теореме Виета, учитывая, что

$$y_1 > 0, y_2 > 0, y_1 \neq y_2$$

Итак, $4a - 6 > 0, a > 0, D \neq 0$. Значит, a принадлежит объединению промежутков $(1,5;2)$ и $(2;\infty)$.

Ответ: например, 3, 4, 5, 6, 7.

Пример 13. *Два самолета, находящиеся в данный момент на высоте* h_1 *и* h_2 *над землей, набирают высоту со скоростями* v_1 *и* v_2 *. В какое время они находятся на одной высоте над землей?*

Решение.
Обозначим искомое время через x. Получим уравнение:

$$h_1 + x \cdot v_1 = x \cdot v_2 + h_2$$

Из полученного уравнения следует, что

$$x = (h_2 - h_1)/(v_1 - v_2), v_1 \neq v_2$$

Проведем исследование решения:

1. При $h_2 > h_1$ и $v_1 > v_2$ первый самолет догонит второй, находящийся в данный момент на большей высоте, но движущийся с меньшей скоростью.

2. При $h_2 < h_1$ и $v_1 < v_2$ второй самолет догонит первый.

3. При $h_2 > h_1$ и $v_1 < v_2$ первый самолет, имея меньшую скорость, не догонит второй, находящийся на большей высоте. В этом случае можно считать, что самолеты находились на одной высоте еще до данного момента.

4. При $h_2 < h_1$ и $v_1 > v_2$ объяснение аналогичное.

5. При $h_2 = h_1$ и $v_1 \neq v_2$ самолеты только в данный момент находятся на одной высоте.

6. При $h_2 = h_1$ и $v_1 = v_2$ самолеты в любой момент находятся на одной высоте. Задача имеет бесконечное множество решений.

7. При $h_2 \neq h_1$ и $v_1 = v_2$ самолеты никогда не будут на одной высоте, так как в данный момент они находятся на разных высотах и движутся с одинаковыми скоростями.

Пример 14. *Существуют ли такие значения b, при которых квадратный трёхчлен $2x^2 + bx - 7$ имеет два корня, один из которых является положительным числом, а другой — отрицательным?*

Пример 15. *Углом какой четверти является угол α, если*

$$\sin\alpha \cdot \cos\alpha \cdot \operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{ctg}\alpha > 0?$$

Пример 16. *Из всех прямоугольных треугольников, сумма катетов которых равен t см, выделите треугольник с наибольшей площадью.*

Пример 17. *По графику функции $y = ax^2 + bx + c$ определите знаки коэффициентов a, b и c.*

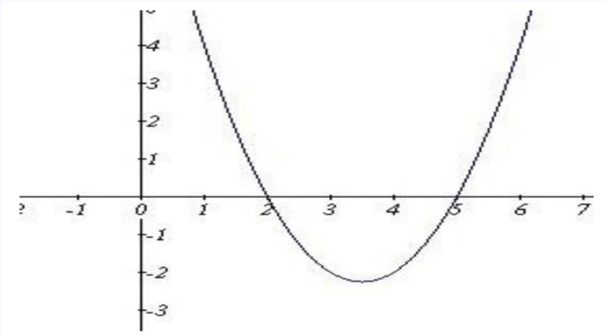


Рис. 2.4

Пример 18. *Существуют ли такие значения c, что множеством решений неравенства $2x^2 - 12x + c < 0$ является:*

a) числовой промежуток $(2;4)$;

b) множество всех чисел?

Пример 19. *Верно ли, что функция $y = 1,8(x-a)^2$ при любом a убывает в промежутке $(-\infty; -10]$ и возрастает в промежутке$[-10; \infty)$?*

Пример 20. *Может ли корень уравнения $3(x-4) - b = x - 11$ являться положительным числом? При каком условии?*

Пример 21. *Существуют ли такие значения a, что уравнение $(a^2 + a - 2)x = a - 1$ не имеет корней?*

Пример 22. *Верно ли, что при любом значении k система уравнений*

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 9 \\ x - y = k \end{cases}$$

имеет единственное решение?

Пример 23. *Могут ли не пересекаться графики функций $y = ax^2 + 3x - 4$ и $y = ax - 5$?*

Пример 24. *Могут ли числа a, b и c быть одновременно последова-тельными членами арифметической и геометрической прогрессий?*

Пример 25. *Известно, что стороны треугольника образуют геометрическую прогрессию. Образуют ли высоты этого треугольника геометрическую прогрессию?*

Пример 26. *Известно, что* $y = f(x)$ *— линейная функция и* $x_1, x_2, x_3, \ldots$ *– арифметическая прогрессия. Является ли последовательность* $f(x_1), f(x_2), f(x_3), \ldots$ *арифметической прогрессией?*

Пример 27. *Как изменяется сторона* AB *треугольника* ABC*, если угол* C *возрастает, оставаясь острым, а длины сторон* AC *и* C *остаются без изменений?*

Пример 28. *Угол между неравными биссектрисами равнобедренного треугольника равен* α*. Биссектриса, проведенная из вершины данного треугольника, равна* 1*. Установите зависимость между биссектрисами этого треугольника.*

Развитию дивергентного мышления способствуют и задачи, в которых не сформулирован вопрос. Приведем несколько примеров.

Пример 29. *Из* A *в* B *выехал велосипедист. Если бы он ехал со скоростью на* 3 *км/ч большей, то затратил бы на весь путь на один час меньше, а если бы со скоростью на* 3 *км/ч меньше, то на весь путь он затратил бы на один час больше.*

Возможные вопросы:

1. Каково расстояние от A до B?
2. Какова скорость велосипедиста в первом случае?
3. Сколько времени затратил велосипедист на путь от A до B?

Пример 30. *Основания прямоугольной трапеции относятся как* $2 : 5$*, а меньшая диагональ является биссектрисой угла при меньшем основании и равна* 3*.*

Возможные вопросы:

1. Найти площадь трапеции.

2. Найти основания трапеции.

3. Найти углы трапеции.

4. Найти большую диагональ трапеции.

5. Найти угол между диагоналями трапеции.

Пример 31. *Боковые ребра треугольной пирамиды взаимно перпендикулярны. Стороны основания равны* $\sqrt{37}$, $4\sqrt{3}$, $\sqrt{13}$.

Возможные вопросы:

1. Найти объем пирамиды.

2. Найти радиус шара, описанного около пирамиды.

3. Найти площадь полной поверхности пирамиды.

Целесообразно на уроках математики предлагать интеллектуально одаренным учащимся задачи с недостающими данными.

Пример 32. *В выпуклом четырехугольнике* $ABCD$ *диагонали перпендикулярны и пересекаются в точке* O *так, что* $4AO : OC = 2 : 1$ *и* $BO : OD = 1 : 3$. *Через вершину* B *параллельно* CD *проведен отрезок* BK *(*K *принадлежит* AD*). Найти площадь четырехугольника* $ABCK$.

В ходе анализа условия задачи выясняется, что недостаточно данных для получения решения. Возникают вопросы:

– «Какую информацию можно извлечь из имеющихся данных?»,

– «Каких данных не хватает, чтобы получить ответ?»,

– «Как решить задачу, если ввести в условие значение площади треугольника COD?» и др.

Пример 33. *Площадь основания правильной треугольной пирамиды равна* $300\sqrt{3}$. *Найти высоту пирамиды. (Можно для получения ответа ввести значение вписанного в пирамиду шара, например,* $r = 6$*)*

Пример 34. *По круговой дороге велодрома едут два велосипедиста с постоянной скоростью. Когда они едут в противоположных направлениях, то встречаются через каждые* 10 *секунд; когда же едут в одном направлении, то один настигает другого через каждые* 170 *секунд. Какова скорость каждого велосипедиста? (Для решения задачи надо знать, к примеру, длину круговой дороги.)*

Особую значимость в плане развития дивергентного и конвергентного типов мышления имеют задачи с несколькими решениями. Такие задачи заставляют учащихся переключаться от одной мыслительной операции к другой, от одного способа действия к другому.

Эти задачи тренируют гибкость мыслительных процессов интеллектуально одаренных детей.

Основными показателями гибкости мышления являются:

– целесообразное варьирование способами действия;

– легкость перестройки знаний, навыков и их систем в соответствии с измененными условиями;

– легкое переключение от одного способа действия к другому.

Пример 35. *Сколькими способами можно уплатить* 170 *тысяч рублей, имея денежные купюры достоинством* 10 *и* 20 *тысяч?*

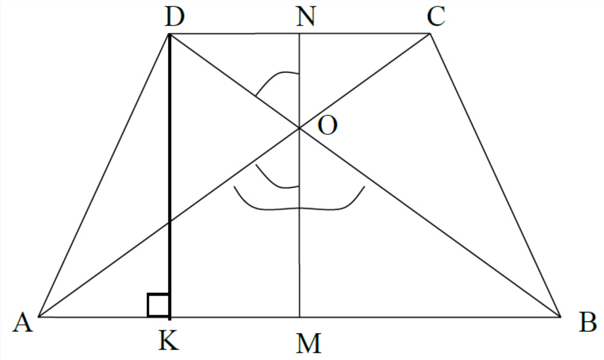


Рис. 2.5

Пример 36. *Найти площадь равнобокой трапеции, у которой основания равны 12 и 20 см, а диагонали взаимно перпендикулярны.*

Решение.

1 способ. Проведем высоту трапеции через точку пересечения диагоналей [рис. 2.5]. Так как трапеция равнобокая, то проведенная высота является осью симметрии. Угол AOM равен углу DON (по 45°), $AM = 10$ см, $DN = 6$ см. Треугольники AOM и DON являются прямоугольными и равнобедренными. Значит, высота $MN = 10 + 6 = 16$ (см).

$$S = \frac{12+20}{2} \cdot 16 = 256(\text{см}^2)$$

2 способ. Через точку пересечения диагоналей проведем высоту трапеции MN. Из того, что трапеция $ABCD$ равнобокая, следует, что треугольники AOB и DOC — равнобедренные. Но поскольку они к тому же и прямоугольные, то $OM = 0{,}5AB$, $ON = 0{,}5DC$. Сложив эти равенства почленно, получим:

$$MN = 0{,}5(AB + DC) = 0{,}5(12 + 20) = 16(\text{см}).$$

Значит, $S_{ABCD} = MN^2 = 16^2 = 256(\text{см}^2)$.

3 способ. Так как диагонали трапеции взаимно перпендикулярны, то суммы квадратов противолежащих сторон равны, то есть $122+202 = 2a^2$, где a — длина боковой стороны. Отсюда следует, что $a^2 = 544 : 2 = 272$.

Проведем высоту DK и рассмотрим прямоугольный треугольник ADK. $AK = (20-12) : 2 = 4$. По теореме Пифагора:$DK^2 = 272 - 16 = 256, DK = 16$. Далее находим площадь по известной формуле.

Пример 37. *На высоте равнобедренного треугольника $ABC(AB = BC)$ BB_1 взята точка D. Доказать, что $\triangle ADB_1 = \triangle DB_1C$.*

Решение.

1 способ. $\triangle ADB_1 = \triangle DB_1C$, так как $AD = DB_1$. DB_1 — общая сторона, угол ADB_1 равен углу B_1DC , так как смежные с ними углы ADB и BDC равны.

2 способ. Треугольник ADC — равнобедренный, так как $AD = DC$, DB_1 — его высота, значит, и биссектриса угла ADC. Тогда $\triangle ADB_1 = \triangle DB_1C$ по двум сторонам и углу между ними.

3 способ. В Треугольнике ABC высота BB_1 является и медианой. Значит, $AB_1 = B_1C$ и угол ADB_1 равен углу DB_1C и равен $90°$. DB_1 — общая сторона. Следовательно, $\triangle ADB_1 = \triangle DB_1C$.

4 способ. $\triangle ADC$ — равнобедренный, $AD = DC$; DB_1 — его медиана, значит, $AD = DC$ и угол DAC равен углу DCA (как углы при основании равнобедренного треугольника. Следовательно, $\triangle ADB_1 = \triangle DB_1C$.

Способность переключения от одной умственной операции к другой эффективно развивается при решении задач с меняющимся содержанием. Такие задачи строятся по следующему принципу: дана исходная задача, которую решает ученик; затем в исходной задаче изменяется один из элементов. Учащийся должен перестроить содержание своих действий с учетом изменившихся условий.

Пример 38. *Кусок сплава золота и серебра массой* 5 *кг содержит 60% серебра. Сколько надо добавить серебра, чтобы полученный новый сплав содержал 80% серебра?*

Решение.

Найдем массу серебра, содержащегося в 60%-м сплаве массой 5 кг: $\frac{5}{100\%} \cdot 60\% = 3$. Пусть x — масса серебра, которое надо добавить в сплав, чтобы получить 80% состав серебра. Тогда имеем уравнение:

$$\frac{3+x}{5+x} \cdot 100\% = 80\%,$$

откуда $x = 5$.

Ответ: 5 кг.

Пример 39. *Кусок сплава золота и серебра массой* 5 *кг содержит 60% серебра. Сколько надо добавить золота, чтобы полученный новый сплав содержал 80% золота?*

Решение.

С учетом предыдущей задачи, сплав содержит 2 кг золота. Пусть y — масса золота, которое надо добавить в сплав, чтобы получить 80% состав золота. Тогда имеем уравнение:

$$\frac{2+y}{5+y} \cdot 100\% = 80\%,$$

$$\frac{2+y}{5+y} = \frac{4}{5},$$

$$10 + 5y = 20 + 4y,$$

$$y = 10.$$

Ответ: 10 кг.

Пример 40. *В бассейн проведены две трубы. Первая наполняет бассейн за x часов, а вторая — за y часов. Через сколько часов наполнится пустой бассейн, если обе трубы будут открыты одновременно?*

Пример 41. *В бассейн проведены две трубы. Первая наполняет бассейн за x часов, а вторая — за y часов. Через сколько часов наполнится пустой бассейн, если по первой трубе вода поступает в бассейн, а по второй выливается из бассейна?*

Пример 42. *В бассейн проведены две трубы. Первая наполняет бассейн за x часов, а вторая — за y часов. Через сколько часов наполнится пустой бассейн, если по первой трубе вода поступает в течение 1часа, а затем — по второй трубе?*

Развитию конвергентного мышления способствуют задачи, которые имеют жесткую структуру и ответ в них вытекает из представленной информации. Таких задач достаточно в школьных учебниках математики.

С помощью разнообразных задач и продуманной системы вопросов надо развивать оценочное мышление интеллектуально одаренных школьников, предлагать задачи, которые заставляют критически относиться и к условию и к найденному решению.

Пример 43. *Найти боковую поверхность правильной шестиугольной пирамиды, сторона основания которой равна 5 см, а апофема 3 см (на самом деле такая пирамида не существует).*

Пример 44. *Найти сумму корней уравнения $\sin x = \pi/3$, принадлежащих отрезку $[0, \pi]$ (уравнение не имеет корней, так как $|\pi/3| > 1$).*

Пример 45. *В равнобедренном треугольнике ABC со сторонами 50 и 170 проведена высота CH к боковой стороне. O_1 и O_2 — центры окружностей, описанных около треугольников ACH и BCH. Найти расстояние O_1O_2.*

Далее мы остановимся на тех технологиях, которые, на наш взгляд, наиболее эффективны при обучении интеллектуально одаренных детей. Любая педагогическая технология может совершенствоваться в зависимости от меняющихся условий обучения. Каждый учитель вправе вносить в существующие технологии свои научно и методически обоснованные коррективы в зависимости от контингента учащихся, их психологических особенностей, уровня знаний, а также требований времени. Рассмотрим более подробно ряд технологий, эффективных при обучении интеллектуально одаренных детей.

Технология уровневой дифференциации

Смысл уровневой дифференциации заключается в том, чтобы адаптировать учебный процесс к познавательным возможностям каждого ученика, предъявить соответствующие уровню его развития требования, программы, учебники, методы и формы обучения. Технология уровневой дифференциации позволяет осуществлять ускорение и обогащение обучения, что очень важно при обучении интеллектуально одаренных детей. К примеру, основной целью изучения темы «Трапеция» в общеобразовательной школе является получение учащимися систематических сведений об этой фигуре и ее свойствах. Из образовательного стандарта и программы следует, что достаточными по теме «Трапеция» являются следующие теоретические сведения:

1. Четырехугольник, у которого две противоположные стороны параллельны, а две другие не параллельны, называется трапецией. Параллельные стороны называются ее основаниями, а непараллельные — боковыми сторонами. Если боковые стороны равны, трапеция называется равнобочной (равнобокой, равнобедренной).

2. Прямая, соединяющая середины боковых сторон трапеции, называется ее сред-

ней линией. Средняя линия трапеции параллельна основаниям и равна их полусумме.

3. Площадь трапеции равна произведению полусуммы оснований на высоту.

Рассмотрим, каким может быть объем теоретических знаний по теме «Трапеция» при обучении интеллектуально одаренных детей. Кроме перечисленных выше теоретических сведений 1–3 целесообразно включить следующие:

1. Площадь трапеции равна произведению полусуммы оснований на высоту.
2. Площадь трапеции равна произведению средней линии на высоту.
3. Площадь трапеции равна половине произведения диагоналей на синус угла между ними.
4. Сумма квадратов диагоналей трапеции равна сумме квадратов боковых сторон плюс удвоенное произведение оснований.
5. Если диагонали трапеции взаимно перпендикулярны, то суммы квадратов противолежащих сторон равны.
6. В равнобокой трапеции проекция диагонали на большее основание равна средней линии трапеции.
7. Площадь равнобокой трапеции равна произведению проекции диагонали на высоту.
8. Если в равнобокой трапеции диагонали взаимно перпендикулярны, то ее высота равна средней линии.
9. Площадь равнобокой трапеции, диагонали которой взаимно перпендикулярны, равна квадрату ее высоты.

10. В трапецию можно вписать окружность тогда и только тогда, когда суммы противолежащих сторон равны. При этом радиус вписанной окружности равен половине высоты трапеции.

11. Высота равнобокой трапеции, в которую можно вписать окружность, равна среднему геометрическому ее оснований.

12. Около трапеции можно описать окружность тогда и только тогда, когда трапеция равнобокая.

13. Если в трапецию можно вписать окружность и около нее можно описать окружность, то боковая сторона такой трапеции равна средней линии и равна проекции диагонали на большее основание.

14. Радиус окружности, описанной около трапеции, равен радиусу окружности, описанной около треугольника, построенного на большем основании и боковых сторонах трапеции.

15. В трапеции, вписанной в окружность, сумма произведений противолежащих сторон равна произведению диагоналей (вытекает из теоремы Птолемея).

Технология уровневой дифференциации позволяет уделить внимание каждому учащемуся в условиях классно-урочной системы обучения, организовать обучение как процесс активной самостоятельной работы. Это очень важно для тех интеллектуально одаренных детей, которые обучаются в сельских школах. Многие педагоги, хорошо понимая это, вводят в содержание урока индивидуальные задания для такой категории детей, чтобы создать условия для развития отдельных сторон деятельности одаренных учащихся: способность к самостоятельным обобщениям; поискам и нахождению закономерностей, содержащихся в учебном материале в скрытом виде; умение решать учебные задачи в нестандартных условиях (не заданных обучением). Использование творческих заданий на уроке позволяет более полно выявлять познавательные возможности интеллектуально одаренного ученика, дают динамику его развитию.

Проблемное обучение

Мы подчеркивали выше, что технология проблемного обучения является, на наш взгляд, самой эффективной технологией обучения интеллектуально одаренных детей. Под *проблемным обучением* будем понимать систему научно обоснованных методов и средств, применяемых в процессе развивающего обучения, предполагающую создание проблемных ситуаций и активную самостоятельную деятельность учащихся по их разрешению с целью, в первую очередь, интеллектуального и творческого развития, а также овладения знаниями, умениями, навыками и способами познания.

Проблемное обучение обеспечивает возможности творческого участия обучаемых в процессе освоения новых знаний, формирование познавательных интересов и творческого мышления, высокую степень органичного усвоения знаний и мотивации учащихся. Фактически основой для этого является моделирование реального творческого процесса за счет создания проблемной ситуации и управления поиском решения проблемы. При этом осознание, принятие и разрешение этих проблемных ситуаций происходит при оптимальной самостоятельности учащихся, но под общим направляющим руководством педагога в ходе совместного взаимодействия.

Главная трудность при подготовке и проведении уроков в рамках технологии проблемного обучения, по мнению учителя физики СШ № 23 г. Бреста А.Л. Карпука, состоит в моделировании необходимых условий для активного участия учащихся в работе на уроке. Чтобы «разжечь» детское любопытство, учитель тщательно продумывает этап мотивации (формирует мотивы на основе связи изучаемого материала с реальной жизнью, межпредметных связей).

Учитель искусно использует задачный материал для создания проблемных ситуаций на различных этапах уроков физики. Рассмотрим несколько наиболее интересных фрагментов.

Фрагмент 1. Изложение нового учебного материала. Для более глубокого понимания явления свободного падения тел после выяснения характера данного движения решается задача:

Задача 1. *С балкона, находящегося на высоте 25 м над землей, вертикально вверх брошено тело со скоростью 20 м/с.*

Задача не содержит вопроса, условие служит лишь отправной точкой для рассуждений, смысл такой задачи — распознать явление, рассмотреть его со всех возможных сторон, выявить существенные детали. После обсуждения ученики сами формулируют интересующие их вопросы, ответы на которые (решения) отыскиваются сообща.

Вопросы для обсуждения:

1. Можем ли мы сообщить какому-либо телу скорость 20 м/с?
2. Реальна ли данная ситуация?
3. Можно ли бросить тело «вертикально» вверх?
4. Будет ли это движение свободным падением? Почему?
5. Чем пренебрегаем в данной ситуации?
6. Как движется тело? Вверх? Вниз? И т. п.

Выполняется рисунок на доске (ось, уровень земли, начальная координата, начальная скорость, ускорение). Записываются законы $y(t)$ и $x(t)$. Обсуждается смысл записанных уравнений. Ученики задают следующие вопросы:

1. Где будет тело через 1, 2,... секунды? Какова его скорость в эти моменты времени?

2. Когда тело будет на высоте 40 м, 50 м, 20 м?

3. На сколько метров тело поднимется?
   Решается стандартная задача: найти максимальную высоту подъема тела, брошенного вертикально вверх. Вопрос записывается в тетрадь, высказываются предположения, учащиеся «сами» придумывают, как найти h_{max}. Необходимые записи делаются своевременно на доске учителем.

4. Когда и с какой скоростью тело упадет на землю?
   Строятся графики зависимостей, сопоставляются с результатами вычислений.

Фрагмент 2. Вместо изложения новой темы. На 3-м или 4-м уроке в IX классе вместо изложения тем: «Проекции векторов на координатные оси», «Равномерное прямолинейное движение» решается следующая задача:

Задача 2. *Тело переместилось из точки A с координатами $(-3; 4)$ в точку B с координатами $(5; -2)$ за 4 секунды.*

Задача не имеет вопроса, задана некорректно: многое недосказано. Однако, рассмотрев с учащимися возможные варианты, останавливаются на прямолинейном движении с постоянной скоростью.

Делается рисунок (система координат, точки A и B, вектор перемещения). По ходу «вбрасываются» элементы нового материала: проекции вектора перемещения, как их найти, их смысл, знаки проекций и их смысл. Находится модуль перемещения. Все новые определения, формулы записываются в тетрадь и выделяются. Выясняется смысл понятий «равномерное» движение, «скорость$>$. Находится модуль скорости по условию задачи, проекции скорости, выясняется их смысл.

Данная задача решается практически весь урок. Учитель лишь направляет ход мыслей учащихся в нужное русло. У детей создается ощущение, что они сами «придумали» все «это>. (т. е. способ описания равномерного прямолинейного движения).

А.Л. Карпук считает, что аналогично можно «исключить» изложение нового материала по темам: «Сила Лоренца», «Кинематика гармонических колебаний», «Резонанс в электрической цепи», «Явление радиоактивного распада», «Искусственные спутники Земли» и др., а разобрать эти темы, используя задачный материал.

Фрагмент 3. Перед изучением новой темы. В VII классе перед изучением темы «Архимедова сила» решают задачу:

Задача 3. *Брусок размерами* 20 *см*$\times 20$ *см*$\times 40$ *см опустили под воду на глубину 10 см.*

Задача без вопроса. Основная цель решения задачи перед изучением темы «прочувствовать» ситуацию, получить выводы, на которые будут опираться при изучении темы. Выводы должны быть понятны всем, это залог успешного усвоения предстоящей темы.

Обсуждается неоднозначная ситуация: как можно осуществить реально условие задачи. В результате появляется рисунок (брусок целиком в воде, глубина погружения, по договоренности, — расстояние от поверхности воды до верхней параллельной ей грани бруска). Далее рассчитываются силы, с которыми вода давит на грани бруска; эти силы сравниваются, ученики формулируют выводы (равнодействующая отлична от нуля, направлена вверх, боковые силы уравновешены). Выясняется, какие еще силы действуют на брусок (имеется в виду сила тяжести). Обсуждение приводит к необходимости знать плотность вещества бруска. Для примера предполагается, что брусок сделан из а) дерева; б) металла. Находится сила тяжести в каждом случае, она сравнивается с равнодействующей сил давления воды, делаются выводы (сплошное тело с плотностью, большей, чем плотность жидкости, тонет в ней; с плотностью, меньшей, чем плотность жидкости, всплывает). Задача решается весь урок в «активном» режиме.

Фрагмент 4. Закрепления знаний, обобщения изученного по теме «Свойства паров. Влажность воздуха». Предлагается задача:

Задача 4. *Имеется сосуд, содержащий воздух при температуре* $17°C$ *и влажности* 60%. *Как сделать водяной пар в сосуде насыщенным?*

Это комплексная задача с неявным вопросом: неясно, что нужно найти. *Суть*: «придумать» способ насыщения пара и сформулировать минизадачу, затем ее решить.

Строится график зависимости давления насыщенного пара от температуры; наносится точка, описывающая данное состояние пара; отыскиваются способы его насыщения. Рассматриваются все возможности: изобарное охлаждение, увеличение массы влаги, изотермическое сжатие, изохорное охлаждение. Все варианты предлагают и обосновывают ученики. По ходу обсуждается реальность осуществления каждого из вариантов, необходимые для этого условия, изучается возможность каждого процесса в реальной жизни (в квартире, на улице и т. д.). Процессы изображаются графически. В результате решения одной задачи отрабатываются умения и навыки по данной теме, актуализируются знания, происходит их более полное и глубокое усвоение.

Фрагмент 5. Проверка усвоения учебного материала. Для проверки знаний, умений и навыков учащихся используются в основном такие формы работы, как самостоятельная, проверочная, контрольная работы. Отличительная черта заданий, входящих в текст данных работ, — преимущественно репродуктивный характер самих задач. Этап проверки — выявление степени соответствия знаний, умений, навыков требованиям образовательного стандарта. Здесь задачи — не средство обучения, их решение есть показатель осознанности и глубины знаний. Учитель предлагает учащимся такие задания, которые содержат относительно большое число вопросов — шагов решения одной большой задачи.

Например, в контрольной работе по «Кинематике» в IX классе учащимся была предложена задача:

Задача 5. *Пассажир первого вагона поезда длиной l прогуливался по перрону вдоль состава. Когда он был рядом с последним вагоном, поезд тронулся с ускорением a*

Вопросы:

1. Выберите систему отсчета, запишите уравнение движения поезда и зависимость его скорости от времени.

2. В момент начала движения поезда пассажир побежал со скоростью v к своему вагону. Запишите уравнение движения пассажира и постройте график зависимости координаты от времени.

3. Через какое время пассажир догонит свой вагон?

4. Объясните смысл ответов.

5. Чему равно перемещение пассажира относительно земли? Относительно поезда? (За время бега.)

6. Найдите зависимость расстояния пассажира до своего вагона от времени.

7. Напишите уравнение движения пассажира в системе отсчета, связанной с поездом.

8. С какой минимальной скоростью может бежать пассажир, чтобы догнать свой вагон? При каком условии пассажир не догонит свой вагон?

А.Л. Карпук убежден, что есть немало задач, которые можно также «раскрутить»: поставить множество вопросов — шагов. Преимущество этих заданий состоит, прежде всего, в том, что каждый ученик загружен на весь урок, имеет возможность спокойно, в оптимальном для него темпе решать то, что он может решить (в такой формулировке заданий буквально каждый ученик способен выполнить часть из них). Каждому заданию можно присвоить некоторое количество баллов и оценивать его по проценту правильных ответов (решений). Можно определить задания обязательные и дополнительные, оценки выставляются в этом случае традиционным образом.

Физические задачи повышенной трудности (особенно исследовательского типа) дают возможность учащемуся применить свои знания к решению практических проблем, а преподавателю — выяснить, насколько глубоко понимает школьник предмет. Задачи позволяют развивать творческое мышление учащихся. И очень хорошо, когда учитель предлагает задачи таким образом, что они являются постановкой небольших проблем, а ученик должен на основании известных физических законов проанализировать и количественно описать заданное явление природы. Хорошо, когда эти явления природы выбраны так, чтобы они имели либо научный, либо практический интерес, и при этом учитывалось, что уровень знаний учащихся должен быть достаточным, чтобы выполнить задание.

Для интеллектуально одаренных учащихся физические задачи лучше составлять таким образом, чтобы подходов к их решению было несколько, с тем, чтобы и в выборе решения могла проявиться индивидуальность школьника. Решение такого рода задач дает учащемуся тренировку в научном мышлении и вырабатывает в нем любовь к научным проблемам. Кроме проблемного характера задач, целесообразно в них не задавать численные величины физических констант и параметров, а предоставлять их выбор самим учащимся.

Задача 6. *По какой траектории должен лететь самолет для того, чтобы можно было воспроизвести невесомость?*

Эту задачу можно решить несколькими способами:

– написать уравнение движения самолета в поле тяжести Земли, приравняв к нулю равнодействующую сил, действующих на точку, находящуюся в самолете.

– принять, что если самолет следует траектории свободно летящего тела, которая в земном поле близка к параболе, тогда тело, находящееся в самолете, может быть в состоянии невесомости.

Можно выяснить, что требуется при полете самолета для того, чтобы во всех точках кабины самолета было одновременно состояние невесомости; какие навигационные приборы нужны, чтобы пилот мог вести самолет по нужной для осуществления невесомости траектории. Учащимся потребуются сведения и о том, какова максимальная высота полета и предельная скорость самолета. Выбор этих данных учащиеся должны осуществить сами.

Можно привести целый ряд интересных задач и вопросов:

1. Объясните, почему человек может бежать по очень тонкому льду, но не может стоять на нем, не проваливаясь?

2. Оцените порядок скорости, с которой человек должен бежать по воде, чтобы не тонуть.

3. Объясните, почему, когда камень или капля дождя падают в воду, брызги летят вверх. От чего больше зависит высота полета брызг: от размеров камня или от скорости его падения? Какова максимальная высота полета брызг?

4. Почему жидкий азот можно лить на руку, не боясь «ожога»?

5. Определите предел радиуса слышимости разговора на открытом воздухе.

6. Перечислите факторы, которые сказываются на точности хода карманных часов. Оцените относительные значения этих факторов.

7. Почему при разрыве тока в первичной цепи трансформатора во вторичной не получается перенапряжения, в то время как в индукционной спирали оно возникает?

8. Опишите отражение белого света от боковой стороны мыльного пузыря в зависимости от его размеров и толщины пленки.

9. Определить мощность мотора насоса, необходимого для поддержания струи, чтобы тушить пожар шестиэтажного дома.

10. Каких размеров должна быть линза, чтобы собранные в ее фокусе солнечные лучи раскалили железную проволоку [72]?

Приемы создания проблемных ситуаций на уроках математики могут быть самыми разными. Их выбор определяется содержанием учебного материала, целью конкретного урока. Любая неверная трактовка теории, ошибка при решении задачи, любое предположение, опровержение, несоответствие могут стать основой появления проблемной ситуации. Само слово «задача» на многих языках звучит как «проблема». Курс геометрии своей строгостью и логической последовательностью создает большие возможности для проблемного обучения.

Рассмотрим способы создания проблемных ситуаций при изучении темы «Многогранники». Можно предложить учащимся рассмотреть модели и назвать основной признак многогранников (со всех сторон они ограничены плоскостями). Далее исследовать грани (гранями многогранников могут быть любые многоугольники (треугольники, четырехугольники, пятиугольники и т. д.)) и виды (среди многогранников имеются четырехгранники, пятигранники и др.).

Проблемную ситуацию можно спровоцировать вопросом: *а есть ли трехгранники*? Трехгранника быть не может, так как наименьшее число граней, необходимое для образования пространственного тела — четыре; куб и параллелепипед — это шестигранники.

Далее можно предложить учащимся ответить на вопросы:

Вопрос 1. Сосчитайте число граней, ребер, вершин, двугранных и трехгранных углов в параллелепипеде.

Вопрос 2. Найдите среди имеющихся моделей правильный четырехгранник. (Это тетраэдр). Какой формы его грани? Сколько у него граней, ребер, вершин?

Вопрос 3. Найдите среди моделей на электронной доске другие правильные многогранники. Сколько граней у каждого из них и какую фигуру представляет каждая грань?

После введения определения призмы есть смысл продолжить формулировать вопросы:

Вопрос 4. По каким признакам куб и параллелепипед можно назвать призмами?

Вопрос 5. Почему нельзя треугольную призму назвать трехгранной? (У нее пять граней).

Вопрос 6. Сколько ребер, вершин и граней в пятиугольной, в десятиугольной призме?

Вопрос 7. Сколько плоских углов, двугранных углов и трехгранных углов в треугольной, четырехугольной, шестиугольной призмах?

Вопрос 8. Почему число всех граней призмы на 2 больше числа боковых граней? Сколько боковых граней у n-угольной призмы?

Вопрос 9. Равно ли число углов любой призмы числу ее ребер?

Вопрос 10. Равно ли число трехгранных углов призмы числу ее вершин?

Вопрос 11. Сколько пар параллельных друг другу боковых граней у прямой призмы, в основании которой параллелограмм? трапеция? правильные шестиугольники? Будут ли эти параллельные друг другу грани равными? (Проверьте на моделях).

Вопрос 12. Имеются ли параллельные боковые грани у пятиугольной призмы? Сделайте вывод.

Вопрос 13. Что можно сказать о двугранном угле между плоскостью боковой грани и основанием любой прямой призмы?

Вопрос 14. Какой двугранный угол (острый, прямой или тупой) образуют две смежные грани прямой треугольной призмы? четырехугольной? шестиугольной?

Вопрос 15. На модели любой прямой призмы покажите: скрещивающиеся прямые и поясните свой ответ; взаимно перпендикулярные и взаимно параллельные прямые (ребра).

Вопрос 16. На модели любой прямой призмы покажите: а) прямые, лежащие в плоскости основания (верхнего и нижнего), пересекающие ее, не имеющие общих точек с плоскостью основания; б) те же вопросы относительно плоскости какой-либо боковой грани.

Вопрос 17. Можно ли всякую четырехугольную призму назвать параллелепипедом?

Вопрос 18. Можно ли параллелепипед назвать призмой?

Вопрос 19. У правильной четырехугольной призмы высота равна стороне основания. Как иначе можно назвать эту призму?

Вопрос 20. Всегда ли можно назвать кубом параллелепипед, у которого боковые грани квадраты?

На этом этапе обучения учащиеся изучают теоретический материал с помощью предложенной учителем системы проблемных вопросов.

В конце урока целесообразно предложить учащимся построить обобщающий ответ. Такой ответ потребует переосмысления учебного материала, его систематизации.

Рекомендации учителям, использующим проблемное обучение:

1. К каждому уроку определяйте типы заданий и дополнительные цели, рассчитанные на детей с высокими интеллектуальными способностями.

2. Учебный процесс как процесс совместного поиска ответов на возникшие вопросы, задачи, проблемы.

3. Старайтесь увлечь учащихся проблемой и процессом ее исследования.

4. Используйте мотивы самореализации, соревнования, создавайте максимум положительных эмоций.

5. Проявляйте терпимость к ошибкам учеников, допускаемым ими при попытках найти собственное решение, к неумению сформулировать, обосновать и (или) защитить свою позицию.

6. Всячески поощряйте проявления инициативы.

7. Воспитывайте ответственность за принятые решения.

Технология укрупнения дидактических единиц

Технология укрупнения дидактических единиц позволяет изучать одновременно взаимно обратные действия и операции: сложение и вычитание, умножение и деление, возведение в степень и извлечение корня, заключение в скобки и раскрытие скобок, логарифмирование и потенцирование.

УДЕ развивает логическое мышление учащихся, учит их приемам свертывания и развертывания информации, помогает безошибочно вычленять главное. При укрупнении дидактических единиц используются скрытые резервы мышления, повышающие результативность процесса обучения, так как в ходе каждого урока ученики ставятся в ситуацию выбора или перед определенной проблемой, требующей нестандартного выхода из затруднительного положения путем привлечения следующих знаний. Все это очень важно при обучении интеллектуально одаренных детей.

Приведем пример использования технологии укрупнения дидактических единиц при изучении арифметической и геометрической прогрессий. После введения определений начинается знакомство со свойствами арифметической прогрессии. Учащиеся доказывают формулы, утверждения, отвечают на вопросы:

1. Формула для n-го члена: $a_n = a_1 + d(n-1)$.
2. Формула, связывающая три соседних члена: $a_k = 0{,}5(a_{k-1} + a_{k+1})$.
3. Все члены прогрессии в системе координат располагаются на одной прямой.
4. Формула для суммы n членов: $S_n = 0{,}5(a_1 + a_n)n$.
5. Какие из этих свойств являются признаками прогрессии?
6. Какие величины участвуют в каждой из формул?
7. Как выразить из формулы каждую из входящих в нее величин?
8. Каков характер зависимости величин между собой?
9. Какие следствия можно получить из каждой формулы?
10. При решении каких задач можно применить каждую из формул (приведите примеры)?

По характеру мыслительных процессов, на которых основывается изучение арифметической и геометрической прогрессий, они сходны, по-этому возможно совместное изучение этих тем в плане противопоставления. При обращении к геометрической прогрессии, учитель говорит, что ее определение аналогично определению арифметической прогрессии с заменой сложения умножением. При этом акцентирует внимание на том, что в геометрической прогрессии все члены и знаменатель должны быть отличны от нуля. И задает вопрос: «Почему?». В ходе исследования данной проблемы, учащиеся приходят к выводу, что это требование необходимо для того, чтобы однозначно можно было определить прогрессию и по любому члену и знаменателю, а также сам знаменатель, если даны все члены прогрессии. Если допустить, что члены прогрессии равны нулю, то последовательность $0, 0, 0, 0, \ldots, 0$ можно считать прогрессией со знаменателем 5, или 100, или -3, то есть знаменатель в этом случае определяется неоднозначно. А если допустить, что знаменатель может быть равным нулю, то зная знаменатель и второй член, мы не сможем найти первый, так как он, в принципе, может быть равным любому числу.

Целесообразно обсудить с учащимися и названия прогрессий. Название «арифметическая прогрессия» для последовательности $a_1, a_2, \ldots, a_n$ вытекает из того факта, что любой член прогрессии есть среднее арифметическое соседних с ним членов. Аналогично, если $b_1, b_2, \ldots, b_n$ — геометрическая прогрессия с положительными членами, то каждый ее член равен среднему геометрическому своих соседних членов.

После глубокой проработки теоретического материала целесообразно перейти к решению задач. Необходимо заметить, что большинство задач на арифметические и геометрические прогрессии решаются составлением системы уравнений. Однако вначале имеет смысл выполнить несколько устных упражнений.

Задача 1. *Даны последовательности:*

1) 1; 2; 4; 8; 16;…

2) 5; –5; 5; –5;…

3) 1; 4; 9; 16; 25;…

4) 12; 6; 3; 1,5;…

5) 1; 2; 3; 4;…

6) $-2; 8; -12; 28; \ldots$

7) $0{,}5; 1; 1{,}5; 2; \ldots$

8) $9; 9; 9; 9; \ldots$

9) $5; 0; 0; 0 \ldots$

10) $0; 0; 0; 0 \ldots$

Необходимо:

1. *Выбрать арифметические прогрессии (обосновать свой выбор и продолжить);*
2. *Выбрать геометрические прогрессии (обосновать свой выбор и продолжить);*
3. *Дать определение арифметической и геометрической прогрессий.*

Задача 2. *В геометрической прогрессии первый член равен* 3, *второй* — 7. *Найти знаменатель прогрессии.*

Задача 3. *В арифметической прогрессии первый член равен* -16, *второй* -14. *Найти разность прогрессии.*

После устной работы целесообразно перейти к решению более сложных задач.

Задача 4. *При свободном падении тело проходит в первую секунду 4,9 м, а в каждую следующую на 9,8 м больше, чем в предыдущую. Найти глубину шахты, если тело достигло дна через 5 секунд после начала падения.*

Система вопросов:

1. Какую прогрессию образуют расстояния, пролетаемые телом каждую секунду?

2. Какова разность этой прогрессии?

3. Сколько членов в этой прогрессии?

4. Что нужно найти?

Задача 5. *Турист, поднимаясь в гору, в первый час достиг высоты 800 м, а каждый следующий час поднимался на высоту на 25 м меньше, чем предыдущий. За сколько часов турист достигнет высоты 5700 м?*

Система заданий:

1. Составить последовательность подъема каждый час.
2. Какой прогрессией является данная последовательность?
3. Чему равен первый член этой последовательности?
4. Чему равна разность этой прогрессии?
5. Какие элементы этой последовательности надо найти, чтобы ответить на вопрос задачи?

Задача 6. *В поселке 4095 жителей. Одна бабушка сообщила новость двум своим знакомым за 1 минуту. Те двое, каждый через 1 минуту, сообщили эту новость еще двум своим знакомым, а те через 2 минуты ещё двоим. Через сколько времени эту новость узнает весь поселок?*

Система заданий:

1. Составить последовательность людей, узнающих новость.
2. Какую прогрессию образует эта последовательность?

3. Чему равен первый член этой прогрессии?

4. Чему равен знаменатель?

5. Чем является число 4095 в этой прогрессии?

Затем можно предложить учащимся самостоятельно решить следующие задачи.

Задача 7. *Три числа x, y и 12 образуют убывающую геометрическую прогрессию. Если вместо 12 взять 9, то три числа составят арифметическую прогрессию. Найти x и y.*

Задача 8. *Найти трехзначное число по следующим условиям: его цифры образуют геометрическую прогрессию; если из него вычесть 594, то получится число, записанное теми же цифрами, но в обратном порядке; если цифры искомого числа увеличить соответственно на 1, на 2, на 1, то получится арифметическая прогрессия.*

Задача 9. *В колбу поместили бактерию, которая делится на две каждую секунду и заполнит колбу за 5 минут. За какое время заполнится колба, если в нее поместить сразу две бактерии?*

Задача 10. *Три числа, сумма которых равна 26, составляют геометрическую прогрессию. Если к этим числам прибавить соответственно 1, 6 и 3, то получатся три числа, составляющие арифметическую прогрессию. Найти эти числа.*

Задача 11. *Сумма трех положительных чисел, составляющих арифметическую прогрессию, равна 15. Если к этим числам прибавить соответственно 1, 4, 19, то получится геометрическая прогрессия. Найти эти числа.*

Следующую задачу (она нестандартная) можно предложить интеллектуально одаренным детям решить дома, а затем в классе представить самое оригинальное решение.

Задача 12. *Числа $1, 2, 3, \ldots, n^2$ расположены в виде квадратной таблицы:*

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & n \\ n+1 & n+2 & n+3 & 2n \\ 2n+1 & 2n+2 & 2n+3 & 3n \\ (n-1)n+1 & (n-1)n+2 & (n-1)n+3 & n^2 \end{bmatrix}$$

Из этой таблицы выбирается производное число, а строка и столбец, содержащие это число, вычёркиваются. Затем из оставшихся чисел снова выбирается одно число, и снова вычёркиваются строка и столбец, содержащие это число, — и так до тех пор, пока в таблице не останется одно число, которое автоматически попадёт в число отобранных. Чему равна сумма всех выбранных таким образом чисел?

Решение.

Первую строку можно записать так $0+1, 0+2, \ldots, 0+n$. Последний столбец: $0+n, n+n, 2n+n, \ldots, (n-1)n+n$.

Каждое число таблицы теперь представлено в виде суммы двух чисел, причём первое слагаемое одинаково у всех чисел, стоящих в одной строке; второе слагаемое одинаково у всех чисел, стоящих в одном столбце.

Так как среди выбранных чисел будет по одному слагаемому из каждого столбца и по одному слагаемому из каждой строки, то сумма всех первых слагаемых выбранных чисел равна:

$$0 + n + 2n + \cdots + (n-1)n = \frac{0 + n(n-1)}{2}n = \frac{n^2(n-1)}{2},$$

а сумма вторых слагаемых:

$$1 + 2 + \cdots + n = \frac{1+n}{2}n = \frac{n(1+n)}{2}.$$

Кафедра алгебры и геометрии

Начало

Содержание

Литература

◄ ►

◄◄ ►►

Назад

На весь экран

Закрыть

Следовательно, сумма всех отобранных чисел:

$$S = \frac{n^2(n-1)}{2} + \frac{n(n+1)}{2} + \frac{n(n^2+1)}{2}.$$

.

В рамках технологии укрупнения дидактических единиц можно провести исследование прогрессий, предварительно распределив между учащимися (группами) вопросы для самостоятельной проработки и подготовки сообщений:

1. Исторические сведения о прогрессиях.
2. Арифметическая прогрессия.
3. Геометрическая прогрессия.
4. Бесконечно убывающая геометрическая прогрессия.
5. Числа Фибоначчи.
6. Область применения прогрессий.
7. Нестандартные задачи, связанные с прогрессиями.

Итак, мы рассмотрели отдельные фрагменты использования технологии укрупнения дидактических единиц на уроках математики. Нет сомнения — эта технология чрезвычайно полезна при обучении интеллектуально одаренных детей. Педагоги, особенно учителя математики, должны пользоваться идеями УДЕ.

Сегодня можно с уверенностью сказать, что Беларусь — информационное общество. Необходимость новых знаний, информационной грамотности, умения самостоятельно получать знания обусловили возникновение нового вида образования, в котором информационные технологии играют важнейшую роль. Компьютерные технологии позволяют видеть, читать, слушать, обсуждать, что увеличивает объем восприятия учащимися новой информации. Компьютерные технологии делают процесс обучения индивидуальным.

Способов применения информационных технологий, способствующих развитию интеллектуальной одаренности, очень много. Это и компьютерное моделирование, и постановки виртуальных экспериментов, и овладение новой теорией. Компьютерные и информационные технологии можно направленно применять в обучении на развитие мышления, памяти, внимания, воображения и др. Компьютер в обучении интеллектуально одаренного школьника является неотъемлемой частью развивающей предметной среды.

Практически все учащиеся сегодня пользуются ресурсами Интернет (при обращении к справочным материалам; при подготовке к урокам и тестированию; при выполнении исследовательских работ, подготовке рефератов и докладов; участвуют в различных телекоммуникационных проектах). Коммуникационные возможности всемирной сети Интернет изменили привычный смысл образования как передачи определенной суммы знаний. Одно из главных изменений — уход от репродуктивной деятельности, переход к интерактивным формам обучения. С помощью компьютерных технологий можно проводить непрерывные математические олимпиады, конкурсы, турниры, осуществлять дистанционное обучение.

Неоценимы возможности компьютера при изучении геометрии. Этот предмет занимает особое место в спектре учебных дисциплин. Геометрия прямо влияет на эффективность изучения других предметов, является средством интеллектуального совершенствования личности, интегрирует в себе возможности для развития логического мышления, пространственных представлений, интуиции. За время обучения в школе ученик обязан увидеть реальные связи и воплощения геометрии в жизни, в природе, в искусстве, в науке и технике, чтобы геометрия предстала перед ним как полное содержания, значения и красоты явление культуры, как наука в ее связях с реальностью.

Одним из факторов успешного обучения геометрии и особенно той ее части, которая традиционно называется стереометрией, является наглядность. Многие учащиеся не в состоянии сразу представить 3-х мерную фигуру в пространстве, а тем более выполнить с ней какие-либо действия. 100% учащихся, имеющих высокие математические способности, отметили, что построение сечений и решение задач на комбинации многогранников и тел вращения — самые сложные вопросы школьной геометрии. Во многом сложность обусловлена и тем, что больше в школах нашей страны нет такого предмета, как черчение.

На уроках геометрии наибольшее распространение имеет практика изображения фигур на плоскости (обычно доске). Данный способ имеет ряд недостатков:

— тяжело правильно нарисовать сложную фигуру;

— объект, изображенный на плоскости, надо правильно интерпретировать;

— само построение занимает определенное время;

— невысокое качество изображаемых фигур (даже если чертеж выполняет учитель).

Иногда для повышения наглядности используются модели фигур, которые очень хороши в начале обучения. Но далее, с увеличением сложности фигур и использованием всё большего числа их комбинаций, этот способ перестаёт работать. Проблема особенно усугубляется при построении сечений.

Сегодня существует программное обеспечение (Mathematica, 3DMax и т. п.). Это программное обеспечение достаточно сложно, в нем нет средств облегчения выполнения такого типа задач. Кроме того, оно не бесплатное. Да и создавалось оно для совершенно других целей и соответственно не может полностью решить данную проблему.

Возможность увидеть различные фигуры и их сочетания, выполнять с ними какие-либо действия, а также осуществлять просмотр фигур с различных ракурсов предоставляет программа Geometr, разработанная А.А. Гринько (выпускником БрГУ 2007 г.). Программа позволяет:

- выводить фигуры на экран компьютера;
- выполнять различные операции с фигурами;
- автоматизировать процесс построения сечений на основе существующих методов;
- вращать фигуры, изменять точки просмотра и масштаб;
- изменять цвета, толщину, подписи фигур;
- сохранять результаты работы, сохранять изображения фигур, загружать их из файлов;
- печатать изображения фигур;
- отменять выполненные действия;
- максимально уменьшить требования программы к системе, для обеспечения наилучшей совместимости с применяемым оборудованием.
- работать в сети.

Программа Geometr развивает воображение учащихся, повышает качество обучения, облегчает работу преподавателей (автоматизирует их труд при обучении и проведения контрольных мероприятий).

О программе Geometr

Программа *Geometr* предназначена для построения и обработки 3-х мерных моделей геометрических фигур в реальном времени. Программа имеет небольшой размер и оптимизирована для быстрого запуска и минимальной загрузки системы.

Geometr самодостаточен, не требует установки и каких-либо нестандартных компонентов или библиотек. Прост в управлении, но содержит множество дополнительных настроек, то есть подходит как новичкам, так и профессионалам. Существует возможность как сохранять, так и загружать построенные фигуры из специальных файлов; ведётся история действий, которая сохраняется вместе с фигурами.

При разработки *Geometr*а одной из основных задач являлось построение системы, которая обрабатывала наибольшее число исключительных ситуаций и, соответственно, вероятность выведения её из строя была бы минимальной.

Программа написана исключительно на основе стандартных средств WinApi. Разрабатывалась для Windows 95/98/ME/2000/XP.

Возможности программы. С помощью программы *Geometr* возможно:

1. Строить произвольные геометрические фигуры.

2. Строить графики функций.

3. Вращать и перемещать фигуры.

4. Получать информацию о фигурах, такую как длина, площадь и т.д.

5. Выполнять операции над фигурами (поворот, сдвиг и т.д).
6. Возможна привязка фигур друг к другу.
7. Выделять цветом и другими параметрами фигуры.
8. Во время работы возможна отмена и повтор действий, которые автоматически сохраняются во время работы в файле, что позволяет отменять действия, сделанные очень давно (в случае необходимости историю можно очистить).
9. Сохранять их в специальный типизированный файл.
10. Распечатывать изображения.
11. Сохранять полученные результаты как bmp файл.
12. Гибкая настройка графики для возможности работы на слабых компьютерах.
13. Возможность существенного ограничения количества ресурсов потребляемых программой, что полезно на мощных компьютерах.
14. Возможно редактирования интерфейса программы.
15. Запускать программу даже на очень старом оборудовании.

Системные требования. Минимальные системные требования программы Geometr:

1. Центральный процессор Pentium 90 Mhz или совместимый.
2. 8 Mb оперативной памяти, при меньшем количестве возможны сбои (использует около 7 Mb памяти).

3. Около 200 Kb дискового пространства под саму программу.

4. Операционная система MS Windows 95, для полноценной работы необходима MS Windows 98 или выше, возможна работа под OS семейстава Linux, при использовании wine.

В такой конфигурации обеспечивается FPS около 25 в оконном режиме, при работе с фигурами средней сложности.

Рекомендуемые системные требования программы Geometr:

1. Центральный процессор Pentium II или лучше.

2. 16 Mb оперативной памяти или больше.

3. Около 200 Kb дискового пространства под саму программу и немного место под проекты.

4. Видеокарту класса NVIDIA GeForce 8800 GTX SLI 2x768 GDDR3 для наибольшего количества FPS. Операционная система MS Windows 98/ 98SE/ ME/ 2000/ XP/ Vista.

Построение сечений на ЭВМ является очень непростой задачей. Особенно, если необходимо написать программу, работающую практически на любом оборудовании и не зависящую от внешних библиотек.

Geometr состоит из большого числа модулей (работа с WnApi, OpenGL, WinSockets, обработка файлов с данными, интерпретатор формул и т.д.), которые необходимо связать вместе и обеспечить бессбойную согласованную работу.

Почти у каждого модуля есть свой набор данных, стандартные параметры, используемые при невозможности считывания основных, механизм защиты от некорректных данных. Даже при отсутствии файла конфигурации или сильном его повреждении программа будет продолжать работать. Её можно будет настроить изнутри.

После завершения работы Geometr сохраняет исправленные от ошибок данные и текущие параметры. У модулей есть доступ только к необходимым им данным.

Программа Geometr позволяет строить сложные сечения на основе простых примитивов: линий, точек, плоскостей, окружностей, возможно построение различных графиков функций. Даже на современном этапе Geometr может выполнять поставленные перед ним задачи.

Рассмотрим *пример использования программы Geometr*.

Задача 1. *Постройте сечение пирамиды $SABCDE$ плоскостью, проходящей через точку $M \in SBC$ и прямую l, лежащую в грани SED (рис. 2.6).*

Построение.

1. $SM \cap BC = M_1$.
2. $l \cap SD = \bar{D}, l \cap SD = \bar{E}$.
3. $M\bar{E} \cap M_1E = X, l \cap ED = Y, XY = s$ — след секущей плоскости.
4. $s \cap AB = K, s \cap AE = N$.
5. $BC \cap s = B0, B0M \cap SB = \bar{B}, B_0M \cap SC = \bar{C}$.
6. $K\bar{B}\bar{C}\bar{D}\bar{E}N$ — искомое сечение.

А теперь построим это же сечение, но уже с помощью компьютера. Построим пирамиду ABCDES:

I. Добавим точку A(0.618034, 0, 1.902113):

   a. Вызовем диалог Редактор, Добавить, Точку;
   b. Выберем вариант расположения — явное задание координат;

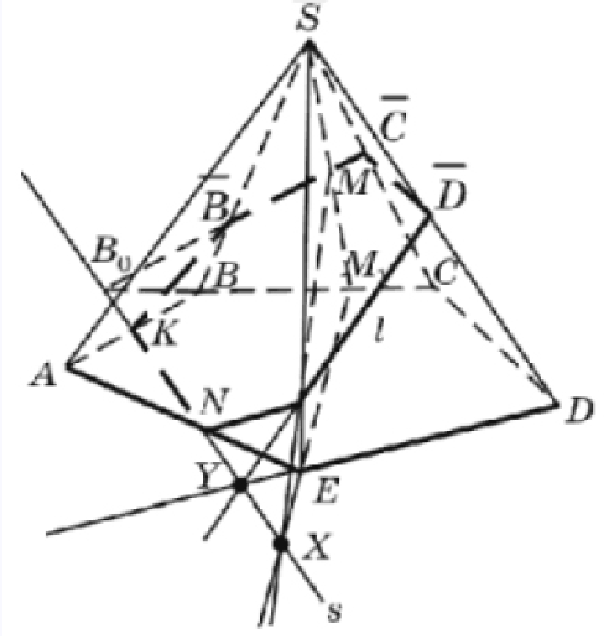


Рис. 2.6

c. Установим $x = 0.618034, y = 0, z = 1.902113$;

d. Изменим название точки на A;

e. Нажмём на кнопку «Применить».

II. Аналогично добавим точки $B(-1.618033, 0, 1.17557)$, $C(-1.618033, 0, -1.17557)$, $D(0.618034, 0, -1.902113)$, $E(2, 0, 0)$, $S(0, 2, 0)$;

III. Добавим линию AB, соединяющую точки A и B:

a. Вызовем диалог Редактор, Добавить, линию;

b. Первую точку установим — A, вторую -— B;

c. Изменим название линии на AB;

d. Нажмем на кнопку «Применить».

IV. Аналогично добавим линии BC, CD, DE, EA, AS, BS, CS, DS, ES;

V. Добавим плоскость $ABCDE$:

a. Вызовем диалог Редактор, Добавить, плоскость;

b. В элемент управления: «Проходит через точки» добавим точки A, B, C, D, E;

c. Изменим название на $ABCDE$;

d. Нажмем на кнопку «Применить».

VI. Аналогично добавим плоскости BCS, CDS, DES, EAS, ABS;

Добавим фигуры, через которые проходит сечение:

I. Добавим точку $M(-0.970819, 0.8, 0.3) \in SBC$

II. Добавим прямую $l = E_1D_1$:

a. Добавим точку E_1 на прямой ES:

1. Вызовем диалог Редактор, Добавить, Точку;
2. Выберем вариант расположения –– «находиться на линии»;
3. Первую точку установим — E, вторую -— S;
4. Отношение $= 0.2$;

5. Изменим название на E_1;
6. Нажмем на кнопку «Применить».

b. Аналогично добавим точку D_1 на прямой DS, с отношением $= 0.7$

c. Добавим линию E_1D_1, соединяющую точки E_1 и D_1

Построим сечение:

I. Построим точку $M_1 = SM \cap BC$:

a. Проведем линию SM;

b. Продлим ее после точки M:

1. Диалог: Редактор, Изменить;
2. Выберем тип $=$ «линии» и фигуру SM;
3. Нажмем на кнопку «Изменить»;
4. В появившемся диалоге установим галочку «продлить линию после 2-й точки»;
5. Укажем, что продлеваем на 5;
6. Нажмем на кнопку «Применить».

c. Построим точку M_1:

1. Диалог: Редактор, Добавить, Точку;
2. Выберем вариант расположения — «Является точкой пересечения линий»;
3. Укажем, что линиями являются соответственно SM и CB;
4. Нажмем на кнопку «Применить».

II. Построим линии ME_1, M_1E, которые продлим после 2-й точки на 5 единиц;

III. Продлим линии DE и D_1E_1 после 2-й точки на 5 единиц;

IV. Построим точки $ME_1 \cap M_1E = X, l \cap ED = Y$;

V. Добавим линию $s = XY$;

VI. Продлим XY после Y на 10;

VII. Продлим AB после B на 5;

VIII. Построим точки $s \cap AB = K, s \cap AE = N, BC \cap s = B0$;

IX. Добавим линию B_0M, продлим её с обоих концов на 5;

X. SB продлим на 5 после B;

XI. $B_0M \cap SB = B_1, B0M \cap SC = C_1$.

Выделим сечение:

I. Вызовем диалог Редактор, Добавить, Полилинии;

II. В элемент управления: «Проходит через точки» добавим точки K, B_1, C_1, D_1, E_1, N;

III. Изменим название на K, B_1, C_1, D_1, E_1, N;

IV. Установим ширину $= 3$;

V. Выберем желтый цвет;

VI. Нажмем на кнопку «Применить».

И на мониторе компьютера появляется изображение (рис. 2.7).

В дальнейшем необходимо расширять возможности программы: добавить примитивы, такие как сферы, конусы; обеспечить автоматическое построение сечений существующими методами. Этими вопросами при желании могут заняться интеллектуально одаренные школьники.

2.3 Факультативные занятия по математике

Факультативные курсы — одна из самых распространенных в Республике Беларусь форм работы с интеллектуально одаренными детьми. В настоящее время все факультативные занятия проводятся по программам, разработанным Национальным институтом образования.

Темы факультативов для 5–6 классов примыкают к основному курсу математики, углубляя отдельные, наиболее важные вопросы, систематизируя материал, дополняя основной курс сведениями, важными в общеобразовательном и прикладном отношении. Ряд тем не имеет непосредственного отношения к основному курсу и носит характер математических развлечений. Основные цели факультативных курсов: расширение и углубление знаний программного материала, ознакомление с некоторыми общими идеями современной математики, раскрытие приложения математики на практике; развитие познавательной активности учащихся, интереса к предмету.

Основные методические принципы, которыми должен руководствоваться учитель: использование исторического материала; принцип занимательности в организации занятий на факультативе по математике. Главный фактор занимательности — это приобщение учащихся к творческому поиску, активизация их самостоятельной исследовательской деятельности. В качестве других аспектов, стимулирующих познавательную активность учащихся на факультативах, выступают: новизна некоторых тем; применение, воспроизведение по ходу ознакомления с материалом или решения задачи определений, правил, уже известных учащимся; представле-

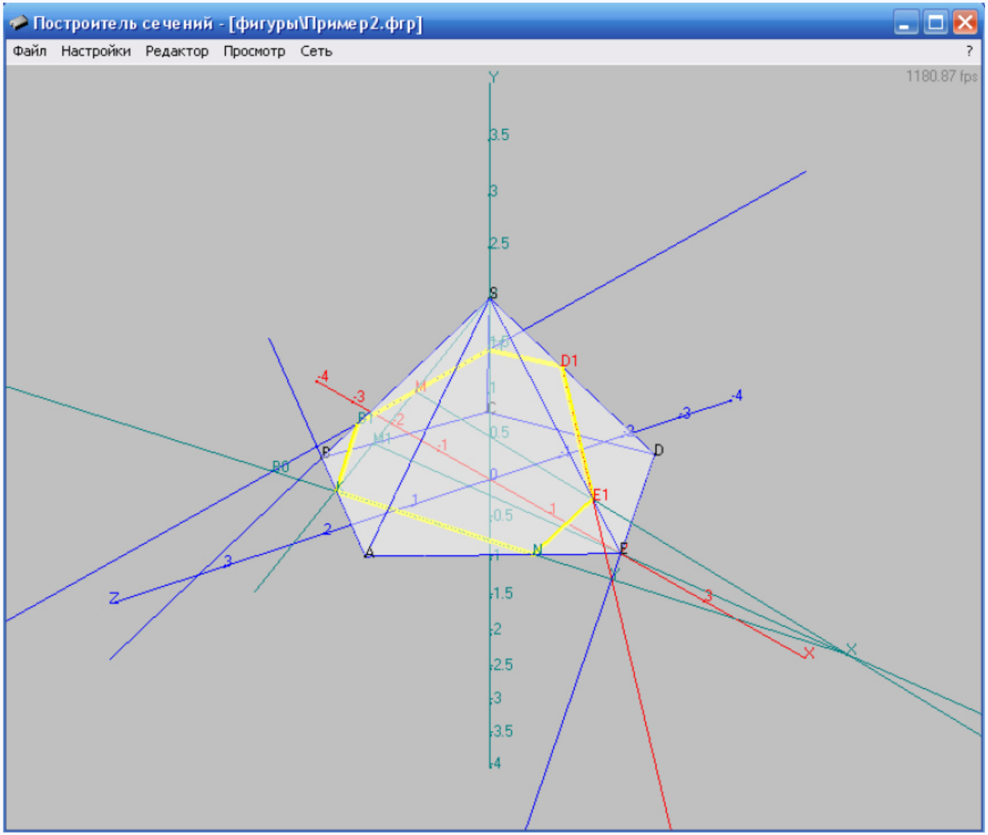


Рис. 2.7

ние наглядных образцов; любые рассуждения, действия, помогающие устанавливать причинно-следственные связи. Особое внимание следует уделять решению задач повышенной трудности. При составлении или отборе задач учителю необходимо обратить внимание на два обстоятельства:

1) задания логического характера должны быть посильными для учащихся (преодоление одной–двух познавательных трудностей, знакомство с одним-двумя методами общелогических рассуждений и т. д.);

2) учебная работа на факультативе должна формировать представление об этапах познавательного процесса в целом, формировать умения самостоятельной работы.

Самостоятельная работа учащихся 5–6 классов на факультативе будет эффективна при осуществлении контроля учителем основных этапов деятельности учащихся. На факультативных занятиях можно и нужно использовать компьютерные технологии. В 5–6 классах все текстовые задачи решаются арифметическими методами. На факультативных занятиях необходимо познакомить учащихся с методами решения основных типов логических задач:

1) задачи на принцип Дирихле;

2) задачи на инварианты;

3) задачи, решаемые с конца;

4) задачи на использование кругов Эйлера;

5) задачи, решаемые с применением графов;

6) задачи, решаемые матричным методом.

Значительное место в факультативном курсе для 6–го класса отведено задачам, среди которых большинство — нестандартные. Нестандартные задачи повышают интерес к предмету, способствуют формированию опыта творческой деятельности, оказывают положительное влияние на качество знаний учащихся. К общим эвристическим приемам поиска решения нестандартных задач относятся: анализ, синтез, индукция и дедукция, сравнение и аналогия, обобщение и конкретизация. К частным эвристическим приемам — прием переформулировки задач, прием инверсии, прием перебора, прием проб и ошибок, прием приведения контрпримера, прием приведения подтверждающего примера. Обучение учащихся эвристическим приемам решения нестандартных задач состоит из следующих этапов: введение приема, разъяснение его сущности; закрепление приема на серии специально подобранных нестандартных задач; обучение учащихся самостоятельному применению приема при решении задач; обучение учащихся применению комбинации эвристических приемов при решении нестандартных задач.

В подростковом возрасте происходят существенные сдвиги в мыслительной деятельности учащихся. Содержание факультатива, логика его построения требуют нового характера усвоения знаний, опоры на самостоятельное мышление, способность абстрагировать и обобщать, сравнивать, рассуждать, делать выводы, доказывать. Математика стимулирует переход к более высокому уровню обобщения. Именно в подростковом возрасте начинают особенно ярко проявляться способности учащихся, возникают глубокие, действенные, устойчивые интересы, формируется сознательное отношение к предмету, развивается самостоятельное творческое мышление. В этот период большую роль играет соревновательность, являющаяся важнейшим условием развития одаренности, отмечается тенденция увеличения интереса школьников к олимпиадам, турнирам, конкурсам и математическим боям. Традиционно в различных конкурсных мероприятиях для учащихся 7–8 классов большая роль отводится текстовым задачам. Решение текстовых задач способствует развитию дивергентного, конвергентного и оценочного типов мышления. Процесс решения задачи можно разделить на этапы: анализ условия, создание схемы условия, поиск способа решения, осуществление решения, проверка решения, исследование способов решения, формулирование ответа, анализ полученного результата. Основная трудность заключается в отыскании необходимой последовательности действий, осуществление которых можно будет назвать решением задачи.

К 9-му классу мыслительная деятельность одаренных учащихся характеризуется более высоким уровнем обобщения и абстрагирования, нарастающей тенденцией к причинному объяснению явлений, умением аргументировать, доказывать истинность или ложность отдельных положений, делать глубокие выводы, связывать изучаемый материал в систему. Развивается критичность мышления. Факультативный курс в 9 классе целесообразно посвятить методам решения задач. Обучение методам решения задач, если этот метод не основывается на дополнительных теоретических знаниях, следует вести по схеме: задача, ее решение, выделение метода. Нестандартные задачи выделяются уже своей формулировкой. Осваивать идеи и методы решения нестандартных задач можно двумя способами:

1) сначала изучить описание идеи, потом решить ряд задач на ее применение;

2) сразу начать с задачи, чтобы уловить идею, затем сообщить теоретический материал и разобрать примеры.

В процессе работы учащимся целесообразно задавать вопросы: какие идеи привели к решению задачи, чем эта задача похожа или не похожа на другие задачи; где в решении использовались те или иные данные; перестает ли утверждение быть верным, если какое–то условие убрать; можно ли ответ и данные поменять местами (верно ли обратное утверждение); можно ли обобщить задачу. На факультативном занятии не надо стремиться решить большое количество задач. Важнее качество решения. Отбор материала для занятий осуществляет учитель в соответствии с уровнем подготовленности конкретной группы и количеством отведенных часов. На факультативных занятиях учащиеся лишь знакомятся с методами решения задач. Это не гарантирует успеха в решении задач без серьезной самостоятельной работы. Научиться решать трудные, нестандартные задачи можно только самостоятельно решая эти задачи, и чем больше, тем лучше. Учителю необходимо порекомендовать учащимся литературу для самостоятельной проработки, а также предложить задачи для самостоятельного решения. При этом необходимо избегать задач, решение которых на данном этапе детям недоступно, которые по уровню сложности намного превышают возможности учащихся. Учитель должен стимулировать работу учащихся. Оценивать необходимо не только правильный ответ, но и идеи решения. В начале, в период накопления идей, знакомств с новыми методами, главным является генерирование идей. Позже, на этапах отработки методов, предпочтение необходимо отдавать полученному правильному ответу. И прежде, чем приступить к решению следующей задачи, надо проанализировать все предложенные решения предыдущей задачи, а также причины ошибок или неправильных решений. Методической особенностью факультативных курсов является не только изучение нового, но и систематическое повторение ранее изученного материала через решение задач, уравнений, неравенств. При решении задач важно обсуждать общематематические методы поиска решений, проблемы строгости логических рассуждений и адекватности полученных математических моделей, необходимо уверенно владеть основными понятиями и формулами школьной математики, знать и уметь реализовывать стандартные алгоритмы, которые встречаются при изучении соответствующей темы в средней школе и закрепляются при упорной самостоятельной работе.

В 10–11 классах факультативные курсы направлены на подготовку к продолжению образования в вузе, развитие математических способностей, повышение математической культуры учащихся.

Предлагаем вниманию читателей подборку материалов для факультативных занятий, которые мы использовали в общеобразовательных учреждениях г. Бреста.

Тема 1. Методы решения текстовых задач (5–6 классы)

1. Задачи, решаемые с конца. Часто их решают с помощью таблиц.

Задача 1. *Однажды Хитрец предложил Жадине разбогатеть. «Как только ты перейдешь через этот мост, — сказал он, — твои деньги удвоятся. Можешь переходить по нему сколько хочешь, но после каждого перехода отдавай мне за это 24 рубля». Жадина согласился, но после третьего перехода остался без денег. Сколько денег было у Жадины вначале?*

Решение.

После третьего перехода	$0 + 24 = 24$
Перед третьим переходом	$24 : 2 = 12$
После второго перехода	$12 + 24 = 36$
Перед вторым переходом	$36 : 2 = 18$
После первого перехода	$18 + 24 = 42$
Перед первым переходом	$42 \div 2 = 21$

Значит, у Жадины вначале был 21 руб.

Задача 2. *Над лугами летели аисты. На каждом лугу садилась половина аистов и еще половина аиста, остальные летели дальше. Все сели на семи лугах. Сколько было аистов?*

Решение.

Номер луга	Количество аистов
7	$(0 + 0,5) \cdot 2 = 1$
6	$(1 + 0,5) \cdot 2 = 3$
5	$(3 + 0,5) \cdot 2 = 7$
4	$(7 + 0,5) \cdot 2 = 15$
3	$(15 + 0,5) \cdot 2 = 31$
2	$(31 + 0,5) \cdot 2 = 63$

1	$(63+0,5)\cdot 2=127$

Значит, аистов было 127.

Задача 3. *Три девочки имеют по некоторому количеству конфет. Первая девочка дает другим столько конфет, сколько каждая из них имеет. Затем вторая девочка дает двум другим столько конфет, сколько каждая из них теперь имеет; в свою очередь и третья дает каждой из двух других столько, сколько есть у каждой в этот момент. После этого у каждой из девочек оказывается по 8 конфет. Сколько конфет было у каждой девочки вначале?*

Решение.

	1	2	3
После 3-ей передачи	8	8	8
После 2-ой передачи	$8\div 2=4$	$8\div 2=4$	$8+4+4=16$
После 1-ой передачи	$4\div 2=2$	$4+2+8=14$	$16\div 2=8$
Первоначально	$2+4+7=13$	$14\div 2=7$	$8\div 2=4$

Значит, у первой, второй и третьей девочек было соответственно 13, 7 и 4 конфет.

Задача 4. *Девушка собирала в лесу грибы. Чтобы выйти из леса, ей пришлось пройти через 4 ворот, каждые из которых охранял злой охранник, отбиравший половину грибов. Домой девушка принесла всего 10 грибов. Сколько грибов досталось охранникам?*

Решение.

Номер ворот	Количество грибов у девушки перед воротами	Количество грибов, отданное охраннику

4	$10 \cdot 2 = 20$	$20 \div 2 = 10$
3	$20 \cdot 2 = 40$	$40 \div 2 = 20$
2	$40 \cdot 2 = 80$	$80 \div 2 = 40$
1	$80 \cdot 2 = 160$	$160 \div 2 = 80$

$$160 - 10 = 150$$

Значит, охранникам досталось 150 грибов.

2. Математические ребусы (решают методом перебора).

Задача 5. *Решите ребус:*

$$\begin{array}{r} \text{Д}\ \text{Р}\ \text{А}\ \text{М}\ \text{А} \\ +\ \text{Д}\ \text{Р}\ \text{А}\ \text{М}\ \text{А} \\ \hline \text{Т}\ \text{Е}\ \text{А}\ \text{Т}\ \text{Р} \end{array}$$

Решение.

Очевидно, Д < 4. В разряде тысяч имеем А $+$ А $=$ А, значит, А $= 0$ или А $= 9$. Значение А $= 0$ не подходит, т.к. в разряде единиц А $+$ А $=$ Р (получаем А $=$ Р $= 0$). Значит, А $= 9$, Р $= 8$, Е $= 7$. Тогда 2М $+ 1 = 10 +$ Т, Т < 9, значит, М $= 5$ или 6, а значения 7 и 8 уже заняты буквами Е и Р. Значение М $= 5$ не подходит, так как получаем Т $= 1$, но тогда Д $= 0$. Значит, М $= 6$.

Получаем:

$$\begin{array}{r} 1\ 8\ 9\ 6\ 9 \\ +\ 1\ 8\ 9\ 6\ 9 \\ \hline 3\ 7\ 9\ 3\ 8 \end{array}$$

Задача 6. *Решите ребус:*

$$\begin{array}{rccccc} & К & О & Ш & К & А \\ + & К & О & Ш & К & А \\ & К & О & Ш & К & А \\ \hline С & О & Б & А & К & А \end{array}$$

Решение.

Так как КА + КА + КА оканчивается на КА, то КА = 50, а значит, К = 5, А = 0.

Так как Ш + Ш + Ш + 1 оканчивается на 0, Ш = 3.

Так как сумма трех чисел, начинающихся на 5, может начинаться лишь с 1, то С = 1. Рассматривая варианты для О, получаем, что О = 6 или О = 7, а значит, Б = 9 или Б = 2. Задача имеет два решения:

$$\begin{array}{rccccc} & 5 & 6 & 3 & 5 & 0 \\ + & 5 & 6 & 3 & 5 & 0 \\ & 5 & 6 & 3 & 5 & 0 \\ \hline 1 & 6 & 9 & 0 & 5 & 0 \end{array} \qquad \begin{array}{rccccc} & 5 & 7 & 3 & 5 & 0 \\ + & 5 & 7 & 3 & 5 & 0 \\ & 5 & 7 & 3 & 5 & 0 \\ \hline 1 & 7 & 2 & 0 & 5 & 0 \end{array}$$

Задача 7. *Решите ребус:*

$$ЧАЙ \div АЙ = 5$$

Решение.

Перейдем от деления к умножению:

$$\text{ЧАЙ} = \text{АЙ} \cdot 5$$

$$\text{Ч} \cdot 100 + \text{АЙ} = \text{АЙ} \cdot 5$$

$$\text{Ч} \cdot 100 = \text{АЙ} \cdot 5 - \text{АЙ}$$

$$\text{Ч} \cdot 100 = \text{АЙ} \cdot 4$$

$$Ч \cdot 25 = АЙ$$

Так как АЙ — двузначное число, то $Ч = 1, 2, 3$. Для каждого Ч находим решение: 125, 250, 375. Условию задачи удовлетворяют:

$$125 \div 25 = 5;$$
$$250 \div 50 = 5;$$
$$375 \div 75 = 5.$$

3. Задачи на инварианты. *Инвариантом* некоторого преобразования или системы действий называется величина (или свойство), остающаяся постоянной при этом преобразовании. Нередко встречаются задачи, в которых спрашивается, можно ли в результате некоторых действий получить тот или иной результат. Основным методом решения подобных задач является нахождение свойства исходного объекта, которое не меняется после выполнения таких действий, — это и есть инвариант. Если конечный объект задачи не обладает найденным свойством, то он, очевидно, не может быть получен в результате этих действий из исходного объекта.

Задача 8. *Саша написал на листе бумаги число 10. Пятнадцать одноклассников передают лист друг другу, и каждый либо прибавляет к числу, либо отнимает от него единицу. Может ли в результате получиться число 0?*

Решение.

После каждого хода четность числа меняется: после первого ученика число становится нечетным, после второго — четным, после третьего — нечетным. Тогда после пятнадцатого число будет нечетным, а нуль — число четное. Значит, нуль в конце получиться не может.

Задача 9. *На доске записаны 15 чисел: 8 нулей и 7 единиц. Необходимо 14 раз подряд выполнить следующую операцию: зачеркнуть любые два числа, и если они* *одинаковые, то дописать к оставшимся числам нуль, а если разные — то единицу. Какое число останется на доске?*

Решение.

Сумма 15 исходных чисел равна 7, а 7 — число нечетное. Рассмотрим, какая сумма чисел будет получаться после выполнения операции. Если вычеркнем 2 нуля, то после дописывания нуля на доске будет 7 нулей и 7 единиц. Сумма этих 14 чисел нечетная. Если вычеркнем 2 единицы, то после дописывания нуля на доске будет 9 нулей и 5 единиц. Сумма данных 14 чисел будет нечетная. Если вычеркнем нуль и единицу, то после дописывания единицы на доске будет 7 нулей и 7 единиц, сумма которых будет нечетной. Таким образом, после выполнения операции на доске остается на 1 число меньше, причем сумма чисел всегда будет нечетной. Значит, в конце останется единица.

Задача 10. *Можно ли разменять купюру достоинством 50 рублей с помощью 15 монет достоинством 1 и 5 рублей?*

Решение.

1 и 5 — нечетные числа; сумма 15 нечетных чисел — число нечетное, а 50 — число четное. Значит, разменять купюру достоинством 50 рублей с помощью 15 монет достоинством 1 и 5 рублей нельзя.

Задача 11. *2011 человек выстроились в шеренгу. Всегда ли можно их расставить по росту, если за один ход разрешается переставлять только 2 людей, стоящих через одного?*

Решение.

При перестановке сохраняется четность номера места. Поэтому если самый высокий человек, например, стоит вторым, то он никогда не станет первым, и число 2011 здесь роли не играет. Значит, не всегда 2011 человек можно расставить по росту.

Задача 12. *16 корзин расположили по кругу. Можно ли в них разложить 55 дынь так, чтобы количество дынь в любых двух соседних корзинах отличалось на 1?*

Решение.

Так как число дынь в соседних корзинах отличается на 1, то четность числа дынь в корзинах будет чередоваться, поэтому в одной половине корзин будет четное число дынь, а в другой — нечетное. Тогда будет 8 корзин с четным числом дынь и 8 с нечетным, всего – четное количество дынь. Но по условию всего дынь 55 — нечетное число. Значит, разложить нельзя.

4. Задачи на принцип Дирихле. Принцип Дирихле формулируется следующим образом: если по n ящикам разложить предметы, число которых больше n, то найдется ящик, в котором находится больше одного предмета. Также существует обобщенный принцип Дирихле: если по n ящикам разложить предметы, число которых больше $n \cdot k$ (где k – натуральное число), то найдется ящик, в котором находится больше k предметов.

Задача 13. *Дано 12 натуральных чисел. Докажите, что из них можно выбрать 2, разность которых делится на 11.*

Решение.

Примем числа за «зайцев». Так как их 12, то клеток должно быть меньше. Пусть «клетки» — это остатки от деления натурального числа на 11. Всего клеток будет 11: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11. Тогда, по принципу Дирихле, найдется «клетка», в которой будут сидеть не менее чем 2 «зайца», то есть найдутся 2 натуральных числа с одним остатком. А разность двух чисел с одинаковым остатком от деления на 11, будет делиться на 11. Действительно, пусть

$$a = 11m + q,$$

$$b = 11n + q,$$

тогда

$$a - b = 11m + q - (11n + q) = 11(m - n),$$

а $11(m - n)$ делится на 11.

Задача 14. *Внутри равностороннего треугольника со стороной 1 см расположено 5 точек. Докажите, что расстояние между некоторыми двумя из них меньше 0,5 см.*

Решение.

Пусть 5 точек будут «зайцами». По принципу Дирихле клеток должно быть меньше, и чаще всего на одну, значит надо 4 клетки. Их можно получить, разбив равносторонний треугольник с помощью проведения средних линий. Тогда получим 4 равносторонних треугольника со сторонами по 0,5 см, которые и будут «клетками».

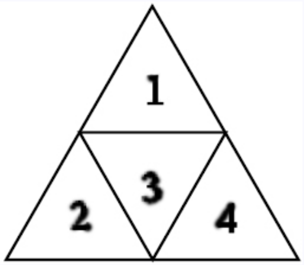


Рис. 2.8

Смотри рисунок 2.8. Так как «зайцев» — 5, а «клеток» — 4, и $5 > 4$, то, по принципу Дирихле, найдется «клетка» — равносторонний треугольник со стороной

0,5 см, в который попадут не менее двух «зайцев» — точек. А так как все 4 треугольника равны и расстояние между точками в любом треугольнике будет меньше, чем 0,5 см, то тем самым доказано, что между некоторыми точками из пяти расстояние будет меньше, чем 0,5 см.

Задача 15. *В ткани размером 3×3 метра Дима проделал 8 дырок. Докажите, что из него можно вырезать кусок размером 1×1 метр, не содержащий внутри себя дырок. (Дырки можно считать точечными.)*

Решение.

Пусть дырки будут «зайцами». Разрежем ткань на 9 кусков размером 1×1 метр — получатся «клетки».

1	2	3
4	5	6
7	8	9

Так как кусков–«клеток» — 9, а дырок–«зайцев» — 8, то найдется хотя бы одна «клетка», в которой не будет «зайцев», то есть найдется кусок без дырок внутри.

Задача 16. *В соревнованиях участвовали 35 спортсменов. Можно ли утверждать, что среди них найдутся хотя бы два спортсмена, фамилии которых начинаются с одной буквы?*

Решение.

Обозначим 35 спортсменов за «зайцев», а буквы за «клетки». В русском алфавите 33 буквы. Кроме этого, фамилии не могут начинаться с букв Ъ и Ь. Значит, у нас осталась 31 буква. Так как $35 > 31$, то, по принципу Дирихле, найдется 2 спортсмена, у которых фамилия начинается с одной буквы.

5. Задачи на переливание. Для решения задач на переливание строится таблица, перебором находят ответ.

Задача 17. *Используя два ведра вместимостью 5 л и 3 л, наберите из бочки 4 л воды.*

Решение.

3 л	0	0	3	0	2	2	3
5 л	0	5	2	2	0	5	4

Задача 18. *Используя девятилитровое ведро и четырехлитровый бидон, наберите из реки 7 л воды.*

Решение.

4 л	0	4	0	4	0	4	3	3	0	4	0
9 л	0	0	4	4	8	8	9	0	3	3	7

Задача 19. *Используя 2 ведра вместимостью 9 и 11 л, наберите из пруда 4 л воды.*

Решение.

9 л	0	0	9	0	2	2	9
11 л	0	11	2	2	0	11	4

Задача 20. *Из полного восьмилитрового ведра отлейте 4 л с помощью пустых трехлитровой банки и пятилитрового бидона. Воду выплескивать на землю нельзя.*

Решение.

Ведро, 8 л	8	3	3	6	6	1	1
Бидон, 5 л	0	5	2	2	0	5	4
Банка, 3 л	0	0	3	0	2	2	3

6. Задачи, решаемые матричным методом. Применение матричного метода сводится к последовательному заполнению таблицы, то есть к поиску совместных и несовместных элементов (в соответствии с условием задачи).

Задача 21. *Встретились три друга — певец Белов, художник Рыжов, и поэт Чернов. «Интересно, что у одного из нас волосы светлые, у другого — черные, а у третьего — рыжие», — сказал черноволосый. «Но ни у кого цвет волос не соответствует фамилии», — ответил ему Рыжов. Какого цвета волосы у певца?*

Доказательство. По условию задачи Белов не русый, Чернов не черный и Рыжов не рыжий. Так как Рыжов ответил черноволосому, то у художника Рыжова волосы светлые. У поэта Чернова волосы рыжие, а у певца Белова волосы черные.

	рыжий	черный	светлый
Белов	−	+	−
Чернов	+	−	−
Рыжов	−	−	+

■

Задача 22. *Три девочки одеты в белую, красную и синюю юбки. Туфли их также этих цветов. Только у Нины юбка и туфли одного цвета. У Веры туфли красного цвета, а у Ани туфли не белые. Определите цвет юбки и туфель у каждой из девочек.*

Решение.

	Нина		Вера		Аня	
	юбка	туфли	юбка	туфли	юбка	туфли
белый	+	+				

красный				+	+	
синий			+			+

Так как у Веры туфли красные, а у Нины юбка и туфли одного цвета, то они либо белые, либо синие. Если у Нины синие туфли и юбка, а у Веры туфли красные, то у Ани туфли белые, но по условию, это не так. Значит, у Нины юбка и туфли белого цвета, у Веры синяя юбка, а у Ани синие туфли и красная юбка.

Задача 23. *В купе одного из вагонов поезда Минск — Брест ехали минчанин, витеблянин, москвич, гомельчанин, петербуржец и брестчанин. Их фамилии начинались буквами А , Б, В, Г, Д, Е. В дороге выяснилось, что А и минчанин — педагоги; Д и витеблянин — архитекторы, а москвич и В — врачи. Б и Е — участники Великой Отечественной войны, а москвич в армии совсем не служил. Петербуржец старше А, брестчанин старше В. Б и минчанин сошли в Барановичах, а В и петербуржец в Березе. Определите профессию каждого из них и место жительства.*

Решение.

Для решения этой задачи мы использовали метод исключения. Перечислим факты, содержащиеся в условии:

1) А и минчанин — педагоги;

2) Д и витеблянин — архитекторы;

3) В и москвич — врачи;

4) Б и Е — участники Великой Отечественной войны, а москвич в армии не служил;

5) петербуржец старше А;

6) брестчанин старше В;

7) Б и минчанин сошли в Барановичах;

8) В и петербуржец сошли в Березе.

Из этих фактов, как логические следствия, выявляются скрытые факты. Например, из фактов (1) и (2) следует, что А — не минчанин (1), но А — и не витеблянин (1–2); Д — не витеблянин (2), но Д — и не минчанин (1–2) и т. п.

Составим таблицу:

	А	Б	В	Г	Д	Е
минчанин	−	−	−	−	−	+
минчанин	−	+	−	−	−	−
гомельчанин	−	−	+	−	−	−
москвич	−	−	−	+	−	−
брестчанин	+	−	−	−	−	−
петербуржец	−	−	−	−	+	−

Из таблицы сразу следует, что В — гомельчанин (отмечаем знаком «плюс»). Остальные пассажиры — не гомельчане (ставим минусы). Выясняется местожительство А. Он — брестчанин. Ставим «плюс». Рассуждая аналогично, устанавливаем, что А — брестчанин, Б — витеблянин, В — гомельчанин, Г — москвич, Д — петербуржец, Е — минчанин. Далее определяем специальности пассажиров: А и Е — педагоги, Б и Д — архитекторы, В и Г — врачи.

7. Задачи на использование кругов Эйлера.

Задача 24. *Из 100 учащихся 28 изучают английский язык, 30 — немецкий, 42 — французский, 8 — английский и немецкий, 10 — английский и французский, 5 — немецкий и французский, 3 — все три языка. Сколько учащихся не изучают ни одного языка; изучают только французский?*

Решение.

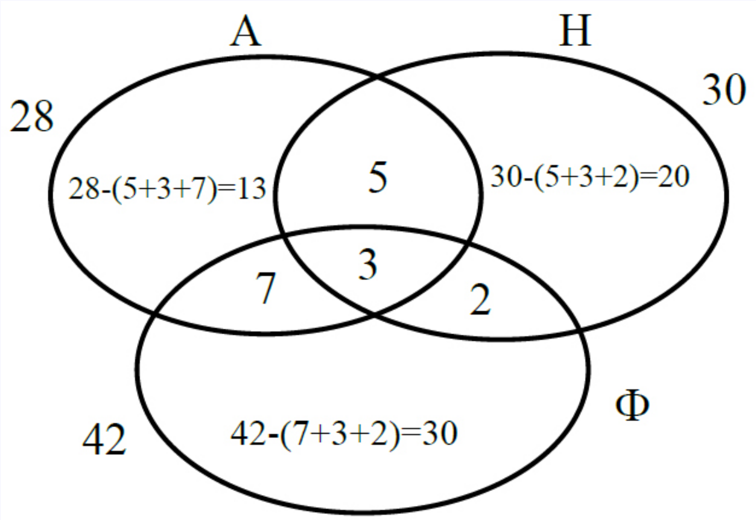


Рис. 2.9

Тема 2. Графы и их применение в решении задач (7–8 классы)

Определение 1. *Граф G — это совокупность двух конечных множеств: множества точек, которые называются вершинами, и множества линий, которые соединяют пары вершин и называются ребрами.*

Начало
Содержание
Литература
Назад
На весь экран
Закрыть

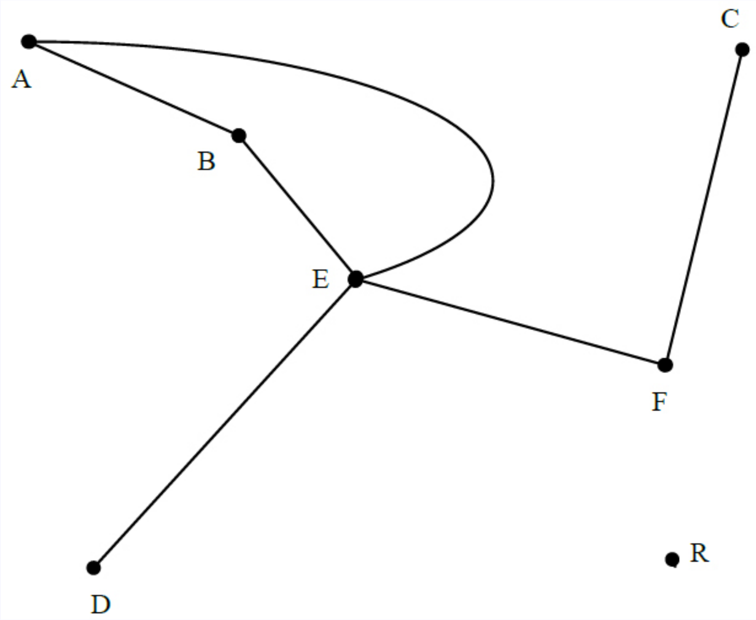


Рис. 2.10

На рисунке 2.10 показан пример графа.

Определение 2. *Степенью вершины графа называется число выходящих из него ребер.*

Степени вершин A, B и F равны 2, вершин D и C — равны 1, а степень вершины E равна 4. Степень вершины R равна нулю, так как из нее не выходит ни одно ребро.

Вершины, из которых не выходит ни одного ребра, называют *изолированными* (на рисунке изолированная вершина R). Вершина, степень которой равна 1, называется *висячей*.

На рисунке 2.10 изображен граф, имеющий семь вершин и шесть ребер. Если рассматривается множество упорядоченных пар точек, то есть на каждом ребре задается направление, то граф G называется ориентированным. В противном случае G называется неориентированным. Ребра, имеющие одинаковые концевые вершины, называются параллельными.

Определение 3. *Граф называется ориентированным, если на каждом его ребре указано направление.*

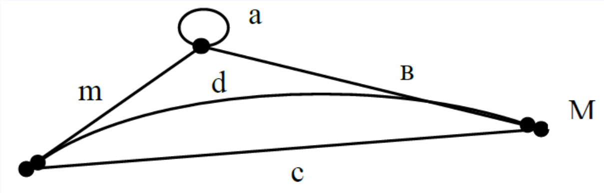


Рис. 2.11

При решении многих нестандартных задач используются следующие утверждения, относящиеся к обходу ребер графа:

1) если в графе более 2-х нечетных вершин, то его правильный обход, то есть обход, при котором каждое ребро проходится ровно один раз, невозможен;

2) для всякого четного связного графа существует правильный обход, который можно начать с любой вершины и который обязательно кончается в той же вершине, в которой начался;

3) если в связном графе ровно две нечетных вершины, то существует правильный обход, причем в одной из них он начинается, а в другой — заканчивается;

4) в любом графе количество нечетных вершин четно.

В ориентированных графах на ребрах указаны начало и конец. Такие направленные ребра называют дугами.

Ребро, концевые вершины которого совпадают, называется петлей. На рисунке 2.11 ребра c и d — параллельные, a — петля. Вершина и ребро называются инцидентными друг другу, если вершина является для этого ребра концевой точкой. На рисунке 2.11 вершина M и ребро b инцидентны друг другу.

Две вершины, являющиеся концевыми для некоторого ребра, называются смежными вершинами.

Два ребра, инцидентные одной и той же вершине, называются смежными ребрами.

Теорема 1. *Сумма степеней всех вершин графа G — число четное, равное удвоенному количеству его ребер $(2k)$, где k — число ребер графа.*

Теорема 2. *Число нечетных вершин графа (имеющих нечетную степень), четно.*

Определение 4. *Граф G называется полным, если любые две его различные вершины соединены ребром, и он не содержит параллельных ребер.*

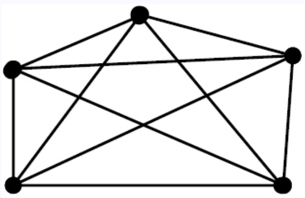


Рис. 2.12

На рисунке 2.12 изображен полный граф.

Определение 5. *Дополнением графа G называется граф G^- с теми же вершинами, что и граф G, и содержащий только те ребра, которые надо добавить к графу G, чтобы получился полный граф.*

Определение 6. *Граф называют простым, если две вершины соединяет не более одного ребра, в противном случае, граф называют мультиграфом.*

Теорема 3. *В простом графе найдется не менее двух вершин с одинаковыми степенями.*

Теорема 4. *В простом графе с p вершинами число ребер не больше $\dfrac{p(p-1)}{2}$.*

Доказательство. Всего p вершин, каждая из них может быть соединена не более чем с $(p-1)$ остальными вершинами. Таким образом, получаем $(p-1)p$ ребер, но каждое из них посчитано ровно два раза, так как соединяет две вершины. Поэтому делим полученное выражение пополам. ■

Определение 7. *Путем в графе называется такая последовательность ребер, ведущая от некоторой начальной вершины в конечную вершину, в которой каждые два соседних ребра имеют общую вершину, и никакое ребро не встречается более одного раза.*

Определение 8. *Циклом называется путь, начальная и конечная вершины которого совпадают.*

На рисунке 2.11 ребра (m, b, c) образуют цикл.

Определение 9. *Цикл графа G называется простым, если он не проходит ни через одну вершину более одного раза.*

Определение 10. *Длиной пути или цикла называется число ребер этого пути или цикла.*

Определение 11. *Граф G называется связным, если для любых двух его вершин существует путь, их соединяющий. В противном случае — граф G называется несвязным.*

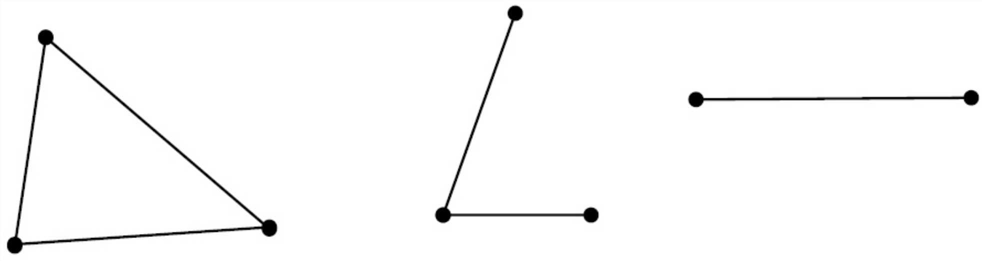


Рис. 2.13

Замечание. *Любой несвязный граф является совокупностью связных графов, которые обладают тем свойством, что никакая вершина одного из них, не связана путем ни с какой вершиной другого (каждый из этих графов называется компонентой графа G).*

На рисунке 2.13 изображен несвязный граф G с тремя компонентами, каждая из которых сама по себе является связным графом.

Определение 12. *Объединением графов G_1 и G_2 называется граф $G = G_1 \cup G_2$, множество вершин которого есть множество вершин графов G_1 и G_2, а множество ребер является объединением множества ребер этих графов.*

Определение 13. *Пересечением графов G_1 и G_2 называется граф $G = G_1 \cap G_2$, множество вершин которого есть пересечение вершин графов G_1 и G_2, а множество ребер является пересечением множества ребер этих графов.*

Определение 14. *Деревом называется связный граф, не содержащий циклов. Несвязный граф, не имеющий циклов, называют лесом (в лесу содержится не меньше двух деревьев).*

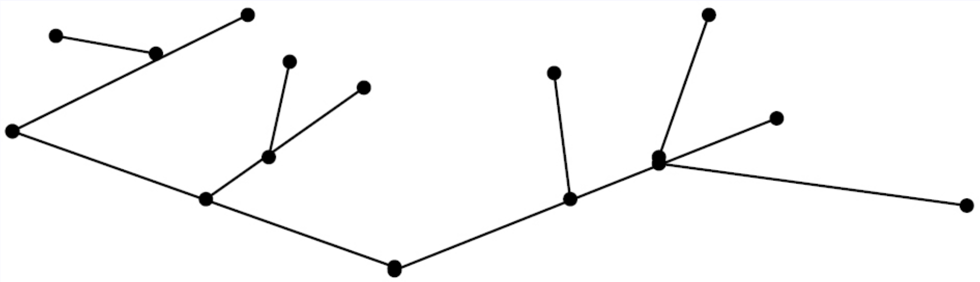


Рис. 2.14

На рисунке 2.14 изображено дерево.

Теорема 5. *В любом дереве существует хотя бы одна вершина степени единица (такие вершины называют «висячими»).*

Доказательство. Используем метод «от противного». Предположим, что в графе нет вершин степени единица. Тогда все вершины имеют степень не меньше двух. Известно, что в подобных графах обязательно существую циклы, но это противоречит тому, что исходный граф — дерево. ■

Теорема 6. *Связный граф является деревом тогда и только тогда, когда количество его вершин на единицу превосходит количество ребер: , где p — количество вершин графа, а q — количество ребер.*

Доказательство. Покажем вначале, что любое дерево обладает указанным свойством. Применим метод «стирания». Так как в дереве (смотри теорему 6) всегда имеются «висячие» вершины, мы сотрем одну такую вершину вместе с выходящим из нее ребром. В результате мы вновь получим дерево, у которого на одно ребро и на одну вершину меньше. Будем продолжать эту процедуру до тех пор, пока граф не превратится в одно единственное ребро, которым соединены две вершины. Для такого графа наша формула очевидна. Заметим также, что процедура стирания на каждом шаге не изменяла разность $p - q$ (и p, и q на каждом шаге уменьшались ровно на единицу), поэтому исходная разность также равнялась единице.

Теперь объясним идею доказательства того, что из свойства $p-q = 1$ следует, что граф является деревом. Используем метод «от противного». То есть, будем считать, что в графе имеются циклы. Рассмотрим один из них. Удалим любое ребро, принадлежащее данному циклу, при этом граф останется связным. Будем удалять ребра из графа до тех пор, пока в нем будет хотя бы один цикл. Пусть таким образом мы удалили $l \geq 1$ ребер. Когда в графе не останется ни одного цикла, он превратится в дерево, для которого выполняется формула $p - (q - 1) = 1$, из которой следует, что $p - q = 1 + l > 1$. Таким образом, мы доказали, что для графов, имеющих циклы, указанная в условии теоремы формула не выполняется. ∎

Определение 15. *Эйлеровым путем (циклом) графа называется путь (цикл), содержащий все ребра графа ровно один раз.*

Существуют задачи, в которых предлагается обвести ту или иную фигуру, не отрывая карандаш от бумаги. При этом запрещается проводить карандаш по одной линии несколько раз. Аналогичное задание может быть дано и относительно некоторого графа.

Определение 16. *Граф, обладающий эйлеровым циклом, называется эйлеровым графом.*

Теорема 7. *Связный граф является эйлеровым тогда и только тогда, когда все его вершины имеют четную степень.*

Теорема 8. *Связный граф является эйлеровым с концами P_1 и P_2 тогда и только тогда, когда вершины P_1 и P_2 — единственные его вершины нечетной степени.*

Определение 17. *Гамильтоновым путем (циклом) графа называется путь (цикл), проходящий через каждую вершину G в точности по одному разу.*

Определение 18. *Граф, обладающий гамильтоновым циклом, называется гамильтоновым графом.*

Теорема 9. *Пусть связный граф имеет не меньше четырех вершин ($p > 3$) и степень каждой вершины не меньше $p/2$, тогда в графе имеется гамильтонов цикл.*

Определение 19. *Граф называется планарным, если его можно изобразить на плоскости без самопересечений. Такое изображение называют плоской укладкой графа.*

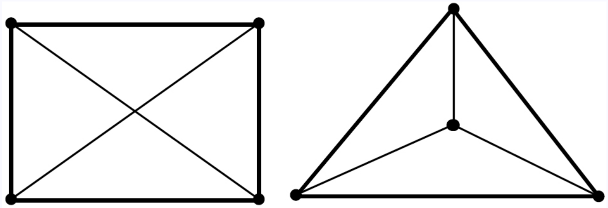


Рис. 2.15

На рисунке 2.15 изображен полный граф и его плоская укладка.

Определение 20. *Сетью называется граф, каждой дуге которого поставлено в соответствие некоторое число (или несколько чисел)*

С помощью графов наглядно изображается информация о разных объектах и отношениях между ними. Слово «граф» первым стал использовать английский математик Джеймс Дж. Сильвестр.

На языке теории графов можно сформулировать задачи, которые касаются транспортных путей (причем сеть дорог с односторонним движением по ним, естественно, изображать ориентированным графом) или отношений знакомства между людьми (группу лиц можно изобразить системой точек, соединяя между собой те пары точек, которые соответствуют знакомым). Вершины и ребра многогранника (куба, пирамиды и др.) тоже образуют граф. Рассмотрим ряд задач, решенных с помощью графов.

Вначале рассмотрим задачу, для решения которой Л. Эйлер впервые применил графы, — это знаменитая задача о мостах города Кенигсберга (Калининград).

Задача 1 (задача о мостах города Кенигсберга (Калининград)). *Город Кенигсберг стоит там, где два рукава реки Прегель, сливаясь, омывают остров Кнейпхоф. Остров и берега соединены между собой семью мостами (2.16). Нужно придумать такой маршрут, который проходит в точности по одному разу через каждый мост.*

Решение.

Если обозначить острова точками, а мосты — линиями, соединяющими эти точки, то получится граф. Граф, соответствующий системе кенигсбергских мостов, представлен на рисунке 2.17.

Л. Эйлер доказал, что на графе существует маршрут, обходящий все ребра точно по одному разу, тогда и только тогда, когда он не содержит вершин, из которых выходит нечетное число ребер, или таких вершин точно две (начало и конец маршрута). С помощью этой теоремы задача о мостах решается совсем просто: во всех четырех вершинах построенного графа сходится нечетное число ребер, следовательно, маршрута, проходящего по всем мостам один раз, не существует.

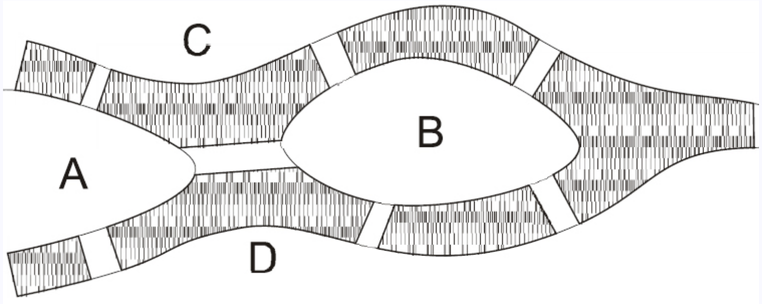


Рис. 2.16

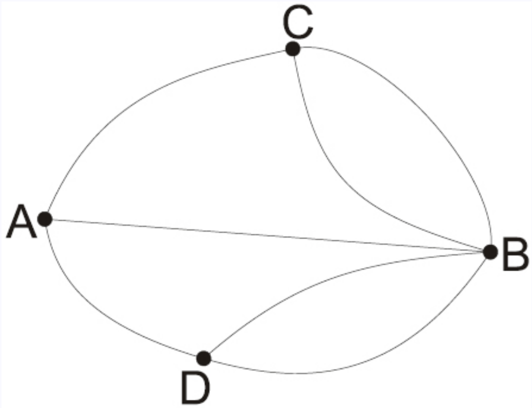


Рис. 2.17

Задача 2 (о домиках и колодцах). *В некоторой деревне есть три колодца. Трое жителей, живущие в трех стоящих рядом домиках перессорились, и решили так протоптать тропинки от своих домов к каждому из трех колодцев, чтобы они не пересекались. Удастся ли им выполнить свой план?*

Решение.

Проведем тропинки. Нам удалось провести только восемь тропинок, а девятая должна пересечься хотя бы с одной. Можно доказать, что эта задача не имеет решения, так как по мере проведения тропинок из двух первых домиков, будет получаться некоторый замкнутый контур, внутри которого будет стоять один из колодцев, при этом третий домик будет находиться снаружи от этого контура. Для того, чтобы соединить этот домик с колодцем, обязательно потребуется пересечь новой тропинкой одну из уже проложенных.

Задача 3 (размещения). *В некотором районе имеется n населенных пунктов, соединенных друг с другом сетью шоссейных дорог. Нужно построить станцию технического обслуживания автомобилей вблизи шоссейной дороги. Расположение станции должно быть удобно для жителей всех населенных пунктов. Например, можно потребовать, чтобы сумма расстояний от СТО до населенных пунктов была минимальной.*

Решение.

Эту задачу легко представить с помощью графа. Населенные пункты — вершины графа, шоссейные дороги — дуги, которые их соединяют. СТО должна быть расположена на одной из дуг графа.

Задача 4 (почтальона). *Почтальон ежедневно забирает письма на почте, разносит их адресатам, располагающимся вдоль всего маршрута его следования, и возвращается обратно на почту. Путь, пройденный почтальоном, должен быть как можно короче.*

Улицы представляются дугами некоторого графа. Задача почтальона заключается в том, чтобы найти маршрут обхода всех дуг графа минимальной длины.

Задача 5. *На фотографии изображены сестры Лариса Ивановна и Елена Ивановна с сыновьями Вовой и Димой. Между этими людьми существуют различные* *родственные отношения. Вова — сын Ларисы Ивановны, Дима — сын Елены Ивановны. Значит, в отношении «быть сыном» находятся две пары: (Вова; Лариса Ивановна), (Дима; Елена Ивановна). Эти пары можно изобразить с помощью графа. Такой граф называют графом отношения «быть сыном» (рис. 2.18).*

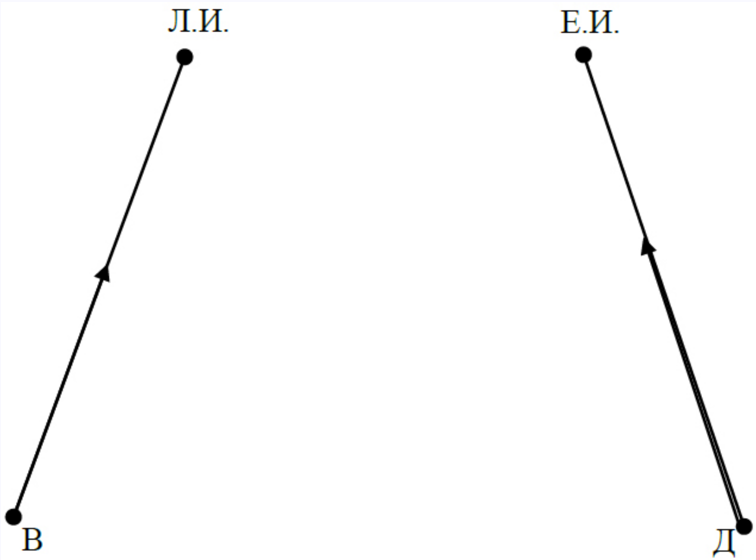


Рис. 2.18

Лариса Ивановна — тетя Димы. В этом же отношении «быть тетей» находятся еще Елена Ивановна и Вова. Граф отношения «быть тетей» показан на рисунке 2.19.

Задача 6. *Выпишите в ряд цифры от 1 до 9 так, чтобы число, составленное из двух соседних цифр, делилось либо на 7, либо на 13.*

Решение.

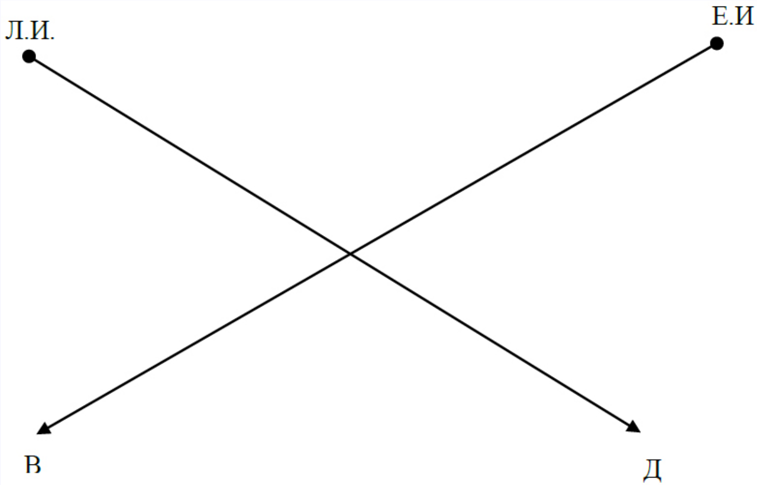


Рис. 2.19

Напишем цифры на листе и соединим стрелками те из них, которые могут следовать друг за другом. Теперь ясно, что первой идет 7, затем 8 и 4 (рис. 2.20).

Уберем лишние стрелки, ведущие к уже использованным цифрам 8 и 4. Если из 4 пойти в 2, то несложным перебором убедимся, что этот путь тупиковый. Значит, после 4 идет 9. Дальше идет 1, и остаток пути определяется однозначно (рис. 2.21).

Задача 7. *В государстве X некоторые города связаны между собой авиалиниями. Из столицы выходит 1985 авиалиний, из города N — одна, а из остальных городов — по 20 линий. Докажите, что из столицы можно добраться до города N (может быть, с пересадками).*

Решение.

Рассмотрим множество городов, до которых можно добраться из столицы. Это граф: его вершины — города, ребра — авиалинии, их соединяющие. Из каждой

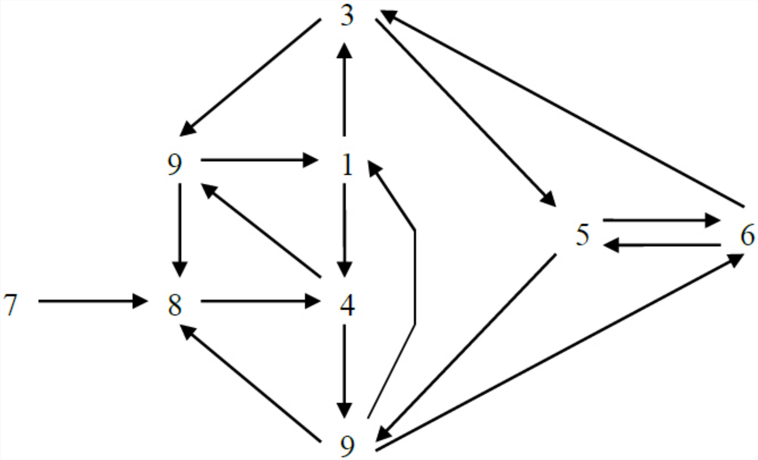


Рис. 2.20

вершины графа выходит столько ребер, сколько всего авиалиний выходит из соответствующего города. Граф содержит нечетную вершину — столицу. Поскольку число нечетных вершин в графе четно, то в нем есть еще одна нечетная вершина. Этой вершиной может быть только город N.

Задача 8. *В стране 15 городов, некоторые из них соединены авиалиниями, принадлежащими трем авиакомпаниям. Известно, что даже, если любая из авиакомпаний прекратит полеты, можно будет добраться из любого города в любой другой (возможно с пересадками), пользуясь рейсами оставшихся двух компаний. Какое наименьшее количество авиалиний может быть в стране?*

Решение.

Докажем, что меньше, чем 21 авиалинией не обойтись. Вначале заметим, что если 15 городов соединены авиалиниями так, что можно добраться от любого города

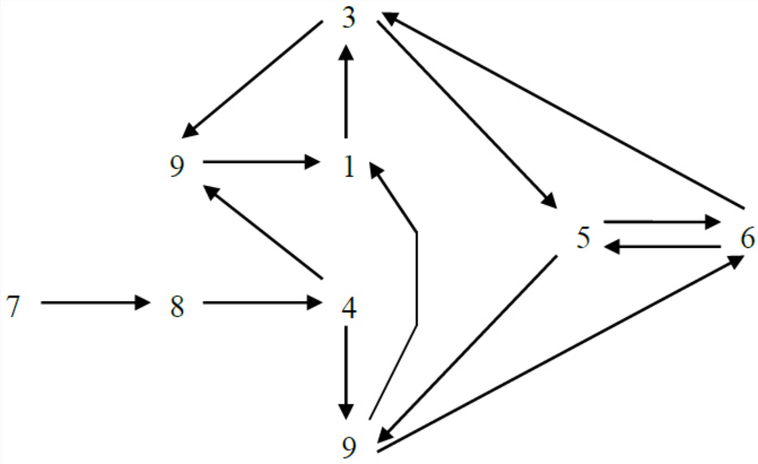


Рис. 2.21

до любого другого, то авиалиний не меньше 14. Действительно, вылетим из произвольного города и попробуем объехать все остальные, при этом посещение каждого следующего города будет требовать не менее одной новой авиалинии. Обозначим количество линий у авиакомпаний через a, b и c. По доказанному, у любых двух компаний вместе не менее 14 авиалиний, то есть

$$a + b \geqslant 14,$$

$$b + c \geqslant 14,$$

$$a + c \geqslant 14.$$

Складывая эти неравенства, получаем: $2 \cdot (a + b + c) \geqslant 42$, то есть у трех компаний не менее 21 авиалинии.

Задача 9. *Доказать, что среди любых шести человек найдутся либо трое попарно знакомых, либо трое попарно незнакомых.*

Доказательство. Пусть A — одно из данных лиц. Ясно, что либо

1) A имеет среди присутствующих трех знакомых B, C, D;

2) имеются трое лиц X, Y, Z, ни с одним из которых A не знаком (среди 5 отличных от A лиц у него есть либо трое знакомых, либо трое незнакомых).

В случае 1), если B, C, D попарно незнакомы, то они образуют требуемую тройку; если же, например, B и C знакомы, то имеем тройку попарно знакомых лиц A, B и C. Аналогично, если в случае 2) X, Y и Z — попарно знакомы, то они образуют нужную нам тройку; если же, к примеру, X не знаком с Y, то мы приходим к тройке A, X, Y. ■

Задача 10. *В пяти корзинах А , Б, В, Г и Д лежат яблоки пяти разных сортов. В каждой из корзин А и Б находятся яблоки 3-го и 4-го сортов, в корзине В — 2-го и 3-го, в корзине Г — 4-го и 5-го, в корзине Д — 1-го и 5-го. Занумеруйте корзины так, чтобы в корзине №1 имелись яблоки 1-го сорта (по меньшей мере, одно), в корзине №2 — яблоки 2-го сорта и т.д.*

Решение.

Изобразим два множества — множество корзин и множество их номеров (рис. 2.22). В каждом из этих множеств по пять элементов; обозначим их точками. Установим соответствие между этими двумя множествами так, чтобы условия задачи выполнялись. Будем соответствующие элементы двух множеств соединять стрелками, а не соответствующие — не будем соединять. Так как яблоки 1–го сорта лежат только в корзине Д , то именно этой корзине и нужно дать номер 1; проведём стрелку между точками Д и 1. Далее, номер 2 можно присвоить только корзине В, а после этого номер 5 — лишь корзине Г. Наконец, номера 3 и 4 дадим корзинам А

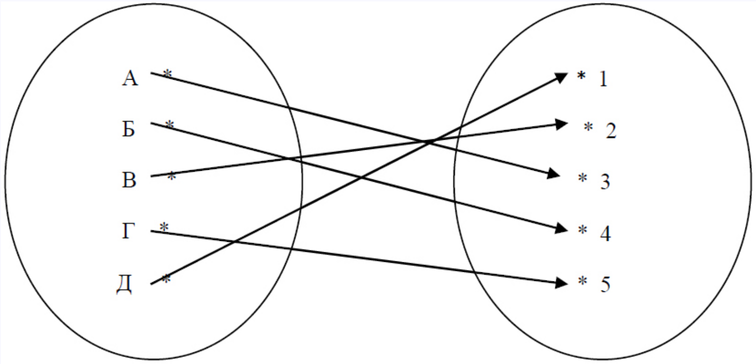


Рис. 2.22

и Б (в любом порядке). Следовательно, корзины расположились, начиная с №1, в последовательном порядке Д, В, А, Б, Г или в порядке Д, В, Б, А, Г.

Задача 11. *Можно ли организовать футбольный турнир девяти команд так, чтобы каждая команда провела по четыре встречи?*

Решение.

Изобразим каждую команду точкой, а проведённую ею встречу — отрезком, исходящим из этой точки. Девять точек лучше расположить так, чтобы при последовательном соединении их отрезками образовался выпуклый девятиугольник. Задача сводится к следующей: можно ли 9 точек соединить отрезками так, чтобы из каждой точки выходили четыре отрезка? Другими словами, существует ли граф с девятью вершинами, у которого степень каждой вершины равна 4? Прежде всего, проведём все стороны девятиугольника; они будут означать, что каждая команда провела две встречи. Для того, чтобы получить ещё по две встречи, будем, например, соединять все вершины диагоналями через одну. (Целесообразно для всех вершин держаться одной и той же системы проведения из них отрезков.)

Ответ: Можно.

Задача 12. *Один из ребят сказал: «А у нас в классе 25 человек, и каждый дружит ровно с семью одноклассниками!». «Не может быть этого», — ответил приятелю Саша Иванов, победитель олимпиады. Почему он так ответил?*

Решение.

Представим всех ребят в классе в виде вершин графа. Получим 25 вершин. Соединим вершины, обозначающие друзей, ребрами. Тогда из каждой вершины будет выходить по семь ребер. Сумма степеней вершин графа будет равна $25 \cdot 7 = 175$. Это нечетное число. А нам известно, что сумма степеней вершин графа должна быть четна. Получили противоречие.

Задача 13. *В стране 15 городов, каждый соединен дорогами не менее чем с 7–ю другими. Докажите, что из любого города можно проехать в любой другой либо напрямую, либо через один промежуточный город.*

Решение.

Рассмотрим город A. Он соединен дорогами с не менее чем семью городами B_1, B_2, $\ldots$, B_7, $\ldots$ Всего получилось не меньше 8 городов. Предположим, что есть город С, не связанный ни с А ни с B_1, B_2, $\ldots$, B_7, $\ldots$ Значит он связан только с теми городами, которые остались вне этого списка. Но таких городов меньше 7, что противоречит условию.

Задача 14. *В классе 28 человек. Каждая девочка дружит с 4 мальчиками, а каждый мальчик — с 3 девочками. Сколько в классе мальчиков и девочек?*

Решение.

В графе, для этой задачи вершины, соответствующие мальчикам, выкрасим синим цветом, а вершины, соответствующие девочкам — красным. Каждое ребро графа соединяет ровно две вершины: одну синюю и одну красную. Пусть всего x красных и y синих вершин: $x + y = 28$ $(*)$. Выразим количество ребер в графе. С одной стороны, оно равно $3x$, с другой — $4y$. Получим уравнение: $3x = 4y$ (∗∗). Решая систему из двух уравнений, легко найти, что $x = 16$, а $y = 12$.

Задача 15. *Докажите, что среди учеников любого класса найдутся двое, имеющие одинаковое число знакомых в этом классе (если, конечно, в этом классе не менее двух учеников).*

Доказательство. Доказательство следует из теоремы 2, которая утверждает, что в любом графе существуют две вершины с одинаковой степенью. Изобразим класс в виде графа, вершины которого — ученики, а ребрами соединены только те вершины, которые обозначают знакомых. В этом графе есть две вершины с одинаковой степенью, следовательно, в классе есть двое ребят с одинаковым числом знакомых. ■

Задача 16 (районный тур Минской городской олимпиады школьников, 8 класс, 1999–2000 уч. год)**.** *На некотором пространстве под землей живут 20 кротов, каждый в своей пещере–жилище. Чтобы общаться друг с другом, не вылезая на поверхность, кроты прорыли между своими жилищами 91 тоннель. Каждый тоннель соединяет только два жилища, тоннели не пересекаются, и никакие два тонneля не соединяют одну и ту же пару жилищ. Докажите, что есть крот, который может по вырытым тоннелям переползать в жилища не менее чем 10 других кротов (посещая, возможно, по пути другие жилища).*

Доказательство. Достаточно доказать, что есть крот, из жилища которого выходит не менее 10 тоннелей. Предположим, что это не так, то есть из каждого жилища выходит не более 9 тоннелей. Тогда общее количество тоннелей между всеми двадцатью жилищами не превышает $9 \cdot 20 \div 2 = 90$ (здесь при подсчете делим на 2, так как каждый тоннель учитывается дважды, поскольку он соединяет два жилища). Но по условию прорыто больше — 91 тоннель. Полученное противоречие завершает доказательство. ■

Задача 17. *О некоторой компании людей известно, что каждый человек из нее знаком в компании ровно с 8 людьми, и для любой группы из 8 человек этой компании найдется такой человек в компании, который знаком с каждым из этих 8 человек. Сколько человек в компании?*

Решение.

Так как для любого человека из компании в ней, по условию, найдется еще 8, с которыми он знаком, то в компании не менее 9 человек. Докажем, что в компании не может быть более девяти человек. Используем метод от противного. Предположим, что в компании, удовлетворяющей условию, не менее десяти человек. Тогда среди них найдутся двое не знакомых друг с другом, иначе каждый был бы знаком с каждым, то есть каждый имел бы не менее 9 знакомых, что противоречит условию. Пусть A и B — двое человек из компании, не знакомых друг с другом. Возьмем в компании еще 6 других человек: C_1, C_2, C_3, C_4, C_5, C_6. По условию, в ней найдется некоторый человек C, который знаком с каждым из восьми людей A, B, C_1, C_2, C_3, C_4, C_5, C_6. Далее, по условию для восьми людей A, C, C_1, C_2, C_3, C_4, C_5, C_6 также найдется человек в компании, знакомый с ними всеми. Этот человек — не B, так как B незнаком с A. Значит, это некоторый другой человек D. Но тогда C знаком с A, B, C_1, C_2, C_3, C_4, C_5, C_6 и еще с D, то есть минимум с девятью людьми. А это противоречит условию. Значит, компания может состоять только из 9 (и ни из какого другого числа) людей.

Задача 18. *При каких $n > 3$ на плоскости можно расположить n точек и соединить их отрезками, так, чтобы из каждой точки выходило по 3 отрезка и никакие из этих отрезков не пересекались (не имели общих внутренних точек)?*

Решение.

Покажем, что если n — четное ($n \geqslant 4$), то расположить на плоскости n точек и соединить их отрезками так, как требуется в условии задачи, можно. Для этого достаточно построить соответствующие примеры. Для $n = 4$ и $n = 6$ примеры приведены на рисунке 2.23.

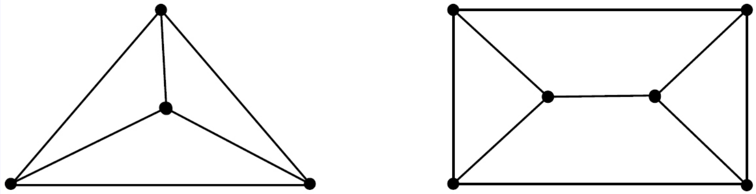


Рис. 2.23

Если четное $n > 6$, то соответствующие примеры можно получить из конструкций на рис. 2.23. Если n кратно 4, то есть $n = 4k$, где k — натуральное число, то можно взять k экземпляров левой конструкции рис. 2.15. Если же n не делится на 4, то, учитывая его четность, $n = 4k+2$, и тогда в качестве примера можно взять $k-1$ конструкций, приведенных на рисунке 2.10 слева, и одну правую конструкцию.

По-другому нужный пример можно получить так. Если $n = 2k$, где натуральное $n \geqslant 2$, то рассмотрим выпуклый k–угольник (со всеми его сторонами) и поместим внутрь его еще один меньший k– угольник. После этого остается провести недостающие отрезки, как это показано на рисунке 2.24 (для $k = 6$).

Покажем теперь, что если n — нечетное, то расположить на плоскости n точек и соединить их отрезками требуемым образом невозможно. Предположим, что все–таки нужная конструкция построена. Подсчитаем, сколько при этом проведено отрезков. Так как из каждой точки выходит по три отрезка, то из n точек выходит $3n$ отрезков. Но каждый отрезок имеет два конца. Следовательно, при таком подсчете каждый отрезок учтен дважды. Поэтому число проведенных отрезков равно $3n : 2 = 1,5n$. Но при нечетных n полученное значение не является целым. Поэтому n не может быть нечетным

Начало
Содержание
Литература
◄ ►
◄◄ ►►
Назад

На весь экран
Закрыть

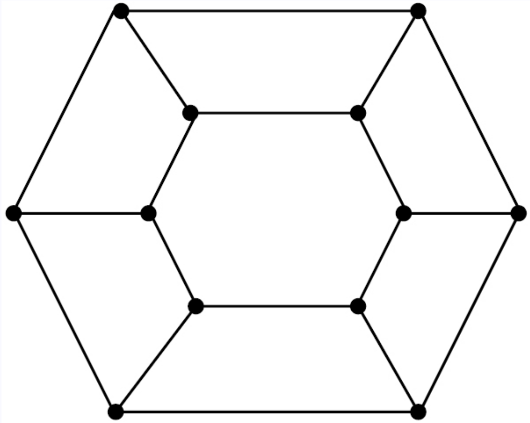


Рис. 2.24

Тема 3. Сравнения

Эта тема не входит в школьную программу. Однако, как показывает опыт, очень интересна школьникам.

Определение 1. *Если два числа a и b имеют одинаковые остатки при делении на m, то говорят, что a и b сравнимы по модулю m, и пишут $a \equiv b \pmod{m}$ (читают: a сравнимо с b по модулю m).*

Теорема 1. *Сравнение $a \equiv b \pmod{m}$ имеет место в том и только в том случае, если разность $a - b$ делится на m.*

Доказательство. Предположим, что $a \equiv b \pmod{m}$, то есть числа a и b дают при делении на m один и тот же остаток r. Тогда $a = mq_1 + r$, $b = mq_2 + r$, где q_1, q_2 — некоторые целые числа. Вычитая одно равенство из другого, получаем:

$$a - b = mq_1 - mq_2 = m(q_1 - q_2).$$

Отсюда следует, что разность $a-b$ делится на m.

Обратно, пусть $a-b$ делится на m, то есть $a-b=km$ $(*)$. Разделим с остатком b на m : $b=qm+r$ $(**)$, где $0\le r<m$. Сложив равенства $(*)$ и $(**)$, получим:

$$a=km+qm+r=m(k+q)+r,$$

а это означает, что число a имеет тот же остаток при делении на m, что и число b. Значит, $a\equiv b \pmod{m}$. ■

Теорема 2. *Сравнения с общим модулем можно почленно складывать и вычитать, то есть если $a\equiv b \pmod{m}$ и $c\equiv d \pmod{m}$, то $a+c\equiv b+d \pmod{m}$ и $a-c\equiv b-d \pmod{m}$.*

Доказательство. Так как $a\equiv b \pmod{m}$ и $c\equiv d \pmod{m}$, то по теореме 1: $a-c$ и $b-d$ делятся на m, то есть $a-b=km$, $c-d=hm$. Складывая эти два равенства, получаем

$$a-b+c-d=km+hm;$$
$$(a+c)-(b+d)=(k+h)m.$$

Следовательно, разность $(a+c)-(b+d)$ делится на m, а это значит, что $a+c\equiv b+d \pmod{m}$.

Сравнение $a-c\equiv b-d \pmod{m}$ доказывается аналогично. ■

Теорема 3. *Сравнения с общим модулем можно почленно умножать, то есть если $a\equiv b \pmod{m}$ и $c\equiv d \pmod{m}$, то $ac\equiv bd \pmod{m}$.*

Доказательство. Так как $a\equiv b \pmod{m}$ и $c\equiv d \pmod{m}$, то по теореме 1: $a-c$ и $b-d$ делятся на m, то есть $a-b=km$, $c-d=hm$. Поэтому

$$ac-bd=(ac-ad)+(ad-bd)=a(c-d)+d(a-b)=ahm-dkm=m(ah-kd),$$

то есть разность $ac-bd$ делится на m. Значит, $ac\equiv bd \pmod{m}$. ■

Замечание. *Теоремы 2 и 3 верны для любого числа слагаемых или множителей.*

Следствие 3.1. *Сравнения можно возводить в степень, то есть если* $a \equiv b \pmod{m}$, *то* $a^n \equiv b^n \pmod{m}$.

Следствие 3.2. *Члены сравнения можно переносить из одной части в другую с противоположным знаком, то есть если, например,* $a+b \equiv c \pmod{m}$, *то* $a \equiv c-b \pmod{m}$.

Следствие 3.3. *К одной части сравнения можно прибавлять или вычитать из нее любое число, кратное модулю.*

Следствие 3.4. *Обе части сравнения можно умножать на одно и то же целое число, отличное от нуля.*

Следствие 3.5. *Обе части сравнения можно делить на их общий делитель, если он взаимно прост с модулем* m.

Следствие 3.6. *Если* $f(x)$ *есть целая рациональная функция с целыми коэффициентами, то есть* $f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_n$ *и, если* $x \equiv x_1 \pmod{m}$, *то* $f(x) \equiv f(x_1) \pmod{m}$.

Особые свойства сравнений:

1. Обе части сравнения и модуль можно умножать на одно и то же целое положительное число.

2. Обе части сравнения и модуль можно делить на любой их общий делитель.

3. Если сравнение имеет место по нескольким модулям, то оно имеет место по модулю, равному наименьшему общему кратному данных модулей.

4. Если сравнение имеет место по модулю m, то оно имеет место и по модулю, равному любому натуральному делителю числа m.

5. Если одна часть сравнения и модуль делятся на какое-либо число, то и другая часть сравнения делится на это число.

Совокупность целых чисел, дающих при делении на натуральное число m (модуль) один и тот же остаток r, образует класс чисел по этому модулю m. Все числа данного класса в общем виде записывают так: $mk + r$, где k — любое целое число. Число всех классов равно m. Любое число класса называется вычетом по данному модулю m (по отношению ко всем числам этого класса). Совокупность любых чисел, взятых по одному из каждого класса вычетов, образует полную систему вычетов по данному модулю m.

Число натуральных чисел, не превосходящих натуральное число n и взаимно простых с n обозначают $\varphi(n)$.

Определение 2. *Числовая функция φ, определенная на множестве натуральных чисел и ставящая в соответствие всякому натуральному числу n число $\varphi(n)$ называется функцией Эйлера.*

Если $a = (p_1)^{\alpha_1} \cdot (p_2)^{\alpha_2} \dots (p_n)^{\alpha_n}$ — каноническое разложение числа a на простые множители , то $\varphi(a) = a(1 - 1/p_1)(1 - 1/p_2) \dots (1 - 1/p_n)$.

Теорема 4 (Эйлера). *Если $m > 1$ и $(a, m) = 1$, то $a^{\varphi(m)} \equiv 1 \pmod{m}$.*

Теорема 5 (Ферма). *Если p — простое число и a — любое целое число, то $a^p \equiv a(mod\ p)$.*

Сравнение

$$ax \equiv b \pmod{m}, \tag{2.1}$$

где a несравнимо с нулем по модулю m, называют сравнением первой степени.

Теорема 6. *Если в сравнении (2.1) $(a, m) = 1$, то оно имеет единственное решение; если $(a, m) = d > 1$ и в не делится на d, то сравнение (2.1) не имеет решений; если $(a, m) = d > 1$ и b делится на d, то сравнение (2.1) имеет d решений, которые находятся по формуле: $x_{k+1} \equiv m_1 k + \alpha \pmod m$, где $k = 0, 1, 2, \dots, d-1$; число α — решение сравнения $a_1 x \equiv b_1 (mod\ m_1)$, где $m = m_1 d$. Это сравнение получается из $ax \equiv b \pmod m$ после сокращения его членов и модуля на m.*

Способы решения сравнений:

1. Метод проб (заключается в переборе вычетов из классов от $\overline{0}$ до $\overline{m-1}$).
2. Метод преобразования коэффициентов (заключается в замене вычетов a и b из сравнения 2.1 сравнимыми с ними вычетами по модулю m, позволяющей сокращение сравнения 2.1 на число взаимно простое с модулем m.
3. Способ Эйлера (решение находят по формуле $x \equiv ba^{\varphi(m)-1} \pmod m$, где $\varphi(m)$ — функция Эйлера).

Теорема 7 (Вильсона). *Если p — простое число, то*

$$(p-1)! \equiv -1 \pmod m.$$

Задача 1. *Докажите, что число $6^{2011} + 1$ делится на 7.*

Решение.

Так как $6 \equiv -1 \pmod 7$, то $6^{2011} \equiv -1\ pmod 7$. Прибавим к левой и правой части последнего сравнения 1. Получим $6^{2011} + 1 \equiv 0 \pmod 7$, что означает, что число $6^{2011} + 1$ делится на 7.

Задача 2. *Сколько существует натуральных чисел, взаимно простых с числом 375 и не превосходящих это число?*

Решение.
Разложим число 375 на простые множители:

$$375 = 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 3 = 5^3 \cdot 3$$

Вычислим функцию Эйлера:

$$\varphi(375) = 375(1 - \frac{1}{5})(1 - \frac{1}{3}) = 375 \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{2}{3} = 200.$$

Задача 3. *Найти остаток от деления* $1532^5 - 1$ *на* 9.

Решение.
Так как $1532 \equiv 2 \pmod 9$, то

$$1532^5 \equiv 2^5 = 32 = 5 \pmod 9.$$

Вычитая из этого сравнения очевидное сравнение $1 \equiv 1 \pmod 9$, получаем

$$1532^5 - 1 \equiv 4 \pmod 9.$$

Отсюда следует, что остаток от деления $1532^5 - 1$ на 9 равен 4.

Задача 4. *Решите сравнение* $7x \equiv 16 \pmod{23}$.

Решение.
Используя свойства сравнений, изменим коэффициенты для того, чтобы сократить коэффициент при неизвестной. Вычтем из правой части сравнения число 23, получим:

$$7x \equiv -7 \pmod{23}.$$

Разделим левую и правую части последнего сравнения на 7, получим

$$x \equiv -1 \pmod{23}$$

и прибавим к правой части 23. Имеем:

$$x \equiv 22 \pmod{23}.$$

Окончательно все решения сравнения могут быть записаны в виде: $x = 22 + 23t$, где t — целое число.

Задача 5. *Доказать, что при любом натуральном n число $12^{2n+1} + 11^{n+2}$ делится на 133.*

Доказательство. Имеем:

$$12^{2n+1} = 12 \cdot 12^{2n} = 12 \cdot 144^n,$$

но $144 \equiv 11 \pmod{133}$ и, значит, $144^n \equiv 11^n \pmod{133}$. Умножая на 12, получаем:

$$12 \cdot 144^n \equiv 12 \cdot 11^n \pmod{133}.$$

$$11^{n+2} = 121 \cdot 11^n,$$

а так как $121 \equiv -12 \pmod{133}$, то $121 \cdot 11^n \equiv -12 \cdot 11^n \pmod{133}$. Складывая сравнения $12^{2n+1} \equiv 12 \cdot 11^n \pmod{133}$ и $11^{n+2} \equiv -12 \cdot 11^n \pmod{133}$, получаем

$$12^{2n+1} + 11^{n+2} \equiv 0 \pmod{133},$$

а это означает, что $12^{2n+1} + 11^{n+2}$ делится на 133. ■

Задача 6. *Найти все целочисленные решения уравнения $13x + 29y = 19$.*

Решение.

Выразим одно неизвестное через другое: $y = \frac{19-13x}{29}$. Чтобы y было целым, x должен удовлетворять сравнению:

$$19 - 3x \equiv 0 \pmod{29} \text{ или } 13x \equiv 19 \pmod{29}.$$

Будем изменять коэффициенты на числа, кратные модулю, пытаясь сократить коэффициент при неизвестном. Вычтем модуль из коэффициентов; они станут четными. Можем сократить их на 2, получим:

$$-8x \equiv -5 \pmod{29}.$$

Прибавим модуль к правой части, получим:

$$-8x \equiv 24 \pmod{29},$$

сократим на -8, получим:

$$x \equiv -3 \pmod{29}$$

и прибавим модуль к правой части:

$$x \equiv 26 \pmod{29}.$$

Запишем это решение в виде равенства:

$$x = 26 + 29t,$$

где t — любое целое число. Подставим найденное выражение для x в выражение для y и получим:

$$y = -11 - 13t$$

Задача 7. *Найдите две последние цифры числа* 17^{82}.

Решение.

Две последние цифры любого натурального числа определяются остатком от деления этого числа на 100. Следовательно, достаточно решить сравнение

$$17^{82} \equiv r(mod\ 100), \text{ где } 0 \leqslant 100.$$

Так как $(17, 100) = 1$, то по теореме Эйлера (стр. 271)

$$17^{\varphi(n)} \equiv 1 \pmod{100}.$$

Но

$$\varphi(100) = 100(1 - 1/2)(1 - 1/5) = 40,$$

так как $100 = 2^2 \cdot 5^2$.

Значит, $17^{40} \equiv 1 \pmod{100}$, и

$$r \equiv 17^{82} \pmod{100} \equiv (17^{40})^2 \cdot 17^2 \pmod{100} \equiv 17^2 \pmod{100} \equiv 89 \pmod{100}.$$

Т.о., две последние цифры числа 17^{82} есть цифры 8 и 9.

Задача 8 (Заключительный этап 61-й Белорусской математической олимпиады школьников, 11 класс)**.** *Найдите* $\{\frac{2009!}{2011}\}$, *где* $\{x\}$ *— дробная часть числа* x*.*

Решение.

Заметим, что число 2011 — простое. Используем теорему Вильсона (стр. 272):

$$(2011 - 1)! \equiv -1 \pmod{2011}$$
$$2010! \equiv -1 \pmod{2011}.$$

Это значит, что $2010! = 2011n + 2010$ $(*)$, где n — натуральное число. Запишем последнее равенство в виде:

$$2011n = 2010! - 2010 = 2010(2009! - 1).$$

Получается, что $2011n$ делится на 2010, но 2010 и 2011 — взаимно просты, значит, на 2010 делится n. Разделим левую и правую части равенства $(*)$ на 2011, получим:

$$\frac{2010!}{2011} = n + \frac{2010}{2011}.$$

Разделим левую и правую части последнего равенства на 2010, получим:

$$\frac{2009!}{2011} = \frac{n}{2010} + \frac{1}{2011}.$$

Число $\frac{n}{2010}$ — целое, значит, дробная часть числа $\frac{2009!}{2011}$ равна $\frac{1}{2011}$.

Тема 4. Построение сечений многогранников

Эта тема особенно важна для интеллектуально одаренных детей. Мы приводим конкретную разработку факультативного занятия с *необходимой учащимся теорией и подборкой задач с решением.*

Решение любых стереометрических задач требует не только вычислительных и логических умений и навыков, но и умений изображать пространственные фигуры на плоскости (например, на листе бумаги, классной доске). На факультативном занятии целесообразно вспомнить некоторые важные теоретические сведения.

1. Параллельное проектирование и его свойства. Пусть в пространстве дана некоторая плоскость Π_0 и вектор $\bar{\rho} + \Pi_0$. Пусть M — любая точка пространства, не принадлежащая плоскости Π_0. Проведем прямую $l \parallel \bar{\rho}$ через M , тогда $l \cap \Pi_0 = \{M_0\}$. M_0 называют проекцией точки M на плоскость $\ddot{I}_0$.

Если $\bar{\rho} \perp \Pi_0$, то M_0 — ортогональная проекция точки M на Π_0 .

Если $M \in \Pi_0$ то $M_0 = M$ (рис. 2.25).

Множество F_0 проекций точек данной фигуры F на плоскость Π_0 называется проекцией фигуры F на плоскость Π_0.

Можно показать, что параллельное проецирование, как отображение множества точек пространства во множество точек плоскости Π_0 , обладает свойствами (рис. 2.26).

1. Проекцией прямой l является прямая l_0 , если $l \nparallel \bar{\rho}$. Если $l \parallel \bar{\rho}$, то проекцией прямой l является точка L_0 , где $\{L_0\} = l \cap \Pi_0$

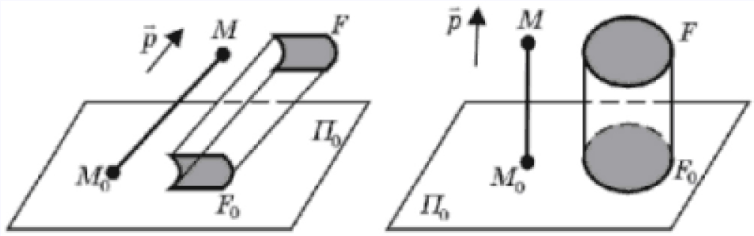


Рис. 2.25

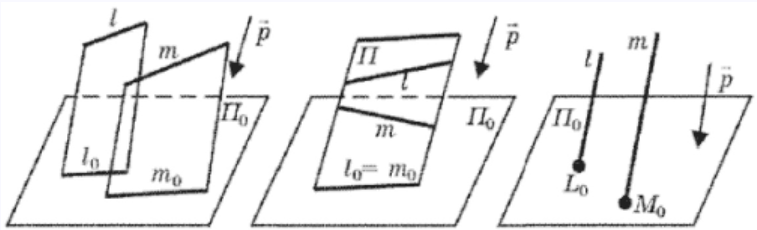


Рис. 2.26

2. Проекцией параллельных прямых являются параллельные прямые, или совпавшие прямые, или две точки.

3. Сохраняется отношение «лежать между» для трех точек A, B, C, если $AB \nparallel \overline{\rho}$.

4. Сохраняется простое отношение трех точек A, B, C, если $AB \nparallel \overline{\rho}$, т. е. $(A_0, B_0, C_0) = (AB, C) = AC/CB$.

5. Если отрезок (луч) AB не параллелен $\overline{\rho}$, то проекцией AB является отрезок (луч) A_0B_0 (рисунок 2.27).

6. Проекцией пересекающихся прямых являются пересекающиеся прямые или

совпадающие прямые.

7. Проекцией угла ABC является угол $A_0B_0C_0$, в общем случае ему неравный (плоскость $ABC \nparallel \overline{p}$).

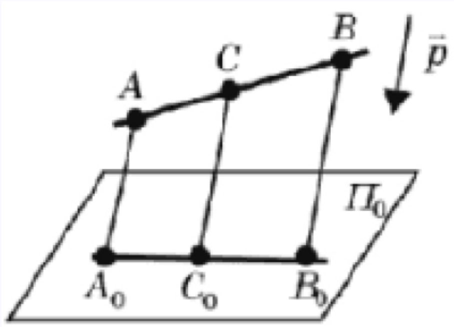


Рис. 2.27

8. Проекцией скрещивающихся прямых являются пересекающиеся прямые или параллельные прямые, или совокупность точки и прямой (рис. 2.28).

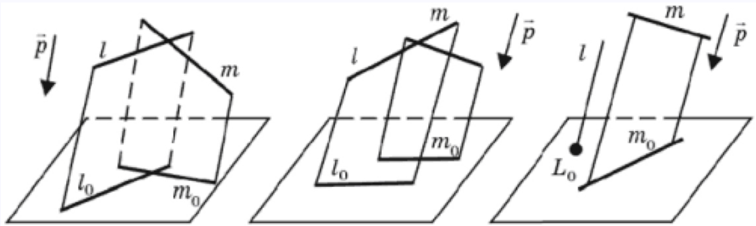


Рис. 2.28

9. Если две фигуры F и Φ — плоские, и плоскости, в которых они лежат, параллельны между собой, но не параллельны $\overline{\rho}$, то отношение площадей проекций F_0 и Φ_0 равно отношению площадей самих фигур F и Φ, то есть $S(F)/S(\Phi) = S(F_0)/S(\Phi_0)$ (рис. 2.29).

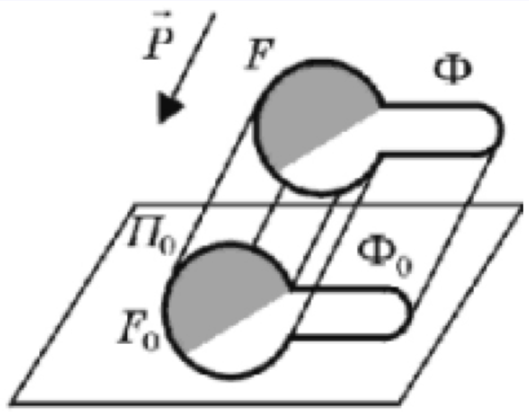


Рис. 2.29

Если F — проецируемая фигура при параллельном проецировании, заданном вектором $\overline{\rho}$ на плоскость Π_0, то F называют оригиналом, $\overline{\rho}$ — направлением проецирования, Π_0 — плоскостью проекции, F_0 — проекция фигуры на плоскость Π_0.

Если некоторая фигура F плоскости Π подобна фигуре F_0 плоскости Π_0, то F может быть принята за изображение фигуры, т. е. изображением фигуры может являться любая фигура F, подобная параллельной проекции F_0.

Если некоторая фигура F плоскости Π подобна фигуре F_0 плоскости Π_0, то F может быть принята за изображение фигуры, т. е. изображением фигуры может являться любая фигура F, подобная параллельной проекции F_0.

Требования к чертежу. Эти требования необходимо сообщить интеллектуально одаренным детям, так как они не изучают черчение.

Первым и важнейшим шагом решения геометрической задачи является построение чертежа, соответствующего условию. Если задача планиметрическая, то чертеж является, либо копией оригинала, либо ему подобен.

При изображении пространственных фигур возникают трудности, ибо не может плоская фигура быть подобной пространственной.

Чертеж должен удовлетворять некоторым требованиям, способствующим наилучшему восприятию изображения пространственной фигуры.

Прежде всего, чертеж должен быть верен, то есть представлять собой фигуру, подобную произвольной параллельной проекции оригинала. При этом, естественно, должны выполняться все свойства параллельного проецирования.

Во-вторых, чертеж должен быть наглядным, то есть дающим пространственное представление об оригинале. С этой целью на изображении помимо очертания рассматриваются видимые и невидимые линии.

Сравните восприятие рисунков 2.30 и 2.31.

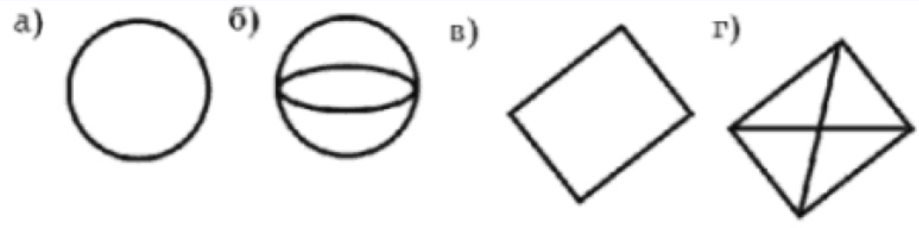


Рис. 2.30

Наконец, чертеж должен быть легко выполним циркулем и линейкой, его построение должно удовлетворять аксиомам конструктивной геометрии. Однако разделы «Геометрические построения на плоскости» и «Методы изображений» так далеко

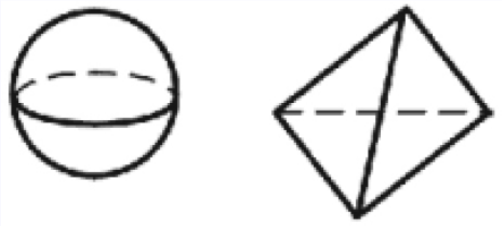


Рис. 2.31

отстоят друг от друга, что при изучении одного мы совершенно забываем об изученном ранее другом.

Изображение плоских фигур в параллельной проекции. При изображении плоских фигур в параллельной проекции применяются следующие теоремы.

Теорема 1. *Изображением* $\triangle\bar{A}\bar{B}\bar{C}$ *является любой треугольник* ABC.

Теорема 2. *Если дано изображение* $\triangle\bar{A}\bar{B}\bar{C}$ *на плоскости* Π, *то можно построить изображение любой точки плоскости* $\triangle\bar{A}\bar{B}\bar{C}$.

Доказательство приводится в учебнике авторов Александрова и др. «Геометрия 10–11 кл.» — М.: Просвещение, 1992 (§ 29, п. 1).

Исходя из теорем 1 и 2, легко построить изображения любых плоских фигур; в частности, изображением параллелограмма (квадрата, ромба, прямоугольника) является любой параллелограмм. Изображением трапеции является трапеция с тем же отношением длин оснований. Изображением окружности является эллипс, изображением перпендикулярных диаметров окружности являются сопряженные диаметры эллипса.

Ввиду того, что при изображении сферы, цилиндра, конуса необходимо уметь строить изображение окружности, остановимся немного подробнее на способах построения эллипса.

Способ I. Построение эллипса по двум главным диаметрам AB и CD (рис. 2.32).

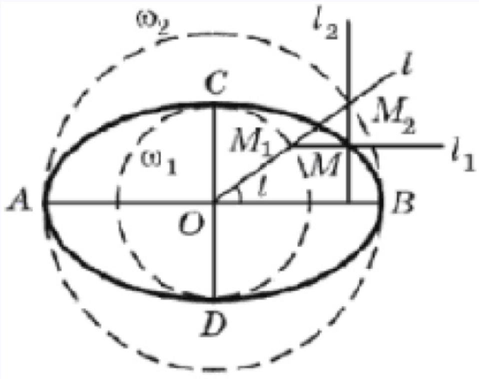


Рис. 2.32

1. $AB \cap CD = O$,O —середина отрезка AB
2. $w_1(O, OC), w_2(O, OA)$
3. $\forall l, O \in l$
4. $M_1 \in l, M_2 \in l \cap w_2$
5. $l_1 \parallel OB, M_1 \in l_1; l_2 \parallel OC, M_2 \in l_2$
6. $M \in l_1 \cap l_2$, M — искомая точка эллипса

Доказательство правильности построения можно провести, введя систему координат $O(0;0), B(a;0), C(0;b)$ и рассматривая параметр t – угол между осью Ox и прямой l.

Способ II. Построение эллипса по двум сопряженным диаметрам, используя перспективно аффинные преобразования плоскости (рис. 2.33).

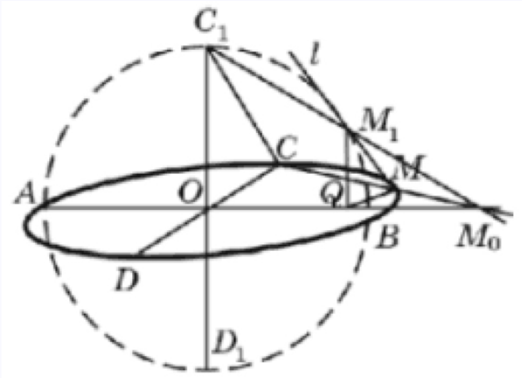


Рис. 2.33

Пусть AB и CD — два сопряженных диаметра эллипса. Построим на диаметре AB окружность и проведем диаметр C_1D_1, ей перпендикулярный. Используем перспективно аффинное преобразование, заданное осью AB и парой соответствующих точек C_1 и C (или D_1 и D).

Таким образом, проекцией окружности будет эллипс.

Построение.

1. AB, CD, O — середина отрезков AB и CD.

2. $w(O, OA)$ — окружность.

3. $OD_1 \perp AB, C_1 \in w, D_1 \in w$.

4. $\forall M_1 \in w$.

5. $C_1M_1 \cap AB = M_0$.

6. CM_0.

7. $l \parallel C_1C, M_1 \in l$.

8. $CM_0 \cap l = M$ — искомая точка эллипса

Можно значительно упростить построение образа точки M_1, используя подобие треугольников OCC_1 и QMM_1 ($QM_1 \parallel OC_1, MM_1 \parallel CC_1, QM \parallel OC$).

Существует много других способов построения эллипса, которые интересны будут интеллектуально одаренным детям.

Изображение пространственных фигур в параллельной проекции. При изображении пространственных фигур в параллельной проекции применяют

Теорема 3 (Польке-Шварца). *Всякий невырожденный четырехугольник $ABCD$ вместе с его диагоналями можно рассматривать как изображение тетраэдра любой наперед заданной формы (рисунок 2.34).*

Используя теорему Польке-Шварца (стр. 285) и свойства параллельного проецирования, легко показать, что изображением призмы и пирамиды, цилиндра и конуса являются фигуры, изображенные на рисунках 2.35, 2.36.

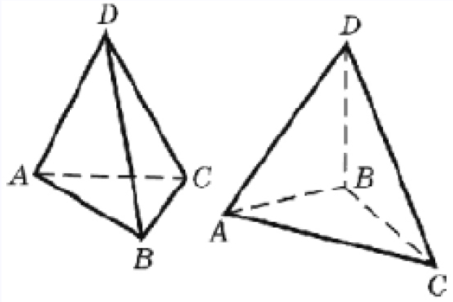


Рис. 2.34

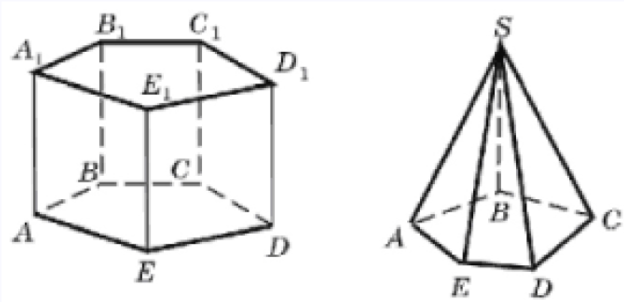


Рис. 2.35

Методы построения сечений многогранников. Метод следов. Учитель сообщает, что суть метода заключается в построении вспомогательной прямой, являющейся изображением линии пересечения секущей плоскости с плоскостью какой-либо грани фигуры $\overline{F}$. Удобнее всего строить изображение линии пересечения секущей плоскости с плоскостью нижнего основания. Эту линию называют следом секущей плоскости. Используя след, можно построить изображения точек секущей плоскости, находящихся на боковых ребрах или гранях фигуры $\overline{F}$. Для тех пе-

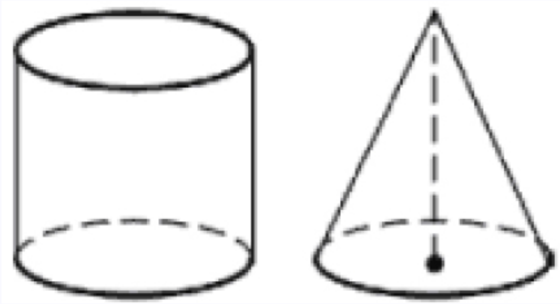


Рис. 2.36

дагогов, кто знаком с гомологией, удобно ее применять при нахождении образов точек нижнего основания фигуры F — изображения фигуры $\overline{F}$(надо познакомить с гомологией и учащихся).

Последовательно соединяя образы этих точек, получим изображение искомого сечения. В дальнейшем будем допускать вольность речи, и говорить «строим сечение» вместо «строим изображение сечения».

Пусть M, N, K — точки секущей плоскости, M_1, N_1, K_1 — их проекции на плоскость основания. При этом для призм и цилиндров $MM_1 \parallel NN_1$, $NN_1 \parallel KK_1$, для конусов и пирамид $MM_1 \cap NN_1 \cap KK_1 = S$ (S — вершина). Удобнее обозначать вершины нижнего основания через $A_1, B_1, C_1, \ldots$, верхнего основания — $A, B, C, \ldots$

Кратко суть метода следов можно записать следующим образом.

1) $MN \cap M_1N_1 = X$;
2) $MK \cap M_1K_1 = Y$;
3) $XY = s$ — след секущей плоскости;
4) $A_1M_1 \cap s = A0$. Возможно

$$\begin{cases} A_1N_1 \cap s = A_0 \\ A_0N \cap A_1A = \overline{A} \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} A_1K_1 \cap s = A_0 \\ A_0K \cap A_1A = \overline{A} \end{cases}$$

5) $A_0M \cap A_1A = \overline{A}$;

6) пункты 4–5 повторить для вершин $B_1, C_1, \ldots$ нижнего основания фигуры F;

7) $\triangle \bar{A}\bar{B}\bar{C}$ — искомое сечение.

Фактически $\bar{A}\bar{B}\bar{C} = f(A_1, B_1, C_1, \ldots)$, где f – гомология, заданная осью s и парой точек M_1 и M или N_1 и N, или K_1 и K. Строить сечение фигуры F секущей плоскостью методом следов удобно в тех случаях, когда секущая плоскость задана тремя точками, ей принадлежащими, или прямой и не принадлежащей ей точкой, или двумя пересекающимися прямыми, или двумя параллельными прямыми. Во всех случаях легко взять три точки M, N, K, принадлежащие плоскости α , и решение проводить по указанной схеме.

Пример 1. *Постройте сечение призмы $A_1B_1C_1D_1ABCD$ плоскостью, проходящей через три точки M, N, K. Рассмотрите все случаи расположения точек M, N, K на поверхности призмы (рис. 2.37).*

Рассмотрим случай: $M \in BB_1, N \in CC_1DD_1, K \in AA_1E$. В данном случае, очевидно, что $M_1 = B_1$.

Построение.

1. $MN \cap M_1N_1 = X$;
2. $MK \cap M_1K_1 = Y$;
3. $XY = s$ —след секущей плоскости;
4. $A_1K_1 \cap s = A_0$;
5. $A_0K \cap AA_1 = \overline{A}, A_0K \parallel EE_1 = \overline{E}$.

6. $D_1N_1 \cap s = D_0$.

7. $D_0N \cap DD_1 = \overline{D}, D_0N \cap CC_1 = \overline{C}$.

8. $\bar{A}M\bar{C}\bar{D}\bar{E}$ —искомое сечение.

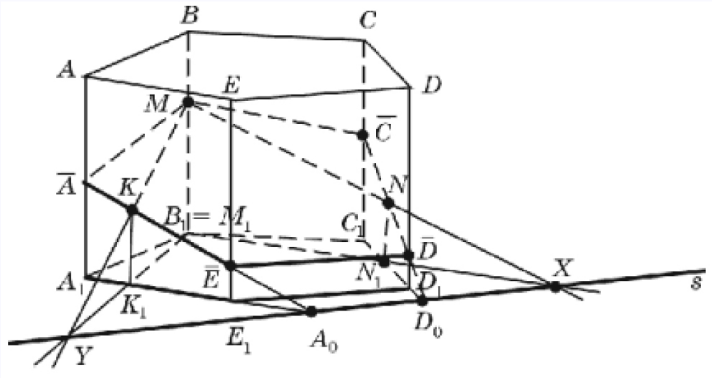


Рис. 2.37

Пример 2. *Постройте сечение пирамиды $SABCDE$ плоскостью, проходящей через точку $M \in SBC$ и прямую l , лежащую в грани SED (рис. 2.38).*

Построение.

1. $SM \cap BC = M_1$.

2. $l \cap SD = \overline{D}, l \cap SD = \overline{E}$.

3. $M \cap M_1E = X, l \cap ED = Y, XY = s$ — след секущей плоскости.

4. $s \cap AB = K, s \cap AE = N$.

5. $BC \cap s = B_0, B_0M \cap SB = \overline{B}, B_0M \cap SC = \overline{C}$.

6. $K\bar{B}\bar{C}\bar{D}\bar{E}N$ —искомое сечение.

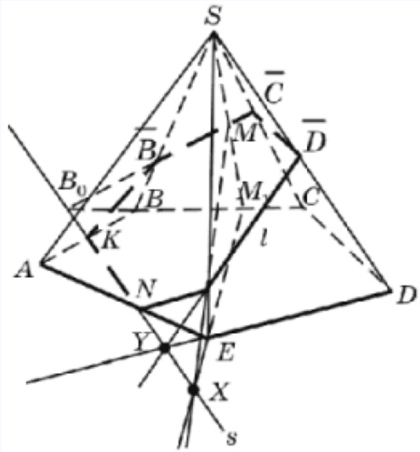


Рис. 2.38

При объяснении шагов построения можно использовать понятие гомологии или факты стереометрии, опираясь на наглядное представление о данных в условии задачи фигурах.

Например, в последнем примере комментарии учителя могут быть следующими.

1. То, что дано, считается построенным.

2. Так как точка M лежит в грани SBC, то прямые SM и BC пересекаются, следовательно, можно построить их точку пересечения M_1.

3. Прямая l лежит в грани SED, значит, она пересекает ребра SD и SE в точках и $\overline{D}$ и $\overline{E}$.

4. Находим прямую s пересечения плоскости основания и секущей плоскости, используя известные точки M, $\overline{D}$, $\overline{E}$ в секущей плоскости.

5. Очевиден шаг построения.

6. Прямые BC и s лежат в одной плоскости, B_0 — их точка пересечения лежит в секущей плоскости, в плоскости основания и в плоскости SBC. Точка M лежит в секущей плоскости и в плоскости SBC. Следовательно, прямая B_0M является прямой пересечения секущей плоскости с плоскостью грани SBC.

Таким образом, можно построить точки и $\overline{B}$ и $\overline{C}$.

В задачах на построение сечений в школьной геометрии не принято проводить исследования, хотя было бы очень полезно для интеллектуально одаренных детей его провести.

Например, в примере 2 на втором шаге построения рассмотреть случай, когда $l \parallel SD$ или $l \parallel SE$, на третьем шаге $l \parallel ED$, на четвертом — s не пересекает AE и AB, на пятом – $s \parallel BC$. Рассматривая различные точки, получим при одном условии задачи несколько вариантов решения.

В общем случае количество вершин многоугольника сечения может изменяться от 3 до $n+1$ — для пирамиды, $n+2$ — для призмы.

Метод следов легко объясним, нагляден, но не всегда удобен в практике построения сечений многогранников, так как расположение точек X и Y следа s может быть за рамками чертежа, прямые, определяющие точку X (или Y) могут быть параллельны (рис. 2.39).

В тех случаях, когда применение метода следов затруднено, применяют метод внутреннего проектирования или так называемый метод вспомогательных сечений.

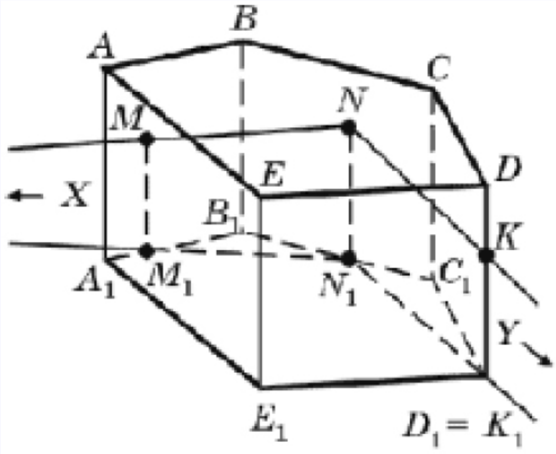


Рис. 2.39

Метод внутреннего проектирования. Метод внутреннего проектирования удобно использовать, если секущая плоскость задана тремя точками в разных боковых гранях многогранника. Для призм используют параллельное проектирование, а для пирамид — центральное проектирование.

Сущность данного метода заключатся в выборе направления проектирования и построении следа искомого сечения на плоскость проектирования. Подробнее раскрыть сущность данного метода поможет решение следующей задачи.

Задача 1. *Построить сечение данной пятиугольной призмы плоскостью, проходящей через данные три точки M, N, P, лежащие на боковых гранях призмы.*

Решение.

Выберем плоскостью проектирования плоскость нижнего основания призмы (обозначим ее α), а в качестве направления проектирования — боковое ребро призмы (рис. 2.40).

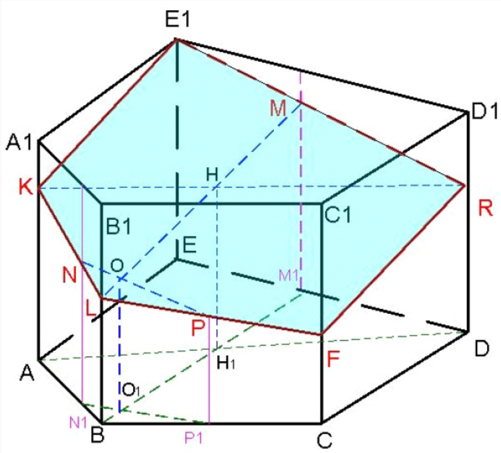


Рис. 2.40

Построим проекции точки N на нижнее основание призмы, получим точку N_1, а в качестве проекций точек M и P выступают точки M_1 и P_1 соответственно.

Выбираем ребро BB_1, на котором будем искать точку пересечения секущей плоскости с многогранником.

Для этого находим точку пересечения проекции прямой NP (а, именно, N_1P_1) с прямой M_1B ($N_1P_1 \cap BM_1 = O_1$).

Через полученную точку O_1 проводим прямую OO_1 параллельную направлению проектирования BB_1.

Данная прямая в пересечении с прямой NP и даст точку O, проекцией которой и является точка O_1.

Проводим прямую MO, которая пересечет ребро BB_1 в точке L. Таким образом, L — точка пересечения секущей плоскости с ребром многогранника BB_1.

Аналогичным образом находим и точку пересечения секущей плоскости с ребром

DD_1 и EE_1.

Последовательное соединение отрезками пар точек пересечения секущей плоскости с ребрами куба, лежащими в одной грани, дает стороны сечения.

В данном случае искомым сечением является пятиугольник $LFRE_1K$.

Таким образом, построение сечения методом внутреннего проектирования можно выполнить за пять шагов, а именно:

1) определить плоскость проектирования и направление проектирования (в качестве первой обычно берут плоскость основания, второго — ребро многогранника);

2) найти проекции данных точек искомого сечения на плоскость проектирования;

3) выбрать ребро, на котором будем строить точку пересечения многогранника с секущей плоскостью;

4) найти точку пересечения секущей плоскости с ребром многогранника;

5) построить искомое сечение.

Метод деления n-угольной пирамиды (призмы) на треугольные пирамиды (призмы). Сущность данного метода заключается в выделении из данной n-угольной призмы (пирамиды) треугольной призмы (пирамиды), на боковых ребрах которой лежали бы точки, определяющие искомое сечение, и построении сечения полученной призмы (пирамиды).

В результате получаются новые дополнительные точки, которые и позволят выделить и построить сечения тех треугольных призм (пирамид), которые имеют общие части с первоначально выделенной треугольной призмой (пирамидой).

Понять сущность данного метода поможет решение следующей задачи.

Задача 2. *Дано изображение пятиугольной призмы $ABCDEA_1B_1C_1D_1E_1$. Точки P, H и T принадлежат соответственно ее ребрам AA_1, EE_1, BB_1. Построить сечение данной призмы плоскостью PHT.*

Решение.

Выделим из пятиугольной призмы $ABCDEA_1B_1C_1D_1E_1$ треугольную призму $ABEA_1B_1E_1$ (рис. 2.41).

Треугольник PHT — сечение призмы $ABEA_1B_1E_1$ плоскостью PHT. С этой призмой призмы $ABCA_1B_1C_1$, $ADEA_1D_1E_1$ имеют общие части.

Точки M, K, M_1, K_1 являются соответственно точками пересечения прямых AC и BE, AD и BE, A_1C_1 и B_1E_1, A_1D_1 и B_1E_1.

Плоские четырехугольники ACC_1A_1 и BEE_1B_1 пересекаются по отрезку MM_1. Поэтому существует точка Q, в которой пересекаются прямые TH и MM_1.

Треугольник PTY есть сечение плоскостью PHT призмы $ABCA_1B_1C_1$ (точка Y — это пересечение прямых PQ и CC_1).

На основании аналогичных рассуждений получаем, что прямые TH и KK_1 пересекаются в точке F, а прямые PF и DD_1 — в точке X.

Очевидно, что треугольник PHX есть сечение призмы $ADEA_1D_1E_1$ плоскостью PTH.

Пятиугольник $PTYXH$ — искомое сечение.

Таким образом, можно сделать следующее заключение: для построения сечения методом деления n-угольной пирамиды (призмы) на треугольные пирамиды (призмы) необходимо выполнить следующие три шага:

1) разбить пирамиду (призму) на треугольные пирамиды (призмы) на боковых ребрах которых лежали бы точки, определяющие искомое сечение;

2) построить сечения в каждой полученной треугольной пирамиде (призме);

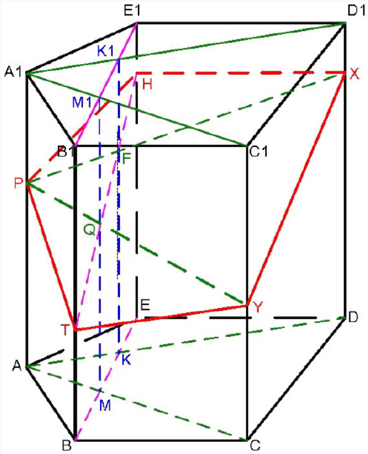


Рис. 2.41

3) полученные дополнительные точки использовать для построения сечения первоначально заданной n –угольной пирамиды (призмы).

Примечание: недостатком данного метода является слишком большое количество построений вспомогательных линий, что приводит к громоздкости чертежа.

Метод параллельных прямых. В основу этого метода положено следующее свойство параллельных плоскостей: прямые, по которым плоскость пересекает параллельные плоскости, параллельны между собой. Таким образом, сущность данного метода заключается в построении параллельной плоскости и прямых, по которым данные плоскости пересекаются.

Задача 3. *Дано изображение пятиугольной призмы* $ABCDEA_1B_1C_1D_1E_1$. *Точки* K, L *и* M *принадлежат, соответственно, отрезкам* AA_1, BB_1 *и* CC_1. *Построить сечение данной призмы плоскостью* KLM.

Решение.

Через прямую AA1 проводим плоскость, параллельную плоскости BCC_1. Прямые ED, E_1D_1, CD и C_1D_1 пересекаются с плоскостью, соответственно, в точках P, P_1, F и F_1 (рис. 2.42).

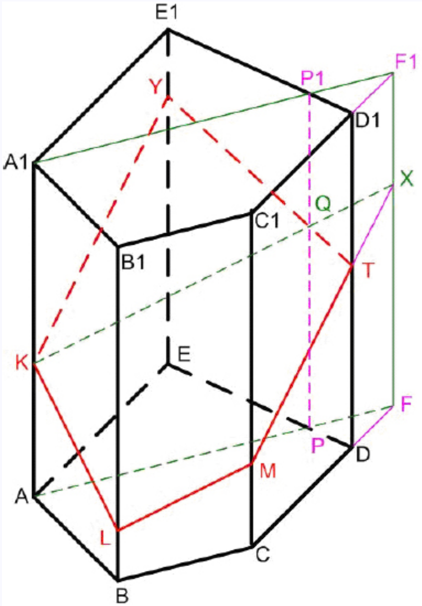


Рис. 2.42

Так как плоскости $AA1P_1$ и BCC_1 параллельны, то плоскость KLM пересекает плоскость AA_1P_1 по прямой KX, параллельной прямой LM, причём точка X принадлежит прямой FF_1.

Прямые PP_1 и KX пересекаются в точке Q, прямые MX и DD_1 — в точке T, а пересечение прямых EE_1 и TQ и даст нам точку Y. Получили пятиугольник

$KBMTY$ — искомое сечение.

Анализируя вышесказанное, можно сделать следующий вывод: построение сечения методом параллельных прямых можно выполнить за шесть шагов, а именно:

1) выбрать грани многогранника, содержащие прямую, по которой искомое сечение пересекает данную фигуру;

2) построить плоскость, параллельную выбранной грани;

3) найти прямые пересечения построенной плоскости с плоскостями боковых граней;

4) построить в полученной плоскости прямую, параллельную прямой, по которой искомое сечение пересекает боковую грань многогранника;

5) найти точку пересечения полученной прямой с плоскостями боковых граней;

6) построить искомое сечение.

Метод параллельного переноса секущей плоскости. Сущность этого метода заключается в следующем. Вместо секущей плоскости строится параллельная ей плоскость, которая пересекает все три грани некоторого трехгранного угла данного многогранника (или его части). Путем параллельного переноса строятся некоторые линейные элементы искомого сечения, соответствующие легко строящимся элементам плоскости.

Задача 4. *Дано изображение пятиугольной пирамиды $SABCDE$ с основанием $ABCDE$. На ее боковых ребрах SA, SB, SE отмечены соответственно точки K, M, P. Построить сечение этой пирамиды плоскостью KMP.*

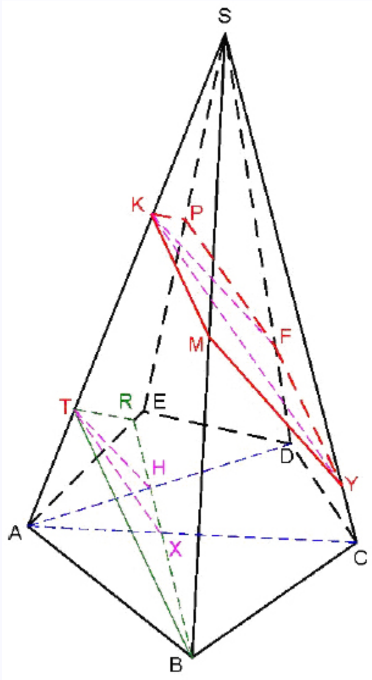


Рис. 2.43

Решение.

Проводим прямую BT, параллельную прямой KM, и прямую TR, параллельную прямой KP. Получаем треугольник TRB, плоскость которого параллельна плоскости KMP.

Строим диагонали AD и AC в основании пирамиды. Прямые BR и AD, BR и AC пересекаются, соответственно, в точках H и X. Строим отрезки TH и TX.

Через точку K проводим прямые, параллельные соответственно прямым TH и

TX. В пересечении с ребрами SD и SC получаем точки F и Y, принадлежащие секущей плоскости.

Пятиугольник $KPFYM$ — искомое сечение (рис. 2.43).

Таким образом, можно сделать следующее заключение: для построения сечения методом параллельного переноса секущей плоскости необходимо выполнить следующие четыре шага:

1) построить плоскость, пересекающую все три грани некоторого трехгранного угла данного многогранника (или его части), параллельно плоскости искомого сечения;

2) найти точки пересечения полученной плоскости с плоскостями боковых граней или диагональных сечений этого многогранника;

3) построить некоторые линейные элементы искомого сечения, путем параллельного переноса;

4) построить искомое сечение.

Метод разделяющей плоскости. Сущность метода состоит в построении плоскости сечения многогранника (параллельно основанию), проходящей через одну из трёх данных точек таким образом, что другие две точки лежат в различных полупространствах.

Точки пересечения полученной плоскости с плоскостями боковых граней или диагональных сечений и есть точки, определяющие границы искомого сечения.

Задача 5. *Дано изображение четырехугольной призмы* $ABCDA_1B_1C_1D_1$*. Точки* M*,* K *и* P *принадлежат соответственно граням* ABB_1A_1*,* BCC_1B_1 *и* CDD_1C_1 *этой призмы. Построить ее сечение плоскостью* MKP*.*

Решение.

Проводим отрезки MF, FE и EH, параллельные, соответственно, AB, BC и CD. Точки K и P лежат в различных полупространствах относительно плоскости MFE, которая параллельна основаниям призмы $ABCDA_1B_1C_1D_1$.

Строим отрезок KK', параллельный ребру BB_1, и отрезок PP', параллельный ребру CC_1. Проводим отрезки MF, FE и EH, параллельные соответственно AB, BC и CD. Точки K и P лежат в различных полупространствах относительно плоскости MFE, которая параллельна основаниям призмы $ABCDA_1B_1C_1D_1$.

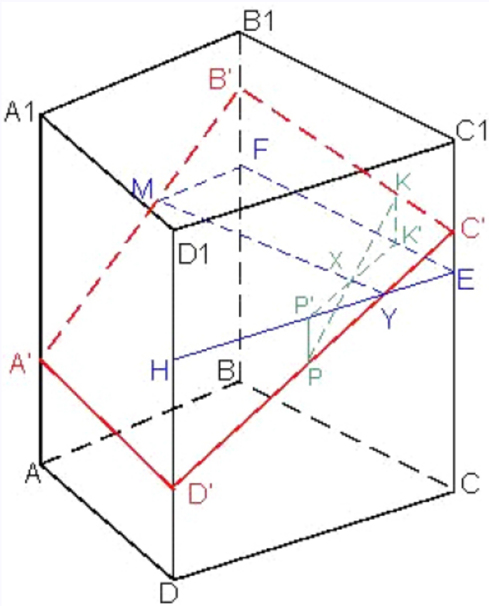


Рис. 2.44

Строим отрезок KK', параллельный ребру BB_1, и отрезок PP', параллельный ребру CC_1. Точки X и Y есть точки пересечения, соответственно, прямых KP и $K'P'$, MX и EH. Прямая PY пересекает прямую CC_1 в точке C', а прямую DD_1 в точке D. Прямые $C'K$ и $B'M$пересекают прямые BB_1 и AA_1, соответственно, в точках B' и A'.

Четырехугольник $A'B'C'D'$ — искомое сечение (рис. 2.44).

Таким образом, построение методом разделяющей плоскости можно выполнить в три шага:

1) построить плоскость, проходящую через одну из заданных точек, параллельно основанию многогранника, таким образом, чтобы две остальные данные точки лежали бы в различных полупространствах относительно этой плоскости;

2) найти точки пересечения полученной плоскости с плоскостями боковых граней или диагональных сечений этих многогранников;

3) построить искомое сечение.

На факультативном занятии по теме *«Сечения многогранников»* интеллектуально одаренным детям было бы полезно подумать над следующими вопросами:

1. Чему равна площадь диагонального сечения куба, если его ребро равно a?

2. Будет ли сечение, перпендикулярное боковому ребру призмы, перпендикулярно его боковым граням?

3. Может ли быть в наклонном параллелепипеде диагональное сечение прямоугольником?

4. У каких призм два непараллельных диагональных сечения перпендикулярны к основанию?

5. На какие многогранники разбивается параллелепипед диагональной плоскостью?

6. Сколько различных диагональных сечений можно провести через одно боковое ребро в призме: четырехугольной; пятиугольной; n -угольной?

7. Какие фигуры представляют собой диагональные сечения прямой призмы; наклонной призмы?

8. Какая фигура получится от пересечения боковых ребер плоскостью, перпендикулярной к этим ребрам в прямоугольном параллелепипеде; прямом параллелепипеде; наклонном параллелепипеде?

9. Что представляет собой сечение параллелепипеда плоскостью, проходящей через две точки одной его диагонали и через одну точку другой его диагонали?

10. Как можно пересечь куб плоскостью, чтобы в сечении получился равносторонний треугольник; равнобедренный треугольник; квадрат; прямоугольник; ромб; равнобедренная трапеция; пятиугольник; шестиугольник; правильный шестиугольник?

11. Может ли быть в сечении параллелепипеда плоскостью правильный пятиугольник?

12. Что представляет собой сечение пирамиды плоскостью, проходящей через ее вершину и две точки основания?

13. Как пересечь правильный тетраэдр плоскостью, чтобы в сечении получился квадрат?

Межшкольный факультатив

Огромную роль в развитии интеллектуальной одаренности учащихся может сыграть межшкольный факультатив. Эффективна такая форма работы при подготовке учащихся к олимпиадам разного уровня (особенно в сельских регионах). Межшкольный факультатив можно организовать в каждом районе. Если есть учитель-энтузиаст, то проведение занятий можно поручить ему. Если такой не найдется, то можно подключить группу «сильных» педагогов, предварительно распределив между ними темы занятий и оговорив вопрос стимулирования их труда. В городах, где есть высшие учебные заведения, полезно наладить сотрудничество с кафедрами (например, математического факультета), привлечь магистрантов и аспирантов.

Огромную роль в развитии интеллектуальной одаренности учащихся может сыграть межшкольный факультатив. Эффективна такая форма работы при подготовке учащихся к олимпиадам разного уровня (особенно в сельских регионах). Межшкольный факультатив можно организовать в каждом районе. Если есть учитель-энтузиаст, то проведение занятий можно поручить ему. Если такой не найдется, то можно подключить группу «сильных» педагогов, предварительно распределив между ними темы занятий и оговорив вопрос стимулирования их труда. В городах, где есть высшие учебные заведения, полезно наладить сотрудничество с кафедрами (например, математического факультета), привлечь магистрантов и аспирантов. Полезно и участие студентов, которые в школьные годы занимались решением олимпиадных задач. На занятиях межшкольного факультатива можно рассмотреть следующие темы:

– Последовательности. Реккурентные последовательности. Возвратные последовательности. Пределы последовательностей. Ряды. Производящая функция последовательности.

– Функции. Различные свойства функций и их применения. Простейшие функциональные уравнения. Функциональные уравнения с условиями непрерывности, ограниченности, дискретной областью определения.

– Комплексные числа.

– Графы.

– Неравенства. Классические неравенства о средних. Неравенство Коши-Буняковского. Неравенства Бернулли, Йенсена, Гельдера.

– Диофантовы уравнения

– Комбинаторика. Принцип Дирихле. Инварианты.

– Методы решения алгебраических уравнений.

– Основы классической геометрии.

– Основы аналитической геометрии.

– Основы синтетической геометрии.

Межшкольный факультатив полезен и при проведении непрерывных заочных олимпиад. Ряд занятий целесообразно посвятить разбору решений заданий такой олимпиады. В течение многих лет преподаватели математического факультета Брестского государственного университета имени А.С. Пушкина ведут занятия межшкольного факультатива для учащихся школ г. Бреста. Приведем пример некоторых занятий.

1. Методы решения функциональных уравнений

Эта тема, как правило, вызывает трудности у школьников и учителей. Что же такое функциональное уравнение и каковы методы его решения? Под функциональным уравнением понимают уравнение, в котором надо найти неизвестную функцию, связанную с известными функциями при помощи образования сложной функции. С простейшими функцио-нальными уравнениями встречался каждый школьник. Например, уравнение $f(-x) = f(x)$. Функция $f(x)$ называется решением данного функционального уравнения, если она удовлетворяет ему при всех значениях аргумента в области её определения. Решить функциональное уравнение — значит установить, имеет ли оно решения, и найти их, если они имеются.

Рассмотрим способы решения функциональных уравнений и задач, связанных с функциональными уравнениями на конкретных примерах.

Пример 1. *Найти длину отрезка, концы которого принадлежат графику функции* $f(x) = 12|x^9| - 7x^2 - \frac{x}{2} + \operatorname{arctg} 0,352 + \frac{1}{2x^5} + \ln|x|$, *а ось ординат является его серединным перпендикуляром.*

Решение.

Задача сводится к решению уравнения $f(-x_1) = f(x_1)$ (рис. 2.45)

Так как ось ординат по условию является серединным перпендикуляром отрезка $[-x_1, x_1]$, то вычислим

$$f(-x_1) = 12|x_1^9| - 7x_1^2 + \frac{x_1}{2} + \operatorname{arctg} 0,352 - \frac{1}{2x_1^5} + \ln|x_1|.$$

Из условия $f(-x_1) = f(x_1)$ получим уравнение

$$12|x_1^9| - 7x_1^2 - \frac{x_1}{2} + \operatorname{arctg} 0,352 - \frac{1}{2x_1^5} + \ln|x_1| =$$
$$= 12|x_1^9| - 7x_1^2 + \frac{x_1}{2} + \operatorname{arctg} 0,352 - \frac{1}{2x_1^5} + \ln|x_1|,$$

которое равносильно уравнению:

$$\frac{x_1}{2} - \frac{1}{2x_1^5} = -\frac{x_1}{2} + \frac{1}{2x_1^5}.$$

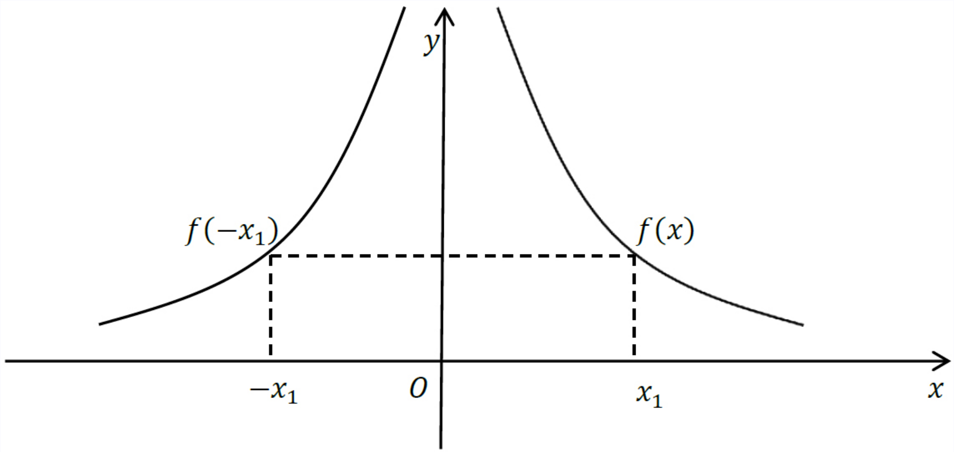


Рис. 2.45

Откуда следует, что $x_1 = \pm 1$. Искомая длина отрезка равна 2.

Пример 2. *Найти $f(x)$, если $f(2x-1) = 3x + 2$.*

Решение.
Обозначим $2x - 1 = t$. Тогда $x = \frac{t+1}{2}$. Имеем,

$$f(t) = 3\left(\frac{t+1}{2}\right) + 2,$$

откуда

$$f(t) = \frac{3t+7}{2}, \Rightarrow f(x) = \frac{3x+7}{2}.$$

Ответ: $f(x) = \frac{3x+7}{2}$.

Пример 3. *Известно, что для всех допустимых значений x верно, что*

$$f(x) - 2f\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{2x^2-1}{x}.$$

Найти $f(x)$.

Решение.

Если вместо x в исходное уравнение подставить $\frac{1}{x}$, то получим, что

$$f\left(\frac{1}{x}\right) - 2f(x) = \frac{\frac{2}{x^2}-1}{\frac{1}{x}},$$

то есть будем иметь систему уравнений:

$$\begin{cases} f(x) - 2f\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{2x^2-1}{x}, \\ f\left(\frac{1}{x}\right) - 2f(x) = \frac{\frac{2}{x^2}-1}{\frac{1}{x}}. \end{cases}$$

Решив эту систему, получим, что $f(x) = -\frac{1}{x}$.

Пример 4. *Найти все функции, определенные на R, удовлетворяющие условию*

$$2f(x) + f(1-x) = x^2.$$

Решение.

Замена: x на $1-x$, получим

$$2f(1-x) + f(x) = (1-x)^2.$$

Умножим обе части исходного уравнения на (-2) и сложим с последним уравнением, получим:

$$-3f(x) = -2x^2 + 1 - 2x + x^2.$$

Откуда

$$f(x) = \frac{1}{3}x^2 + \frac{2}{3}x - \frac{1}{3}.$$

Пример 5. *Найти все функции, определенные на R, удовлетворяющие условию*

$$(f(x))^2 = f(x).$$

Решение.

Пусть x_0 — некоторое действительное число. Тогда

$$(f(x))^2 = f(x_0), \text{ или } f(x_0)(f(x_0) - 1) = 0.$$

Отсюда

$$f(x_0) = 0 \text{ или } f(x_0) - 1 = 0.$$

Если функции $f(x)$ существуют, то графикам будут принадлежать точки $(x_0; 0)$ или $(x_0; 1)$ (и не только они). Решением будет $f(x)$ — всякая, определенная на R функция, график которой принадлежит объединению двух прямых $y = 0$ и $y = 1$.

Пример 6. *Найти все функции, определенные на R, удовлетворяющие условию*

$$f\left(\frac{x+1}{x+2}\right) + 2f\left(\frac{x-2}{x+1}\right) = x.$$

Решение.

Пусть $\frac{x-2}{x+1} = t$, тогда $x = \frac{t+2}{1-t}, t \neq 0, t \neq 1$. Подставим в исходное уравнение, получим

$$f\left(\frac{1}{t}\right) + 2f(t) = \frac{t+2}{1-t}.$$

Заменим t на $\frac{1}{t}$, получим

$$f(t) + 2f\left(\frac{1}{t}\right) = \frac{\frac{1}{t} + 2}{1 - \frac{1}{t}},$$

преобразовав правую часть которого, будем иметь:

$$f(t) + 2f\left(\frac{1}{t}\right) = \frac{1+2t}{t-1}.$$

В итоге мы получили два уравнения:

$$f\left(\frac{1}{t}\right) + 2f(t) = \frac{t+2}{1-t} \text{ и } f(t) + 2f\left(\frac{1}{t}\right) = \frac{1+2t}{t-1}.$$

Умножим обе части 1-го уравнения на (-2) и сложим со 2-ым уравнением:

$$f(t) = \left(\frac{4t+5}{3-3t}\right).$$

Откуда

$$f(x) = \frac{4x+5}{3-3x}.$$

Пример 7. *Найти функцию $f(x)$, определенную на множестве натуральных чисел, удовлетворяющую условию $f(x+1) = f(x) + k$, где k — некоторое действительное число.*

Решение.

Для решения этой задачи используем метод Коши. Вначале найдем выражения для $x = 1, 2, 3 \ldots$. Получим

$$f(2) = f(1) + k,$$
$$f(3) = f(2) + k = f(1) + k + k = f(1) + 2k,$$
$$f(4) = f(3) + k = f(1) + 3k,$$
$$\ldots$$
$$f(n) = f(1) + (n-1)k,$$

где n — натуральное число.

Проверим, действительно ли выполняется последнее равенство:

$$f(n) = f(1) + (x-1)k, \text{ где } n \text{ — натуральное число.}$$

Используем метод математической индукции. Проверим, выполняется ли равенство при $x = 1$: $f(1) = f(1)$ — верно. Предположим, что равенство верно при $x = n - 1$, где $n \geq 2$, то есть $f(n) = f(1) + (n-1)k$ — верно. Докажем, что из этого следует равенство для $x = n$. Так как $f(x+1) = f(x) + k$, то при $x = k$ получим

$$f(n+1) = f(n) + k, \text{ или } f(n+1) = f(1) + (n-1)k + k,$$

$$f(n+1) = f(1) + nk.$$

Значит, равенство верно при любом натуральном n.

Решением данного функционального уравнения является функция $f(x) = f(1) + (x-1)k$, где $f(1)$ — произвольное число.

2. Уравнение Пелля

Уравнение вида

$$x^2 - my^2 = 1 \tag{2.2}$$

носит название «уравнение Пелля».

Имя английского математика Пелля случайно закрепилось за этим уравнением. Эйлер, ознакомившись с книгой Валлиса «Алгебра» в которой упоминалось имя Пелля, подумал, что этому математику принадлежит способ решения уравнения $x^2 - my^2 = 1$ и назвал его «уравнением Пелля». На самом же деле Пелль не имел никакого отношения к этому уравнению.

График уравнения $x^2 - my^2 = 1$ — это гипербола, асимптотами которой являются прямые $y = \pm\frac{x}{\sqrt{m}}$.

Сделаем два замечания:

1) при любом m уравнение (2.2) имеет по крайней мере два решения: $x = \pm 1$, $y = 0$ (эти решения назовём тривиальными);

2) поскольку при изменении знака у x и y левая часть уравнения (2.2) не изменится, достаточно ограничиться нахождением только неотрицательных решений (т. е. решений с неотрицательными x и y).

Решим уравнение (2.2), переписав его следующим образом:

$$my^2 = x^2 - 1 = (x-1)(x+1). \tag{2.3}$$

При нечетных значениях числа x числа $(x-1)$ и $(x+1)$ четные. Следовательно, при нечетных значениях числа x уравнение (2.3) в простейшем случае принимает вид:

$$x^2 - 1 = m(2k)^2, \text{где } y = 2k, k = 1, 2, 3 \ldots \tag{2.4}$$

При нечетных значениях числа x уравнение (2.3) имеет решение в общем виде как уравнение (2.4). Приведем примеры.

Пример 1. $my^2 - 1 = 31^2 - 1 = 15 \times 8^2 (d = 15; y = 2 = 2 \cdot 4)$.

Пример 2. $my^2 - 1 = 181^2 - 1 = 910 \times 6^2 (d = 910; y = 2 \cdot 3)$.

При четных значениях числа x числа $(x-1)$ и $(x+1)$ нечетные. Решение в общем виде имеет место, если одно из чисел $(x-1)$ или $(x+1)$ или оба числа $(x-1) = dz^2, (x+1) = pr^2$.

Пример 3. $x = 28$; $x - 1 = 28 - 1 = 27 = 3 \times 3^2$; $x + 1 = 28 + 1 = 29$; $my^2 = x^2 - 1 = 28^2 - 1 = 87 \times 3^2$ $(m = 87; y = 3)$.

Следовательно, уравнение Пелля имеет решение в общем виде для всех нечетных чисел и для четных чисел, которые при добавлении к ним единицы $(x+1)$ или вычитании из них единицы $(x-1)$ превращаются в нечетные числа, содержащих множитель r^2, где $r = 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, \ldots$ — простые или составные нечетные числа. Четные числа, удовлетворяющие этому условию, определяются по формулам: $x = n \times r^2 - 1$; $x = n \times r + 1$, где где n — нечетное число. Предложенный нами метод решения указанного уравнения Пелля, приведенный выше, примитивно прост. В соответствии с ним, уравнение решаемо для всех нечетных чисел x. А для всех четных значений решение тоже простое: берете любое четное число, возводите его в квадрат, из полученного числа вычитаете 1 или к полученному числу добавляете 1. Получаете два значения числа x, удовлетворяющих условиям уравнения Пелля. Таким методом нами получены следующие тройки чисел: $(x = 1291;\ y = 2;\ m = 416670)$, $(x = 907;\ y = 2;\ m = 205662)$, $(x = 911;\ y = 4;\ m = 51870)$, $(x = 277;\ y = 2;\ m = 19182)$ и др.

Можно уравнение Пелля рассматривать как параметрическое с параметром d. При решении можно опираться на следующие теоремы:

Теорема 1. *Если $x^2 - dy^2 = a$ и $z^2 - dt^2 = b$, то пара чисел $(X; Y) = (xz + dyt; xt + yz)$ удовлетворяет равенству $X^2 - dY^2 = ab$.*

Теорема 2. *Для любого натурального числа d, не являющегося квадратом, существуют такие натуральные числа x и y, что $x^2 - dy^2 = 1$.*

Теорему 2 можно доказать, рассматривая приближения числа $\sqrt{d}$ рациональными числами. Для этого сначала сформулируем и докажем следующую лемму.

Лемма 3. *Для любого вещественного числа ξ и любого натурального числа N существуют такие целое число a и натуральное число b, что $b \leq N$ и*

$$|b\xi - a| \leq \frac{1}{N+1}.$$

Доказательство. Рассмотрим числа 0 и 1, а также дробные части чисел ξ, $2\xi, \ldots, N\xi$. Если бы все расстояния между этими $(N+2)$–мя числами были больше $\dfrac{1}{N+1}$, то получилось бы противоречие. Значит, какое-то из расстояний не превосходит $\dfrac{1}{N+1}$. Если

$$|\{b_2\xi\} - \{b_1\xi\}| \leqslant \frac{1}{N+1},$$

$1 \leqslant b_1 \leqslant b_2 \leqslant N$, то

$$|(b_2\xi - [b_2\xi]) - (b_1\xi - [b_1\xi])| \leqslant \frac{1}{N+1},$$

так что достаточно взять $b = b_2 - b_1$ и $a = [b_2\xi] - [b_1\xi]$. Остальные два случая столь же очевидны:

– если $\{b\xi\} - 0 \leqslant \frac{1}{N+1}$, то годится $a = [b\xi]$;

– если же $1 - \{b\xi\} \leqslant \frac{1}{N+1}$, то можно взять $a = [b\xi] + 1$.

Лемма доказана. ■

Теперь докажем теорему 2.

Доказательство. Положим $\xi = \sqrt{d}$. Для любого натурального $n > 1$ в силу леммы 3 существуют такие натуральные числа a_n и b_n, что $b_n < n$ и $|a_n - b_n\sqrt{d}| \leqslant \frac{1}{n}$. Очевидно,

$$|a_n^2 - db_n^2| = |a_n - b_n\sqrt{d}| \cdot |a_n + b_n\sqrt{d}| \leqslant \frac{1}{n}|a_n - b_n\sqrt{d}| + 2b_n\sqrt{d}| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{n}\left(\frac{1}{n} + 2n\sqrt{d}\right) < 1 + 2\sqrt{d}$$

Итак, величина $a_n^2 - db_n^2$ может принимать лишь конечное число значений. Но n можно брать сколь угодно большим! И при этом в силу неравенства $|a_n - b_n\sqrt{d}| \leqslant \frac{1}{n}$ при $n \to \infty$ имеем $b_n \to \infty$. Значит, хотя бы для одного целого числа c, по модулю меньшего $1+2\sqrt{d}$, существует бесконечно много пар натуральных чисел $(a_n; b_n)$, для которых $a_n^2 - db_n^2 = c$.

Зафиксируем одно из таких чисел c. Рассмотрим остатки от деления чисел a_n и b_n на $|c|$. Поскольку количество остатков, конечно, то существуют такие две разные пары натуральных чисел $(a; b)$ и $(A; B)$, что

$$a^2 - db^2 = c = A^2 - dB^2,$$

$$a \equiv A \pmod{|c|},$$

$$b \equiv B \pmod{|c|}$$

Рассмотрим частное

$$\frac{A + B\sqrt{d}}{a + b\sqrt{d}} = \frac{\left(A + B\sqrt{d}\right)\left(a + b\sqrt{d}\right)}{a^2 - db^2} = \frac{aA - bB + (aB - Ab)\sqrt{d}}{c}.$$

Поскольку

$$aA - bBd \equiv a^2 - db^2 = c \equiv 0 \pmod{|c|} \text{ и } aB - Ab = ab - ab = 0 \pmod{|c|},$$

то числа $x = \frac{aA-bBd}{c}$ и $y = \frac{aB-Ab}{c}$ целые. Так как

$$x^2 - dy^2 = \left(x + y\sqrt{d}\right)\left(x - y\sqrt{d}\right) =$$

$$= \frac{A + B\sqrt{d}}{a + b\sqrt{d}} \cdot \frac{A - B\sqrt{d}}{ab\sqrt{d}} = \frac{c}{c} = 1$$

и $y \neq 0$, то $(x; y)$ — искомое нетривиальное решение уравнения Пелля. ■

На практике уравнение Пелля $x^2 - m^2 = 1$ чаще всего решают следующим образом: вначале находят наименьшее натуральное решение. Для небольших значений m это можно сделать подбором, а для больших m используют цепные дроби (раскладывают число m в конечную цепную дробь). Так как цепная дробь является периодической, то $\sqrt{m} = [q_0; q_1, q_2, cdots]$. Обозначим длину периода этой непрерывной дроби через S (S может быть чётным или нечётным). Если S — чётно, то находим подходящую дробь: $\frac{P_{S-1}}{Q_{S-1}} = [q_0; q_1, q_2, cdots, q_{S-1}]$ В этом случае наименьшее натуральное решение уравнения (2.2) имеет вид:

$$x = P_{S-1}, y = Q_{S-1}.$$

Если же S — нечётное, то

$$x = P_{2S-1}, y = Q_{2S-1}.$$

Пусть (x_0, y_0) какое-либо решение уравнения (2.2), подставим его и получим:

$$\left(x_0 - \sqrt{m}y_0\right)\left(x_0 + \sqrt{m}y_0\right) = 1. \tag{2.5}$$

Для $\forall n \in N$ уравнение (2.5) возведём в n-ную степень:

$$\left(x_0 - \sqrt{m}y_0\right)^n \left(x_0 + \sqrt{m}y_0\right)^n = 1.$$

Затем, используя бином Ньютона, приведём подобные слагаемые, получим равенство:

$$\left(x_n - \sqrt{m}y_n\right)\left(x_n + \sqrt{m}y_n\right) = 1. \tag{2.6}$$

Следовательно, пара (x_n, y_n) является решением уравнения (2.2).

Из равенств (2.5) и (2.6) следует, что:

$$\left(x_0 - \sqrt{m}y_0\right)^n = x_n - \sqrt{m}y_n \tag{2.7}$$

$$\left(x_0 + \sqrt{m}y_0\right)^n = x_n + \sqrt{m}y_n \tag{2.8}$$

А теперь из равенств (2.7) и (2.8) получим формулы, позволяющие найти все решения уравнения (2.2):

$$x_n = \frac{1}{2}\left[\left(x_0 + \sqrt{m}y_0\right)^n + \left(x_0 - \sqrt{m}y_0\right)^n\right], \tag{2.9}$$

$$y_n = \frac{1}{2\sqrt{m}}\left[\left(x_0 + \sqrt{m}y_0\right)^n - \left(x_0 - \sqrt{m}y_0\right)^n\right]. \tag{2.10}$$

Пример 4. *Решить уравнение* $x^2 - 3y^2 = 1$.

Решение.

В данном уравнении $m = 3$. Можно подбором найти одно решение. Пара $(2; 1)$ удовлетворяет уравнению. Остальные решения находят по формулам:

$$x_n = \frac{1}{2}\left(\left(2 + \sqrt{3}\right)^n + \left(2 - \sqrt{3}\right)^n\right),$$

$$y_n = \frac{1}{2\sqrt{3}}\left(\left(2 + \sqrt{3}\right)^n - \left(2 - \sqrt{3}\right)^n\right).$$

Пример 5. *Решить уравнение* $x^2 - 8y^2 = 1$.

Решение.

Найдем наименьшее решение (x_0, y_0).

Используем цепные дроби:

$$\sqrt{8} = 2\sqrt{2} = [2; 1, 4, 1, 4, \ldots],$$

$$S = 2,$$

$$\frac{P_{S-1}}{Q_{S-1}} = \frac{P_1}{Q_1} = 2 + \frac{1}{1} = \frac{3}{1}.$$

Следовательно, $x_0 = 3$, $y_0 = 1$. Остальные решения найдем по формулам (2.9)–(2.10)

2.4 Математические олимпиады

Соревнования в истории математики известны с давних пор. Еще Архимед рассылал для решения задачи своим коллегам и соперникам в Александрию. Математические турниры процветали в Неаполитанском Королевстве Фридриха II Гогенштауфена (XIII век), с ними тесно связано имя крупнейшего математика европейского средневековья Леонардо Фибоначчи (Леонардо Пизанский из Пизы, ок. 1170–1250). В истории решения алгебраических уравнений 3-го и 4-го порядка (XVI век) большое место занимали «Математические соревнования». Эти соревнования носили более личный характер, чем современные олимпиады: так, например, состязания, в которых участвовали Иоганн Палермский и Леонардо Пизанский (XIII век) или Никколо Тарталья и Антонио Фиори (XVI век), можно было бы назвать математическими дуэлями. В XVIII веке были популярны «Соревнования по переписке», в которых принимали участие Бернулли, Лейбниц, Ньютон, Эйлер и др. Позже систематически проводились состязания на приз французской Академии наук, в которых, к примеру, принимали участие С. В. Ковалевская и Б. Риман.

В России конкурсы по решению задач начали проводиться в конце XIX века. С 1885 года в «Вестнике опытной физики и элементарной математики» ежегодно публиковали «задачи на премию». Этот конкурс по праву считают прообразом современных заочных олимпиад. Самая первая математическая олимпиада на территории СССР была проведена в 1933 году в Грузии, затем в 1934 г. в Ленинградском университете, а с 1935 года математические олимпиады стали проводиться в Москве. Успех первых математических олимпиад способствовал перестройке работы с интеллектуально одаренными школьниками. Стали возникать школьные математические кружки при вузах, например при МГУ.

Великая Отечественная война не стала помехой в проведении математических олимпиад. Они прошли в Ашхабаде и Казани. После войны олимпиадное движение получило резкий подъем, в проведение олимпиад начали включаться высшие учебные заведения многих городов Советского Союза. С 1950 года математические олимпиады стали проводиться в Минске. В 1959 году в румынском городе Брашове состоялась первая международная олимпиада по математике, в которой участвовала команда из СССР.

С 1992 года Белорусская математическая олимпиада школьников перестала быть составной частью Всесоюзной олимпиады. Белорусы получили возможность выступать отдельной командой на Международной математической олимпиаде школьников. Участие нашей сборной на Международной олимпиаде выявило ряд недостатков в подготовке школьников, в уровне содержания олимпиадных задач.

Математические олимпиады — одна из наиболее значимых и эффективных форм повышенной математической подготовки учащихся, действенное средство формирования мотивации к учению, повышения познавательной активности, развития творческих способностей, углубления и расширения знаний школьников по предмету. В последние годы все чаще на областных и республиканских олимпиадах встречаются задачи, решение которых требует знаний, выходящих за рамки школьного курса математики. Это касается как теории, так и методов решения.

Многие методы решения олимпиадных задач появились благодаря трудам Н. Абеля, А. Безу, Виета, К. Гаусса, Д. Гильберта, А. О. Гельфонда, Диофанта, Евклида, Д. Вильсона, Д. Кардано, Ж. Ланранжа, А. Муавра, И. Ньютона, Б. Паскаля, Пифагора, Л. Феррари, П. Ферма, Л. Эйлера и др.

Существенный вклад в развитие математических олимпиад внесли такие ученые и педагоги, как П. С. Александров, Л. Д. Глейзер, Б. Н. Делоне, А. К. Ковальджи, В. Ф. Каган, А. Я. Канель–Белов, М. Клайн, А. Н. Колмогоров, Л. А. Люстерник, А. И. Маркушевич, И. С. Петраков, Д. Пойа, И. Х. Сивашинский, В. И. Смирнов, С. Л. Соболев, В. А. Тартаковский, Г. А. Тоноян, Г. М. Фихтенгольц, С. И. Шварцбурд, Д. О. Шклярский, Л. Г. Шнирельман, И. М. Яглом и др. Из белорусских математиков (ученых и педагогов) — А. И. Азаров, И. Ф. Акулич, Е. А. Барабанов, Т. Б. Бахтина, А. Б. Василевский, И. И. Воронович, В. И. Каскевич, С. А. Мазаник, *Анализ содержания олимпиадных задач*

Олимпиадные задачи в математике — это задачи, для решения которых обязательно требуется неожиданный и оригинальный подход. Математические олимпиады в Республике Беларусь проводятся в течение учебного года в несколько туров.

1–й тур — школьные олимпиады. Эта олимпиада проводится по текстам, составленным учителями математики, и в ней принимают участие все желающие учащиеся 5 –11 классов. Нами проанализировано содержание школьных олимпиад, проведенных в трех общеобразовательных учебных заведениях г. Бреста в 2010 году, и выявлены общие принципы формирования комплектов олимпиадных заданий по математике:

- нарастание сложности заданий от первого к последнему;
- задания составлены на основе программы по математике для общеобразовательных учебных учреждений;
- в комплект входят задачи по геометрии, алгебре, комбинаторике (в младших классах — по арифметике, логические задачи; в старших классах — по теории чисел, тригонометрии, стереометрии, математическому анализу); присутствуют и задачи, объединяющие различные разделы школьной математики; в качестве самых сложных задач выступают задачи, решение которых базируется на материале, изучаемом на факультативных занятиях;
- задачи нестандартны, обладают определенной степенью новизны для участников олимпиады.

Ниже мы приводим темы, которые были использованы при составлении вариантов заданий школьных олимпиад:

5 класс — Числовые ребусы. Задачи на разрезание, переливания, взвешивания. Логические или текстовые задачи.

6 класс — Числовые ребусы. Свойства геометрических фигур. Логические или текстовые задачи. Четность.

7 класс — Числовые ребусы. Задачи на составление уравнения. Делимость натуральных чисел. Задачи на переливания, взвешивания. Логические задачи.

8 класс — Преобразование алгебраических выражений. Построение графиков функций. Основные элементы треугольника. Делимость натуральных чисел. Логические задачи.

9 класс — Делимость. Квадратный трехчлен и его свойства. Преобразования алгебраических выражений. Основные элементы треугольника. Логические (комбинаторные) задачи.

10 класс— Квадратный трехчлен и его свойства. Прогрессии. Площадь. Подобие фигур. Неравенства. Логические (комбинаторные) задачи.

11 класс — Системы уравнений. Окружность. Свойства вписанных углов. Тригонометрические уравнения. Построение графиков функций. Комбинаторные задачи.

2-й тур — районные (городские) олимпиады. Эта олимпиада проводится по текстам, составленным областным оргкомитетом (методистом ИРО, преподавателями вузов). В ней принимают участие учащиеся 8–11 классов — победители 1-го тура.

Ниже мы приводим темы, которые были использованы при составлении вариантов заданий 2-го тура олимпиады:

8 класс — Задачи на проценты. Четность. Фигуры (площадь, разрезания). Логические задачи. Делимость натуральных чисел. Признаки делимости. Признаки равенства треугольников. Преобразование алгебраических выражений.

9 класс — Координатная плоскость. Неравенства. Задачи на составление уравнений или систем уравнений. Подобие фигур. Комбинаторные задачи.

10 класс — Неравенства. Свойства квадратичной функции. Окружность. Вписанные многоугольники. Делимость и остатки. Комбинаторные задачи.

11 класс — Свойства квадратичной функции. Прогрессии. Подобие фигур. Системы уравнений. Делимость и остатки. Комбинаторные задачи.

3-й тур — областная олимпиада. Тексты задач подбираются республиканским оргкомитетом. В ней принимают участие учащиеся 8–11 классов — победители 2-го тура.

4-й тур — республиканская олимпиада. Тексты заданий подготавливаются членами жюри республиканского оргкомитета. Практически все задачи являются авторскими. В республиканской олимпиаде принимают участие учащиеся 8–11 классов — победители областной олимпиады.

В содержание олимпиадных заданий этих туров включаются задачи, решение которых требует теоретических знаний, выходящих за рамки школьного курса математики. Ниже мы приводим темы, на которые следует обратить внимание при подготовке к 3-му и заключительному турам белорусской математической олимпиады:

8 класс — 1. Нестандартные текстовые задачи: Знакомство. Спички. Разрезания. Возраст. Сколько надо взять? Гонки. Четность. Проценты. Суммы и среднее. Принцип Дирихле. Обходы. Совместная трапеза. Делимость. Индукция. Игры. Графы. Деревья. Лингвистика. Периодичность. Комбинаторика. Парадоксы и софизмы. 2. Преобразование алгебраических выражений. 3. Уравнения. Уравнения с целой и дробной частью. Уравнения в целых числах. 4. Геометрические фигуры.

9 класс — Логические задачи. Принцип Дирихле. Метод перебора. Правило крайнего. Углы. Треугольники. Задачи на построение. Общие положения. Треугольники

и окружности. Делимость чисел. Простые и составные числа. НОК и НОД чисел. Замечательные точки и линии в треугольниках. Неравенство треугольника. Преобразование числовых и алгебраических выражений. Тождества. Определение количества цифр. Математические ребусы. Взвешивания. Диофантовы уравнения первого порядка. Рациональные уравнения и неравенства. Работа с остатками. Игровые задачи. Симметрия. Выигрышные позиции. Анализ с конца - метод поиска выигрышных позиций. Углы, опирающиеся на дуги. Четырехугольники. Метод инвариант. Задачи на раскраску. Геометрическое место точек. Теорема Пифагора. Графы. Задачи на конструирование. Задачи на разрезание. Преобразование числовых и алгебраических выражений. Вычисление простейшим способом. Комбинаторика. Прогрессии. Сумма последовательности чисел. Метод математической индукции. Подобие фигур. Метод подобия в задачах на построение. Решение уравнений в целых числах. Уравнения с прогрессией. Алгебраический метод решения задач на построение. Числа с заданными свойствами. Натуральные числа. Перпендикуляр и наклонные. Уравнения и неравенства с абсолютной величиной. Системы уравнений. Уравнения и системы уравнений с параметрами. Условные равенства и неравенства. Последовательности. Функции. Построение графиков функций.

10 класс — 1. Метод математической индукции: Задачи комбинаторно-логического характера. Доказательство тождеств, неравенств. Принцип наименьшего элемента. Индукция в геометрии. 2. Основы теории чисел: Простые числа. Алгоритм Евклида. Основная теорема арифметики. Линейные диофантовы уравнения. Системы линейных диофантовых уравнений. Простейшие диофантовы уравнения второй степени. Пифагоровы тройки. Элементы теории сравнений. Малая теорема Ферма, теорема Эйлера, теорема Вильсона. 3. Методы решения олимпиадных задач. Принцип Дирихле. Правило крайнего. Инварианты. Четность, нечетность. Игры, турниры, стратегии и алгоритмы. Задачи на раскраски, укладки, замощения. 4. Элементы теории множеств: Язык теории множеств. Операции над множествами. Отображения множеств. Конечные множества. Формула включения-исключения. 5. Элементы

перечислительной комбинаторики: Основные комбинаторные принципы. Формула суммы и формула произведения Перестановки, размещения, сочетания, сочетания с повторениями. Бином Ньютона. 6. Многочлены: Делимость многочленов. Корни многочленов. Теорема Безу. Теорема Виета для многочленов произвольных степеней. Основная теорема арифметики многочленов. Основная теорема алгебры. 7. Аналитические методы в геометрии: Метод координат. Векторы и их применения. Геометрия масс. 8. Неравенства: Классические неравенства о средних. Неравенство Коши-Буняковского. Геометрические неравенства. 9. Графы: Язык теории графов. Простейшие числовые характеристики и типы графов. Классические теоремы теории графов. 10. Синтетические методы в геометрии: Геометрия преобразований; движения. Теорема Шаля. Преобразования подобия. Гомотетия. Композиции преобразований. 11. Функции: Различные свойства функций, их применения (периодичность, четность, ограниченность). Функциональные уравнения. 12. Последовательности и пределы.

11 класс — 1. Теория чисел: Простые числа Ферма. Китайская теорема об остатках. Мультипликативные функции теории чисел. Квадратичные вычеты. Диофантовы уравнения высших степеней. Уравнения типа Каталана. Дискретная природа целых чисел. 2. Многочлены: Многочлены с действительными, целыми, рациональными коэффициентами. Неприводимые многочлены. Признаки неприводимости многочленов. Многочлены нескольких переменных. Симметрические многочлены. 3. Неравенства: Неравенства Бернулли, Йенсена, Гёльдера. Неравенство Чебышева. Теория Мюрхеда. 4. Последовательности: Рекуррентные последовательности. Возвратные последовательности. Пределы последовательностей. 5. Ряды. 6. Графы: Классические теоремы теории графов. Теория Дилворта. Теория Рамсея. 7. Множества: Разбиения множеств. Отношения множеств. Конечные, бесконечные множества. Топология точечных множеств на прямой и плоскости. 8. Комплексные числа: Алгебраическая и тригонометрическая формы. Формула Муавра. Решение алгебраических задач с применением комплексных чисел. Основная теорема алгебры. 9. Планимет-

рия: Инверсия. Комплексные числа в геометрии. Аффинные и проективные преобразования. Комбинаторная геометрия. Язык комбинаторной геометрии: выпуклые фигуры, выпуклая оболочка, опорные прямые, диаметр фигуры. 10. Аналитические методы в стереометрии. 11. Функции: Функциональные уравнения. Функциональные уравнения с условиями непрерывности, ограниченности, с дискретной областью определения.

Методы решения олимпиадных задач

Мы приводим неполный список методов решения олимпиадных задач: Доказательство от противного. Принцип Дирихле. Решение методами другой науки. Правило крайнего. Решение с конца. Поиск инварианта. Построение контрпримера. Математическая индукция. Рекурсия. Метод итераций. Подсчёт двумя способами. Метод аналогий. Провокационный метод. Вспомогательное построение. Переход в пространство большего числа измерений. Вспомогательная раскраска. Метод сравнений. Координатный метод. Векторный метод.

Метод доказательства от противного. Суть этого метода можно передать следующими пунктами:

1. Сначала делается, предположение противоположное тому, что требуется доказать.

2. Затем выясняется, что следует из сделанного предположения (на основании теорем, аксиом и т. д.).

3. Устанавливается несоответствие (противоречие) предположения с теоретическими данными.

4. Делается вывод о том, что наше предположение неверно, а верно утверждение ему противоположное т. е. то, что требуется доказать.

Доказательство «от противного» (лат. *Contradictio in contrarium*) в математике — один из самых часто используемых методов доказательства утверждений.

Принцип Дирихле. В комбинаторике *принцип Дирихле́* (нем. *Schubfachprinzip*, «принцип ящиков») утверждение, сформулированное немецким математиком Дирихле в 1834 году, устанавливающее связь между объектами («кроликами») и контейнерами («клетками») при выполнении определённых условий. В английском и некоторых других языках утверждение известно как «принцип голубей и ящиков» (англ. *Pigeonhole principle*), когда объектами являются голуби, а контейнерами — ящики.

Принцип Дирихле применяется, в частности, в теории диофантовых приближений при анализе систем линейных неравенств. Наиболее распространена следующая формулировка этого принципа: если кролики рассажены в клетки, причём число кроликов больше числа клеток, то хотя бы в одной из клеток находится более одного кролика.

Более общая формулировка звучит так:

Если m кроликов рассажены в n клеток, то хотя бы в одной клетке находится не менее $\frac{m}{n}$ кроликов, а также хотя бы в одной клетке находится не более $\frac{m}{n}$ кроликов.

Возможны также несколько формулировок для частных случаев:

Если число клеток больше, чем число кроликов, то как минимум одна клетка пуста.

Контрпример. *Контрпример* — пример, опровергающий верность некоторого утверждения. Построение контрпримера — обычный способ опровержения гипотез. Если имеется утверждение типа «Для любого X из множества M выполняется свойство A», то контрпримером для этого утверждения будет: «Существует объект X_0

из множества M, для которого свойство A не выполняется». Часто найти контрпример вручную очень сложно. В таких случаях можно воспользоваться компьютером. Программа для нахождения контрпримера может просто перебирать элементы множества M и проверять выполнения свойства A. Более сложный, но и более эффективный, подход заключается в построении контрпримера «по частям». При этом при выборе очередной «части» сразу отбрасываются варианты, которые заведомо не ведут к опровержению рассматриваемого утверждения. Это позволяет значительно ускорить работу, зачастую на порядки. Необходимо помнить, что отсутствие контрпримера не служит доказательством гипотезы. Доказательство такого рода можно строить, только если рассматриваемое множество конечно. В этом случае, достаточно перебрать все его элементы, и, если контрпримера среди них нет, то утверждение будет доказано.

Инвариант. *Инвариант* в математике — это свойство некоторого класса (множества) математических объектов оставаться неизменными при преобразованиях определённого типа.

При решении некоторых задач следует рассмотреть крайний случай (*правило крайнего*). Естественнее всего такая ситуация возникает тогда, когда нужно найти число элементов конечного множества, а ответ неоднозначен. Далее, если нас интересует некоторое свойство элементов числового множества, то полезно изучить, справедливо ли оно для наибольшего или наименьшего элемента множества (при условии, что наибольший или наименьший его элемент существует). Если речь идёт о множестве точек плоскости, то бывает целесообразно рассмотреть крайнюю левую (или правую, или верхнюю, или нижнюю) точку этого множества.

Метод перебора. *Метод перебора* применяется в задачах, при решении которых приходится перебирать различные варианты. Перебор должен быть грамотным, то есть таким, чтобы при его использовании были рассмотрены все случаи, которые могут представиться, а кроме того, отброшены заведомо негодные варианты, что значительно сокращает объём работы. Применяется он в основном тогда, когда значениями искомой величины могут быть только целые числа, а множество всех таких значений конечно. Метод перебора широко применяется при решении задач на восстановление записи при выполнении действий над числами и близких к ним задач на числовые ребусы.

Графы. *Графом* на плоскости называется конечное множество точек плоскости, некоторые из которых соединены линиями. Эти точки называются вершинами графа, а соединяющие их линии — рёбрами. Число рёбер, исходящих из вершины графа, называется степенью этой вершины. Примерами графов могут служить любая карта дорог, электросхема, чертёж многоугольника и т.д. Долгое время считалось, что теория графов применяется главным образом при решении логических задач.

Индукция. *Индукция* — метод получения общего утверждения из частных наблюдений. Метод доказательства, при котором проверяется утверждение для конечного числа случаев, исчерпывающих все возможности, называют полной индукцией. Метод доказательства, основанный на применении принципа математической индукции, носит название метода математической индукции. Термин «математическая индукция» появился впервые в 1838 году в одноименной статье де Моргана в Британской энциклопедии. Этот метод впервые был разработан в 1665 году Б. Паскалем. Сейчас он широко применяется в математике для доказательства самых разнообразных тождеств, неравенств и других утверждений. Способ доказательства методом математической индукции заключается в следующем:

1) создают базу индукции (доказывают или непосредственно проверяют справедливость утверждения (формулы) для $n = 1$);

2) осуществляют индуктивный переход (предполагают справедливость утверждения для некоторого натурального $n = k$);

3) доказывают справедливость утверждения для $n = k + 1$.

Непрерывная заочная математическая олимпиада

Основные задачи непрерывной заочной математической олимпиады:

– привитие интереса к математике;

– развитие математических способностей учащихся;

– создание среды, обеспечивающей возможность интеллектуально одаренным детям систематически упражняться в решении олимпиадных задач.

Порядок проведения олимпиады:

1) олимпиада проводится на протяжении всего учебного года;

2) в олимпиаде участвуют все желающие учащиеся 7 — 11 классов;

3) олимпиада проводится в 4 тура;

4) итоги подводятся по результатам каждого тура;

5) в конце учебного года подводятся итоги по всем турам и определяются победители;

6) победители заочной олимпиады имеют право участвовать в районной олимпиаде, независимо от занятого места на школьной олимпиаде;

7) победители поощряются благодарственными письмами, подарками;

8) на каникулах (точное время определяется районным отделом образования) проводится занятие межшкольного факультатива по разбору решений задач непрерывной олимпиады.

Приведем пример заданий.

Задания 1 тура непрерывной заочной математической олимпиады

7 класс

1. Ученик не заметил знак умножения между 2–мя трёхзначными числами и написал одно шестизначное число, которое оказалось в семь раз больше их произведения. Найдите эти числа.

2. Кооператив получает яблочный и виноградный сок в одинаковых бидонах и выпускает яблочно–виноградный напиток в одинаковых банках. Одного бидона яблочного сока хватает ровно на 6 банок напитка, а одного бидона виноградного — ровно на 10. Когда рецептуру напитка изменили, одного бидона яблочного сока стало хватать ровно на 5 банок напитка. На сколько банок напитка хватит теперь одного бидона виноградного сока? (напиток водой не разбавляется).

3. В вершинах треугольника записано по натуральному числу, на каждой стороне — произведение чисел, написанных на её концах, а внутри треугольника — произведение чисел, записанных в его вершинах. Сумма всех чисел равна 1000. Какие числа записаны в вершинах треугольника?

4. Деревянный куб покрасили со всех сторон, потом распилили его на 27 одинаковых кубиков. Сколько среди них имеют одну, две, три окрашенные грани. Сколько кубиков не окрашено?

5. Докажите, что $n^3 + 3n^2 - n - 3$ делится на 48 при любом нечётном n.

8 класс

1. В равнобедренном треугольнике ABC $(AB = AC)$ угол при вершине A равен $30°$. На стороне AB отмечена точка K, отличная от B, а на медиане AD отмечена точка P, так, что $PC = PK$. Найдите величину угла PCK.

2. На олимпиаду по математике прибыло 2007 участников. Оказалось, что среди любых 5 из них найдется, по крайней мере, один, знакомый с остальными четырьмя из этой пятёрки. Можно ли утверждать, что на олимпиаде присутствует участник, знакомый со всеми участниками олимпиады?

3. Найдите все тройки $(x; y; z)$ натуральных чисел, для которых выполняется равенство: $3xy + 3yz + 3zx = 5xyz + 3$.

4. Можно ли расставить на футбольном поле четырёх футболистов так, чтобы попарные расстояния между ними равнялись 1, 2, 3, 4, 5, 6 метрам?

5. Найдите наибольшее нечётное число, которое нельзя представить в виде суммы трёх неравных составных чисел.

9 класс

1. В некоторой стране суммарная зарплата 10% самых высокооплачиваемых работников составляет 90% зарплаты всех работников. Может ли так быть, что в каждом из регионов, на которые делится страна, зарплата любых 10% работников составляет не более 11% всей зарплаты, выплачиваемой в этом регионе?

9 класс

1. В некоторой стране суммарная зарплата 10% самых высокооплачиваемых работников составляет90% зарплаты всех работников. Может ли так быть, что в каждом из регионов, на которые делится страна, зарплата любых 10% работников составляет не более 11% всей зарплаты, выплачиваемой в этом регионе?

2. Решите уравнение:

$$(x+1)^{61} + (x+1)^{62}(x-1) + (x+1)^{61}(x-1)^2 + \ldots + (x-1)^{63} = 0.$$

3. Таблица 3×3 заполнена нулями. За один ход разрешается увеличивать на единицу числа в трёх точках, образующих уголок любой ориентации. Можно ли за несколько ходов добиться того, чтобы все числа стали равными и положительными?

4. В прямоугольном треугольнике ABC ($\angle C = 90^\circ$) на гипотенузе AB отмечены точки M и N, так что $AM = MN = NB$. Найдите длину гипотенузы AB, если $CN^2 + CM^2 = 5$.

5. Найдите наибольшее натуральное число n, при котором найдётся хотя бы одна пара натуральных чисел a и b, удовлетворяющих равенству: $a^2 + ab = b^n$.

10 класс

1. В олимпиаде по математике участвовало менее 32 десятиклассников. Оказалось, что если какие-нибудь из них набрали вместе менее 50 баллов, то число этих школьников меньше половины от общего числа участников. Всего все участники набрали 150 баллов, причём каждый из них получил целое неотрицательное количество баллов. Какое наибольшее количество баллов мог набрать победитель олимпиады?

2. Тангенсы углов треугольника — натуральные числа. Чему они могут быть равны?

3. Найдите все решения уравнения $x^2 + 2y^2 = z^2$.

4. Решите систему уравнений:

$$\begin{cases} y^2 + \frac{1}{4} = x, \\ z^2 + \frac{1}{4} = y, \\ x^2 + \frac{1}{4} = z. \end{cases}$$

5. В выпуклом четырёхугольнике $ABCD$ точки E и F являются серединами сторон BC и CD соответственно. Отрезки AE, AF и EF делят четырёхугольник на 4 треугольника, площади которых равны последовательным натуральным числам. Каково наибольшее возможное значение площади треугольника ABD?

11 класс

1. На олимпиаду по математике прибыло n участников. Оказалось, что среди любых k из них $(1 < k < n)$ найдется, по крайней мере, один, знакомый с остальными $k-1$ из этих k участников. При каких n и k можно утверждать, что на олимпиаде присутствует участник, знакомый со всеми остальными участниками?

2. Докажите тождество: $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \ldots - \frac{1}{2n} = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{2n}$.

3. Пусть $ABCDE$ — выпуклый многоугольник, вписанный в окружность, радиуса 1, причём сторона AE — диаметр этой окружности. Пусть $AB = a$, $BC = b$, $CD = c$, $DE = d$. Доказать, что $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + abc + bcd < 4$.

4. Решите в натуральных числах уравнение: $3^x + 4^y = 5^z$.

5. Найдите $f(x)$ и $g(x)$, если выполняются условия:

$$\begin{cases} f(5x+1) + 2x\,g(10x+6) = x+3, \\ f(x+2) - g(2x+8) = 1. \end{cases}$$

Задания 2 тура непрерывной заочной математической олимпиады

7 класс

1. Даны три различных не равных нулю цифры. Из них составляют все всевозможные трехзначные числа. Докажите, что сумма этих чисел обязательно делится на 6 и 37.

2. Клетки шахматной доски заполнены числами таким образом, что сумма любых четырех чисел, стоящих в клетках, расположенных «буквой Г» (ход шахматного коня), одна и та же. Сколько чисел использовано при таком заполнении?

3. Найдите все целые значения n, при которых $n^2 + 2n + 6$ делится на $n + 4$.

4. Пусть a — нечетное натуральное число, а b — натуральное число. Докажите, что числа a и $ab + 4$ — взаимно простые.

5. В футбольном турнире, в котором каждая из 8 участвующих команд сыграла с каждой по одному разу, команды набрали следующее число очков: 14, 12, 8, 8, 6, 4, 3, 1. Сколько очков команды, занявшие первые четыре места, потеряли в играх с остальными командами? (За победу присуждается 2 очка, ничья — 1 очко, поражение — 0 очков).

8 класс

1. Двое играют в следующую игру: не видя номера приближающейся автомашины, первый «берет себе» две любые цифры номера (например, первую и третью или первую и четвертую); второй «берет себе» оставшиеся цифры. Когда номер становится известным, оба играющие складывают свои цифры и выигрывает тот, у которого в сумме цифра единиц больше. Сколько (в каждой серии) таких номеров, что игра заканчивается вничью независимо от выбора, сделанного первым играющим?

2. Докажите, что для положительных чисел a, b, c справедливо неравенство:

$$a^4 + b^4 + c^2 \geqslant 2\sqrt{2}abc.$$

3. Вычислите:

$$1 + 2 - 3 - 4 + 5 + 6 - 7 - 8 + 9 + 10 - \ldots + 2002 - 2003 - 2004 + 2005.$$

4. Машина едет со скоростью 60 км/ч. На сколько надо увеличить скорость, чтобы выиграть на каждом километре по одной минуте?

5. В прямоугольнике $ABCD$ точка M — средина стороны AD, N — середина стороны BC. На продолжении отрезка CD за точку D берется точка P. Обозначим точку пересечения прямых PM и AC через Q. Докажите, что угол QNM равен углу MNP.

9 класс

1. Разложите на множители $5x^4 + 9x^3 - 2x^2 - 4x - 8$.

2. Сколько цифр содержит число $4^5 \times 5^{13}$?

3. Докажите, что можно раскрасить плоскость с помощью 9 красок таким образом, чтобы любые две точки, расстояние между которыми равно 1 метр, имели разный цвет.

4. В окружности радиуса R проведена хорда и параллельная ей касательная. Из концов хорды на касательную опущены перпендикуляры. Вычислите наибольший возможный периметр образовавшегося прямоугольника.

5. Найдите геометрическое место вершин парабол, имеющих уравнения $y = -x^2 + bx + c$ и касающихся параболы $y = x^2$.

10 класс

1. В пространстве даны девять точек с целочисленными координатами. Докажите, что хотя бы один из отрезков с концами в данных точках имеет середину с целочисленными координатами.

2. Докажите, что отношение произведения биссектрис острых углов прямоугольного треугольника к произведению радиусов вписанной и вписанной окружностей есть число иррациональное.

3. Функция $f(x)$ определена на всей числовой оси, является нечетной, периодической с периодом 4 и на отрезке $[0; 2]$ ее значение вычисляется по формуле $f(x) = 1 - |x - 1|$. Решите уравнение:
$$2f(x) \cdot f(x - 8) - 5f(x + 12) + 2 = 0.$$

4. В каждой вершине куба сидит муха. Одновременно все мухи взлетают и снова садятся в каком–то порядке по одной на каждую вершину. Докажите, что найдутся три мухи, которые в начальном и конечном положениях располагаются в вершинах равных треугольников.

5. Найдите сумму квадратов длин всех сторон и диагоналей правильного 2004–угольника, вписанного в окружность диаметра 1.

11 класс

1. Найдите острые углы прямоугольного треугольника, если его стороны образуют геометрическую прогрессию.

2. В одной семье было много детей. Семеро любили капусту, шестеро — морковь, пятеро — горох, четверо — капусту и морковь, трое — капусту и горох, двое — морковь и горох, а один охотно ел все. Установите, сколько детей было в семье.

3. Вычислите сумму: $\left[\sqrt{1}\right] + \left[\sqrt{2}\right] + \left[\sqrt{3}\right] + \ldots + \left[\sqrt{n^2+1}\right]$.

4. Докажите, что для всякого треугольника имеет место неравенство:
$$a^4 + b^4 + c^4 \geqslant 16S^2.$$

5. Докажите равенство: $\operatorname{tg} 30^\circ + \operatorname{tg} 40^\circ + \operatorname{tg} 50^\circ + \operatorname{tg} 60^\circ = \frac{8\sqrt{3}}{3}\cos 20^\circ$.

Задания 3 тура непрерывной заочной математической олимпиады

7 класс

1. 101 лошадь разместили в 15 конюшнях. Почему хотя бы в одной конюшне будет обязательно нечетное число лошадей?

2. Делимое уменьшили на 10%, а делитель увеличили на 10%. Как изменилось частное?

3. В некоторый момент времени Венера и Меркурий занимают определенное положение относительно звезд. Через сколько суток обе планеты будут находиться снова в том же положении относительно звезд, если известно, что Меркурий делает полный оборот вокруг Солнца за 88 суток, а Венера за 225 суток?

4. На конгресс приехало большое число ученых; одни из них были раньше знакомы друг с другом, другие — нет. При этом оказалось, что никакие два из ученых, имеющих одно и то же число знакомых, не имеют общих знакомых. Докажите, что среди присутствующих на конгрессе ученых найдется ученый, знакомый ровно с одним участником конгресса.

5. Можно ли круг разрезать на несколько частей, из которых сложить квадрат?

8 класс

1. В результате измерения четырех сторон и одной из диагоналей некоторого четырехугольника получились числа 2; 4; 5, 5; 10; 15. Чему равна длина измеренной диагонали?

2. На некотором собрании присутствовали $2n$ человек, каждый из которых был знаком не менее чем с n присутствующими. Докажите, что за круглый стол на 4 лица можно посадить четырех из присутствующих так, чтобы каждый сидел между своими знакомыми.

3. Чему равно наибольшее возможное отношение трехзначного числа к сумме его цифр?

4. Найдите значения a и b, при которых равенство

$$\frac{5x+31}{(x-5)(x+2)} = \frac{a}{x-5} + \frac{b}{x+2}$$

выполняется при всех допустимых значениях переменной x.

5. Найдите целые решения системы

$$\begin{cases} x + y = 2, \\ xy - z^2 = 1. \end{cases}$$

9 класс

1. Найдите все функции $f(x)$, которые удовлетворяют равенству:

$$f(x) + xf\left(\frac{x}{2x-1}\right) = 2, \text{ где } x \neq 0,5.$$

2. Может ли в треугольнике сумма двух высот быть больше суммы двух сторон, на которые эти высоты опущены?

3. На какой день недели чаще всего приходится 30–е число месяца?

4. Найдите шестизначное число, произведения которого на 2, на 3, на 4, на 5, на 6 записываются теми же цифрами, что и само число, но в другом порядке.

5. При каких целых значениях k возможно равенство:

$$X^2 + Y^2 + Z^2 = kXYZ,$$

где X, Y, Z — целые положительные числа.

10 класс

1. Докажите, что многочлен $x^{9999}+x^{8888}+x^{7777}+\ldots+x^{1111}+1$ делится на многочлен $x^9+x^8+x^7+\ldots+x^2+1$.

2. Расстояние от пункта A до пункта B равно 999 км. Вдоль соединяющей A и B дороги стоят километровые столбы, на которых указаны расстояния от A до B — надписи выглядят так: 0/999, 1/998, 2/997,…, 999/0. Сколько из этих столбов таких, на которых имеются лишь две различные цифры?

3. Диагонали выпуклого четырехугольника $ABCD$ пересекаются в точке O. Какую наименьшую площадь может иметь этот четырехугольник, если площадь треугольника AOB равна 4 см^2, а площадь треугольника OD равна 9 см^2?

4. Можно ли квадратную таблицу заполнить числами -1, 0, 1 так, чтобы все суммы: в каждом столбце, в каждой строке, на каждой из двух диагоналей — были различны?

5. Найдите все пары чисел x и y, удовлетворяющих уравнению

$$\left(\sin^2 x+\frac{1}{\sin^2 x}\right)^2+\left(\cos^2 x+\frac{1}{\cos^2 x}\right)^2=12+0{,}5\sin y.$$

11 класс

1. Найдите острые углы прямоугольного треугольника, если его стороны образуют геометрическую прогрессию.

2. По окружности радиуса $2R$ (без скольжения) катится внутри другая окружность радиуса R. Найдите множество точек, которое описывает точка M, принадлежащая меньшей окружности.

3. Можно ли квадратную таблицу $n \times n$ заполнить числами 1, 2, 3 так, чтобы все суммы в каждом столбце, в каждой строке, на каждой из двух диагоналей — были различны?

4. При каких натуральных m и n уравнение $m + \cos x = (m + \sin x)\,n$ имеет решение?

5. После длительной разлуки встретились двое старых друзей. Один из них сообщил, что у него три сына, произведение возрастов которых равно 36, а сумма равна числу окон дома, около которого произошла встреча. Второй сказал, что он не может определить возраст детей. Тогда первый добавил, что его старший сын рыжий, после чего второй сразу же назвал возраст детей. Сколько лет было каждому сыну?

Задания 4 тура непрерывной заочной математической олимпиады

7 класс

1. В соревнованиях участвовали 6 футбольных команд. Относительно участников финальной игры были высказаны предположения:

   1) команды a и c;
   2) команды b и e;
   3) команды g и a;
   4) команды b и g;
   5) команды a и d.

   Известно, что в одном из предположений обе команды были названы неверно, а в остальных была названа правильно только одна команда. Какие команды участвовали в финальной встрече?

2. 6 карасей тяжелее 10 лещей, но легче 5 окуней; 10 карасей тяжелее 8 окуней. Что тяжелее: 2 карася или 3 леща?

3. Расставьте цифры от 1 до 8 по вершинам куба таким образом, чтобы суммы чисел, стоящих у вершин каждой грани, были равны.

4. Когда пассажир проехал половину пути, он стал смотреть в окно и смотрел до тех пор, пока не осталось проехать половину того пути, что он проехал, смотря в окно. Какую часть всего пути пассажир смотрел в окно?

5. Сумма двух чисел больше их произведения, но меньше их разности. Выясните, положительны или отрицательны эти числа.

8 класс

1. Было куплено 5 лотерейных билетов. Одна цифра четырехзначного номера каждого билета совпадает по значению и по месту с одной цифрой номера билета, на который пал выигрыш. Зная, что цифры номера выигравшего билета являются разными цифрами: 1, 2, 3, 4, а номера купленных билетов 1) 1334; 2) 1214; 3) 2411; 4) 4241; 5) 2331, найдите номер билета, на который пал выигрыш.

2. «Ранним утром на рыбалку улыбающийся Игорь мчался босиком». Сколько предложений можно составить, используя слова этого предложения?

3. К числу a прибавили сумму его цифр b, а к результату прибавили сумму цифр числа b. Найдите число a, если получилось число 60.

4. На плоскости даны четыре прямые, и любая пятая прямая может пересечь либо две из них, либо все четыре. Сколько прямых из данных четырех параллельны между собой?

5. Решите в целых числах уравнение: $3x^2 + 5y^2 = 345$.

9 класс

1. Может ли число, составленное из шестисот шестерок и некоторого количества нулей, быть квадратом целого числа?

2. На плоскости даны пять точек (никакие три из них не лежат на одной прямой и никакие четыре — на одной окружности). Докажите, что можно отметить три из этих точек так, что одна из оставшихся точек будет лежать внутри окружности, проходящей через них, а другая — вне этой окружности.

3. На бумагу поставили кляксу. Для каждой точки кляксы определили наибольшее и наименьшее расстояния от нее до границы кляксы. Среди всех наименьших расстояний выбрали наибольшее, а среди наибольших выбрали наименьшее и сравнили два полученных числа. Какую форму имеет клякса, если эти два числа равны между собой?

4. Докажите, что ни при каком целом x число $4x^2 - 2x + 13$ не делится на 289.

5. Найдите все решения уравнения: $y^2 + y = x^4 + x^3 + x^2 + x$.

10 класс

1. Квадрат разбит на выпуклые многоугольники. Докажите, что можно подразбить на меньшие выпуклые многоугольники так, чтобы в новом разбиении квадрата каждый многоугольник граничил с нечетным числом соседей (соседи — многоугольники с общей стороной).

2. На гранях кубиков требуется написать буквы русского алфавита. Какое наименьшее количество кубиков надо взять, чтобы все буквы были написаны одинаковое число раз?

3. Докажите, что $\sin(1^\circ)$ — число иррациональное.

4. При каком натуральном n уравнение $n \times x! + n \times y! = z!$ имеет единственное решение в натуральных числах.

5. Дан треугольник ABC с площадью S'. Три прямые, параллельные соответственно трем сторонам этого треугольника и пересекающие их, образуют треугольник MNK с площадью S''. Сторонами этих двух треугольников определяются шесть треугольников с площадями S_1, S_2, S_3, S_4, S_5,S_6. Докажите, что
$$\sqrt{S_1} + \sqrt{S_2} + \sqrt{S_3} + \sqrt{S_4} + \sqrt{S_5} + \sqrt{S_6} = \sqrt{S'} + \sqrt{S''}.$$

11 класс

1. 12 маляров живут в 12 голубых и белых домах, расположенных по кольцевой дороге. Каждый месяц один из маляров, взяв с собой достаточное количество белой и голубой краски, выходит из дома и идет вдоль кольцевой дороги по часовой стрелке. По дороге он перекрашивает все дома (начиная со своего) в противоположный цвет. При этом он кончает работу, как только перекрасит какой-либо белый дом в голубой цвет. В течение года каждый маляр ровно один раз проделывает такое путешествие. Докажите, что в конце года каждый дом будет покрашен в первоначальный цвет, если в начале года хотя бы один дом был голубым.

2. Докажите, что если сумма синусов углов треугольника превышает сумму косинусов его углов на 1, то этот треугольник прямоугольный.

3. В розыгрыше первенства страны по футболу участвуют 20 команд. Какое наименьшее число игр должно быть сыграно, чтобы среди любых трех команд нашлись две, уже сыгравшие между собой.

4. Докажите, что не существует многогранника с семью ребрами.

5. Найдите площадь фигуры, заданной неравенствами:

$$x^{2006} + x^{-2006} \geqslant y^{2006} + y^{-2006};$$
$$x^2 + y^2 = 2006.$$

Непрерывная заочная математическая олимпиада проводилась нами на территории Брестской области в течение 4-х лет. Интеллектуально одаренные дети, их педагоги высоко ценили значимость этого вида деятельности. Нами было зарегистрировано: повышение активности интеллектуально одаренных детей в сельских школах; повышение интереса интеллектуально одаренных детей и их педагогов к решению олимпиадных задач; значительные успехи участников непрерывной олимпиады во всех этапах республиканской олимпиады. В настоящее время непрерывная заочная математическая олимпиада проводится только в Московском районе г. Бреста.

2.5 Математический кружок

Кружок «Методы решения олимпиадных задач» работает три года.

Основная цель кружка — заинтересовать школьников методами решения олимпиадных задач, привить им вкус к поиску оригинальных идей и конструкций. Основные задачи кружка — привитие школьникам устойчивого интереса к занятиям математикой, воспитание эстетического восприятия математики и математической эрудиции учащихся; познакомить школьников с общими подходами к решению олимпиадных задач; приобщить школьников к широкому спектру методов решения олимпиадных задач; включить их в широкую сеть олимпиад и конкурсов (очных и заочных), проводимых в Беларуси и за рубежом.

На кружке разбираем методы решения олимпиадных задач, а также некоторые теоремы из элементарной математики, которые своим содержанием или разобранным доказательством имеют отношение к математическим олимпиадам школьников. На занятиях большое значение уделяем самостоятельному решению задач учащимися и обсуждению возникающих при этом идей. В рамках кружка проводим тренировочные олимпиады и математические бои по задачам математических олимпиад высокого уровня. Занимаются в кружке учащиеся 10 класса городского лицея №1. Это Алексей, Женя, Аня, Настя, Влад и Дима. Ребята только поступили в лицей из других общеобразовательных учреждений г. Бреста. На первом занятии они признались, что очень любят решать олимпиадные задачи, но быть победителями олимпиад им не доводилось.

Мы представили им тематику занятий (табл. 2.24). На первом занятии мы кратко рассказали участникам кружка об истории олимпиадного движения, особенностях олимпиадных задач. Внешняя простота олимпиадных задач (их условия и решения должны быть понятны любому школьнику) обманчива. Лучшие олимпиадные задачи затрагивают глубокие проблемы из самых разных областей математики. Олимпиадные задачи можно найти в Интернете, в периодических изданиях (журналы «Квант», «Математическое просвещение», «Матэматыка: праблемы выкладання»), а также в виде отдельных сборников. Большой вклад в популяризацию методов решения олимпиадных задач внесли публикации журнала «Квант», книги серий «Популярные лекции по математике», «Библиотека математического кружка» и другие книги, а также многочисленные веб-сайты, посвящённые олимпиадным задачам.

Таблица 2.24. План работы кружка «Методы решения олимпиадных задач» на 1-ое полугодие, 10 класс (36 ч.)

№	Темы	Часы
1.	Методы решения логических задач	4
2.	Олимпиада	2
3.	Задачи на делимость	4
4.	Олимпиада	2
5.	Простые и составные числа	4
6.	Олимпиада	2
7.	Методы решения задач с помощью сравнений	4
8.	Олимпиада	2
9.	Диофантовы уравнения. Методы решения диофантовых уравнений.Уранение Пелля	4
10.	Олимпиада	2
11.	Методы решения задач с помощью теории многочленов	4
12.	Олимпиада	2

Учащимся предложили список литературы для самостоятельной работы:

1. Барабанов Е. А., Берник В. И., Воронович И. И., Каскевич В. И., Мазаник С. А. Задачи Минской городской математической олимпиады младших школьников. — Мн.: Бел. ассоц. «Конкурс», 2005. — 352 с.

2. Барабанов Е. А., Воронович И. И., Каскевич В. И., Мазаник С. А. Задачи районного тура Минской городской математической олимпиады школьников (1991–2001 гг.). — Мн.: «Фаритэкс». 2002. — 181 с.

3. Бахтина Т. П. Математикон 7: Готовимся к олимпиадам, турнирам и математическим боям: Пособие для учащихся общеобразоват. Шк., гимназий, лицеев. — Мн.: «Аверсэв», 2002. — 253 с. — (Школьникам, абитуриентам, учащимся).

4. Бахтина Т. П. Математикон 8: Готовимся к олимпиадам, турнирам и математическим боям: Пособие для учащихся общеобразоват. Учреждений. — Мн.: «Аверсэв», 2003. — 336 с. — (Школьникам, абитуриентам, учащимся).

5. Бахтина Т. П. Раз задачка, два задачка. . . : Пособие для учителей. — Мн.: ООО «Асар», 2000. — 224 с. Второе издание, 2001.

6. Генкин С. А., Итенберг И. В., Фомин Д. В. Ленинградские математические кружки. — г. Киров, «АСА», 1994. — 272 с.

7. Кот В. И. Как одолеть олимпиадные задачи по математике: Пособие для учителей общеобразовательной школы. — Мн.: «Бестпринт», 2002. — 400 с.

8. Мазаник А. А., Мазаник С. А. Реши сам. — Мн., «Народная асвета», 1992. — 256 с.

9. Математические турниры им. А. П. Савина. Часть 1 / Составители А. В. Спивак, С. И. Токарев. — М.: Бюро Квантум, 2003. — 128 с.

10. Нагибин Ф. Ф., Канин Е. С. Математическая шкатулка. — М.: «Просвещение», 1984. — 160 с. 11. Шклярский Д. О., Ченцов Н. Н., Яглом И. М. Избранные задачи и теоремы элементарной математики. — М. «Наука», 1976. — 384 с.

11. Садовничий В. А., Григорян А. Л., Конягин С. В. Задачи студенческих математических олимпиад — Издательство Московского университета, 1987. — 310 с.

12. Е. А. Барабанов, И. И. Воронович, В. И. Каскевич, С. А. Мазаник: Задачи заключительного тура минской городской математической олимпиады школьников. Минск, 2006 г.

13. Московские математические олимпиады 1993–2005 г. / Р. М. Федоров и др. Под ред. В. М. Тихомирова. — М.: МЦНМО, 2006. — 456 с.

14. Берлов С. Л., Иванов С. В., Кохась К. П. Петербургские математические олимпиады. — СПб.: Лань, 2003. — 532 с.

Электронные источники для подготовки учащихся к олимпиадам:

1. http://www.mccme.ru/olympiads/mmo/ — Московский центр непрерывного математического образования. Московские математические олимпиады. Задачи окружных туров олимпиады для школьников 5–11 классов начиная с 2000 года. Задачи городских туров олимпиады для школьников 8–11 классов начиная с 1999 года. Все задачи с подробными решениями и ответами. Новости олимпиады. Победители и призеры олимпиад. Статистика.
2. http://olympiads.mccme.ru/regata/ — математические регаты.
3. http://olympiads.mccme.ru/matboi/ — Математический турнир математических боев.
4. http://olympiads.mccme.ru/turlom — Турнир имени М. В. Ломоносова.
5. http://kyat.mccme.ru/ — Научно–популярный физико-математический журнал «Квант».
6. http://abitu.ru/distance/zftshl.html — Заочная физико-математическая школа при МФТИ.

7. http://attend.to/dooi — Дистанционные олимпиады.
8. http://aimakarov.chat.ru/school/school.html — Школьные и районные математические олимпиады в Новосибирске. Задачи для 3–11 классов с 1998 года по настоящее время. Без решений. Раздел занимательных и веселых задач.
9. http://zaba.ru/ — Олимпиадные задачи по математике: база данных. Около 8000 задач школьных, региональных, всероссийских и международных конкурсов, олимпиад и турниров по математике. Многие задачи с ответами, указаниями, решениями. До 2001 года (включительно). Возможности поиска.
10. http://homepages.compuserve.de/chasluebeck/matemat/task_1.htm — Задачи некоторых математических олимпиад и турниров. Задания региональных (Москва, Урал, Луганск, Волгоград и др.) и других (МФТИ, Соросовская и т. д.) олимпиад по математике, а также математических турниров (Ломоносовские игры). Для 6–11 классов. Указания и решения доступны зарегистрированным пользователям.
11. http://www.shevkin.ru — Проект Shevkin.ru. Задачи школьных математических олимпиад.
12. Заочный математический конкурс (6–8 классы, г. Москва) http://www.mccme.ru/zmk/
13. Зимний турнир Архимеда (6–7 класс, г. Москва) http://www.arhimedes.org/
14. Олимпиада по геометрии памяти И. Ф. Шарыгина (8–11 классы, г. Москва); http://www.geometry.ru/olimp.htm
15. Международный конкурс–игра «Кенгуру» (3–10 классы, по всем регионам); http://www.kenguru.sp.ru/

16. Экономико–математическая олимпиада (9–11 классы, г. Москва) http://www.finec.ru/entrant/faculty_ of_ pre-university/olympics_ /

17. Турнир им. М. В. Ломоносова (6-11 классы, г. Москва); международный математический Турнир городов (8–11 классы, г. Москва); http://olympiads.mccme.ru/turlom/

18. Олимпиада по математике и криптографии (9–11 классы, г. Москва) http://www.cryptolymp.ru/

19. Заочная физико–математическая олимпиада (6–11 классы, г. Москва); http://avangard–school.nm.ru/

Занятия кружка проходят в форме лекций, практических и консультаций. После прохождения каждой темы — олимпиада. В проведении занятий участвовали как преподаватели БрГУ, так и студенты.

Приведем пример учебного материала, рассмотренного на занятиях кружка (теория и задачи).

Задачи на делимость

Определение 1. *Целое число делится на целое число $b \neq 0$, если существует целое число q, такое, что $a = bq$ (a — делимое, b — делитель, q — частное).*

Свойства делимости целых чисел:

1. Всякое целое число, отличное от нуля, делится на само на себя.

2. Всякое целое число делится на ± 1.

3. Нуль делится на любое число, кроме нуля.

4. Знак числа не влияет на делимость.

5. Если a делится на b, b делится на c, то a делится на c.

6. Если каждое слагаемое делится на некоторое целое число, то их сумма тоже делится на это число.

7. Если уменьшаемое и вычитаемое делятся на некоторое целое число, то их разность тоже делится на это число.

8. Если сумма двух целых чисел делится на некоторое целое число и одно из слагаемых делится на это число, то и второе слагаемое делится на это число.

9. Если хотя бы один из сомножителей делится на некоторое целое число, то и произведение делится на это число.

10. Если a делится на b и $a \neq 0$, то $|a| \geqslant |b|$.

Определение 2. *Целое число a делится с остатком на целое число $b \neq 0$, если существуют целые числа g и r, такие, что $a = bq + r$ (a — делимое, b — делитель, q — неполное частное, r — остаток).*

Теорема 1. *Всякое целое число a однозначно делится с остатком на любое целое число $b \neq 0$.*

Всякое целое число, отличное от нуля, имеет конечное число делителей.

Определение 3. *Общим делителем целых чисел $a_1, a_2, \ldots, a_k$ (k — натуральное число, $k \geqslant 2$) называется целое число, которое делит каждое из этих чисел (является делителем каждого из этих чисел).*

Определение 4. *Наибольшим общим делителем целых чисел, хотя бы одно из которых не равно 0, называется общий делитель этих чисел, который больше остальных общих делителей или не меньше всякого общего делителя.*

Обозначают НОД $(a_1, a_2, \ldots, a_k)$ или $(a_1, a_2, \ldots, a_k)$.

Среди общих делителей целых чисел есть число 1. Значит, НОД$(a_1, a_2, \ldots a_k)$ либо 1, либо больше 1. Если НОД$(a_1, a_2, \ldots a_k) = 1$, то числа $a_1, a_2, \ldots a_k$ называют взаимно простыми.

Свойства делимости целых чисел:

1. НОД $(a_1, a_2, \ldots, a_k) =$ НОД $(|a_1|, |a_2|, \ldots, |a_k|)$.
2. Если a делится на b, то НОД$(a, b) = b$.
3. Если для целых чисел a, b, c, d верно равенство $a = bc + d$, то $(a, b) = (b, d)$, $(a, c) = (c, d)$.
4. НОД $(ba_1, ba_2, \ldots, ba_k) = b$НОД $(a_1, a_2, \ldots, a_k)$.
5. НОД $(a_1, a_2, \ldots a_k) =$ НОД $((a_1, a_2, \ldots a_{k-1}), a_k)$.
6. Натуральный общий делитель целых чисел является их НОДом тогда и только тогда, когда его можно представить в виде целочисленной линейной комбинации этих чисел, то есть

$$d = \text{НОД}\,(a_1, a_2, \ldots a_k) \Leftrightarrow d = \alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \ldots + \alpha_k a_k.$$

7. Натуральный общий делитель целых чисел является их НОДом тогда и только тогда, когда частные от деления этих чисел на этот общий делитель взаимно просты.

8. Общий делитель целых чисел является делителем НОДа этих же чисел.

9. Всякий делитель НОДа целых чисел является общим делителем этих чисел.

Определение 5. *Алгоритмом Евклида для целых чисел a и b ($b \neq 0$) называется процесс последовательного деления a на b, b на первый остаток r_1 ($r_1 \neq 0$), r_1 — на второй остаток r_2 ($r_2 \neq 0$) и т. д.*

Описать этот процесс можно так:

$$a = bq_1 + r_1, 0 \leqslant r_1 < |b|,$$
$$b = r_1q_2 + r_2, 0 \leqslant r_2 < |r_1|,$$
$$r_1 = r_2q_3 + r_3, 0 \leqslant r_3 < |r_2|, \ldots$$

Определение 6. *Число равенств алгоритма Евклида называют длиной алгоритма Евклида.*

Теорема 2. *НОД(a, b) равен последнему, отличному от нуля остатку в алгоритме Евклида для этих чисел (a, b — целые числа).*

Лемма 3. *Если три целых числа a, b, m связаны равенством $a = bq + m$, где $0 \leq m < |b|$, то $(a, b) = (b, m)$.*

Критерий взаимной простоты целых чисел. Целые числа $a_1, a_2, \ldots, a_k$ (k — натуральное число, $k \geqslant 2$) взаимно просты тогда и только тогда, когда их НОД, равный 1, можно представить в виде целочисленной линейной комбинации этих чисел.

Теорема 4. *Если произведение двух целых чисел делится на третье число, взаимно простое с одним из сомножителей, то и второе число делится на это же число.*

Теорема 5. *Если каждое из чисел a и b взаимно просто с d, то и их произведение взаимно просто с d.*

Определение 7. *Общим кратным чисел $a_1, a_2, \ldots, a_k$ (k — натуральное число, $k \geqslant 2$) таких, что $a_i \neq 0$ (i изменяется от 1 до k), называется целое число, которое делится на каждое из этих чисел.*

Определение 8. *Наименьшее натуральное общее кратное целых чисел, не равных нулю, называют НОКом этих чисел и обозначают НОК$(a_1, a_2, \ldots, a_k)$ или $[a_1, a_2 \ldots, a_k]$.*

Свойства НОКа целых чисел:

1. $\text{НОК}\,(a_1, a_2, \ldots, a_k) = \text{НОК}\,(|a_1|, |a_2|, \ldots, |a_k|)$.
2. $[a, b] = \dfrac{ab}{(a, b)}$.
3. Всякое общее кратное целых чисел делится на НОК этих чисел.
4. Частные от деления НОКа целых чисел на эти числа есть взаимно простые числа.
5. $\text{НОК}\,(a_1, a_2, \ldots, a_k) = \text{НОК}\,((a_1, a_2, \ldots, a_{k-1}), a_k)$.
6. НОК попарно взаимно простых чисел равен модулю их произведения.
7. $\text{НОК}\,(ba_1, ba_2, \ldots ba_k) = b\text{НОК}\,(a_1, a_2, \ldots a_k)$.

Признаки делимости натуральных чисел:

1. Число делится на 2, если последняя цифра в записи числа четная.

2. Число делится на 3, если сумма цифр числа делится на 3.

3. Число делится на 4, если две последние цифры числа нули или образуют число, делящееся на 4.

4. Число делятся на 5, если последняя цифра числа 0 или 5.

5. Число делится на 6, если оно четно и делится на 3.

6. Число делится на 8, если три последние цифры нули или образуют число, делящееся на 8.

7. Число делится на 9, если сумма цифр числа делится на 9.

8. Число делится на 10, если последняя цифра числа 0.

9. Число делится на 11, если разность между суммой цифр, стоящих на четных местах, и суммой цифр, стоящих на нечетных местах, делится на 11.

10. Число делится на 25, если две последние цифры числа 00, 25, 50 или 75.

11. Число делится на 7, 11, 13, если разность между числом, записанным тремя последними цифрами числа и числом, записанным остальными его цифрами, делится, соответственно, на 7, 11, 13.

Задача 1. *Докажите, что для любого натурального числа n целое число*

$$a = -n^3 - 17n + 12$$

делится на 6.

Доказательство. Для решения задачи воспользуемся методом математической индукции.

При $n = 1$ число $a = -6$, делится на 6 — утверждение верно. Предположим, что утверждение задачи верно при $n = k$, то есть, число $-k^3 - 17k + 12$ делится на 6.

Докажем, что утверждение задачи верно при $n = k + 1$, то есть $-(k+1)^3 - 17(k+1) + 12$ делится на 6. Преобразуем последнее выражение (возведем в куб, раскроем скобки, приведем подобные слагаемые и перегруппируем). Получим:

$$-k^3 - 17k + 12 - 3k(k+1) - 18.$$

По предположению индукции выражение в первых скобках делится на 6 (см. выше). $k(k+1)$ делится на 2 (это произведение двух последовательных чисел, среди которых одно обязательно четное), значит, $3k(k+1)$ делится на 6. Число 18 также делится на 6. По свойству 6: если каждое слагаемое делится на некоторое целое число, то их сумма тоже делится на это число, утверждение задачи верно при $n = k+1$.

Согласно принципу математической индукции, целое число $a = -n^3 - 17n + 12$ делится на 6 для любого натурального числа n. ■

Задача 2. *В комнате стояли стулья (с четырьмя ножками) и табуретки (с тремя ножками). Когда на каждый стул и каждый табурет село по одному школьнику, то общее число «ног» в комнате составило 39.*

Решение.

Так как общее число «ног» в комнате 39, то стульев не больше 6 (4 «ноги» стула + 2 ноги человека), получается $6 \cdot 6 = 36$ «ног».

Переберем случаи, когда в комнате $c = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6$ стульев. Тогда число «ног», вносимых в общее количество табуретками: $t = 39 - 6c$ (t должно делиться на 5). Если

– $c = 0$, то $t = 39$;

– $c = 1$, то $t = 33$;

– $c = 2$, то $t = 27$;

– $c = 3$, то $t = 21$;

– $c = 4$, то $t = 15$;

– $c = 5$, то $t = 9$;

– $c = 6$, то $t = 3$.

Условию задачи удовлетворяет только пара: $c = 4, t = 15$. 15:5=3 — количество табуреток. Итак, для 4 стульев и 3 табуреток условие задачи выполняется.

Задача 3. *В ряд записаны цифры 1, 2, 3, 1, 2, 3, 1, 2, 3, 1, 2, 3, 1, 2, 3,... (группа цифр 1, 2, 3 повторяется в этой записи 342 раза). На первом шаге вытираются все цифры, стоящие на нечетных местах. На втором шаге вытираются все цифры, стоящие на нечетных местах в полученном новом ряду. Затем снова проделывается такая же операция, и так до тех пор, пока не останется одна цифра. Какая это будет цифра?*

Решение.

Запишем под каждой цифрой ее порядковый номер в первоначальном ряду. Последнее число получит номер $3 \cdot 342 = 1026$. После первого шага незачеркнутыми останутся цифры с четными номерами; после второго шага останутся цифры с номерами, кратными 4; после третьего шага — с номерами, кратными 8, и т. д. После 10-го шага останется единственная цифра с номером 1024. Но эта цифра является 3-й с конца, то есть это 1.

Задача 4. *Докажите, что число* $19^{95} + 95^{19}$ *делится нацело на число* $19 + 95$.

Доказательство. $19+95=114=2\cdot 3\cdot 19$. Проверим, делится ли $19^{95}+95^{19}$ на 2, на 3 и на 19. Запишем

$$19^{95}+95^{19}=19^{19}\cdot(19^{76}+5^{19})=$$
$$=19^{19}\cdot((19^{76}-19^{75})+(19^{75}-19^{74})+\ldots+(19^{2}-19)+(19-1)+$$
$$+(5^{19}-5^{17})+(5^{17}-5^{15})+\ldots+(5^{3}-5)+5+1)$$

В каждой скобке разность делится на 3 и на 2, так как

$$19^{n+1}-19^{n}=19^{n}\cdot(19-1)=3\cdot 6\cdot 19^{n}$$

и

$$5^{n+2}-5^{n}=5^{n}\cdot(25-1)=3\cdot 8\cdot 5^{n};$$

кроме этого,

$$19^{95}+95^{19}=19^{19}\cdot\left(19^{76}+5^{19}\right)$$

делится на 19. ■

Задача 5. *Найдите натуральные числа a и b, такие, что НОД$(a,b)=5$, а НОД$(a,b)=105$.*

Решение.

Пусть $a=5n$, $b=5k$ — разложения на множители чисел a и b. Так как НОД $(a,b)=5$, то k и n — взаимно простые числа. Используя связь НОК и НОД, получим $5\cdot 105=5n\cdot 5k$, откуда $nk=21=3\cdot 7$. Поскольку k и n — взаимно простые числа, то возможны случаи:

1) $n=1, k=21$, тогда, $a=5, b=105$.

2) $n=7, k=3$, тогда, $a=35, b=15$.

Определение 1. *Натуральное число p, большее 1, называется простым, если оно имеет только два натуральных делителя: 1 и p.*

Определение 2. *Натуральное число называется составным, если оно имеет хотя бы один натуральный делитель, отличный от 1 и самого себя.*

Замечание. *1 — не является ни простым, ни составным числом.*

Замечание. *2 — единственное четное простое число.*

Свойства простых чисел:

1. Если простое число p делится на простое число q ($q \neq 1$), то $p = q$.
2. Если a — любое целое число, p — простое число, то, либо a делится на p, либо a и p — взаимно просты.
3. Если произведение целых чисел $a_1, a_2, \ldots, a_k$ делится на простое число p, то хотя бы один из сомножителей делится на p.
4. Всякое натуральное число $a \neq 1$ имеет, по крайней мере, хотя бы один простой делитель.

Теорема 1 (Евклида). *Множество простых чисел бесконечно.*

Теорема 2 (Основная теорема арифметики). *Всякое натуральное число $a \neq 1$ может быть разложено в произведение простых чисел и это разложение единственно с точностью до порядка следования сомножителей.*

Определение 3. *Представление числа $a = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \ldots p_k^{\alpha_k}$ называют каноническим разложением числа a.*

Теорема 3 (Критерий делимости одного числа на другое). *Натуральное число a делится на натуральное число b тогда и только тогда, когда все простые множители в каноническом разложении числа b входят в каноническое разложение числа a, но с показателями в b не выше, чем в a.*

Следствие 3.1. *НОД(a, b) равен произведению всех общих простых множителей канонических разложений этих чисел, взятых с наименьшими показателями степени.*

Следствие 3.2. *НОД(a, b) равен произведению всех простых множителей канонических разложений этих чисел, взятых в наибольшими показателями степени.*

Теорема 4 (Критерий простого числа). *Натуральное число a является простым тогда и только тогда, когда оно не делится ни на одно простое число $\leqslant \sqrt{a}$.*

Теорема 5 (Критерий составного числа). *Натуральное число a является составным тогда и только тогда, когда оно делится хотя бы на одно простое число $\leqslant \sqrt{a}$.*

Теорема 6. *Всякое натуральное число $a \neq 1$ имеет хотя бы один простой делитель.*

Задача 1. *Доказать, что если одно из чисел $2^n - 1$ и $2^n + 1$, где $n > 24$, простое, то второе является составным.*

Доказательство. Заметим, что 2^n не делится на 3. Если 2^n при делении на 3 дает остаток 1, то $2^n - 1$ делится на 3. Если 2^n при делении на 3 дает остаток 2, то $2^n + 1$ делится на 3. Следовательно, одно из двух чисел $2^n - 1$ и $2^n + 1$ делится на 3, если оба этих числа больше 3. ■

Задача 2. *Доказать, что если p и $8p-1$ — простые числа, то $8p+1$ — составное.*

Доказательство. Если бы простое число $p > 3$ давало при делении на 3 остаток 2, то $8p-1$ делилось бы на 3. Поэтому число p должно давать при делении на 3 остаток 1. Но в этом случае $8p+1$ делится на 3. Если же $p = 3$, то $8p+1 = 25$ — составное число. ■

Задача 3. *Доказать, что квадрат любого простого числа, кроме 2 и 3, при делении на 12 дает в остатке число 1.*

Доказательство. Простые числа, кроме 2 и 3, дают при делении на 6 остаток 1 или 5, так как, если бы при делении на 6 был остаток 2 или 4, то число было бы четным, а если бы остаток был 3, то число делилось бы на 3. Таким образом, любое простое число, большее 3, можно записать в виде $6n+1$ или $6n+5$. Найдем квадраты этих выражений:

$$(6n+1)^2 = 36n^2 + 12n + 1 \text{ и } (6n+5)^2 = 36n^2 + 60n + 25.$$

В обоих случаях при делении на 12 получается остаток 1. ■

Задача 4. *Выяснить, простым или составным является число 103.*

Решение.

Используем критерий простого числа (теорема 4). Выпишем все простые числа $\left[\sqrt{103}\right] = 10$, где $[a]$ — целая часть числа a. Проверим, делится ли число 103 на простые числа 2, 3, 5, 7. Ни на одно из этих чисел 103 не делится. Следовательно, 103 — простое число.

Задача 5. *Разложить на простые множители число $2^{18} + 3^{18}$.*

Решение.

$$2^{18} + 3^{18} = \left(2^2 + 3^2\right)\left(2^4 - 2^2 \cdot 3^2 + 3^4\right)\left(2^{12} - 2^6 \cdot 3^6 + 3^{12}\right) =$$
$$= 13 \cdot 61\left(2^{12} - 2^6 \cdot 3^6 + 3^{12}\right) = 13 \cdot 61 \cdot 488881 = 13 \cdot 61 \cdot 37 \cdot 73 \cdot 181.$$

Приведем пример задач, предложенных учащимся на *олимпиадах кружка.*

Задача 6. *Сколько всего из натуральных чисел от 1 до 34 можно составить троек чисел, таких, что все числа в тройке различные и их сумма делиться на 3? (Две тройки считаются одинаковыми, если они состоят из одних и тех же чисел)*

Решение.

Разобьем все натуральные числа от 1 до 34 на три группы в соответствии с остатками при делении на три.

$$\underline{0} = \{3, 6, 9, 12, 15, 18, 21, 24, 27, 30, 33\} \quad \text{— всего 11 чисел.}$$

$$\underline{1} = \{1, 4, 7, 10, 13, 16, 19, 22, 25, 28, 31, 34\} \quad \text{— всего 12 чисел.}$$

$$\underline{2} = \{2, 5, 8, 11, 14, 17, 20, 23, 26, 29, 32\} \quad \text{— всего 11 чисел.}$$

Можно заметить, что сумма трех чисел делиться на три, если:

1) все три слагаемые имеют один и тот же остаток при делении на три;

2) все остатки слагаемых различны.

Из натуральных чисел от 1 до 34 троек различных чисел, остатки которых при делении на три равны 0, можно составить C_{11}^3; остатки которых при делении на три равны 1, можно составить C_{12}^3; остатки которых при делении на три равны 2, можно составить C_{11}^3.

Количество троек, остатки которых при делении на три все различны равно: $12 \cdot 11 \cdot 11 = 1452$. Следовательно, искомое число троек:

$$C_{11}^3 + C_{12}^3 + C_{11}^3 + 1452 = 2002.$$

Задача 7. 200 *учащихся выстроены прямоугольником по 10 человек в каждом поперечном ряду и по 20 человек в каждом продольном ряду. В каждом поперечном ряду выбран самый низкий ученик, а затем среди отобранных 20 выбран самый высокий; с другой стороны, из тех же 200 учеников в каждом продольном ряду выбран самый высокий ученик, а затем среди отобранных 10 выбран самый низкий. Кто из двоих окажется выше (если это разные лица) — самый низкий из самых высоких учеников или самый высокий из самых низких?*

Решение.

Пусть A — 1-ый из выбранных учеников; B — второй. Если A и B стоят в одном поперечном ряду, то B выше A, так как A — самый низкий в поперечном ряду. Если A и B стоят в одном продольном ряду, то B также выше A, так как B — самый высокий в своем продольном ряду. Если A и B стоят в разных поперечных и разных продольных рядах и C стоит в том же поперечном ряду, что и A, и в том же продольном ряду, что и B, то B выше A, так как B выше C, а A ниже С.

Задача 8. *Найти шестизначное число, произведения которого на* 2, 3, 4, 5, 6 *записываются теми же цифрами, что и оно само, но в другом порядке.*

Решение.

Пусть x — число, удовлетворяющее условию. Так как $6x$, так же как и x — шестизначное число, то первая цифра десятичной записи числа x равна 1. Первые цифры десятичной записи чисел x, $2x$, $3x$, $4x$, $5x$, $6x$ — все различны, следовательно, они составляют полный набор цифр, участвующих в записи числа x. Все цифры в записи числа x различны. Среди этих цифр нет числа 0, следовательно, последняя цифра нечетна, иначе бы $5x$ оканчивалось бы на 0, и отлична от 5, иначе бы $2x$ оканчивалось на 0.

Последние цифры записи x, $2x$, $3x$, $4x$, $5x$, $6x$ — все различны и также составляют полный набор цифр, участвующих в записи числа x. Оканчиваться на 1 может только $3x$, так как $2x$, $4x$, $6x$ оканчиваются на четные цифры, а $5x$ — оканчивается на 5, а в десятичной записи уже есть 1 (первая цифра). Следовательно x оканчивается на 7, $2x$ — на 4, $3x$ — на 1, $4x$ — на 8, $5x$ — на 5, $6x$ — на 2.

Значит,

$$\begin{aligned} 1x &= 1****7, \\ 2x &= 2****4, \\ 3x &= 4****1, \\ 4x &= 5****8, \\ 5x &= 7****5, \\ 6x &= 8****2. \end{aligned}$$

В каждом столбце стоят одни и те же цифры: 1, 2, 4, 5, 7, 8, только в разном порядке. Сумма цифр каждого столбца равна 27. Выполним сложение: $21x = 2999997$, откуда $x = 142857$.

Задача 9. *В футбольном турнире участвовало 10 команд. Каждая команда сыграла с каждой из остальных по одному разу. Какое наибольшее число очков могла набрать команда, набравшая в турнире меньше всего очков? (победа — 3 очка; ничья — каждой команде по 1 очку; поражение — 0 очков).*

Решение.

Пусть x очков набрала эта команда. Тогда любая другая набрала не меньше, чем $(x+1)$. Общее число очков, набранных всеми командами:

$$x + 9(x + 1) = 10x + 9.$$

С другой стороны, было разыграно $10 \cdot 9/2 = 45$ матчей ($C_{10}^2 = 45$). В каждом турнире разыграно не более 3-х очков. Общее число очков не более, чем $45 \cdot 3 = 135$. Следовательно, $10x + 9 \leqslant 135$, $x \leqslant 12,6$. Но x – целое число, значит, $x = 12$.

Задача 10. *В равенстве* $\frac{\textit{фут}}{\textit{бол}} = 0,(\textit{гол})$ *вместо каждой из семи букв поставить определенную цифру, не равную 0, так, чтобы получилось тождество (разные буквы означают разные цифры).*

Решение.

Равенство $\frac{\text{фут}}{\text{бол}} = \frac{\text{гол}}{999}$ равносильно $\text{фут} \cdot 999 = \text{гол} \cdot \text{бол}$.

Рассмотрим всевозможные разложения числа 999 на множители:

$999 = 111 \cdot 9 = 37 \cdot 27$. Один из множителей гол или бол делится на 37. Так как $37 \cdot 3 = 111$, $37 \cdot 6 = 222$, $37 \cdot 9 = 333$ и так далее, то тот из множителей, который делится на 37, не может делиться на 3. Иначе этот множитель записывался бы одинаковыми цифрами. Следовательно, гол или бол делится на 37 и на 27. Выпишем трехзначные числа, кратные 37: 111, 148, 185, 222, 259, 296, 333, 370, 407, 444, 481, 518, 555, 592, 629, 666, 703, 740, 777, 814, 851, 888, 925, 962, 999. Выпишем трехзначные числа, кратные 27: 108, 135, 162, 189, 216, 243, 270, 297, 324, 351, 378, 405, 432, 459, 486, 513, 540, 567, 594, 621, 648, 675, 702, 729, 756, 783, 810, 837, 864, 891, 918, 945, 972, 999. Найдем в этих группах числа, два последних разряда у которых совпадают. Этим условиям удовлетворяют 518 и 918.

$518 \cdot 918 = 999 \cdot 476$. Следовательно, $\frac{476}{518} = 0,(918)$.

2.6 Научно-исследовательская деятельность

Интеллектуально одаренные дети должны заниматься научно-исследовательской работой, которая напрямую связана с развитием способности нестандартно мыслить, создавать продукты деятельности, выходящие за рамки общепринятых стандартов.

Занимаясь научным исследованием, интеллектуально одаренные учащиеся должны учиться:

– проводить детальный анализ теоретического материала;

– видеть за частным общее;

– не ограничиваться описанием явления, а глубоко исследовать его сущность и связь с другими явлениями;

– не избегать вопроса «почему»;

– прослеживать историю идей;

– собирать как можно больше сведений о предмете исследования из научных источников;

– изучать общие закономерности научного познания;

– связывать науку с другими областями знания, с жизнью;

– не только решать проблемы, на и находить новые, нерешенные [5, с. 242].

Нам часто приходилось сталкиваться с тем, что педагоги общеобразовательных школ испытывают затруднения в выборе темы для научно-исследовательской работы своего одаренного учащегося. Мы предлагаем следующую *тематику научно-исследовательских работ учащихся по математике:*

1. Применение центра тяжести при решении задач по геометрии.

2. Окружность девяти точек.

3. Инварианты и раскраски.

4. Задача на решётках.
5. Парабола, эллипс и гипербола на плоскости Лобачевского.
6. Построение системы полиномов, удовлетворяющих условию орто-гональности.
7. Сопряжения в треугольнике.
8. Геометрические построения одним циркулем.
9. Матричные преобразования в тригонометрии.
10. Использование теории Мюрхеда при доказательстве симметричных неравенств.
11. Избранные задачи Соросовских олимпиад.
12. Теорема Эрроу и нетранзитивность круговых турниров.
13. Уравнение Пелля.
14. Площади прямоугольных треугольников и эллиптические кривые.
15. Парадоксы теории множеств.
16. Теория групп в математике.
17. Теорема Шарковского: уравнения, динамические системы и графы.
18. Постулат Бертрана.
19. Сумма углов, площади и деформации замкнутых ломанных.
20. О множествах сходимости степенных рядов на границе круга сходимости.

21. Разбиение прямыми евклидовой и гиперболической плоскостей.
22. Совершенные и дружественные числа.
23. Фигурные числа.
24. Проблемы Варинга и Гольдбаха.
25. Теорема Пифагора и способы ее доказательства.
26. Цепные дроби.
27. Великая теорема Ферма.
28. Симметрия в алгебре.
29. Комплексные числа. Гиперкомплексные числа. Кватернионы.
30. Алгебра Буля.
31. Инверсия.
32. Золотое сечение.
33. Фокусы и директрисы.
34. Гиперболоид инженера Гарина.
35. Трисекция угла.
36. Квадратура круга.
37. Модели новой геометрии.

38. Геометрия Лобачевского.

39. Кривые поверхности.

40. Тела Платона.

41. Четырехмерное пространство.

42. Сферическая тригонометрия.

Можно найти много тем для научно-исследовательских работ учащихся. Все они, несомненно, будут интересны интеллектуально одаренным детям, будут способствовать их умственному развитию. К примеру, исследуя тему «Теорема Пифагора и способы ее доказательства», учащийся откроет много нового для себя. Во-первых, это богатейший исторический материал. Во-вторых, существуют сотни способов доказательства теоремы Пифагора: доказательство Эйнштейна, доказательство с помощью разбиения ан-Найризия, доказательство методом разложения квадратов на равные части («колесо с лопастями»), доказательство методом достроения, доказательство Нассир-эд-Дина, доказательство Гофмана, доказательство Бхаскари, доказательство Мельманна, доказательство Гарфилда и др. И, возможно, интеллектуально одаренный учащийся приведет свой оригинальный способ доказательства этой Великой Теоремы.

Основная часть научно-исследовательской работы по теме «Четырехмерное пространство» может включать:

– аксиоматику четырехмерного евклидова пространства;

– подпространства четырехмерного векторного пространства;

– основные объекты четырехмерной геометрии;

– основные метрические понятия четырехмерной геометрии;

– четырехмерный симплекс (обобщение понятия отрезка, треугольника, тетраэдра);

– выпуклые фигуры (многогранники, сфера) четырехмерной геометрии;

– теорему Эйлера для выпуклых сверхмногогранников;

– преобразования четырехмерного пространства;

– геометрию Минковского;

– связь пространства событий специальной теории относительности и геометрии Минковского;

– преобразования Лоренца и их следствия.

В рамках данной темы исследования уместно решение задач:

Задача 1. *Как выглядит развертка сверхкуба?*

Задача 2. *Какая получится фигура, если сверхкуб пересечь гиперплоскостью, проходящей через его центр и перпендикулярной его диагонали?*

Задача 3. *Вычислите расстояние между гранью сверхкуба с единичным ребром и его диагональю, не пересекающей эту грань.*

Задача 4. *Вычислите угол между диагональю сверхкуба и гиперплоскость, проходящей через концы четырех его ребер, имеющих с этой диагональю одну и ту же общую вершину сверхкуба.*

Задача 5. *Вычислите угол между диагональю сверхкуба и его ребром; гранью; гипергранью.*

Задача 6. *Что представляет собой сечение сверхкуба гиперплоскостью* $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1$*?*

Задача 7. *Чему равна длина диагонали сверхкуба, ребро которого равно* 1.

Такого же типа задачи могут быть сформулированы и для других сверхмногогранников. Учитывая большой объем материала, выполнить эту работу можно предложить группе учащихся.

Приведем пример исследования, проведенного членом творческой группы, студенткой Овинович Инной и учащимися областного лицея г. Бреста. В ходе этого исследования школьники открыли для себя много полезной информации (из истории диофантовых уравнений; о типах и методах решения диофантовых уравнений; о том, при решении каких школьных задач можно применить новые знания).Результаты исследования вылились в следующую работу (приводим полное содержание).

Методы решения диофантовых уравнений

Диофант Александрийский — древнегреческий математик из Александрии. О подробностях его жизни практически ничего не известно. С одной стороны, Диофант цитирует Гипсикла (II век до нашей эры); с другой стороны, о Диофанте пишет Теон Александрийский (около 350 года нашей эры) — откуда можно сделать вывод, что его жизнь протекала в границах этого периода. Возможное уточнение времени жизни Диофанта основано на том, что его «Арифметика» посвящена «достопочтеннейшему Дионисию». Полагают, что этот Дионисий — не кто иной, как епископ Дионисий Александрийский, живший в середине III века нашей эры.

В Палатинской антологии содержится эпиграмма — задача, в которой говорится:

Прах Диофанта гробница покоит; дивись ей и камень
Мудрым искусством его скажет усопшего век.
Волей богов шестую часть жизни он прожил ребенком.

И половину шестой встретил с пушком на щеках.
Только минула седьмая, с подругой он обручился.
С нею, пять лет, проведя, сына дождался мудрец;
Только полжизни отцовской возлюбленный сын его прожил.
Отнят он был у отца ранней могилой своей.
Дважды два года родитель оплакивал тяжкое горе,
Тут и увидел предел жизни печальной своей.

Отсюда можно подсчитать, что Диофант прожил 84 года. Однако для этого вовсе не нужно владеть «мудрым искусством его» достаточно уметь решать уравнение первой степени с одним неизвестным, а это умели делать египетские писцы еще в 18 веке до нашей эры [14].

Наиболее интересным представляется творчество Диофанта. Он открыл новую главу в математике, и невозможно выявить, какие невидимые источники питали его творчество. «Труды его подобны сверкающему огню среди полной непроницаемой тьмы». До нас дошло 7 книг из, возможно, 13, которые были объединены в «Арифметику». Стиль и содержание этих книг резко отличаются от классических античных сочинений по теории чисел и алгебре, образцы которых мы знаем по «Началам» Евклида, леммам из сочинений Архимеда и Аполлония. «Арифметика», несомненно, явилась результатом многочисленных исследований, многие из которых остались нам неизвестны. Мы можем только гадать о её корнях и изумляться богатству и красоте её методов и результатов.

«Арифметика» Диофанта — это сборник задач (их всего 189), каждая из которых снабжена решением и необходимым пояснением. В собрание входят весьма разнообразные задачи, а их решение часто в высшей степени остроумно. Задачи книги I в большинстве определенные. В ней имеются и такие, которые решаются с помощью систем двух уравнений с двумя неизвестными, эквивалентных квадратному уравнению. Для его разрешимости Диофант выдвигает условие, чтобы дискриминант был полным квадратом. Так, задача 30 — найти таких два числа, чтобы их разность и произведение были заданными числами, — приводится к системе

$$\begin{cases} y = a, \\ x = b. \end{cases}$$

Диофант выдвигает «условие формирования»: требуется, чтобы учетверенное произведение чисел, сложенное с квадратом разности их, было квадратом, то есть $4b + a^2 = c^2$.

В книге II решаются задачи, связанные с неопределенными уравнениями и системами таких уравнений с 2, 3, 4, 5, 6 неизвестными степени не выше второй. Диофант применяет различные приемы. Пусть необходимо решить неопределенное уравнение второй степени с двумя неизвестными $f^2(x, y) = 0$. Если у него есть рациональное решение (x_0, y_0), то Диофант вводит подстановку $x = x_0 + t$, $y = y_0 + kt$, в которой k рационально. После этого основное уравнение преобразуется в квадратное относительно t, у которого свободный член $f^2(x_0, y_0) = 0$. Из уравнения получается $t_1 = 0$ (это значение Диофант отбрасывает), t_2 — рациональное число. Тогда подстановка дает рациональные значения x и y. В случае, когда задача приводилась к уравнению $y^2 = ax^2 + bx + c$, очевидно рациональное решение $x_0 = 0$, $y = e_0 \pm C$. Подстановка Диофанта выглядит так: $x = t, y = kt \pm c$.

Другим методом при решении задач книги II Диофант пользовался, когда они приводили к уравнению $y^2 = a^2x^2 + bx + c$. Он делал подстановку $x = t$, $y = at + k$, после чего x и y выражались рационально через параметр k.

Диофант, по существу, применял теорему, состоящую в том, что если неопределенное уравнение имеет хотя бы одно рациональное решение, то таких решений будет бесчисленное множество, причем значения x и y могут быть представлены в виде рациональных функций некоторого параметра.

Методы, разработанные в книге II, Диофант применял к более трудным задачам книги III, связанным с системами трех, четырех и большего числа уравнений степени не выше второй. Он, кроме того, до формального решения задач проводил исследования и находил условия, которым должны удовлетворять параметры, чтобы решения существовали.

В книге IV встречаются определенные и неопределенные уравнения третьей и более высоких степеней. Здесь дело обстоит значительно сложнее, так как неизвестные невозможно выразить как рациональные функции одного параметра. Но, как и раньше, если известны одна или две рациональные точки кубической кривой $f^3(x, y) = 0$, то можно найти и другие точки.

Книга V содержит наиболее сложные задачи; некоторые из них решаются с помощью уравнений третьей и четвертой степеней от трех и более неизвестных.

Есть и такие, в которых требуется разложить данное целое число на сумму двух, трех или четырех квадратов, причем эти квадраты должны удовлетворить определенным неравенствам, при решении задач Диофант дважды рассматривает уравнение Пелля $ax^2 + 1 = y^2$.

Задачи книги VI касаются прямоугольных треугольников с рациональными сторонами. К условию $x^2+y^2 = z^2$ в них добавляются еще условия относительно площадей, периметров, сторон треугольников.В книге VI доказывается, что если уравнение $ax^2+b = y^2$ имеет хотя бы одно рациональное решение, то их будет бесчисленное множество. Для решения задач книги VI Диофант применял все употребляемые им способы.

Диофант практиковался в нахождении решений неопределенных уравнений вида $Ax^2+Bx+C = y^2$, $Ax^3+Bx^2+Cx+D = y^2$ или систем таких уравнений. Типично для Диофанта, что его интересуют только положительные целые и рациональные решения. Иррациональные решения он называет «невозможными» и тщательно подбирает коэффициенты так, чтобы получились искомые положительные рациональные решения.

Поэтому, обычно, произвольное неопределенное уравнение (но, как правило, все-таки с целыми коэффициентами) получает титул «диофантово», если хотят подчеркнуть, что его требуется решить в целых числах.

Неопределенные уравнения первой степени начали рассматриваться индусскими математиками позднее, примерно с пятого века. Некоторые такие уравнения с двумя и тремя неизвестными появились в связи с проблемами, возникшими в астрономии, например, при рассмотрении вопросов, связанных с определением периодического повторения небесных явлений.

Первое общее решение уравнения первой степени $ax + by = c$, где a, b, c — целые числа, встречается у индийского мудреца Брахмагупты (около 625 года). Поэтому, строго говоря, нет оснований называть линейные неопределенные уравнения диофантовыми. Однако исторически все же сложилось применять термин «диофантово», к любому уравнению, решаемому в целых числах.

В 1624 году публикуется книга французского математика Баше де Мезирьяка «Problemes plaisans et delectables que se font par les nombres». Баше де Мезирьяк для решения уравнения $ax + by = c$ фактически применяет процесс, сводящийся к последовательному вычислению неполных частных и рассмотрению подходящих дробей.

После Баше де Мезирьяка в $XVII$ и $XVIII$ веках различные правила для решения неопределенного уравнения первой степени с двумя неизвестными давали Роль, Эйлер, Саундерсон и другие математики.

Цепные дроби к решению таких уравнений были применены Лагранжем, который, однако, замечает, что фактически это тот же способ, который был дан Баше де Мезирьяком и другими математиками, рассматривавшими неопределенные уравнения до него. Неопределенные уравнения первой степени стали записываться и решаться в форме сравнения значительно позже, начиная с Гаусса.

В августе 1900 года в Париже состоялся второй Международный конгресс математиков. 8 августа Д. Гильберт прочитал на нем доклад «Математические проблемы». Среди 23 проблем, решение которых (по мнению Д. Гильберта) совершенно необходимо было получить в наступающем двадцатом веке, десятую проблему он определил следующим образом:

«Пусть задано диофантово уравнение с произвольным числом неизвестных и рациональными числовыми коэффициентами. Указать способ, при помощи которого возможно после конечного числа операций установить, разрешимо ли это уравнение в целых числах».

Гипотезу, что такого способа нет, первым выдвинул (с достаточным на то основанием) американский математик М. Дэвис в 1949 году. Доказательство этой гипотезы растянулось на 20 лет — последний шаг был сделан только в 1970 году Юрием Владимировичем Матиясеевичем, на первом году аспирантуры он показал алгоритмическую неразрешимость 10 проблемы Гильберта.

Однако если про произвольное диофантово уравнения нельзя сказать, имеет ли оно целые корни, или нет, то проблема существования целых корней линейного диофантова уравнения решена [14].

Уравнения с одним неизвестным

Математическое образование, получаемое в общеобразовательной школе, является важнейшим компонентом общего образования и общей культуры современного человека. Практически все, что окружает современного человека — это все, так или иначе связано с математикой. А последние достижения в физике, технике и информационных технологиях не оставляют никакого сомнения, что и в будущем положение вещей останется прежним. Поэтому решение многих практических задач сводится к решению различных видов уравнений, которые необходимо научиться решать.

Одним из особо важных типов задач, рассматриваемых уже в средней школе, являются задачи по решению уравнений с одним неизвестным. Как показывает практика общения с выпускниками школ и студентами младших курсов вузов у многих из них имеется значительный разрыв между приобретенными в школе техническими, вычислительными навыками и умениями решения уравнений и сознательным пониманием тех стратегических, теоретических и логических основ, без которых правильно решить уравнение невозможно.

Определение 1. *Линейным уравнением с одним неизвестным называется уравнение вида*

$$ax + b = 0,$$

где a и b — известные числа, а x — неизвестная величина.

Решить уравнение — значит найти численное значение неизвестного x, при котором это уравнение обращается в тождество.

Если a не равно нулю ($a \neq 0$), то решение (корень) уравнения имеет вид:

$$x = -\frac{b}{a}.$$

Если $a = 0$, то возможны два случая:

1. $b = 0$, тогда $0 \cdot x + 0 = 0$. Здесь x может быть любым числом.
2. $b \neq 0$, тогда $0 \cdot x + b = 0$. Здесь нет решений.

Пример 1. *Решить уравнение:*

$$\frac{x}{x-2} = \frac{x+1}{x+2}.$$

Решение.

Перемножим накрест лежащие выражения:

$$x^2 + 2x = x^2 - 2x + x - 2.$$

Перенесём все члены в левую часть уравнения. После приведения подобных членов получим, $3x + 2 = 0$, откуда $x = -\frac{2}{3}$.

Уравнения первой степени с двумя неизвестными

Рассмотрим уравнение первой степени с двумя неизвестными

$$ax + by + c = 0 \tag{2.11}$$

где a и b — целые числа, отличные от нуля, а c — произвольное целое. Будем считать, что коэффициенты a и b не имеют общих делителей, кроме единицы. Действительно, если наибольший общий делитель этих коэффициентов $d = (a, b)$ отличен от единицы, то справедливы равенства $a = a_1 d$, $b = b_1 d$; уравнение (2.11) принимает вид

$$(a_1 x + b_1 y)d + c = 0$$

и может иметь целые решения только в том случае, когда c делится на d.

Таким образом, в случае $(a, b) = d \neq 1$ все коэффициенты уравнения (2.11) должны делиться нацело на d, и, сокращая (2.11) на d, придем к уравнению

$$a_1 x + b_1 y + c_1 = 0 (c_1 = \frac{c}{d}),$$

коэффициенты которого a_1и b_1 взаимно просты.

Рассмотрим сначала случай, когда $c = 0$. Уравнение (2.11) перепишется так:

$$ax + by = 0 \tag{2.11$'$}$$

Решая это уравнение относительно x, получим

$$x = -\frac{b}{ay}.$$

Ясно, что x будет принимать целые значения в том и только в том случае, когда y делится на a. Но всякое целое y, кратное a, можно записать в виде $y = at$, где t принимает произвольные целые значения $(t = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$.

Подставим это значение y в предыдущее уравнение, тогда $x = -\frac{b}{a}at = -bt$ и мы получаем формулы, содержащие все целые решения уравнения (2.11′):

$$x = -bt, y = at(t = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$$

.

Перейдем теперь к случаю $c \neq 0$.

Прежде всего покажем, что для нахождения всех целых решений уравнения (2.11) достаточно найти какое-нибудь одно его решение, то есть найти такие целые числа x_0, y_0, для которых $ax_0 + by_0 + c = 0$.

Теорема 1. *Пусть a и b взаимно просты и (x_0, y_0) — какое-нибудь решение уравнения $ax + by + c = 0$. Тогда формулы*

$$\begin{cases} x = x_0 - bt, \\ y = y_0 + at, \end{cases} \quad (t = 0, \pm 1, \pm 2, \dots) \tag{2.12}$$

дают все решения уравнения (2.11).

Доказательство. Пусть (x, y) — произвольное решение уравнения (2.11). Тогда из равенств $ax + by + c = 0$ и $ax_0 + by_0 + c = 0$ получаем:

$$ax - ax_0 + by - by_0 = 0; y - y_0 = \frac{a(x_0 - x)}{b}.$$

Так как $y - y_0$ — целое число и числа a и b взаимно просты, то $x_0 -$ должно делиться на b, то есть $x_0 - x$ имеет вид $x_0 - x = bt$, где t — целое. Но тогда $y - y_0 = \frac{abt}{b} = at$ и получаем $x = x_0 - bt$, $y = y_0 + at$.

Таким образом, доказано, что всякое решение (x, y) имеет вид (2.12). Остается еще проверить, что всякая пара чисел $(x_1 y_1)$, получаемая по формулам (2.12) при целом $t - t_1$, будет решением уравнения (2.11). Чтобы провести такую проверку, подставим величины $x_1 = x_0 - bt_1$, $y_1 = y_0 + at_1$ в левую часть уравнения (2.11):

$$ax_1 + by_1 + c = ax_0 - abt_1 + by_0 + abt_1 + c = ax_0 + by_0 + c,$$

но так как (x_0, y_0) — решение, то $ax_0 + bx_0 + c = 0$ и, следовательно, $ax_1 + by_1 + c = 0$, то есть (x_1, y_1) — решение уравнения (2.11), чем теорема полностью доказана. ∎

Итак, если известно одно решение уравнения $ax + by + c = 0$, то все остальные решения найдутся из арифметических прогрессий, общие члены которых имеют вид

$$\begin{cases} x = x_0 - bt, \\ y = y_0 + at, \end{cases} \quad (t = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$$

Заметим, что в случае, когда $c = 0$, найденные раньше формулы решений $x = -bt$, $y = at$ могут быть получены из только что выведенных формул $x = x_0 - bt$, $y = y_0 + at$, если выбрать $x_0 = y_0 = 0$, что можно сделать, так как значения $x = 0$, $y = 0$ являются, очевидно, решением уравнения $ax + by = 0$.

Существует несколько способов решения уравнений данного вида.

Пример 1. *Решить уравнение в целых числах* $127x - 52y + 1 = 0$.

Решение.

Преобразуем отношение коэффициентов при неизвестных. Прежде всего, выделим целую часть неправильной дроби

$$\frac{127}{52} : \frac{127}{52} = 2 + \frac{23}{52}.$$

Тогда получим

$$\frac{127}{52} = 2 + \frac{127}{\frac{52}{23}}.$$

Проделаем такие же преобразования с полученной в знаменателе неправильной дробью

$$\frac{52}{23}:\frac{52}{23}=2+\frac{6}{23}=2+\cfrac{1}{\cfrac{23}{6}}.$$

Теперь исходная дробь примет вид

$$\frac{127}{52}=2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{\cfrac{23}{6}}}.$$

Повторим те же рассуждения для дроби $\frac{23}{6}$. Тогда

$$\frac{127}{52}=2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{\cfrac{6}{5}}}},$$

выделяя целую часть неправильной дроби $\frac{6}{5}$ $\left(\frac{6}{5}=1+\frac{1}{5}\right)$ придем к окончательному результату:

$$\frac{127}{52}=2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{5}}}}.$$

Мы получили выражение, которое называется конечной цепной или непрерывной дробью. Отбросив последнее звено этой цепной дроби — одну пятую, превратим получающуюся при этом новую цепную дробь в простую и вычтем ее из исходной дроби $\frac{127}{52}$:

$$2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{1}}}=2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{4}}=2+\frac{4}{9}=\frac{22}{9},$$

$$\frac{127}{52}-\frac{22}{9}=\frac{1143-1144}{52\cdot 9}=-\frac{1}{52\cdot 9}.$$

Приведем полученное выражение к общему знаменателю и отбросим его, тогда получим $127\cdot 9-52\cdot 22+1=0$. Из сопоставления полученного равенства с уравнением $127x-52y+1=0$ следует, что $x=9$, $y=22$ будет решением этого уравнения, и согласно теореме все его решения будут содержаться в прогрессиях

$$x=9+52t,\ y=22+127t\,(t=0,\pm1,\pm2,\dots).$$

Ответ: $(9+52t;22+127t), t\in Z$.

Полученный результат наводит на мысль о том, что и в общем случае для нахождения решения уравнения $ax+by+c=0$ надо разложить отношение коэффициентов при неизвестных в цепную дробь, отбросить ее последнее звено и проделать выкладки, подобные тем, которые были проведены выше. При решении уравнений данного вида можно также разложить коэффициенты при неизвестных, но не в цепную дробь, а используя алгоритм Евклида.

Пример 2. *Найти натуральные x и y, такие, что $117x-79y=17$, для которых $x+y$ имеет наименьшее значение.*

Решение.

Имеем $117=79\cdot 1+38$. Перепишем данное уравнение в виде

$$79(x-y)+38x=17.$$

Обозначим $x-y=u$, тогда уравнение примет вид $79u+38x=17$. Проведем цепочку преобразований.

Так как $79=2\cdot 38+3$, то $38(2u+x)+3u=17$.

Обозначим $2u+x=v$, тогда получим $38v+3u=17$. Так как $38=3\cdot 12+2$, то $3(12v+u)+2v=17$, $12v+u=w$, тогда $3w+2v=17$, так как $3=2\cdot 1+1$, то $2(w+v)+w=17$, $w+v=t$, $2t+w=17$. Последнее уравнение имеет очевидное решение $w=17-2t$, $t\in Z$.

Теперь пойдем в обратном направлении:

$$v=t-w=t-17+2t=3t-17,$$
$$u=w-12v=17-22t-12(3t-17)=17-2t-36t+204=221-38t,$$
$$x=v-2u=3t-17-2(221-38t)=3t-17-442+76t=79t-459,$$
$$y=x-u=79t-459-221+38t=117t-680.$$

Из условия $x,y\in N$ найдем $t\geqslant 6$. Очевидно, что $x+y$ имеет наименьшее значение при $t=6$.

Ответ: $(15;22)$.

Пример 3. *Решить в целых числах уравнение* $3y-2x=8$.

Решение.

Выразим x через y, получим:

$$x=\frac{3y-8}{2}\in Z\Rightarrow y=2n,n\in Z.$$

Тогда

$$x=\frac{6n-8}{2}=3n-4,n\in Z.$$

Следовательно, все пары вида $(3n-4;2n)$, $n\in Z$ являются решениями исходного уравнения.

Ответ: $(3n-4;2n)$, $n\in Z$.

Пример 4. *Решить в целых числах уравнение* $4x - 6y = 18$.

Решение.

Разделив обе части уравнения на наибольший общий делитель чисел 4, 6, 18, то есть на число 2, имеем $2x - 3y = 9$. Из этого уравнения выразим неизвестное с меньшим (по модулю) коэффициентом:

$$x = \frac{9 + 3y}{2}.$$

Далее из полученной дроби выделим целую часть:

$$x = \frac{9 + 3y}{2} = \frac{8 + 2y + 1 + y}{2} = 4 + y + \frac{1 + y}{2} \qquad (2.13)$$

Считая x и y целыми, заключаем, что последнее равенство выполняется тогда, когда дробь $\frac{1+y}{2}$ является целым числом.

Пусть $\frac{1+y}{2} = n$, где n — целое. Тогда, выразив неизвестное y, получим

$$y = 2n - 1.$$

Подставим теперь найденное выражение y в равенство (2.13) и получим

$$x = 8 + 2(2n - 1) + n = 5n + 6$$

Итак, найдены все решения данного уравнения:

$$x = 5n + 6, y = 2n - 1, \text{где} n \in Z.$$

Ответ: $(5n + 6; 2n - 1), n \in Z$.

Рассмотрим уравнение в целых числах с тремя неизвестными $ax + by + cz = d$, где a, b и c — целые числа, отличные от нуля, а d — произвольное целое. При решении таких уравнений следует различать два случая:

1) среди пар чисел $(a; b)$, $(b; c)$, $(a; c)$ имеется пара взаимно простых чисел;

2) среди указанных пар нет взаимно простых чисел.

Пример 5. *Решить уравнение* $2x + 4y + 5z = 1$.

Решение.

Здесь из трех пар $(2; 4)$, $(2; 5)$, $(4; 5)$ имеются две пары взаимно простых чисел. Выберем вторую пару, перепишем уравнение в виде $2x + 5z = 1 - 4y$ и будем решать его как уравнение с целыми неизвестными x и z, считая y целым параметром. Выразим неизвестное x, а затем выделим целую часть:

$$x = \frac{1 - 4y - 5z}{1} = -2y - 2z + \frac{1 - z}{2} \tag{2.14}$$

Так как x, y и z — целые числа, то последнее равенство будет выполнено только, когда дробь $\frac{1-z}{2} = n$ является целым числом. Отсюда находим $z = 1 - 2n$. Подставляя это выражение в равенство (2.14), получим

$$x = 2y - 2z + \frac{1 - z}{2} = -2y - 2(1 - 2n) + n = 5n - 2y - 2.$$

Тогда все решения данного уравнения можно записать в виде

$$x = 5n - 2k - 2, y = k, z = 1 - 2n, n, k \in Z.$$

Ответ: $(5n - 2k - 2, k, 1 - 2n), n, k \in Z$.

Пример 6. *Решить уравнение в целых числах* $6x - 10y + 15z = 1$.

Решение.

В данном случае среди пар $(6;10)$, $(6;15)$ и $(10;15)$ нет взаимно простых чисел. Поступим следующим образом. Будем рассматривать неизвестное z как целое фиксированное число и перепишем уравнение в виде

$$6x-10y=1-15z \Rightarrow 3x-5y=\frac{1-15z}{2} \Rightarrow 3x-5y=-7z+\frac{1-z}{2} \qquad (2.15)$$

Так как x, y и z — целые числа, то дробь $\frac{1-z}{2}$ является целым числом и, значит, ее можно представить в виде $\frac{1-z}{2}=n$,где n — целое. Тогда получим

$$z=1-2n, n\in Z.$$

Подставив $z=1-2n$ в равенство (2.15), получим уравнение

$$3x-5y=-7(1-2n)+n=15n-7$$

с двумя неизвестными значениями x, y с целочисленным параметром n.

Решим это уравнение так, как описано в примере 5. В результате найдем все решения исходного уравнения:

$$x=5n+5k-4, y=3k-1, z=1-2n, \text{где} n,k\in Z.$$

Ответ: $(5n+5k-4, 3k-1, 1-2n)$.

Перейдем теперь к рассмотрению некоторых уравнений степени выше первой.

Уравнения второй степени

Как известно, уравнение второй степени с двумя неизвестными

$$ax+bxy+cy^2+fx+hy+d,\ \text{где}\ a,b,c,f,h,d\in Z,$$

может не иметь решений в целых числах, может иметь их только конечное число и, наконец, может иметь бесконечное множество таких решений, причём в последнем случае пары чисел, которые могут быть решениями уравнения, встречаются значительно реже, чем пары целых чисел, которые могут быть решениями уравнения первой степени. Это обстоятельство не случайно. Оказывается, что уравнения с двумя неизвестными степени выше второй, вообще говоря, могут иметь только конечное число решений в целых числах. Исключения из этого правила крайне редки. А. Туэ доказал, что уравнение

$$a_0x^n + a_1x^{n-1}y + a_2x^{n-2}y^2 + \dots + a_ny^n, \text{где} n \in Z, n > 2, a_0, a_1, \dots, a_n, c \in Z,$$

имеет только конечное число решений в целых числах, за исключением, может быть, случаев, когда левая однородная часть этого уравнения есть степень однородного двучлена первой степени или трёхчлена второй степени. Метод А. Туэ даёт возможность найти границу для числа решений уравнения, правда, достаточно грубую. Для отдельных классов уравнений эта граница может быть значительно уточнена. Например, Б.Н. Делоне показал, что уравнение

$$ax^3 + y^3 = 1$$

при a целом может иметь, кроме тривиального $x = 0$, $y = 1$, не более одного решения в целых числах. Кроме того, он показал, что уравнение

$$ax^3 + bx^2y + cxy^2 + dy^3 = 1, a, b, c, d \in Z,$$

может иметь не более пяти решений в целых числах. К. Зигель доказал, что уравнение

$$P(x, y) = 0,$$

где $P(x, y)$ — неприводимый многочлен выше чем второй степени относительно x и y, может иметь бесконечное множество решений в целых числах только тогда, когда существуют числа

$$a_n, a_{n-1}, \ldots, a_0, a_{-1}, \ldots, a_{-n} \text{ и } b_n, b_{n-1}, \ldots, b_0, b_{-1}, \ldots, b_{-n}$$

такие, что при подстановке вместо x и y в данное уравнение

$$x = a_n t^n + a_{n-1} t^{n-1} y + \cdots + a_0 + \frac{a_{-1}}{t} + \cdots + \frac{a_{-n}}{t^n},$$
$$y = b_n t^n + b_{n-1} t^{n-1} y + \cdots + b_0 + \frac{b_{-1}}{t} + \cdots + \frac{b_{-n}}{t^n},$$

получится тождество $P(x, y) = 0$ относительно t. Здесь n — некоторое целое число.

Рассмотрим решение уравнений в целых числах степени выше первой с двумя неизвестными на примерах.

Пример 1. *Решить уравнение в целых числах* $y - x - xy = 2$.

Решение.

Проведем над данным уравнением цепочку равносильных преобразований:

$$y - x - xy = 2 \Rightarrow (y+1) - x(1+y) - 1 = 2 \Leftrightarrow (y+1)(1-x) = 3.$$

Поскольку число 3 можно представить в виде произведения двух целых чисел с учетом порядка четырьмя способами

$$3 = (-1) \cdot (-3) = (-3) \cdot (-1) = 1 \cdot 3 = 3 \cdot 1,$$

то получим четыре системы:

$$1)\ \begin{cases} 1 - x = 3, \\ 1 + y = 1; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2, \\ y = 0. \end{cases}$$

2) $\begin{cases} 1 - x = -3, \\ 1 + y = -1; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 4, \\ y = -2. \end{cases}$

3) $\begin{cases} 1 - x = 1, \\ 1 + y = 3; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0, \\ y = 2. \end{cases}$

4) $\begin{cases} 1 - x = -1, \\ 1 + y = -3; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2, \\ y = -4. \end{cases}$

Ответ: $(0; 2), (-2; 0), (2; -4), (4; -2)$.

Пример 2. *Решить уравнение в целых числах* $3x^2 + 4xy - 7y^2 = 13$.

Решение.
Разложим левую часть данного уравнения на множители

$$3x^2 + 4xy - 7y^2 = (3x + 7y)(x - y).$$

Имеем

$$(3x + 7y)(x - y).$$

Представим число 13 в виде произведения целых чисел с учетом порядка

$$13 = 1 \cdot 13 = 13 \cdot 1 = (-1) \cdot (-13) = (-13) \cdot (-1),$$

тогда получим:

1) $\begin{cases} 3x + 7y = 13, \\ x - y = 1; \end{cases}$

2) $\begin{cases} 3x + 7y = -1, \\ x - y = -13; \end{cases}$

3) $\begin{cases} 3x + 7y = 1, \\ x - y = 13; \end{cases}$

4) $\begin{cases} 3x + 7y = -13, \\ x - y = -1. \end{cases}$

Системы вторая и третья не имеют целочисленных решений.
Ответ: $(2; 1), (-2; -1)$.

Пример 3. *Решить уравнение в целых числах* $2x^2 + xy = x + 7$.

Решение.
Для решения данного уравнения используем следующий характерный прием, который, наряду с рассмотренным выше, можно отнести к разряду стандартных, применяемых при решении уравнений в целых числах.
Выразим y через x:

$$y = \frac{x - 2x^2 + 7}{x} = 1 = 2x + \frac{7}{x}.$$

Поскольку x и y целые числа, то дробь $\frac{7}{x}$ должна быть целым числом. Следовательно, имеем:

1) $\begin{cases} x = 1, \\ y = 1 - 2x + 7; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1, \\ y = 6; \end{cases}$

2) $\begin{cases} x = -1, \\ y = 1 - 2x + 7; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1, \\ y = -4; \end{cases}$

3) $\begin{cases} x = 7, \\ y = 1 - 2x + 1; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 7, \\ y = -12; \end{cases}$

4) $\begin{cases} x = -7, \\ y = 1 - 2x + 1; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -7, \\ y = 14. \end{cases}$

Ответ: $(-1; -4), (-7; 14), (7; -12), (1; 6)$.

Пример 4. *Решить в целых числах уравнение* $x^2 - 4x - y^2 + 2y + 6 = 0$.

Решение.
Выделим в левой части уравнения полные квадраты:

$$(x^2 - 4x + 4) - 4 - (y^2 - 2y + 1) + 1 + 6 = 0 \Leftrightarrow$$
$$(x - 2)^2 - (y - 1)^2 = -3 \Leftrightarrow$$
$$(x - y - 1)(x + y - 3) = -3$$

Теперь заключаем, что исходное уравнение на множестве целых чисел равносильно совокупности четырех систем:

1) $\begin{cases} x - y - 1 = 1, \\ x + y - 3 = -3; \end{cases}$

2) $\begin{cases} x - y - 1 = -1, \\ x + y - 3 = 3; \end{cases}$

3) $\begin{cases} x - y - 1 = 3, \\ x + y - 3 = -1; \end{cases}$

4) $\begin{cases} x - y - 1 = -3, \\ x + y - 3 = 1. \end{cases}$

Решая данные системы, получаем ответ.
Ответ: $(1;-1), (3;3), (3;-1), (1;3)$.

Пример 5. *Решить уравнение в целых числах* $x^2 + xy - 2y^2 - x + y = 3$.

Решение.
Проведем равносильные преобразования

$$x^2 + xy - 2y^2 - x + y = 3 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow (x-y)^2 + 2xy - y^2 + xy - 2y^2 - x + y = 3, \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow (x-y)^2 + 3xy - 3y^2 - (x-y) = 3 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow (x-y)^2 + 3y(x-y) - (x-y) = 3 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow (x-y)(2y + x - 1) = 3.$$

Данное уравнение равносильно совокупности четырех систем:

1) $\begin{cases} x - y = 1, \\ 2y + x - 1 = 3; \end{cases}$

2) $\begin{cases} x - y = 3, \\ 2y + x - 1 = 1; \end{cases}$

3) $\begin{cases} x - y = -1, \\ 2y + x - 1 = -3; \end{cases}$

4) $\begin{cases} x - y = -3, \\ 2y + x - 1 = -1. \end{cases}$

Системы вторая и третья не имеют целочисленных решений.
Ответ: $(2; 1), (-2; 1)$.

Пример 6. *Решить уравнение в целых числах* $3x^2 - 4y^2 = 13$.

Решение.
Перепишем данное уравнение в виде

$$3x^2 - 23 - 4y^2 = 10 \Leftrightarrow 3(x^2 - 1) - 4y^2 = 10 \Leftrightarrow 3(x + 1)(x - 1) - 4y^2 = 10 \qquad (2.16)$$

Так как $3x^2 - 4y^2 = 13$ — нечётное число — то ясно, что x может быть только нечётным числом. Следовательно, $(x-1)(x+1)$ — произведение двух последовательных чётных чисел, а поэтому это произведение кратно 4.

Таким образом, левая часть уравнения (2.16) кратна 4. Но так как число 10 не кратно четырем, то равенство (2.16) не выполняется ни при каких целых значениях x и y, то есть данное уравнение не имеет решений в целых числах.

Ответ: решений нет.

Пример 7. *Решить уравнение в целых числах* $x^2 - 3y = 17$.

Решение.
Очевидно, что x не делится на 3, так как в противном случае $(x^2 - 3y)$ делится на 3, что невозможно, так как 17 не делится на 3. Поэтому, пусть

$$x = 3k \pm 1,\ k \in Z.$$

Тогда данное уравнение преобразуется к виду

$$9k^2 \pm 6k + 1 - 3y = 17 \Leftrightarrow 3(3k^2 \pm 2k - y) = 16,$$

что невозможно, так как 16 не делится на 3.

Ответ: решений нет.

Пример 8. *Решить в целых числах уравнение* $x^2 + xy - y^2 = x^2y^2$.

Решение.

Проведем рациональное преобразование

$$(y^2 - 1)x^2 - yx + y^2 = 0.$$

Если $y^2 - 1 \neq$, то есть $y \neq \pm 1$, то решим квадратное уравнение относительно x:

$$x = \frac{y \pm \sqrt{y^2 - 4y^2(y^2 - 1)}}{2(y^2 - 1)} = \frac{y \pm y\sqrt{5 - 4y^2}}{2(y^2 - 1)}.$$

Если $y \neq 0$, то должно иметь место равенство $5 - 4y^2 = a^2$, где a — некоторое целое число, то есть $4y^2 + a^2 = 5$. Это возможно в случае, когда $y = \pm 1$, чего не может быть по предположению.

Если $y = 0$, то $x = 0$.

Если $y^2 - 1 = 0$, то есть $y = \pm 1$, то при $y = 1$ имеем $x - 1 = 0$, то есть $x = 1$; при $y = -1$ имеем $-x - 1 = 0$, то есть $x = -1$.

Ответ: $(0; 0), (1; 1), (-1; -1)$.

Существует очень много уравнений с двумя неизвестными, которые не относятся к какому-то из видов, рассмотренных выше. Рассмотрим несколько примеров.

Пример 9. *Решить в натуральных числах уравнение*

$$x^4 + x^3 + x^2 + x + 1 = y^2 \tag{2.17}$$

Решение.

Проведем равносильные преобразования левой части уравнения (2.17) к виду

$$(x^2+\frac{x}{2}+\frac{3}{8})^2+\frac{5}{8}x+\frac{55}{64}.$$

Умножив обе части уравнения (2.17) на 64 получим равенство

$$(8x^2+4x+3)^2+40x+55=(8y)^2 \tag{2.18}$$

Так как x, $y \in N$, то из (2.18) заключаем, что

$$(8y)^2>(8x^2+4x+3)^2 \Rightarrow 8y>8x^2+4x+3 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow 2y>2x^2+x+\frac{3}{4} \Rightarrow 2y>2x^2+x+1,$$

откуда

$$4y^2 \geqslant (2x^2+x+1)^2=4x^4+4x^3+5x^2+2x+1.$$

Умножив теперь обе части исходного уравнения (2.17) на 4 и воспользовавшись последним неравенством, имеем

$$4x^4+4x^3+4x^2+4x+4=4y^2 \Rightarrow$$
$$4x^4+4x^3+4x^2+4x+4 \geqslant 4x^4+4x^3+5x^2+2x+1 \Leftrightarrow$$
$$x^2-2x-3 \leqslant 0 \Leftrightarrow -1 \leqslant x \leqslant 3.$$

Задача свелась к проверке для x чисел $1,2,3$.

Ответ: $(3;11)$.

Пример 10. *Решить уравнение в целых числах* $x^2+9y^2=3z+2$.

Решение.
Перепишем уравнение в виде

$$x^2 = 3z - 9y^2 + 2. \tag{2.19}$$

Правая часть данного уравнения есть число, которое при делении на 3 дает в остатке 2. Следовательно, x^2 не делится на 3. Но квадрат числа, не делящегося на 3, дает в остатке 1. Таким образом, равенство (2.19) невозможно, так как левая и правая часть дают при делении на 3 разные остатки.

Ответ: решений нет.

Пример 11. *Решить уравнение в целых числах* $1! + 2! + \cdots + x! = y^2$.

Решение.
Подставив вместо x последовательно числа $1, 2, 3, 4, 5, \ldots$ убеждаемся, что при $x = 1$, $y = \pm 1$и при $x = 3, y = \pm 3$, числа $2, 4, 5, 6, \ldots$ не удовлетворяют условию задачи. Докажем, что при $x \geqslant 4$ данное уравнение решений не имеет. В самом деле, сумма $1! + 2! + 3! + 4! + 5! + \cdots + x!$ при $x \geqslant 4$ оканчивается цифрой 3, но квадрат целого числа не может оканчиваться цифрой 3, поэтому других решений уравнение не имеет.

Ответ: (1; 1), (1; -1), (3; 3), (3; -3).

Пример 12. *Решить уравнение в целых числах* $x^3 - y^3 = xy + 61$.

Решение.
Сделаем замену $x = d + y$, где $d \geqslant 1, d \in N$. Тогда получим

$$(d + y)^3 - y^3 - y(d + y) = 61 \Leftrightarrow$$
$$d^3 + 3d^2y + 3dy^2 - dy - y^2 = 61,$$
$$(3d - 1)y^2 + (3d^2 - d)y + d^3 - 61 = 0. \tag{2.20}$$

Дискриминант этого уравнения будет неотрицательным при $1 \leqslant d \leqslant 5$. Перебирая все d от 1 до 5 и, подставляя в (2.20), можно убедиться, что лишь при $d = 1$ уравнение будет иметь целые корни $y = 5$ и $y = -6$. Отсюда получаем, что $x = 6$ и $x = -5$ соответственно.

Ответ: $(-5; -6), (6; 5)$.

Иногда в литературе встречаются системы уравнений, которые необходимо решить в целых числах. Такие системы очень часто можно увидеть в материалах вступительных экзаменов в высшие учебные заведения. Рассмотрим несколько примеров таких систем.

Пример 13. *Решить в целых числах систему*

$$\begin{cases} x^2 = y - 1, \\ y^2 = z - 1, \\ z^2 = x - 1. \end{cases}$$

Решение.

Если x — четно, то из первого уравнения следует, что y — нечётно, а тогда из второго уравнения получаем, что z — четно, а из третьего уравнения следует, что x — нечётно. Тем самым получаем противоречие. Если же x — нечётно, то y — четно, z — нечётно, x — четно — противоречие. Полученные противоречия свидетельствуют о том, что данная система не имеет решений в целых числах.

Ответ: нет решений.

Пример 14. *Решить систему уравнений в целых числах*

$$\begin{cases} |x| + |y| = 5, \\ xy = -6. \end{cases}$$

Решение.

Данную систему уравнений можно представить в виде совокупности двух систем, причем и будут иметь разные знаки:

$$1)\ \begin{cases} x > 0, \\ y < 0, \\ x - y = 5, \\ xy = -6. \end{cases}$$

$$2)\ \begin{cases} x < 0, \\ y > 0, \\ y - x = 5, \\ xy = -6. \end{cases}$$

Решая первую систему, получим следующее:

$$\begin{cases} x = 5 + y, \\ \left[\begin{array}{l} y = -2, \\ y = -3. \end{array} \right. \end{cases}$$

При $y = -2, x = 3, y = -3, x = 2$. Решая вторую систему, придем к выводу, что при $x = -2, y = 3$, а при $x = -3$, $y = 2$.

Замечание. *Систему можно решить графическим методом.*

Ответ: $(-3; 2), (-2; 3), (2; -3), (3; -2)$.

Пример 15. *Решить систему уравнений в целых числах*

$$\begin{cases} x + y + z = 0, \\ \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 0. \end{cases}$$

Решение.

Из второго уравнения системы следует, что $xyz \neq 0$. Если обе части второго уравнения умножить на xyz, то получим уравнение

$$xy + xz + zy = 0. \qquad (2.21)$$

Из первого уравнения следует, что $x + y = -z$. Подставим выражение $x + y$ в уравнение (2.21), тогда $xy = z^2$. Аналогично легко получить, что $xz = y^2$ и $yz = x^2$. В таком случае уравнение (2.21) можно переписать в виде

$$x^2 + y^2 + z^2 = 0,$$

откуда следует, что $x = y = z = 0$. Полученные значения переменных противоречат области допустимых значений переменных. Следовательно, исходная система не имеет решений.

Ответ: нет решений.

Пример 16. *Решить систему уравнений в натуральных числах*

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 14, \\ xy + xz + yz = 11, \\ xyz = 6. \end{cases}$$

Решение.

Умножим второе уравнение на два и сложим с первым уравнением. Тогда получаем уравнение $x + y + z = \pm 6$. Рассмотрим два случая.

1) Пусть $x + y + z = 6$. Тогда $y + z = 6 - x$. Из третьего уравнения получаем

$$yz = \frac{6}{x}.$$

Перепишем второе уравнение системы в виде $x(y+z)+yz=11$. Отсюда нетрудно получить уравнение относительно переменной x вида

$$x(6-x)+\frac{6}{11}=11,$$

которое эквивалентно уравнению третьей степени

$$x^3-6x^2+11x-6=0. \tag{2.22}$$

Первый корень уравнения (2.22) легко находится подбором, то есть $x_1=1$.

Для нахождения других корней уравнения (2.22) необходимо решить квадратное уравнение

$$x^2-5x+6=0.$$

Очевидно, что корнями являются $x_2=2$ и $x_3=3$.

Для нахождения значений переменных y и z необходимо рассмотреть три системы уравнений

$$\begin{cases} y+z=5, \\ yz=6. \end{cases} \quad \begin{cases} y+z=4, \\ yz=3. \end{cases} \quad \begin{cases} y+z=3, \\ yz=2. \end{cases}$$

Отсюда получаем следующие тройки решений:

$$(1;2;3),(1;3;2),(2;1;3),(2;3;1),(3;1;2),(3;2;1).$$

2) Пусть $x+y+z=-6$. Очевидно, что в таком случае исходная система будет иметь хотя бы один отрицательный корень [2, 3, 6, 9].

Ответ: $(1;2;3),(1;3;2),(2;1;3),(2;3;1),(3;1;2),(3;2;1)$.

Уравнения степени выше второй

Если для уравнений с двумя неизвестными мы можем дать ответ на вопрос о существовании конечного или бесконечного числа решений в целых числах, то для уравнений с более чем двумя неизвестными степени выше второй дать ответ на этот вопрос мы можем только для весьма частных классов уравнений. Тем не менее, в этом последнем случае поддается разрешению и более трудный вопрос об определении всех решений уравнения в целых числах. В качестве примера остановимся на так называемой великой теореме Ферма.

Замечательный французский математик Пьер Ферма высказал утверждение, что уравнение

$$x^n + y^n = z^n \tag{2.23}$$

при целом $n \geq 3$ не имеет решений в целых положительных числах x, y, z (случай $xyz = 0$ исключается положительностью x, y, z). Несмотря на то, что П. Ферма утверждал, что он имеет доказательство этого утверждения, его доказательство впоследствии не было найдено. Более того, когда математик Куммер попытался его найти и даже думал одно время, что он его нашел, он обнаружил, что одно положение, верное в области обычных целых чисел, оказывается неверным для более сложных числовых образований, с которыми, естественно, приходится сталкиваться при исследовании проблемы Ферма. Это обстоятельство заключается в том, что так называемые целые алгебраические числа, — другими словами, корни алгебраических уравнений с целыми рациональными коэффициентами и с коэффициентом при старшей степени, равным 1 могут не единственным способом быть разложены на простые неразложимые целые сомножители той же алгебраической природы. Обычные же целые числа разлагаются на простые множители единственным образом. Например, $6 = 2 - 3$ и не допускает никаких других разложений внутри совокупности обычных целых чисел. Рассмотрим совокупность всех целых алгебраических чисел вида $m + n\sqrt{-5}$, где m и n — обычные целые числа. Легко видеть, что сумма и произведение двух таких чисел опять будут числами той же совокупности. Совокупность чисел, обладающая тем свойством, что она содержит любые суммы и произведения чисел, в нее входящих, называется кольцом. По определению, в нашем кольце содержатся числа $2, 3, 1+\sqrt{-5}, 1-\sqrt{-5}$. Каждое из указанных чисел в этом кольце, как легко можно установить, будет простым, то есть не будет представляться в виде произведения двух не равных единице целых чисел нашего кольца. Но $6 = 2\cdot 3 = (1+\sqrt{-5})(1-\sqrt{-5})$; другими словами, число 6 не единственным образом разлагается на простые сомножители в нашем кольце. То же обстоятельство, не единственность разложения на простые сомножители, может иметь место и в других, более сложных, кольцах алгебраических целых чисел. Обнаружив это обстоятельство, Куммер убедился, что его доказательство общей великой теоремы Ферма неверно. Для преодоления трудностей, связанных с не единственностью разложения на множители, Куммером была построена теория идеалов, которая играет в настоящее время исключительно большую роль в алгебре и теории чисел. Но даже с помощью этой новой теории полностью доказать великую теорему Ферма Куммер не смог и доказал ее только для n, делящихся хотя бы на одно из так называемых регулярных простых чисел.

В настоящее время великая теорема Ферма доказана для многих n, в частности, для любого n, делящегося на простое число, меньшее 100. Великая теорема Ферма сыграла большую роль в развитии математики благодаря связанному с попытками ее доказательства открытию теорий идеалов. Но при этом следует отметить, что совсем другим путем и по другому поводу эта теория была построена замечательным русским математиком Е.И. Золотарёвым.

Великую теорему Ферма окончательно доказал в 1995 году Эндрю Уайлс (его доказательство основано на теории эллиптических кривых).

Пример 1. *Решить уравнение в целых числах*

$$x+y+z = xyz (0 \leqslant x \leqslant y \leqslant z).$$

Решение.

Так как $y \geqslant x$, то можем представить y в виде $y = x + a$, где $a \geqslant 0$, $a \in Z$, аналогично $z \geqslant y$, тогда $z = y + b$, где $b \geqslant 0$, $b \in Z \Rightarrow z = x + (a + b)$. Тогда исходное уравнение примет вид

$$x + (x + a) + (x + (a + b)) = x(x + a)(x + (a + b)) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 3x + (2a + b)x^3 \cdot (2a + b)x^2 \cdot (a^2 + ab)x = 0.$$

Если $x = 0$, тогда получим

$$2a + b = 0 \Leftrightarrow a = 0, b = 0 \Rightarrow y = z = 0.$$

Если $x = 1$, то

$$a(a + b) = 2 \Leftrightarrow \begin{cases} a + b = 2, \\ a = 1. \end{cases} \Rightarrow y = 2, z = 3.$$

При $x > 1$ получим, что

$$x^3 > 3x,\ x^2(2a + b) \geqslant 2a + b,$$

то есть

$$x^3 + (2a + b)x^2 + (a^2 + ab)x > 3x + (2a + b).$$

Значит, при $x > 1$ уравнение решений не имеет.

Ответ: $(0; 0; 0), (1; 2; 3)$.

Пример 2. *Решить уравнение в целых числах*

$$3(u - 3)^2 + 6v^2 + 2w^2 + 3v^2w^2 = 33.$$

Решение.

Пусть (u_0, v_0, w_0) — тройка чисел, удовлетворяющих условию задачи, тогда

$$3(u_0-3)^2+6v_0^2+2w_0^2+3v_0^2w_0^2=33. \tag{2.24}$$

Откуда следует, в частности, что $3(u_0-3)^2 \leqslant 33$, то есть $(u_0-3)^2 \leqslant 11$. Поскольку $(u_0-3)^2$ является квадратом целого числа (u_0-3), то $(u_0-3)^2$ равно либо 0, либо 1, либо 4, либо 9. Перепишем (2.24) в виде

$$3(u_0-3)^2+(w_0^2+2)(3v_0^2+2)=37.$$

Если $(u_0-3)^2=0$, то

$$(w_0^2+2)(3v_0^2+2)=37.$$

Так как (w_0^2+2) и $(3v_0^2+2)$ целые числа, большие 1, а 37 — простое число, то последнее равенство выполняться не может, значит $(u_0-3)^2 \neq 0$.

Если $(u_0-3)^2=1$, то

$$(w_0^2+2)(3v_0^2+2)=34.$$

Так как $(w_0^2+2) \geqslant 2$ и $(3v_0^2+2) \geqslant 2$, то последнее равенство можно представить в виде совокупности двух систем:

$$\begin{cases} w_0^2+2=2, \\ 3v_0^2+2=5; \end{cases}$$

либо

$$\begin{cases} w_0^2+2=5, \\ 3v_0^2+2=2. \end{cases}$$

Вторая система не имеет решений, а решением первой являются пары $w_0=0$, $v_0=\pm1$.

Ответ: $(6;-1;0), (6;1;0), (0;-1;0), (0;1;0)$[8,9].

Решение диофантовых уравнений с помощью алгоритма Евклида

Рассмотрим уравнение первой степени $ax + by = c$, где a, b, c — целые числа. Уравнения такого вида называются линейными диофантовыми.

Определение 1. *Линейным диофантовым уравнением с двумя неизвестными называется уравнение вида*

$$ax + by = c, \tag{2.25}$$

где $a, b, c \in Z$ *и* $(a, b, c) = 1$.

Определение 2. *Решением уравнения (2.25) называется пара целых чисел, при подстановке которых в уравнение (2.25) получается верное числовое равенство.*

Теорема 1. *Диофантово уравнение (2.25) разрешено в целых числах тогда и только тогда, когда* $(a, b) = 1$.

Доказательство. *Необходимость.* Предположим, что

$$(a, b) = d > 1 \tag{*}$$

и докажем, что диофантово уравнение (2.25) неразрешимо в целых числах. Предположим, что существует $x_0, y_0 \in Z$ такое, что

$$ax_0 + by_0 = c, \tag{2.26}$$

то есть x_0, y_0 — решение (2.25). Очевидно, что из (*) и (2.26) получается, что $\frac{c}{d}$. Следовательно, d — общий делитель чисел (a, b, c). Следовательно, $(\frac{1}{d}, d) = 1$, таким образом пришли к противоречию.

Достаточность. Пусть $(a, b) = 1$, тогда по критерию НОДа: $\exists x', y' \in Z$, что $1 = ax' + by'$. Домножим обе части равенства на c, получим

$$a(cx') + b(cy') = c. \tag{2.27}$$

Следовательно, cx', cy' — целые решения уравнения (2.25). Обозначим их через x_0 и y_0, то есть $cx' = x_0, cy' = y_0$. Тем самым, доказано, что если $(a, b) = 1$, то диофантово уравнение (2.25) имеет целое решение (x_0, y_0).

Покажем, как найти все целые решения этого диофантова уравнения:

1) Если $c = 0$, то $ax + by = 0$, следовательно,$y = \frac{-ax}{b}$, но по условию $y \in Z$ и $(a, b) = 1$, отсюда $\frac{ax}{b}$ и $(a, b) = 1$. Следовательно, по свойству взаимно простых чисел $\frac{x}{b}$, отсюда $\exists t \in Z$ такое, что $x = bt$. Отсюда $y = -at$. Таким образом, целым решением такого однородного уравнения является:

$$\begin{cases} x = bt, \\ y = -at; \end{cases} \quad t \in Z.$$

2) Если $c \neq 0$, то уравнение (2.25) разрешимо в целых числах. $\exists x_0, y_0 \in Z$ такие, что

$$ax_0 + by_0 = c. \tag{2.25'}$$

Вычтем из (2.25) (2.25′), получим

$$a(x - x_0) + b(y - y_0) = 0, \tag{2.26'}$$

а уравнение (2.26′) совпадает с типом уравнения, рассмотренным в пункте 1.

Таким образом, пара $(x - x_0, y - y_0)$ — решение уравнения (2.26′). Отсюда, согласно случаю 1. имеем:

$$\begin{cases} x - x_0 = bt, \\ y - y_0 = -at; \end{cases} \quad t \in Z,$$

что и требовалось доказать. ■

Пример 1. *Решить диофантово уравнение* $12x - 17y = 2$.

Решение.

Так как $(12, -17, 2) = 1$, то уравнение $12x - 17y = 2$ — диофантово.

$(12, -17) = 1 \Rightarrow$ данное уравнение разрешимо в целых числах. Найдем выражение для 1 через a и b, $a = 12, b = -17$ (будем рассматривать $|b|$, так как $y \in Z$).

$$\frac{17}{12} \Rightarrow 17 = 12 \cdot 1 + 5,\ 12 = 5 \cdot 2 + 2,\ 5 = 2 \cdot 2 + 1. \Rightarrow$$
$$\Rightarrow 1 = 5 - 2 \cdot 2 = 5 - 2 \cdot (12 - 5 \cdot 2) = 5 \cdot 5 - 2 \cdot 12 =$$
$$= 5 \cdot (17 - 12 \cdot 1) - 2 \cdot 12 = 5 \cdot 17 - 7 \cdot 12.$$
$$12 \cdot (-7) + 17 \cdot 5 = 1;$$
$$12 \cdot (-7) - 17 \cdot (-5) = 1;$$
$$12 \cdot (-14) - 17 \cdot (-10) = 2;$$

следовательно,

$$x_0 = -14,\ y_0 = -10 \Rightarrow \begin{cases} x = -14 - 17t, \\ y = -10 - 12t, \end{cases} \quad t \in Z.$$

Ответ: $(-14 - 17t, -10 - 12t), k \in Z$.

Пример 2. *Решите уравнение* $24x - 17y = 2$.

Решение.

$(24, 17, 2) = 1$, следовательно, имеем диофантово уравнение.

Так как НОД$(24, 17) = 1$, то данное уравнение разрешимо в целых числах. Найдем частное решение (x_0, y_0) с помощью алгоритма Евклида:

$$\frac{24}{17} \Rightarrow 24 = 17 \cdot 1 + 7; 17 = 7 \cdot 2 + 3; 7 = 3 \cdot 2 + 1; 3 = 1 \cdot 3 + 0.$$

Найдем линейное представление НОДа:

$$1 = 7 - 3 \cdot 2 = 7 - (17 - 7 \cdot 2) \cdot 2 = 7 - 17 \cdot 2 + 7 \cdot 4 + 5 \cdot 7 - 2 \cdot 17 =$$
$$= 5 \cdot (24 - 17 \cdot 1) - 2 \cdot 17 = 5 \cdot 24 - 5 \cdot 17 - 2 \cdot 17 = 5 \cdot 24 - 7 \cdot 17 =$$
$$= 24 \cdot 5 - 17 \cdot 7.$$
$$24 \cdot 5 - 17 \cdot 7 = 1;$$
$$24 \cdot 10 - 17 \cdot 14 = 2;$$
$$x_0 = 10, y_0 = 14; \Rightarrow \begin{cases} x = 10 - 17t, \\ y = 14 - 24t, \end{cases} \quad t \in Z.$$

Ответ: $(10 - 17t, 14 - 24t), k \in Z$.

Пример 3. *Решите уравнение* $5x - 3y = -1$.

Решение.
$(5, 3, 1) = 1$, следовательно, имеем диофантово уравнение.
НОД$(5, 3) = 1$, следовательно, данное уравнение разрешимо в целых числах. Найдем частное решение (x_0, y_0) с помощью алгоритма Евклида: $;\frac{5}{3} \Rightarrow 5 = 3 \cdot 1 + 2; 3 = 2 \cdot 1 + 1.$; Найдем линейное представление НОДа:

$$1 = 3 - 2 \cdot 1 = 3 - (5 - 3 \cdot 1) = 3 \cdot 2 - 5 \cdot 1.$$
$$5 \cdot (-1) - 3 \cdot (-2) = 1;$$
$$5 \cdot 1 - 3 \cdot 2 = 1;$$
$$x_0 = 1, y_0 = 2; \Rightarrow \begin{cases} x = 1 + 3t, \\ y = 2 - 5t, \end{cases} \quad t \in Z.$$

Ответ: $(1 + 3t, 2 - 5t), k \in Z$.

Пример 4. *Решите уравнение* $17x + 11y = 6$;

Решение.
$(17, 11, 6) = 1$. Следовательно, имеем диофантово уравнение.
НОД$(17, 11) = 1$, следовательно, данное уравнение разрешимо в целых числах. Найдем частное решение (x_0, y_0) с помощью алгоритма Евклида:

$$\frac{17}{11} \Rightarrow 17 = 11 \cdot 1 + 6; 11 = 6 \cdot 1 + 5; 6 = 5 \cdot 1 + 1; 5 = 1 \cdot 5 + 0.$$

Найдем линейное представление НОДа:

$$1 = 6 - 5 \cdot 1 = 6 - (11 - 6 \cdot 1) \cdot 1 = 6 \cdot 2 - 11 = (17 - 11 \cdot 1) \cdot 2 - 11 =$$
$$= 17 \cdot 2 - 11 \cdot 2 - 11 = 17 \cdot 2 + 11 \cdot (-2 - 1) = 17 \cdot 2 - 11 \cdot 3.$$
$$17 \cdot 2 - 11 \cdot 3 = 1;$$
$$17 \cdot 12 + 3 \cdot (-18) = 6;$$
$$x_0 = 12, y_0 = -18; \Rightarrow \begin{cases} x = 12 - 11t, \\ y = -18 + 17t, \end{cases} \quad t \in Z.$$

Ответ: $(12 - 11t, -18 + 17t), k \in Z$.

Пример 5. *Решите уравнение* $130x + 160y = 3000$.

Решение.
$13x + 16y = 300$. $(13, 16, 300) = 1$. Следовательно, это диофантово уравнение, НОД$(13, 16) = 1$, следовательно, данное уравнение разрешимо в целых числах. Найдем частное решение (x_0, y_0) с помощью алгоритма Евклида:

$$\frac{16}{13} \Rightarrow 16 = 13 \cdot 1 + 3; 13 = 3 \cdot 4 + 1.$$

Найдем линейное представление НОДа:

$$1 = 13 - 3 \cdot 4 = 13 - (16 - 13 \cdot 1) \cdot 4 = 13 \cdot 5 + 16 \cdot (-4).$$

$$13 \cdot 5 + 16 \cdot (-4) = 1;$$

$$13 \cdot 1500 + 16 \cdot (-1200) = 300;$$

$$x_0 = 1500, y_0 = 1200; \Rightarrow \begin{cases} x = 1500 - 16t, \\ y = -1200 + 13t, \end{cases} \quad t \in Z.$$

Ответ: $(1500 - 16t, -1200 + 13t), k \in Z.$

Пример 6. *Хозяйка купила глубокие и мелкие тарелки. Глубокая тарелка стоит 80 рублей, мелкая — 60 рублей. За всю покупку хозяйка уплатила 700 рублей. Сколько мелких тарелок купила хозяйка?*

Решение.

Пусть x — число глубоких тарелок, а y — число мелких тарелок.

$$80x + 60y = 700;$$

$$4x + 3y = 35;$$

$(4, 3, 35) = 1$, следовательно, это диофантово уравнение. Так как НОД$(4, 3) = 1$, то данное уравнение разрешимо в целых числах. Найдем частное решение с помощью алгоритма Евклида:

$$\frac{4}{3} \Rightarrow 1 = 4 \cdot 1 - 3 \cdot 1;$$

$$4 \cdot 1 + 3 \cdot (-1) = 1;$$

$$4 \cdot 35 + 3 \cdot (-35) = 35;$$

$$x_0 = 35, y_0 = -35; \Rightarrow \begin{cases} x = 35 + 3t, \\ y = -35 - 4t, \end{cases} \quad t \in Z$$

Ответ: $(35+3t, -35-4t), t \in Z$.

Пример 7. *Стоимость товара 23 рубля, покупатель имеет только двухрублевые, а кассир пятирублевые монеты. Можно ли осуществить покупку без предварительного размена денег?*

Решение.

Пусть x — количество двухрублевых монет, y — количество пятирублевых монет. $2x-5y=23; (2,5,23)=1$. Следовательно, это диофантово уравнение. Так как НОД$(2,5)=1$, то данное уравнение разрешимо в целых числах. Найдем частное решение (x_0, y_0) с помощью алгоритма Евклида:

$$\frac{5}{2} \Rightarrow 1 = 5\cdot 1 - 2\cdot 2;$$
$$2\cdot(-2)+5\cdot 1 = 1;$$
$$2\cdot(-2)-5\cdot(-1) = 1;$$
$$2\cdot(-46)-5\cdot(-23) = 23;$$
$$x_0=-46, y_0=23; \Rightarrow \left\{\begin{array}{lcl} x & = & -46-5t, \\ y & = & -23-2t, \end{array}\right. t\in Z$$

Ответ: $(-46-5t, -23-2t), t\in Z$

Пример 8. *Решить диофантово уравнение $8x+3y=2$.*

Решение.

$(8,3,2)=1$, следовательно это диофантово уравнение. Так как $(8,3)=1$, то данное уравнение разрешимо в целых числах.

$$\frac{8}{3} \Rightarrow 8 = 3 \cdot 2 + 2, 3 = 2 \cdot 1 + 1. \Rightarrow$$

$$1 = 3 - 2 \cdot 1 = 3 - (8 + 3 \cdot 2) = 3 \cdot 3 - 8 \cdot 1.$$

$$8 \cdot (-1) + 3 \cdot 3 = 1;$$

$$8 \cdot (-2) + 3 \cdot 6 = 2. \Rightarrow$$

$$x_0 = -2, y_0 = 6; \Rightarrow \left\{ \begin{array}{lcl} x & = & -2 + 3t, \\ y & = & 6 - 8t, \end{array} \right. \quad t \in Z$$

Ответ: $(-2 + 3t, 6 - 8t), t \in Z$.

Пример 9. *Решить диофантово уравнение* $8x + 5y = 49$.

Решение.

$(8, 5, 49) = 1$, следовательно, это диофантово уравнение. Так как $(8, 5) = 1$, то данное уравнение разрешимо в целых числах.

$$\frac{8}{5} \Rightarrow 8 = 5 \cdot 1 + 3, 5 = 3 \cdot 1 + 2, 3 = 2 \cdot 1 + 1 \Rightarrow$$

$$1 = 3 - 2 \cdot 1 = 3 - (5 - 3 \cdot 1) = 3 - 5 \cdot 1 + 3 \cdot 1 =$$

$$= 3 \cdot (1 + 1) - 5 \cdot 1 = 3 \cdot 2 - 5 \cdot 1 =$$

$$= (8 - 5 \cdot 1) \cdot 2 - 5 \cdot 1 = 8 \cdot 2 - 5 \cdot 2 - 5 \cdot 1 =$$

$$= 8 \cdot 2 - 5 \cdot (2 + 1) = 8 \cdot 2 - 5 \cdot 3.$$

$$8 \cdot 2 + 5 \cdot (-3) = 1;$$

$$8 \cdot 98 + 5 \cdot (-144) = 49; \Rightarrow$$

$$x_0 = 98, y_0 = -141; \Rightarrow \left\{ \begin{array}{lcl} x & = & 98 + 5t, \\ y & = & -141 - 8t, \end{array} \right. \quad t \in Z$$

Ответ: $(98 + 5t, -141 - 8t), t \in Z$.

Пример 10. *Решить диофантово уравнение* $3x - 2y + 11 = 0$.

Решение.

$3x - 2y = -11$;

$(3, -2, -11) = 1 \Rightarrow$ это диофантово уравнени. Так как $(3, -2) = 1$, то данное уравнение разрешимо в целых числах.

$$\frac{3}{2} \Rightarrow 3 = 2 \cdot 1 + 1.1 = 3 - 2 \cdot 1.$$

$$3 \cdot 1 - 2 \cdot 1 = 1;$$

$$3 \cdot (-11) - 2 \cdot (-11) = -11; \Rightarrow$$

$$x_0 = -11, y_0 = -11; \Rightarrow \begin{cases} x = -11 - 2t, \\ y = -11 - 3t, \end{cases} t \in Z$$

Ответ: $(-11 - 2t, -11 - 3t), t \in Z$.

Пример 11. *Решить уравнение* $75x - 39y = 1$.

Решение.

$(75, 39, 1) = 1 \Rightarrow$ это диофантово уравнение, $(75, 39) \neq 1 \Rightarrow$ неразрешимо в целых числах.

Ответ: неразрешимо в целых числах.

Решение диофантовых уравнений с помощью цепных дробей

Определение 1. *Конечной цепной дробью называется выражение вида:*

$$a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \ldots + \cfrac{1}{a_n}}},$$

где все $a_i \in N, i = \overline{1, n}, a_0 \in Z, a_n \neq 1.$

Обозначается

$$\frac{a}{b} = [a_0; a_1, a_2, \ldots, a_n].$$

Определение 2. *Элемент* a_i *называется элементом цепной дроби.*

Определение 3. *Отрезок цепной дроби от* a_0 *до* a_n *называется подходящей дробью* k*–го порядка для данной цепной дроби и обозначается*

$$A_k = [a_0; a_1, a_2, \ldots, a_k], \ k \leqslant n.$$

Замечание. *Последняя подходящая дробь совпадает со всей дробью. Таким образом,*

$$A_1 = a_0 + \frac{1}{a_1},$$

$$A_2 = a_1 + \frac{1}{a_2},$$

$$\ldots$$

$$A_n = \frac{a}{b},$$

Определение 4. *Число* a_0 *называется нулевой подходящей дробью (подходящей дробью нулевого порядка)*

$$a_0 = \frac{b_0}{q_0}.$$

Теорема 1. *Всякое рациональное число* $\frac{a}{b}$ *можно однозначно представить в виде конечной цепной дроби, причем элементы цепной дроби* $[a_i]$ *будут являться неполными частными из алгоритма Евклида для чисел* a *и* b*.*

Доказательство.

$$\frac{a}{b} \in Q \Rightarrow a \in Z, b \in N,$$

применим к a и b алгоритм Евклида:

$$a = ba_0 + r_1, 0 \leqslant r_1 < b,$$

$$b = r_1 a_1 + r_2, 0 \leqslant r_2 < r_1,$$

$$r_1 = r_2 a_2 + r_3, 0 \leqslant r_3 < r_2,$$

$$\ldots$$

$$r_{n-2} = r_{n-1} a_{n-1} + r_n, 0 \leqslant r_n < r_{n-1},$$

$$r_{n-1} = r_n a_n + 0.$$

Заметим, что $a_0 \in Z, a_i \in N, i = \overline{1, n}$. Разделим первое равенство на b, второе на r_1 и так далее:

$$\frac{a}{b} = a_0 + \frac{r_1}{b} = a_0 + \frac{1}{\frac{b}{r_1}},$$

$$\frac{b}{r_1} = a_1 + \frac{r_2}{r_1} = a_1 + \frac{1}{\frac{r_1}{r_2}},$$

$$\ldots$$

$$\frac{r_{n-2}}{r_{n-1}} = a_{n-1} + \frac{1}{\frac{r_{n-1}}{r_n}},$$

$$\frac{r_{n-1}}{r_n} = a_n.$$

Подставим в первое равенство все остальные, получим:

$$\frac{a}{b} = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \ldots + \cfrac{1}{a_n}}}, /, a_i \in N,\ i = \overline{1,n},\ a_0 \in Z,\ a_n \neq 1.$$

Единственность такого представления вытекает в силу однозначности деления с остатком. ■

Замечание. *Если в определении (1) допустить, что* $a_n = 1$*, то тогда представление рационального числа* $\frac{a}{b}$ *в виде конечной цепной дроби не единственно.*

Метод построения подходящих дробей к данной цепной дроби. Пусть дана дробь

$$\frac{a}{b} = [a_0; a_1, \ldots, a_n], A_k = [a_0; a_1, a_2, \ldots, a_k], k \leqslant n.$$

1) $A_0 = a_0 = \frac{p_0}{q_0}$ — подходящая дробь нулевого порядка, следовательно, $p_0 = a_0$, $q_0 = 1$

2) $A_1 = a_0 + \frac{1}{a_1} = \frac{p_1}{q_1} \Rightarrow p_1 = a_0 a_1 + 1, q_1 = a_1 \ \ldots$

3) $A_k = \frac{p_k}{q_k} = \frac{p_{k-1}a_k + p_{k-2}}{q_{k-1}a_k + q_{k-2}} \Rightarrow p_k = p_{k-1}a_k + p_{k-2}, q_k = q_{k-1}a_k + q_{k-2}.$

Таблица 2.25. Таблица расчетов подходящих дробей

	0	1	2	...	n
a_k	a_0	a_1	a_2		a_n
p_k	$p_0 = a_0$	$p_1 = a_0 a_1 + 1$	$p_1 a_2 + p_0$		$p_{n-1} a_n + p_{n-2}$
q_k	$q_0 = 1$	$q_1 = a_1$	$q_1 a_2 + q_0$		$q_{n-1} a_n + q_{n-2}$

Применение цепных дробей к решению диофантовых уравнений.

$$ax + by = c, \text{ где } (a, b, c) = 1 \text{ и } (a, b) = 1,$$

следовательно, $\exists x, y \in Z$ — решение данного диофантова уравнения, где

$$\frac{a}{b} = [a_0; a_1, \ldots, a_n],$$

$$\frac{a}{b} = \frac{p_n}{q_n},$$

тогда по свойству подходящих дробей справедливо:

$$\frac{p_n}{q_n} - \frac{p_{n-1}}{q_{n-1}} = \frac{(-1)^{n-1}}{q_n q_{n-1}} \Rightarrow \frac{a}{b} - \frac{p_{n-1}}{q_{n-1}} = \frac{(-1)^{n-1}}{b q_{n-1}},$$

тогда

$$a q_{n-1} - b p_{n-1} = (-1)^{n-1}.$$

Домножим обе части равенства на c или $(-c)$:

$$a(c q_{n-1}) - b(c p_{n-1}) = c(-1)^{n-1},$$

затем на $(-1)^{n-1}$, получим:

$$a((-1)^{n-1} c q_{n-1}) - b((-1)^{n-1} c p_{n-1}) = c.$$

Пример 1. *Решите уравнение* $45x - 13y = 2$.

Решение.

$(45; -13; 2) = 1$ и $(45; -13) = 1 \Rightarrow$ имеем диофантово уравнение и оно разрешимо в целых числах.

$$\frac{a}{b} = \frac{45}{13}; \Rightarrow \frac{45}{13} = [3; 2, 6].$$

Таблица 2.26. Таблица расчета подходящих дробей для примера 1

k	0	1	2
a_k	3	2	6
p_k	3	7	45
q_k	1	2	13

$$\frac{45}{13} - \frac{7}{2} = \frac{(-1)^1}{13 \cdot 2};$$

$$45 \cdot 2 - 13 \cdot 7 = -1,$$

$$45 \cdot (-4) - 13 \cdot (-14) = 2 \Rightarrow x_0 = -4, y_0 = -14,$$

поэтому

$$\begin{cases} x = -4 - 13t, \\ y = -14 - 45t, \end{cases} \quad t \in Z.$$

Ответ: $(-4 - 13t, -14 - 45t), t \in Z$.

Пример 2. *Решите уравнение* $64x - 25y = 3$.

Решение.

$(64, 25, 3) = 1$ и $(64, 25) = 1 \Rightarrow$ имеем диофантово уравнение и оно разрешимо в целых числах.

$$\frac{a}{b} = \frac{64}{25}; \Rightarrow \frac{64}{25} = [2; 1, 1, 3, 1, 2].$$

Таблица 2.27. Таблица расчета подходящих дробей для примера 2

k	0	1	2	3	4	5
a_k	2	1	1	3	1	2
p_k	2	3	5	18	23	64
q_k	1	1	2	7	9	25

$$\frac{64}{25} - \frac{3}{9} = \frac{(-1)^4}{25 \cdot 9};$$
$$64 \cdot 9 - 25 \cdot 23 = 1,$$

$$64 \cdot 27 - 25 \cdot 23 = 3 \Rightarrow x_0 = 27, y_0 = 69,$$

поэтому

$$\begin{cases} x = 27 - 25t, \\ y = 69 - 64t, \end{cases} \quad t \in Z$$

Ответ: $(27 - 25t, 69 - 64t), t \in Z$.

Пример 3. *Решите уравнение* $571x + 359y = 7$.

Решение.

$(571, 359, 7) = 1$ и $(571, 359) = 1 \Rightarrow$ имеем диофантово уравнение и оно разрешимо в целых числах.

$$\frac{a}{b} = \frac{571}{359}; \Rightarrow \frac{571}{359} = [1; 1, 1, 2, 3, 1, 4, 1, 2].$$

Таблица 2.28. Таблица расчета подходящих дробей для примера 3

k	0	1	2	3	4	5	6	7	8
a_k	1	1	1	2	3	1	4	1	2
p_k	1	2	3	8	27	35	167	202	571
q_k	1	1	2	5	17	22	105	127	359

$$\frac{571}{359} - \frac{202}{127} = \frac{(-1)^7}{359 \cdot 127};$$
$$571 \cdot 127 - 359 \cdot 202 = -1,$$
$$571 \cdot (-127) + 359 \cdot 202 = 1,$$
$$571 \cdot (-127) + 359 \cdot 202 = 1 \Rightarrow x_0 = -889, y_0 = 1414,$$

поэтому

$$\begin{cases} x = -889 + 359t, \\ y = 1414 - 571t, \end{cases} \quad t \in Z.$$

Ответ: $(-889 + 359t, 1414 - 571t), t \in Z$.

Пример 4. *Решите уравнение* $29x + 37y = 2$.

Решение.

$(29, 37, 2) = 1$ и $(29, 37) = 1 \Rightarrow$ имеем диофантово уравнение и оно разрешимо в целых числах.

$$\frac{a}{b} = \frac{27}{39}; \Rightarrow \frac{27}{39} = [1; 3, 1, 1, 1, 2].$$

Таблица 2.29. Таблица расчета подходящих дробей для примера 4

k	0	1	2	3	4	5
a_k	1	3	1	1	1	2
p_k	1	4	5	9	14	37
q_k	1	3	4	7	11	29

$$\frac{27}{29} - \frac{14}{11} = \frac{(-1)^4}{29 \cdot 11};$$

$$37 \cdot 11 - 29 \cdot 14 = 1,$$

$$29 \cdot (-14) - 37 \cdot 11 = 1,$$

$$29 \cdot (-28) + 37 \cdot 22 = 2 \Rightarrow x_0 = -28, y_0 = 22,$$

поэтому

$$\begin{cases} x = -28 + 37t, \\ y = 22 - 29t, \end{cases} \quad t \in Z.$$

Ответ: $(-28 + 37t, 22 - 29t), t \in Z.$

Пример 5. *Решите уравнение* $2121x - 1500y = 21.$

Решение.

$(2121, 1500, 21) = 3, 707x - 500y = 7;$

$(707, 500, 21) = 1$ и $(707, 500) = 1 \Rightarrow$ имеем диофантово уравнение и оно разрешимо в целых числах.

$$\frac{a}{b} = \frac{707}{500}; \Rightarrow \frac{707}{500} = [1; 2, 2, 2, 2, 5, 3].$$

Таблица 2.30. Таблица расчета подходящих дробей для примера 5

k	0	1	2	3	4	5	6
a_k	1	2	2	2	2	5	3
p_k	1	3	7	17	41	222	485
q_k	1	2	5	12	29	157	500

$$\frac{707}{500} - \frac{222}{157} = \frac{(-1)^5}{500 \cdot 157};$$

$$700 \cdot 157 - 500 \cdot 222 = -1,$$

$$700 \cdot (-157) - 500 \cdot (-222) = 1,$$

$$707 \cdot (-1099) - 500 \cdot (-1554) = 7 \Rightarrow x_0 = -1099, y_0 = -1554,$$

поэтому

$$\begin{cases} x = -1099 - 500t, \\ y = -1554 - 707t, \end{cases} \quad t \in Z.$$

Ответ: $(-1099 - 500t, -1554 - 707t), t \in Z$.

Пример 6. *Решите уравнение* $3587x - 2743y = 1$.

Решение.
$(3587, 2743, 1) = 1$ и $(3587, 2743) = 2111 \Rightarrow$ диофантово уравнение, но оно не разрешимо в целых числах.
Ответ: неразрешимо в целых числах.

Пример 7. *Решите уравнение* $38x + 117y = 209$.

Решение.

$(38, 117, 209) = 1$ и $(38, 117) = 1 \Rightarrow$ имеем диофантово уравнение и оно разрешимо в целых числах.

$$\frac{a}{b} = \frac{117}{38}; \Rightarrow \frac{117}{38} = [3; 12, 1, 2].$$

Таблица 2.31. Таблица расчета подходящих дробей для примера 7

k	0	1	2	3
a_k	3	12	1	2
p_k	3	37	40	117
q_k	1	12	13	38

$$\frac{117}{38} - \frac{40}{13} = \frac{(-1)^2}{38 \cdot 13};$$

$$117 \cdot 13 - 38 \cdot 40 = 1,$$

$$38 \cdot (-40) + 117 \cdot 13 = 1,$$

$$38 \cdot (-8360) + 117 \cdot 520 = 209 \Rightarrow x_0 = -8360, y_0 = 520,$$

поэтому

$$\begin{cases} x = -8360 + 117t, \\ y = 520 - 38t, \end{cases} \quad t \in Z.$$

Ответ: $(-8360 + 117t, 520 - 38t), t \in Z$.

Пример 8. *Решите уравнение* $119x - 68y = 34$.

Решение.

Кафедра алгебры и геометрии

Начало

Содержание

Литература

◄ ►

◄◄ ►►

Назад

На весь экран

Закрыть

$7x - 4y = 2, (7, -4, 2) = 1$ и $(7, -4) = 1 \Rightarrow$ имеем диофантово уравнение и оно разрешимо в целых числах.

$$\frac{a}{b} = \frac{7}{4}; \Rightarrow \frac{7}{4} = [1; 1, 3].$$

Таблица 2.32. Таблица расчета подходящих дробей для примера 8

k	0	1	2
a_k	1	1	3
p_k	1	2	7
q_k	1	1	4

$$\frac{7}{4} - \frac{2}{1} = \frac{(-1)^1}{4 \cdot 1};$$

$$7 \cdot 1 - 4 \cdot 2 = -1,$$

$$7 \cdot (-1) - 4 \cdot (-2) = 1,$$

$$7 \cdot (-2) - 4 \cdot (-4) = 2 \Rightarrow x_0 = -2, y_0 = -4,$$

поэтому

$$\begin{cases} x = x = -2 - 4t, \\ y = -4 - 7t, \end{cases} \quad t \in Z.$$

Ответ: $(x = -2 - 4t, y = -4 - 7t), t \in Z.$

Пример 9. *Решите уравнение* $258x - 175y = 113$.

Решение.

$(258, 175, 113) = 1$ и $(258, 175) = 1 \Rightarrow$ имеем диофантово уравнение и оно разрешимо в целых числах.

$$\frac{a}{b} = \frac{258}{175}; \Rightarrow \frac{258}{175} = [1; 2, 9, 4, 2].$$

Таблица 2.33. Таблица расчета подходящих дробей для примера 9

k	0	1	2	3	4
a_k	1	2	9	4	2
p_k	1	3	28	115	258
q_k	1	2	19	78	175

$$\frac{258}{175} - \frac{115}{78} = \frac{(-1)^3}{175 \cdot 78};$$

$$258 \cdot 78 - 175 \cdot 115 = -1,$$

$$258 \cdot (-78) - 175 \cdot (-115) = 1,$$

$$4258 \cdot (-8814) - 175 \cdot (-12995) = 113 \Rightarrow x_0 = -8814, y_0 = -12995,$$

поэтому

$$\begin{cases} x = -8814 - 175t, \\ y = -12995 - 258t, \end{cases} \quad t \in Z.$$

Ответ: $(-8814 - 175t, -12995 - 258t), t \in Z.$

Пример 10. *Решите уравнение* $587x + 113y = 1.$

Решение.

$(587, 113, 1) = 1$ и $(587, 113) = 1 \Rightarrow$ имеем диофантово уравнение и оно разрешимо в целых числах.

$$\frac{a}{b} = \frac{587}{113}; \Rightarrow \frac{587}{113} = [5; 5, 7, 3].$$

Таблица 2.34. Таблица расчета подходящих дробей для примера 10

k	0	1	2	3
a_k	5	5	7	3
p_k	5	26	187	587
q_k	1	5	36	113

$$\frac{587}{113} - \frac{187}{36} = \frac{(-1)^2}{113 \cdot 36};$$

$$587 \cdot 36 - 113 \cdot 187 = 1,$$

$$587 \cdot 36 + 113 \cdot (-187) = 1 \Rightarrow x_0 = 36, y_0 = -187,$$

поэтому

$$\begin{cases} x = 36 + 113t, \\ y = -187 - 587t, \end{cases} \quad t \in Z.$$

Ответ: $(36 + 113t, -187 - 587t), t \in Z$. [3, 8, 10, 11]

Решение диофантовых уравнений с помощью сравнений

Определение 1. *Если два числа a и b имеют одинаковые остатки при делении на m, то говорят, что a и b сравнимы по модулю m, и пишут $a \equiv b(mod\ m)$ (читают: a сравнимо с b по модулю m).*

Теорема 1. *Сравнение $a \equiv b \pmod{m}$ имеет место в том и только в том случае, если разность $a - b$ делится на m.*

Доказательство. Предположим, что $a \equiv b \pmod{m}$, то есть числа a и b дают при делении на m один и тот же остаток r. Тогда

$$a = mq_1 + r, b = mq_2 + r,$$

где q_1, q_2 — некоторые целые числа. Вычитая одно равенство из другого, получаем:

$$a - b = mq_1 - mq_2 = m(q_1 - q_2).$$

Отсюда следует, что разность $a - b$ делится на m.

Обратно, пусть $a - b$ делится на m, то есть $a - b = km$ $(*)$. Разделим с остатком b на m: $b = qm + r$ $(**)$, где $0 \leqslant r \leqslant m$. Сложив равенства $(*)$ и $(**)$, получим:

$$a = km + qm + r = m(k + q) + r,$$

а это означает, что число a имеет тот же остаток при делении на m, что и число b. Значит, $a \equiv b \pmod{m}$. ∎

Теорема 2. *Сравнения с общим модулем можно почленно складывать и вычитать, то есть если $a \equiv b \pmod{m}$ и $c \equiv d \pmod{m}$, то $a + c \equiv b + d \pmod{m}$ и $a - c \equiv b - d \pmod{m}$.*

Доказательство. Так как $a \equiv b \pmod{m}$ и $c \equiv d \pmod{m}$, то по теореме 1: $a - c$ и $b - d$ делятся на m, то есть $a - b = km$, $c - d = hm$. Складывая эти два равенства, получаем

$$a - b + c - d = km + hm;$$
$$(a + c) - (b + d) = (k + h)m.$$

Следовательно, разность $(a+c)-(b+d)$ делится на m, а это значит, что $a+c \equiv b+d \pmod{m}$.

Сравнение $a-c \equiv b-d \pmod{m}$ доказывается аналогично. ∎

Теорема 3. *Сравнения с общим модулем можно почленно умножать, то есть если $a \equiv b \pmod{m}$ и $c \equiv d \pmod{m}$, то $ac \equiv bd \pmod{m}$.*

Доказательство. Так как $a \equiv b \pmod{m}$ и $c \equiv d \pmod{m}$, то по теореме 1: $a-c$ и $b-d$ делятся на m, то есть $a-b=km$, $c-d=hm$. Поэтому

$$ac-bd=(ac-ad)+(ad-bd)=a(c-d)+d(a-b)=ahm-dkm=m(ah-kd),$$

то есть разность $ac-bd$ делится на m. Значит, $ac \equiv bd \pmod{m}$. ∎

Замечание. *Теоремы 2 и 3 верны для любого числа слагаемых или множителей.*

Рассмотрим диофантово уравнение 2.25, $(a,b,c)=1$, $(a,b)=1$, следовательно, $\exists x, y \epsilon\ Z$ —решение (2.25).

$y=\frac{c-ax}{b}$ при целом x нужно, чтобы $y \epsilon Z$, а это будет тогда и только тогда, когда

$$\frac{c-ax}{b} \Leftrightarrow ax \equiv c(mod\ b),$$

тогда $\left(x_0+bt, \dfrac{c-ax_0}{b}-at\right)$ — решение (2.25), где $\dfrac{c-ax_0}{b}=y_0$.

Пример 1. $14x-10y=6$;

Решение.

Разделим коэффициенты уравнения на 2: $7x-5y=3$ – диофантово уравнение, так как $(7,5,3)=1$, а поскольку $(7,5)=1$, то $\exists x, y \in Z$ – решение данного диофантова уравнения.

$$y = \frac{7x-3}{5} \in Z \Leftrightarrow \frac{7x-3}{5} \Leftrightarrow 7x \equiv 3 \pmod 5,$$

так как $(7,5) = 1$, то сравнение имеет единственное решение.

$$2x \equiv 8 \pmod 5,$$
$$x \equiv 4 \pmod 5,$$
$$x = 4 + 5t, t \in Z.$$

$$x_0 = 4 \Rightarrow y_0 = 5 \Rightarrow \begin{cases} x = 4 - 5t, \\ y = 5 - 7t, \end{cases} t \in Z.$$

Ответ: $(4-5t, 5-7t)$, $k \in Z$.

Пример 2. *Решить уравнение* $5x - 7y = 6$.

Решение.

Так как $(5,7,6) = 1$, то исходное уравнение диофантово, а поскольку $(5,7) = 1$, то $\exists\ x, y \in Z$ – решение данного диофантова уравнения.

$$y = \frac{5x-7}{6} \in Z \Leftrightarrow \frac{5x-6}{7} \Leftrightarrow 5x \equiv 6 \pmod 7,$$

так как $(5,6) = 1$, то сравнение имеет единственное решение.

$$5x \equiv 20 \pmod 7,$$
$$x \equiv 4 \pmod 7,$$
$$x = 4 + 7t, t \in Z.$$
$$y = \frac{5 \cdot (4+7t) - 6}{7} = 2 + 5t, t \in Z.$$

Следовательно,

$$\begin{cases} x = 4 + 7t, \\ y = 2 + 5t, \end{cases} t \in Z.$$

Ответ: $(4 + 7t, 2 + 5t), k \in Z.$

Пример 3. *Иванушка бьется со Змеем Горынычем, у которого* 2001 *голова. Махнув мечем налево, Иван срубает* 10 *голов, а взамен вырастают* 16*. Махнув, мечем направо – срубает* 15*, вырастают —* 6*. Если все головы срублены — новых не вырастает. Махать можно в произвольном порядке, но если голов меньше* 15*, то только налево, а если меньше* 10*, то вообще нельзя. Может ли Иванушка победить Змея Горыныча?*

Решение.

Пусть x — число ударов направо, а y — число ударов налево, тогда

$$1986 - 9x + 6y = 0.$$

Поделим все уравнение на 6, получим $3x - 2y = 662$.

$(3, 2, 662) = 1$ — диофантово уравнение, $(3, 2) = 1$, значит, $\exists\ x, y \in Z$ — решение данного диофантова уравнения.

$$y = \frac{3x - 662}{2} \in Z \Leftrightarrow \frac{3x - 662}{2} \Leftrightarrow 3x \equiv 662 \pmod 2,$$

так как $(5, 662) = 1$, то сравнение имеет единственное решение.

$$3x \equiv 660 \pmod 2,$$
$$x \equiv 220 \pmod 2,$$
$$x = 220 + 2t, t \in Z.$$
$$y = \frac{3 \cdot (220 + 2t) - 662}{2} = -1 + 3t, t \in Z.$$

Следовательно,

$$\begin{cases} x = 220 + 2t, \\ y = -1 + 3t, \end{cases} t \in Z.$$

Ответ: $(220 + 2t, -1 + 3t), k \in Z$.

Пример 4. *Решить уравнение* $13x + 29y = 19$.

Решение.

$(13, 29, 19) = 1$ — диофантово уравнение, а поскольку $(13, 29) = 1$, то $\exists x, y \in Z$ — решение данного диофантова уравнения.

$$y = \frac{-13x + 19}{29} \in Z \Leftrightarrow \frac{-13x + 19}{29} \Leftrightarrow -13x \equiv 19 \pmod{29},$$

так так $(-13, 19)$, то сравнение имеет единственное решение.

$$8x \equiv -24 \pmod{29},$$
$$x \equiv -3 \pmod{29},$$
$$x = -3 + 29t, t \in Z.$$
$$y = \frac{-13 \cdot (-3 + 29t) + 19}{29} = 2 - t, t \in Z.$$

Следовательно,

$$\begin{cases} x = -3 + 29t, \\ y = 2 - t, \end{cases} t \in Z.$$

Ответ: $(-3 + 29t, 2 - t), k \in Z$.

Пример 5. *Решить уравнение* $14x - 10y = 6$.

Решение.

$7x - 5y = 3$, $(7, 5, 3) = 1$ —диофантово уравнение, а поскольку $(7, 5) = 1$, то $\exists x, y \in Z$ —решение данного диофантова уравнения.

$$y = \frac{7x - 3}{5} \in Z \Leftrightarrow \frac{7x - 3}{5} \Leftrightarrow 7x \equiv 3 \pmod 5,$$

так как $(7, 3) = 1$, то сравнение имеет единственное решение.

$$7x \equiv 28 \pmod 5,$$
$$x \equiv 3 \pmod 5,$$
$$x = 3 + 5t, t \in Z.$$
$$y = \frac{7 \cdot (4 + 5t) - 3}{5} = 5 + 7t, t \in Z.$$

Следовательно,

$$\begin{cases} x = 4 + 5t, \\ y = 5 + 7t, \end{cases} t \in Z.$$

Ответ: $(4 + 5t, 5 + 7t), k \in Z$.

Пример 6. *Решить уравнение* $7x - 3y = 2$.

Решение.

$(7, 3, 2) = 1$ —диофантово уравнение, а поскольку $(7, 3) = 1$, то $\exists\ x, y \in Z$ — решение данного диофантова уравнения.

$$y = \frac{7x - 2}{3} \in Z \Leftrightarrow \frac{7x - 2}{3} \Leftrightarrow 7x \equiv 2 \pmod 3,$$

так как $(7,2)=1$, то сравнение имеет единственное решение.

$$7x \equiv 14 \pmod 3,$$
$$x \equiv 2 \pmod 3,$$
$$x = 2+3t, t \in Z.$$
$$y = \frac{7\cdot(2+3t)^2}{3} = 4+t, t \in Z.$$

Следовательно,

$$\begin{cases} x = 2+3t, \\ y = 4+t, \end{cases} t \in Z.$$

Ответ: $(2+3t, 4+t), k \in Z$. [1, 8, 11]

Решение диофантовых уравнений с помощью метода бесконечного спуска

Методом бесконечного спуска называют рассуждения, проходящие по следующей схеме: предположим, что у задачи есть решения, строим некоторый бесконечный процесс, в то время как по самому смыслу задачи этот должен на чем-то заканчиваться.

Докажем, к примеру, неразрешимость в натуральных числах уравнения

$$8x^4 + 4y^4 + 2z^4 = t^4.$$

Доказательство. Допустим, что решения есть, и $x=m$, $y=n$, $z=p$, $t=q$ — решение с наименьшим возможным x. Из вида уравнения следует, что $q = 2q_1$. Подставим решение в уравнение и разделим на 2:

$$4m^4 + 2n^4 + p^4 = q_1^4.$$

Получаем, что $p = 2p_1$, следовательно, $2m^4 + n^4 + 8p_1^4 = 4q_1^4$.

Аналогично,

$$n = 2n_1, m^4 + 8n_1^4 + 4p_1^4 = 2q_1^4$$

$$m = 2m_1, 8m_1^4 + 4n_1^4 + 2p_1^4 = q_1^4.$$

Значит, $x = m_1, y = n_1$, $z = p_1, t = q_1$ также решение нашего уравнения. Но $m_1 < m$, что противоречит выбору исходного решения. Значит, решения нет. ■

Из доказательства видно, что применение метода спуска в этой задаче основывается на том факте, что любое непустое множество натуральных чисел имеет минимальный элемент.

Задача 1. *Решить уравнение в целых числах* $5x + 8y = 39$.

Решение.

1. Выберем неизвестное, имеющее наименьший коэффициент (в нашем случае это x), и выразим его через другое неизвестное: $x = \dfrac{39 - 8y}{5}$.

2. Выделим целую часть: $x = (7 - y) + \dfrac{(4 - 3y)}{5}$. Очевидно, что x будет целым, если выражение $\dfrac{4 - 3y}{5}$ окажется целым, что, в свою очередь, будет иметь место тогда, когда число $4 - 3y$ без остатка делится на 5.

3. Введем дополнительную целочисленную переменную z следующим образом: $4 - 3y = 5z$. В результате получим уравнение такого же типа, как и первоначальное, но уже с меньшими коэффициентами.

4. Решаем его уже относительно переменной y, $y = \dfrac{4 - 5z}{3}$. Выделяя целую часть, получим: $y = 1 - z + \dfrac{1 - 2z}{3}$.

5. Рассуждая аналогично предыдущему, вводим новую переменную u:

$$3u = 1 - 2z.$$

6. Выразим неизвестную с наименьшим коэффициентом, в этом случае переменную z : $z = \dfrac{1-3u}{2} = \dfrac{1-u}{2-u}$. Требуя, чтобы $\dfrac{1-u}{2}$ было целым, получим: $1 - u = 2v$, откуда $u = 1 - 2v$. Дробей больше нет, спуск закончен (процесс продолжаем до тез пор, пока в выражении для очередной переменной не останется дробей).

7. Теперь необходимо «подняться вверх». Выразим через переменную v сначала z, потом y и затем x:

$$z = \frac{1-u}{2} - u = \frac{1-1+2v}{2} - 1 + 2v = 3v - 1;$$

$$y = \frac{4-5z}{3} = \frac{4-5(3v-1)}{3} = 3 - 5v.$$

$$x = \frac{39-8y}{5} = \frac{39-8(3-5v)}{5} = 3 + 8v.$$

8. Формулы $x = 3 + 8v$ и $y = 3 - 5v$, где v — произвольное целое число, представляют общее решение исходного уравнения в целых числах.

Замечание. *Таким образом, метод спуска предполагает сначала последовательное выражение одной переменой через другую, пока в представлении переменной не останется дробей, а затем, последовательное «восхождение» по цепочке равенств, для получения общего решения уравнения.*

Это уравнение и любое другое линейное уравнение с двумя неизвестными может быть решено и другим методом, с использованием алгоритма Евклида, более того можно доказать, что уравнение, рассмотренное выше всегда имеет единственное решение. Приведем здесь формулировки теорем, на основании которых может быть составлен алгоритм решения неопределенных уравнений первой степени от двух переменных в целых числах.

Теорема 1. *Если в уравнении* $ax + by = 1$, $(a, b) = 1$, *то уравнение имеет, по крайней мере, одно решение.*

Теорема 2. *Если в уравнении* $ax + by = 1$, $(a, b) = d > 1$ *и* c *не делится на* d, *то уравнение целых решений не имеет.*

Теорема 3. *Если в уравнении* $ax+by = 1$, $(a, b) = d > 1$ *и* $c\,\vdots\,d$, *то оно равносильно уравнению* $a_1x + b_1y = c_1$, *в котором* $(a_1, b_1) = 1$.

Теорема 4. *Если в уравнении* $ax + by = 1$, $(a, b) = 1$, *то все целые решения этого уравнения заключены в формулах:*

$$x = x_0c + bt,$$
$$y = y_0c - at,$$

где x_0, y_0 *— целое решение уравнения* $ax + by = 1$, t *— любое целое число.*

Как уже отмечалось выше, сформулированные теоремы позволяют составить следующий алгоритм решения в целых числах уравнения вида $ax + by = 1$:

1) Найти наибольший общий делитель чисел a и b,

   Если $(a, b) \equiv d > 1$ и c не делится на d, то уравнение целых решений не имеет;

   Если $(a, b) = d > 1$ и $c\,\vdots\,d$, то

2) Разделить почленно уравнение $ax + by = c$ на d, получив при этом уравнение $a_1x + b_1y = c_1$, в котором $(a_1, b_1) = 1$.

3) Найти целое решение (x_0, y_0) уравнения $a_1x + b_1y = 1$ путем представления 1 как линейной комбинации чисел a_1 и b_1;

4) Составить общую формулу целых решений данного уравнения

$$x = x_0c_1 + b_1t,$$
$$y = y_0c_1 - a_1t.$$

где x_0, y_0 — целое решение уравнения $a_1x + b_1y = 1$, t — любое целое число.

Пример 1. *Решить уравнение в целых числах* $407x - 2816y = 33$.

Решение.
Воспользуемся составленным алгоритмом.

1) Используя алгоритм Евклида, найдем наибольший общий делитель чисел 407 и 2816:

$$2816 = 407 \cdot 6 + 374;$$
$$407 = 374 \cdot 1 + 33;$$
$$374 = 33 \cdot 11 + 11;$$
$$33 = 11 \cdot 3.$$

Следовательно, $(407, 2816) = 11$, причем 33 делится на 11.

2) Разделим обе части первоначального уравнения на 11, получим уравнение $37x + 256y = 3$, причем $(37, 256) = 1$.

3) С помощью алгоритма Евклида найдем линейное представление числа 1 через числа 37 и 256.

$$256 = 37 \cdot 6 + 34;$$
$$37 = 34 \cdot 1 + 3;$$
$$34 = 3 \cdot 11 + 1.$$

Выразим 1 из последнего равенства, затем, последовательно поднимаясь по цепочке равенств, будем выражать 3; 34 и полученные выражения подставим в выражение для 1.

$$1 = 34 - 3 \cdot 11 = 34 - (37 - 34 \cdot 1) \cdot 11 = 34 \cdot 12 - 37 \cdot 11 =$$
$$= (256 - 37 \cdot 6) \cdot 12 - 37 \cdot 11 = -83 \cdot 37 - 256 \cdot (-12).$$

Таким образом, $37 \cdot (-83) - 256 \cdot (-12) = 1, \Rightarrow 256y = 3.$

4) Запишем общие формулы решений первоначального уравнения

$$x = -83c + bt = -83 \cdot 3 - 256t = -249 - 256t,$$
$$y = -12c - at = -12 \cdot 3 - 37t = -36 - 37t,$$

где t — любое целое число.

Ответ: $(-249 - 256t, -36 - 37t)$, $k \in Z$.

Замечание. *Можно доказать, что если пара* (x_1, y_1) *— целое решение уравнения* $ax + by = c$, *где* $(a, b) = 1$, *то все целые решения этого уравнения находятся по формулам:*

$$x = x_1 + bt,$$
$$y = y_1 - at[1, 10, 11].$$

Другие методы решения диофантовых уравнений

Метод разложения на множители. Первоначальное уравнение путем группировки слагаемых и вынесения общих множителей приводится к виду, когда в левой части уравнения стоит произведение сомножителей, содержащих неизвестные, а справа стоит некоторое число. Рассматриваются все делители числа, стоящего в правой части уравнения. Проводится исследование, в котором каждый сомножитель, стоящий в правой части уравнения приравнивается к соответствующему делителю числа, стоящего в правой части уравнения.

Пример 1. *Решить уравнение в целых числах* $y^3 - x^3 = 91$.

Решение.

1. Используя формулы сокращенного умножения разложим правую часть уравнения на множители:
$$(y-x)(y^2+xy+x^2) = 91 \tag{2.28}$$
2. Выпишем все делители числа 91: $\pm 1; \pm 7; \pm 13; \pm 91$
3. Проводим исследование. Заметим, что для любых целых x и y число
$$y^2+xy+x^2 \geqslant y^2 - 2|x||y| + x^2 = (|y|-|x|)^2 \geqslant 0,$$
следовательно, оба сомножителя в левой части уравнения должны быть положительными. Тогда уравнение 2.28 равносильно совокупности систем уравне-

ний:

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases} y - x = 1, \\ y^2 + xy + x^2 = 91; \end{cases} \\ \begin{cases} y - x = 91, \\ y^2 + xy + x^2 = 1; \end{cases} \\ \begin{cases} y - x = 7, \\ y^2 + xy + x^2 = 13; \end{cases} \\ \begin{cases} y - x = 13, \\ y^2 + xy + x^2 = 7; \end{cases}\end{array}\right.$$

4. Решив системы, получим:

   – первая система имеет решения $(5; 6)$, $(-6; -5)$;
   – третья — $(-3; 4), (-4; 3)$;
   – вторая и четвертая решений в целых числах не имеют.

Ответ: $(5; 6); (-6; -5); (-3; 4); (-4; 3)$.

Пример 2. *Решить в целых числах уравнение $x + y = xy$.*

Решение.

1. Перенесем все члены уравнения влево и к обеим частям полученного уравнения прибавим (-1):
$$x + y - xy - 1 = -1.$$
Сгруппируем первое-четвертое и второе-третье слагаемые и вынесем общие множители, в результате получим уравнение:
$$(x - 1)(y - 1) = 1.$$

2. Произведение двух целых чисел может равняться 1 в том и только в том случае, когда оба этих числа равны или 1, или (-1).

3. Записав соответствующие системы уравнений и решив их, получим решение исходного уравнения.

Ответ: (0, 0) и (2, 2).

Пример 3. *Доказать, что уравнение* $(x-y)^3+(y-z)^3+(z-x)^3=30$ *не имеет решений в целых числах.*

Решение.

1. Разложим левую часть уравнения на множители и обе части уравнения разделим на 3, в результате получим уравнение:

$$(x-y)(y-z)(z-x)=10 \tag{2.29}$$

2. Делителями 10 являются числа $\pm1, \pm2, \pm5, \pm10$. Заметим также, что сумма сомножителей левой части уравнения (2.29) равна 0. Нетрудно проверить, что сумма любых трех чисел из множества делителей числа 10, дающих в произведении 10, не будет равняться 0. Следовательно, исходное уравнение не имеет решений в целых числах.

Ответ: решений нет.

Метод испытания остатков. Этот метод основан на исследовании возможных остатков левой и правой частей уравнения от деления на некоторое фиксированное натуральное число.

Рассмотрим примеры, которые раскрывают сущность данного метода.

Пример 4. *Решить в целых числах уравнение* $x^2 + 1 = 3y$.

Решение.

1. Заметим, что правая часть уравнения делится на 3 при любом целом y.

2. Исследуем какие остатки может иметь при делении на три левая часть этого уравнения.

По теореме о делении с остатком целое число x либо делится на 3, либо при делении на три в остатке дает 1 или 2:

– если $x = 3k$, то левая часть уравнения на 3 не делится.

– если $x = 3k+1$, то $x^2+1 = (3k+1)^2+1 = 3m+2$, следовательно, опять левая часть на 3 не делится.

– если $x = 3k+2$, то $x^2+1 = (3k+2)^2+1 = 3m+2$, следовательно, и в этом случае левая часть уравнения на три не делится.

Таким образом, мы получили, что ни при каких целых x левая часть уравнения на 3 не делится, притом, что правая часть уравнения делится на три при любых значениях переменной y. Следовательно, уравнение в целых числах решений не имеет.

Ответ: решений нет.

Пример 5. *Решить в целых числах уравнение* $x^3 - 3y^3 - 9z^3 = 0$.

Решение.

1. Очевидно, что решением уравнения будет тройка чисел $(0; 0; 0)$.

2. Выясним, имеет ли уравнение другие решения. Для этого преобразуем уравнение к виду

$$x^3 = 3y^3 + 9z^3 \tag{2.30}$$

Так как правая часть полученного уравнения делится на 3, то и левая обязана делится на 3, следовательно, так как 3 — число простое, x делится на 3, то есть $x = 3k$, подставим это выражение в уравнение (2.30):

$$27k^3 = 3y^3 + 9z^3,$$

откуда

$$9k^3 = y^3 + 3z^3, \tag{2.31}$$

следовательно, y^3 делится на 3 и $y = 3m$.

Подставим полученное выражение в уравнение (2.31):

$$9k^3 3 = 27m^3 + 3z^3,$$

откуда

$$3k^3 = 9m^3 + z^3 \tag{2.32}$$

В свою очередь, из этого уравнения следует, что z^3 делится на 3, и $z = 3n$. Подставив это выражение в (2.32), получим, что k^3 должно делиться на 3.

Итак, оказалось, что числа, удовлетворяющие первоначальному уравнению, кратны трём, и сколько раз мы не делили бы их на 3, опять должны получаться числа, кратные трём. Единственное целое число, удовлетворяющее этому условию, будет нуль, то есть решение данного уравнения $(0; 0; 0)$ является единственным.

Ответ: $(0, 0, 0)$.

Применение диофантовых уравнений к решению тригонометрических уравнений

Утверждение. *Пусть в уравнении*

$$kx + my = n \tag{2.33}$$

где $k, m, n \in Z$. Если числа k, m, n взаимно простые, то есть НОД $(k, m) = 1$, то уравнение (2.33) имеет целочисленные решения.

Пусть (x_0, y_0) — одно какое-либо решение уравнения (2.33), его находят подбором. Поэтому справедливо тождество

$$kx_0 + my_0 = n \tag{2.34}$$

Покажем, как найти все решения уравнения (2.33). Вычитая из уравнения (2.33) тождество (2.34), получаем:

$$k(x - x_0) + m(y - y_0) = 0, x = x_0 - \frac{m}{k}(y - y_0).$$

Поскольку x_0 — целое число, то для целочисленности x необходимо и достаточно, чтобы целочисленно было $\frac{m}{k}(y - y_0)$. Но НОД $(k, m) = 1$, то есть m не делится на k. Значит, $\frac{y - y_0}{k}$ должно быть целым числом, то есть $\frac{y - y_0}{k} = t, t \in Z$, откуда $y = y_0 + kt$.

Тогда $x = x_0 - mt$. В итоге имеем общее решение уравнения (2.33):

$$\begin{cases} x = x_0 - mt, \\ y = y_0 + kt, \end{cases} t \in Z.$$

Пример 1. *Решить в целых числах уравнение $3n - 4m = 2$.*

Решение.

Поскольку НОД$(3,4)=1$, НОД$(3,4,2)=1$, то данное уравнение, согласно приведенному выше утверждению 2.6.11, имеет решение. Очевидно, что $n=2$, $m=1$ — решение данного уравнения, то есть имеем тождество $3\cdot 2-4\cdot 1=2$. Вычитая из исходного уравнения последнее тождество, получаем

$$3(n-2)-4(m-1)=0,$$

откуда следует

$$m-1=\frac{3}{4}(n-2).$$

Для целочисленности m необходимо и достаточно, чтобы $\dfrac{n-2}{4}=t, t\in Z$, то есть $n-2=4t, n=2+4t, t\in Z$, и тогда $m=1+3t, t\in Z$. В итоге имеем:

$$m=1+3t, n=2+4t, t\in Z.$$

Ответ: $\{(2+4t;1+3t)|t\in Z\}$.

Пример 2. *Решить уравнение*

$$\cos^2 x+\cos^2 2x+\cos^2 3x+\cos^2 4x=2.$$

Решение.

Применяя формулу понижения степени $\cos^2 \frac{x}{2} = \frac{1+\cos x}{2}$, получаем:

$$\frac{1+\cos 2x}{2} + \frac{1+\cos 4x}{2} + \frac{1+\cos 6x}{2} + \frac{1+\cos 8x}{2} = 2 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \cos 2x + \cos 4x + \cos 6x + \cos 8x = 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 2\cos 3x \cos x + 2\cos 7x \cos x = 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 2\cos x(\cos 3x + \cos 7x) = 0 \Leftrightarrow 4\cos x \cos 2x \cos 5x = 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \cos x = 0, \\ \cos 2x = 0, \\ \cos 5x = 0; \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{2} + \pi k, \\ 2x = \frac{\pi}{2} + \pi n, \\ 5x = \frac{\pi}{2} + \pi m; \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in Z \\ x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2}, n \in Z \\ x = \frac{\pi}{10} + \frac{\pi m}{5}, m \in Z. \end{array}\right.$$

Рассмотрим возможность совпадения серий. Для этого составим совокупность равенств:

$$\left[\begin{array}{l} \frac{\pi}{2} + \pi k = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2}, \\ \frac{\pi}{2} + \pi k = \frac{\pi}{10} + \frac{\pi m}{5}, \\ \frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2} = \frac{\pi}{10} + \frac{\pi m}{5}; \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \frac{1}{2} + k = \frac{1}{4} + \frac{n}{2}, \\ \frac{1}{2} + k = \frac{1}{10} + \frac{m}{5}, \\ \frac{1}{4} + \frac{n}{2} = \frac{1}{10} + \frac{m}{5}; \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2 + 4k = 1 + 2n, \\ 5 + 10k = 1 + 2m, \\ 5 + 10n = 2 + 4m; \end{array}\right. \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 1 = 2(n - 2k), \\ m = 2 + 5k, \\ 3 = 2(2m - 5n). \end{array}\right.$$

Первое и третье равенства ни при каких целых числах соответственно n, k и m, n невозможны, поскольку в левых частях стоят нечетные числа, а в правых — четные. А вот второе равенство $m = 2 + 5k$ свидетельствует о том, что при $m = 2 + 5k$ из третьей серии получается первая серия решений. В самом деле,

$$x = \frac{\pi}{10} + \frac{\pi(2+5k)}{5} = \frac{\pi}{10} + \frac{2\pi}{5} + \frac{5\pi k}{5} = \frac{\pi}{2} + \pi k.$$

В итоге получаем решение исходного уравнения:

$$\left\{\frac{\pi}{4}+\frac{\pi n}{2};\frac{\pi}{10}+\frac{\pi m}{5}\mid n,m\in Z\right\}$$

Ответ: $\left\{\frac{\pi}{4}+\frac{\pi n}{2};\frac{\pi}{10}+\frac{\pi m}{5}\mid n,m\in Z\right\}$.

Решение некоторых тригонометрических уравнений приводит к решению систем тригонометрических уравнений, а это в свою очередь — к пересечению серий решений.

Пример 3. *Решить уравнение* $\cos 3x+\cos 4x=2$.

Решение.

Поскольку $\cos 3x\leqslant 1$ и $\cos 4x\leqslant 1$, то данное уравнение справедливо при выполнении системы уравнений

$$\begin{cases}\cos 3x=1,\\ \cos 4x=1,\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}3x=2\pi k,\\ 4x=2\pi n,\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=\frac{2\pi k}{3}, k\in Z,\\ x=\frac{\pi n}{2}, n\in Z.\end{cases}$$

Находим пересечение серий решений последней системы:

$$\frac{2\pi k}{3}=\frac{\pi n}{2}\Leftrightarrow 4\pi k=3\pi n\Leftrightarrow 4k=3n, n\in Z.$$

Уравнение $4k=3n$ имеет очевидное решение: $k=3t, n=4t, t\in Z$, и общее решение системы, а вместе с ним и исходного уравнения, есть

$$x=\frac{2\pi k}{3}=\frac{2\pi\cdot 3t}{3}=2\pi t, t\in Z.$$

Ответ: $\{2\pi t, t\in Z\}$.

Пример 4. *Решить уравнение* $\sin x+\sin\sqrt{2}x=2$.

Решение.

Так как $|\sin x| \leqslant 1, |\sin\sqrt{2}x| \leqslant 1$, выражение $\sin x + \sin\sqrt{2}x = 2$ принимает значение, равное 2, тогда и только тогда, когда $\sin x = 1$ и $\sin\sqrt{2}x = 1$, то есть имеем:

$$\sin x + \sin\sqrt{2}x = 2 \Leftrightarrow \begin{cases} \sin x = 1, \\ \sin\sqrt{2}x = 1, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k, \\ \sqrt{2}x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n, \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{\pi}{2} + 2\pi k, k \in Z \\ x = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\left(\dfrac{\pi}{2} + 2\pi n\right), n \in Z \end{cases}$$

откуда

$$\frac{\pi}{2} + 2\pi k = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{\pi}{2} + 2\pi n\right) \Leftrightarrow \frac{1}{2} + 2k = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{1}{2} + 2n\right) \Leftrightarrow \sqrt{2}(1+4k) = 1 + 4n.$$

Ни при каких целых k и n последнее равенство не выполняется, поскольку в его левой части число иррациональное, а в правой – целое. Поэтому полученная система, а вместе с ней и данное уравнение, не имеет решений.

Ответ: нет решений.

Пример 5. *Решить уравнение* $\cos 2x + \cos\frac{6}{5}x = -2$.

Решение.

Уравнение эквивалентно системе тригонометрических уравнений

$$\begin{cases} \cos 2x = -1, \\ \cos\frac{6}{5}x = -1, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \pi + 2\pi k, \\ \cos\frac{6}{5}x = \pi + 2\pi n, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in Z \\ x = \frac{5}{6}(\pi + 2\pi n), n \in Z \end{cases}$$

Находим пересечение решений последней системы:

$$\frac{\pi}{2} + \pi k = \frac{5}{6}\left(\pi + 2\pi n\right), k, n \in Z \Leftrightarrow \frac{1}{2} + k = \frac{5}{6}(1 + 2n) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 3(1 + 2k) = 5(1 + 2n) \Leftrightarrow 3k - 3n = 1 \qquad (2.35)$$

Решим последнее уравнение в целых числах. Очевидно, что $k = 2$ и $n = 1$ являются решением этого уравнения. То есть имеет место тождество

$$3 \cdot 2 - 5 \cdot 1 = 1 \qquad (2.36)$$

Вычитая из уравнения (2.35) тождество (2.36), получаем:

$$3(k - 2) - 5(n - 1) = 0 \Leftrightarrow k - 2 = \frac{5}{3}(n - 1).$$

Чтобы $k - 2$ было целым, нужно, чтобы $\dfrac{n-1}{3} = t$ было целым. Тогда имеем решение уравнения (2.35) в целых числах:

$$\begin{cases} n = 1 + 3t, \\ k = 2 + 5t, \end{cases} t \in Z$$

В силу этого тригонометрическая система уравнений

$$\begin{cases} \cos 2x = -1, \\ \cos \frac{6}{5}x = -1, \end{cases}$$

эквивалентная исходному уравнению, имеет решение

$$x = \frac{\pi}{2} + \pi(2 + 5t), t \in Z$$

Ответ: $\left\{\frac{\pi}{2} + \pi(2 + 5t) \mid t \in Z\right\}$.

Пример 6. *Решить уравнение* $\sin ax + \sin bx = 2$ *и выяснить, при каких* a *и* b *решение существует.*

Решение.

Очевидно, что уравнение эквивалентно системе уравнений

$$\begin{cases} \sin ax = 1, \\ \sin bx = 1, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} ax = \dfrac{\pi}{2} + 2\pi k, k \in Z \\ bx = \dfrac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in Z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{1}{a}\left(\dfrac{\pi}{2} + 2\pi k\right), \\ x = \dfrac{1}{b}\left(\dfrac{\pi}{2} + 2\pi n\right). \end{cases}$$

Находим пересечение решений последней системы:

$$\frac{1}{a}\left(\frac{\pi}{2} + 2\pi k\right) = \frac{1}{b}\left(\frac{\pi}{2} + 2\pi n\right) \Leftrightarrow b(1+4k) = a(1+4n)$$

Чтобы равенство $b(1+4k) = a(1+4n)$ было справедливым при целых k и n, необходимо и достаточно, чтобы a и b были связаны зависимостью $\dfrac{b}{a} = \dfrac{1+4n}{1+4k}$, откуда $b = \dfrac{1+4p}{1+4q}a$ при $p, q \in Z$. Таким образом, для разрешимости исходного уравнения его нужно взять в виде

$$\sin ax + \sin a\frac{1+4p}{1+4q}x = 2 \text{ при } p, q \in Z,$$

откуда получаем:

$$\begin{cases} x = \dfrac{1}{a}\left(\dfrac{\pi}{2} + 2\pi k\right), \\ x = \dfrac{1}{\dfrac{1+4n}{1+4k}a}\left(\dfrac{\pi}{2} + 2\pi n\right). \end{cases}$$

Находим пересечение этой системы:

$$\frac{\pi}{2} + 2\pi k = \frac{1+4q}{1+4p}\left(\frac{\pi}{2} + 2\pi n\right) \Leftrightarrow (1+4p)k - (1+4q)n = q - p \tag{2.37}$$

При $k = q$ и $n = p$ из уравнения (2.37) получаем тождество

$$(1+4p)q - (1+4q)p = q - p \tag{2.38}$$

Вычитая из уравнения (2.37) тождество (2.38), имеем:

$$(1+4p)(k-q) - (1+4q)(n-p) = 0.$$

Для получения целочисленного решения этого уравнения положим

$$\frac{n-p}{1+4p} = t, t \in Z,$$

тогда будем иметь общее решение уравнения (2.37):

$$k = q + (1+4q)t, n = p + (1+4p)t, t, p, q \in Z.$$

В итоге решением исходного уравнения будет

$$x = \frac{1}{a}\left(\frac{\pi}{2} + 2\pi\left(q + (1+4q)\,t\right)\right), q, t \in Z.$$

Ответ: $\left\{\frac{1}{a}\left(\frac{\pi}{2} + 2\pi\left(q + (1+4q)\,t\right)\right) \mid b = \frac{1+4p}{1+4q} \mid a \neq 0, q, t \in Z\right\}$[1, 2, 9, 11].

2.7 О воспитании интеллектуально одаренных детей

Безусловно, математику нужно *любить* лишь за то, что она ум в порядок приводит. Это аксиома, не требующая доказательства. Математика — это тот предмет, который оказывает наилучшее влияние на развитие человеческого мышления. Известный физик — один из изобретателей ядерной бомбы, Виктор Вайскопф писал: «Математика держится на двух китах: знаниях и чувствах. Чувства без знаний мертвы, знания без чувств — бесполезны» (в 1983 году в интервью он назвал ядерную бомбу «тенью своей жизни»).

Реалии таковы, что сегодня человечество силой заставляет природу выполнять свои желания, требует для себя несокрушимого здоровья, абсолютной безопасности, богатства, бессмертия, не думая о том, что естественные человеческие желания превращаются в алчность. «Алчность, подкрепленная ЗНАНИЕМ, открывает врата ЗЛУ» (Урсула Ле Гуин). Без духовности знания могут стать силой, разрушающей все вокруг. История знает немало тому примеров. Бомбу, оружие, погубившее миллионы людей, изобрели интеллектуально одаренные люди.

Воспитание является основой устойчивого развития общества — это тоже аксиома. Научно-технический прогресс, пронизывая все сферы современного общества (в том числе и систему образования), создает определенный тип мышления и поведения. Вложения в обучение и воспитание интеллектуально одаренных детей — это самый надежный способ обеспечить стране подъем.

Обращение к гуманистическим принципам воспитания играет наиважнейшую роль. Интеллект, способности, творчество — все для человека, такая гуманистическая ориентация одаренных детей дает, на наш взгляд, универсальную основу для формирования их жизненной философии. Мышление интеллектуально одаренных детей должно стремиться к воссоединению с окружающим миром, а процесс гуманизации их воспитания должен быть соотносим с человеческими качествами, напрямую связан с формированием общечеловеческих ценностей. Сегодня нужна новая парадигма образования. Образование должно быть научно духовным. Духовность должна быть приоритетной. Семья, школа, общество обязаны научить подрастающее поколение любить не только математику, а любить этот мир, любить людей. «Любовь никогда не перестает, хотя и пророчества прекратятся, и языки умолкнут, и знание упразднится» (1-е Коринфянам 13:1-8). Любовь — эта та сила, которая может стать стержнем, опорой, маяком в жизни каждого интеллектуально одаренного ребенка. Работая, общаясь с интеллектуально одаренными детьми, мы должны помнить, что «во многой мудрости много печали; и кто умножает познания, умножает скорбь» [Еккл.1, 18]). И только любовь (матери, отца, друзей, учителей, самых разных людей) и любовь, которая будет жить в юном человеческом сердце, поможет ему преодолеть все тяготы и невзгоды жизни. Личность интеллектуально одаренного ребенка — это сложная система с присущими ей особенностями. Каждый интеллектуально одаренный ребенок неповторим, но при всем индивидуальном своеобразии реальных проявлений детской одаренности существует довольно много черт, характерных для большинства одаренных детей. Особого внимания заслуживают те качества, которые существенно отличают одаренных детей от их сверстников. Знание этих качеств необходимо для адекватного построения процесса воспитания. Среди наиболее характерных и часто встречающихся особенностей педагоги и психологи выделяют: ускоренное психическое развитие; повышенную чувствительность; низкую степень проявления конформных реакций; обостренное чувство справедливости; непосредственность эмоциональных проявлений; неадекватную самооценку (как правило, заниженную); определённый эгоцентризм (особенно в младшем возрасте); повышенный уровень агрессивности [13, 68, 74–76, 80].

Формирование особенностей личностной сферы одаренного ребенка происходит под влиянием определенных социальных факторов, а именно: характера семейного воспитания, форм, методов и установок, существующих в системе школьного обучения, а также правил и норм поведения среди сверстников. В результате несоответствия особенностей развития личности одарённого ребёнка и предъявляемых требований к нему со стороны социума, у одарённого ребёнка возникают трудности социализации, адаптации, что вызывает у него высокое нервно-психическое напряжение, невротизацию, которые приводят к социальной дезадаптации и агрессивности (Д.Б. Богоявленская, О.М. Дьяченко, А.В. Петровский) [12, 63].

Среди качеств, свойственных интеллектуально одаренным детям — сверхчувствительность к проблемам занимает одно из ведущих мест. Развитие сверхчувствительности к проблемам многие исследователи связывают в первую очередь с характером обучения (З.И. Калмыкова, А.М. Матюшкин и др.) [53].

Интеллектуально одаренные дети обладают способностью генерировать новые оригинальные идеи. Эта способность их мышления проявляется не только на уроках, но и в общении со сверстниками и взрослыми, во всех видах деятельности.

Интеллектуально одаренным детям присуща способность к обобщению, выявлению аналогий там, где традиционно они не усматриваются. Они видят связи между разными явлениями и событиями (иногда очень далекими по смыслу и содержанию) и значительно продуктивнее, чем сверстники, воспринимают их. Многие исследователи (А.М. Матюшкин, П. Торренс и др.) отмечают высокий уровень интуиции интеллектуально одаренных детей. Им в значительно большей степени, чем их сверстникам, свойственны способности к прогнозированию, предвидению [53, 63]. Интеллектуально одаренные дети обладают хорошо развитым критическим (оценочным) мышлением (А.М. Матюшкин, К. Тэкэкс, Л. Холлингуорт и др.). Они оценивают все продукты собственной деятельности, а также действия и поступки других людей [68].

Интеллектуально одаренные дети характеризуются упорством в достижении цели, преданности предмету своего интереса и самопожертвованием. Ради любимого дела они готовы ограничить себя во многих аспектах. И вместе с тем, они хотят знать все и обо всем. Интеллектуально одаренные дети стремятся реализовать сполна свои возможности. Это стремление является главным побудительным мотивом их действий и поступков. Интеллектуально одаренным детям присуща внутренняя потребность в совершенстве своей деятельности, стремление соответствовать самым высоким эталонам (интеллектуальным, нравственным, эстетическим) уже на самых ранних возрастных этапах. Их сопровождает чувство неудовлетворенности, которое может негативно сказаться на формировании Я — концепции.

Интеллектуально одаренным детям присущ эгоцентризм, зачастую они не могут понять, что окружающие их люди отличаются от них по многим параметрам. Такие качества как толерантность, способность понять другого человека, стать на его позиции развивается у этой категории детей медленно (Ж. Пиаже, К. Тэкэкс и др.). Следствием этого являются сложности интеллектуально одаренных детей в общении. Эгоцентризм — особенность возрастного развития, которая преодолевается с течением времени, с взрослением, приобретением опыта и воспитанием [68].

Интеллектуально одаренные дети от природы наделены сильными лидерскими качествами, организаторскими способностями. Причина наличия этого качества кроется в интеллектуальном развитии, гибкости и быстроте мышления. Они отчетливее других представляют оптимальную стратегию действий (в исследовании, в игре, в любой другой деятельности), предвидят и просчитывают возможные ошибки. Привлекательными для интеллектуально одаренных детей являются различные соревнования, турниры, олимпиады, где они потенциально могут стать победителями, самоутвердится. В начальной школе и средних классах эти дети стремятся участвовать в самых различных мероприятиях. Однако, повзрослев, приобретя определенный опыт, они отдают предпочтение тем направлениям деятельности, в которых они чувствуют себя уверенно, и более привлекательными для них становятся мероприятия, участников которых они считают равными себе. Победы приносят интеллектуально одаренным детям большое удовлетворение. Поражения они болезненно переживают. Большинство исследователей отмечают повышенную уязвимость интеллектуально одаренных детей. В ее основе — сверхчувствительность, способность улавливать причинно-следственные связи, видеть больше других, тоньше чувствовать. Многое, даже внешне нейтральное, они принимают на свой счет.

При конструировании и осуществлении процесса воспитания необходимо учитывать особенности интеллектуально одаренных детей.

Воспитание интеллектуально одаренных детей должно осуществляться с опорой на следующие принципы:

– принцип коллективности воспитания, предполагающий, что воспитание, осуществляясь в коллективах различного типа, даёт интеллектуально одаренному ребенку опыт жизни в обществе, опыт взаимодействия с окружающими, может создавать условия для позитивно направленных самопознания, самоопределения, самореализации и саморегуляции;

– принцип диалогичности воспитания, предполагающий, что духовно-ценностная ориентация интеллектуально одаренных детей и их развитие осуществляются в процессе такого взаимодействия субъектов, содержанием которого является обмен ценностями, а также совместное продуцирование ценностей;

– принцип дополнительности в воспитании предполагающий: подход к изучению воспитания как одного из социальных институтов, который включает в себя взаимодополняющие виды воспитания (семейное, социальное, религиозное, коррекционное), системы воспитания различного уровня (государственную, региональные, локальные) воспитательные организации различных типов и видов; рассмотрение воспитания как совокупности взаимодополняющих процессов (например, организации социального опыта, воспитывающего обучения, индивидуальной помощи), создающих условия для развития природных задатков и духовно-ценностной ориентации человека; признание того, что содержательно процесс духовно-ценностной ориентации включает в себя взаимодополняющие системы ценностей;

– принцип гуманистической направленности воспитания. Реализация этого принципа эффективно влияет на формирование его отношений к миру и с миром, к себе и с самим собой; на формирование личности — носителя демократических и гуманистических отношений в обществе;

– принцип природосообразности воспитания, предполагающий, что воспитание должно основываться на научном понимании взаимосвязи естественных и социальных процессов, согласовываться с общими законами развития природы и человека, воспитывать его сообразно полу и возрасту;

– принцип культуросообразности воспитания, предполагающий, что воспитание должно основываться на общечеловеческих ценностях культуры и строиться в соответствии с ценностями и нормами национальной культуры;

– принцип незавершимости воспитания, предполагающий, что каждый каждый возрастной этап развития человека самоценен.

Воспитательную работу в классных коллективах, где обучаются интеллектуально одаренные дети, целесообразно строить на основе системно-ролевого подхода, предложенного В.Т. Кабушем (работая по следующим направлениям: «Я и общество», «Я и природа», «Я и моя школа», «Я и моя семья», «Я и моё Я»). Основу планирования могут составить следующие целевые программы: «Учение», «Общение», «Досуг», «Образ жизни», «Здоровье» (предложено О.С. Газманом); общечеловеческие ценности: земля, отечество, семья, труд, знания, культура, мир, человек (предложено В.А. Караковским). Приоритетными направлениями воспитательной работы могут быть: «Здоровье», «Общение», «Нравственность», «Интеллект», «Досуг», «Семья», «Гражданин», «Учеба» (предложено Н.И. Дереклеевой). Л.И. Маленкова и Н.Е. Щуркова предлагают включать школьников, в том числе и интеллектуально одаренных, в такие виды деятельности, как познавательная, ценностно-ориентировочная, трудовая, художественно-творческая, игровая, физкультурно-оздоровительная, коммуникативная.

Классные коллективы, где обучаются интеллектуально одаренные дети, должны функционировать как открытые воспитательные системы. Классный коллектив как открытая воспитательная система — это педагогически целесообразно организованная среда жизнедеятельности его субъектов, выполняющая следующие функции:

1) согласование всех сторон жизнедеятельности коллектива с учётом запросов личности учащегося, общества и государства;

2) учет, реализация и возвышение актуальных социогенных потребностей личности;

3) опора на внешние источники развития;

4) управление как совокупность трёх взаимосвязанных процессов педагогического руководства, самоорганизации и саморегуляции.

Основные направления организации жизнедеятельности интеллектуально одаренных детей в классных коллективах представлены в таблице 2.35.

Таблица 2.35. Организация взаимодействий интеллектуально одаренных детей

1	2
Взаимодействие	Медицинские работники учебного заведения и специалисты медицинских учреждений населённого пункта; родители; педагоги; психологические службы; Центр «Здоровье»; Центр коррекционно-развивающего обучения и реабилитации; Центр лечебной педагогики и дифференцированного обучения; Центр диагностики и консультации; учреждения физической культуры и спорта; учреждения внешкольного воспитания и обучения.

Таблица 2.35 (продолжение)

1	2
Формы работы	Встречи с медицинскими работниками, интерактивные игры, индивидуальные и групповые консультации; обсуждение публикаций, читательские конференции, просмотр видео и художественных фильмов; дни здоровья, туристические походы, походы выходного дня; тематические собрания и консилиумы по вопросам сохранения здоровья учащихся; спортивные состязания, конкурсы, спартакиады, олимпиады, спортландии; встречи со спортсменами, студентами спортивных факультетов вузов, победителями спортивных соревнований, родителями, активно занимающимися спортом и физической культурой; спортивные викторины, классные часы по спортивной тематике, праздники и фестивали спортивной песни, конкурсы стенгазет на спортивную тему; беседы и дискуссии по темам: «Выдающиеся спортсмены нашей республики», «Развитие физической культуры и спорта в Республике Беларусь», «История видов спорта», «Спорт в нашей семье», «Экстремальные виды спорта», «Возрастные изменения в организме девочки (мальчика)», «Личная гигиена девочек (мальчиков)», «СПИД и его профилактика», «Наркотики и здоровье», «Социальные последствия алкоголизма», «Безопасное и ответственное поведение».
Направление	*Интеллект*

Таблица 2.35 (продолжение)

1	2
Формы работы	Конкурсы по развитию памяти, мышления, внимания; интеллектуальные марафоны в классе и параллели; интеллектуальные бои, ринги; научно-исследовательские конференции; факультативы, кружки. Общественный смотр знаний (с участием родителей, представителей общественности; предметные олимпиады; встречи с преподавателями вузов, победителями олимпиад; экскурсии в вузы; просмотр видео и художественных фильмов о выдающихся учёных; вечера вопросов и ответов; обзор статей и публикаций, посвящённых научным открытиям; работа интеллектуальных клубов; использование возможностей Internet; интеллектуальные встречи с зарубежными сверстниками; психологическая диагностика.
Направление	*Нравственность*
Взаимодействие	Библиотеки; музеи; СМИ; религиозные и общественные организации; социально-педагогические центры; приюты; сотрудники правоохранительных органов; ветераны войны и труда; сотрудники МЧС; родители, педагоги, деятели культуры, жители микрорайона школы.

Таблица 2.35 (продолжение)

1	2
Формы работы	Циклы бесед по нравственной тематике; тренинги нравственного самосовершенствования; видео и кинопросмотры; театральные постановки; экскурсии к историческим и памятным местам нашей Родины; поисковая работа; шефская работа в детских домах, сиротских приютах, домах ветеранов, больницах, детских садах; оказание посильной помощи ветеранам и престарелым людям; изучение нравственного литературного наследия, человеческих ценностей; праздничные поздравления одноклассников, педагогов, ветеранов; клубы «Азбука нравственности», «Нравственные истины»; сочинения-размышления; циклы встреч «История в лицах»; тренинги по формированию у учащихся позитивного отношения к себе и окружающим; работа в живом уголке; шефская работа.
Направление	*Гражданин, патриот*
Взаимодействие	Правоохранительные органы; патриотические клубы; воинские части; допризывные пункты; музеи; ветераны войны и труда; молодёжные и детские общественные организации и объединения; СМИ; родители; педагоги; общественные деятели; руководители хозяйств; социально-педагогические центры; учреждения внешкольного воспитания и обучения; центры по информации и обучению в области прав человека и гражданскому образованию.

Таблица 2.35 (продолжение)

1	2
Формы работы	Всебелорусская туристско–краеведческая экспедиция учащихся «Наш край»; республиканская акция учащихся «Память»; республиканские патриотические акции «Операция «Победа»», «Операция «Багратион»»; «Год родной земли»; тематические классные часы, спецкурсы; читательские конференции по правовой тематике; дискуссии на тему «Права человека»; аналитический разбор острых проблем, поставленных в средствах массовой информации; встречи с современными политическими деятелями, писателями, публицистами, журналистами; деятельность молодёжных клубов «Патриот», «Отечество»; участие в общественно-полезной деятельности; создание фонда помощи нуждающимся школьникам; сотрудничество с зарубежными благотворительными фондами; встречи с представителями правоохранительных органов; посещение воинских частей; посещение музеев боевой славы, мемориальных комплексов; экскурсии по партизанским тропам; праздник Дня Конституции и Дня независимости Республики Беларусь; праздник получения паспорта; День Победы; День освобождения города от немецко-фашистских захватчиков; уход за могилами погибших воинов; несение почётной вахты на Посту № 1 в Брестской крепости; поисковая работа; шефская работа, акции милосердия; изучение жизнедеятельности выдающихся граждан Беларуси; создание музеев, галерей.

Таблица 2.35 (продолжение)

1	2
Направление	*Досуг*
Взаимодействие	Учреждения внешкольного обучения и воспитания; Центры молодёжного творчества; подростковые объединения и клубы; театры; музеи; кинотеатры; дома культуры; библиотеки; педагоги; родители; кружки, секции; студии; специализированные школы.
Формы работы	Празднование памятных дат в жизни учащихся; празднование памятных дат календаря; посещение театров, выставок, музеев; театрализованные представления; фестивали, презентации, конкурсы, смотры.
Направление	*Семья*
Взаимодействие	Тематические классные часы, посвящённые семье: «Моя родословная», «История моей семьи в фотографиях», «Военная летопись моей семьи», «Памятные даты моей семьи»; праздники семьи, спортивные состязания «Папа, мама, я – дружная семья»; спортландии с участием дедушек, бабушек, родителей; праздники (8 Марта, 23 Февраля); День знаний, День учителя; тренинги родительского взаимодействия, индивидуальные и групповые консультации, беседы с детьми и родителями; походы, экскурсии; КВН, брейн-ринг, интеллектуальный марафон для детей и родителей; дни творчества, дни открытых дверей.
Направление	*Досуг*

Таблица 2.35 (продолжение)

1	2
Взаимодействие	Учреждения внешкольного обучения и воспитания; Центры молодёжного творчества; подростковые объединения и клубы; театры; музеи; кинотеатры; дома культуры; библиотеки; педагоги; родители; кружки, секции; студии; специализированные школы.
Формы работы	Празднование памятных дат в жизни учащихся; празднование памятных дат календаря; посещение театров, выставок, музеев; театрализованные представления; фестивали, презентации, конкурсы, смотры.
Направление	*Общение*
Взаимодействие	Педагоги, психологи, родители, представители социума.
Формы работы	Обучение учащихся конструированию и моделированию в сфере общения; обучение проявлению эмпатии, созданию положительных ситуаций общения; консультирование родителей по проблеме общения; спецкурсы, тематические классные часы, интерактивные игры по проблеме «Общение»; тренинги общения учащихся и их родителей: «Знакомство», «Метафора», «Фраза по кругу», «Зеркало», «За что нам нравятся люди», « Цвета эмоций», «Рассмешить партнёра», «Всеобщее внимание»; «За что мы любим»; ролевые игры: «Мама спит, она устала. . . », «Приходите в гости», праздники, конкурсы; совместные вечера; родительские собрания.

Взаимодействия играют важную роль в развитии и воспитании интеллектуально одаренных детей. Так, на осенних каникулах 2008 года интеллектуально одаренные учащиеся из учреждений образования г. Барановичи принимали участие в тест-рейтинговой олимпиаде в Греции (соревновались по математике, физике и истории научных идей и достижений). Результат — серебряная медаль. Летом 2009 года они две недели отдыхали и учились в г. Кранево (Болгария). Рядом с барановичскими вундеркиндами отдыхали такие же дети из Норвегии, Германии, России. Сколько впечатлений осталось у белорусских школьников от встреч, состязаний! А этой осенью их ждут в Анталии (Турция). Такие взаимодействия позитивно сказываются на личности интеллектуала, приводят весь его потенциал в движение, заставляют усердно и много работать и, конечно же, ведут к хорошим результатам.

При планировании воспитательной работы с интеллектуально ода-ренными детьми необходимо поддерживать оптимальный баланс взаимосвязанных видов деятельности. Воспитание интеллектуально одаренных детей должно быть многоаспектным. Нельзя забывать и о том, что мы формируем гармонично развитую личность, а не «одномерного» человека. Зная особенности своих интеллектуально одаренных детей, надо обращать внимание не только на развивающую составляющую процесса обучения и воспитания, но и на коррекционную.

Интеллектуально одаренные дети требуют особого внимания общества, педагогов и родителей. Именно на этих людях лежит ответственность за предоставление пространства неординарным способностям одаренных детей. А интеллектуально одаренные дети, став взрослыми, смогут направить свою энергию, знания, силы на процветание родной земли, на созидание; смогут нести Любовь и Добро в мир людей, вести за собой других.

Вопросы для обсуждения

1. Концептуальные модели обучения интеллектуально одаренных детей.
2. Технологии обучения интеллектуально одаренных детей.
3. Технология проблемного обучения.
4. Технология укрупнения дидактических единиц.
5. Дальтон-технология.
6. Технология обучения математике на основе системы эффективных уроков.
7. Технология обучения как учебного исследования.
8. Технология обучения математике на основе решения задач.
9. Внеклассная и внешкольная работа с интеллектуально одаренными детьми.
10. Факультативы для интеллектуально одаренных детей.
11. Методические аспекты подготовки интеллектуально одаренных детей к олимпиадам различного уровня.
12. Организация научно-исследовательской работы с интеллектуально одаренными детьми.
13. Конструирование задач творческого характера для интеллектуально одаренных детей.
14. Модель организации работы с интеллектуально одаренными детьми в условиях сельской школы.

15. Модель организации работы с интеллектуально одаренными детьми в условиях районного центра.

16. Модель организации работы с интеллектуально одаренными детьми в условиях областного центра.

17. Изучение опыта работы учителей, работающих с интеллектуально одаренными детьми.

18. Менторство в работе с интеллектуально одаренными детьми.

19. Информационные технологии в развитии интеллектуальной одаренности.

20. Дистанционное обучение в развитии интеллектуальной одаренности.

21. Управляемая самостоятельная работа в развитии интеллектуальной одаренности.

22. Организация и содержание клубных форм работы с интеллектуально одаренными детьми.

23. Предметное направление в летнем лагере для интеллектуально одаренных детей.

Задания для самоконтроля

1. У Алеся, Миши и Лёни вместе 27 орехов. У Алеся на 3 ореха больше, чем у Миши, а у Миши на 3 ореха больше, чем у Лёни. Сколько орехов у каждого мальчика?

   Решение

2. В комнате стояли стулья (с четырьмя ножками) и табуретки (с тремя ножками). Когда на каждый стул и каждый табурет село по одному школьнику, то общее число «ног» в комнате составило 39. Сколько стульев и сколько табуреток стояли в комнате?

   Решение

3. В семье четверо детей, которым 5, 8, 13 и 15 лет. Их зовут Алла, Борис, Вера и Галя. Сколько лет каждому, если одна девочка ходит в детский сад, Алла старше Бориса, а сумма возрастов Аллы и Веры делится на 3?

   Решение

4. Как, имея две полные десятилитровые емкости с березовым соком, отмерить по два литра сока в два пустых бидона емкостью четыре и пять литров?

   Решение

5. Из 4-х монет — одна фальшивая. Она отличается от остальных только весом. Когда две монеты положили на чашечные весы, то:

   а) их равновесие нарушилось. Как с помощью еще одного взвешивания найти фальшивую монету?

   б) остались в равновесии. Как с помощью еще одного взвешивания найти, какая из монет фальшивая?

Решение

6. Решите ребус: АИСТ + АИСТ + АИСТ + АИСТ = СТАЯ.

   Решение

7. На доске записано несколько ($\geqslant 3$) попарно различных действительных чисел. Известно, что из любых 3-х записанных чисел можно выбрать два, сумма которых есть некоторое число, записанное на доске. Найдите наибольшее возможное количество записанных на доске чисел.

   Решение

8. В соревнованиях участвовали 35 спортсменов. Можно ли утверждать, что среди них найдутся хотя бы два спортсмена, фамилии которых начинаются с одной буквы?

   Решение

9. В центре квадратного бассейна находится Саша, а в вершине на берегу стоит Миша. Максимальная скорость Саши в воде в три раза меньше максимальной скорости Миши на суше. Миша плавать не умеет, а на берегу Саша бегает быстрее Миши. Сможет ли Саша убежать от Миши?

   Решение

10. 2011 человек выстроились в шеренгу. Всегда ли можно их расставить по росту, если за один ход разрешается переставлять только 2 людей, стоящих через одного?

    Решение

11. Из 100 кубиков 80 имеют красную грань, 85 — синюю, 75 — зелёную. Сколько кубиков имеют грани всех трёх цветов?

Решение

12. В классе 38 человек. Из них 16 играют в баскетбол, 17 — в хоккей, 18 — в футбол. Увлекаются двумя видами спорта — баскетболом и хоккеем – четверо, баскетболом и футболом — трое, футболом и хоккеем — пятеро. Трое не увлекаются ни баскетболом, ни хоккеем, ни футболом. Сколько ребят увлекаются одновременно тремя видами спорта? Сколько ребят увлекается лишь одним из этих видов спорта?

Решение

13. В вещевой лотерее разыгрывается 8 предметов. Первый подошедший к урне вынимает из нее 5 билетов. Каким числом способов он может их вынуть, чтобы:

   1) ровно два из них оказались выигрышными;
   2) по крайней мере, два из них оказались выигрышными.

   Всего в урне 50 билетов.

Решение

14. Можно ли организовать футбольный турнир девяти команд так, чтобы каждая команда провела по четыре встречи?

Решение

15. Три девочки делили 120 конфет. Сначала Полина дала Валентине и Татьяне столько конфет, сколько у них было. Затем Валентина дала Татьяне и Полине столько конфет, сколько у них стало. И наконец, Татьяна дала Полине и Валентине столько конфет, сколько у них к этому времени имелось. В результате всем досталось поровну. Сколько было конфет у каждой девочки вначале?

Решение

16. Дан квадрат $n \times n$ клеток ($n \geqslant 2$). Художник решил закрасить его клетки в три цвета (каждую клетку — в один цвет), так, чтобы у каждой клетки среди ее соседних клеток были клетки двух других цветов (не обязательно, только двух других цветов) (клетки соседние, если у них есть общая сторона). Найдите все n, при которых так можно закрасить клетки данного квадрата.

Решение

17. На столе стоят две коробки, в одной из которых находится m монет, а в другой — n. Саша и Миша играют в такую игру. Они ходят по очереди, причем, начинает ходить Саша, и за один ход может сделать только одну из следующих 3-х операций (любую, по выбору игрока):

    1) взять из любой коробки 1 монету;
    2) взять из каждой коробки по монете;
    3) переложить 1 монету из одной коробки в другую.

    Игра заканчивается, когда в коробках не останется монет. Выигрывает тот, кто сделает ход последним. Найдите все такие m и n, при которых выиграет Саша при его правильной игре. Каждый игрок знает, сколько монет находится в каждой из коробок и какой ход сделал его соперник.

Решение

18. Докажите, что для всех натуральных n справедлива формула

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}.$$

Решение

19. Докажите, что число $19^{95} + 95^{19}$ делится нацело на число $19 + 95$.

Решение

20. Найдите две последние цифры числа 17^{82}.

Решение

21. Решите уравнение $x^2 - 11y^2 = 1$.

Решение

22. Найдите функцию $f(x)$ определенную на множестве натуральных чисел, удовлетворяющую условию $f(x+1) = f(x) + k$, где k — некоторое действительное число.

Решение

23. Найдите остаток от деления многочлена $f(x) = 1 + x + x^3 + x^9 + x^{27} + x^{81} + x^{243}$ на многочлен $g(x) = x^2 - 1$.

Решение

24. Стороны треугольника являются корнями уравнения $x^3 - 20x^2 + 280x - 1440 = 0$. Найдите площадь треугольника.

Решение

25. Докажите, что каковы бы ни были действительные числа $a_1, a_2, a_3, a_4, \ldots, a_n$ и $b_1, b_2, b_3, b_4, \ldots, b_n$ всегда

$$\sqrt{a_1^2 + b_1^2} + \ldots + \sqrt{a_n^2 + b_n^2} \geqslant \sqrt{(a_1 + \ldots + a_n)^2 + (b_1 + \ldots + b_n)^2}.$$

При каком условии имеет место равенство?

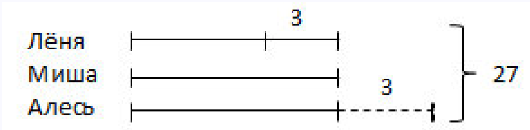
Решение

Решение заданий для самоконтроля

Задача 1. *У Алеся, Миши и Лёни вместе 27 орехов. У Алеся на 3 ореха больше, чем у Миши, а у Миши на 3 ореха больше, чем у Лёни. Сколько орехов у каждого мальчика?*

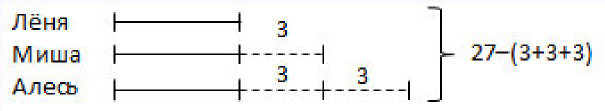
Решение.

Уравняем количество орехов у каждого мальчика по Мише. Для этого добавим Лёне 3 ореха и заберем у Алеся 3 ореха. При этом общее количество орехов не изменится.



1) $27 : 3 = 9$ (было у Миши).
2) $9 + 3 = 12$ (было у Алеся).
3) $9 - 3 = 6$ (было у Лёни).

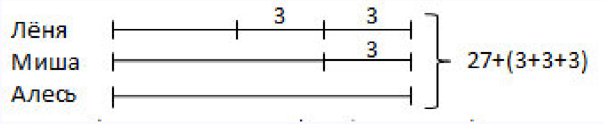
Уравняем количество орехов по Лёне. Чтобы у Миши и Алеся было столько же орехов, сколько у Лёни, надо у Миши забрать 3 ореха, а у Алеся – 6. Общее количество орехов у мальчиков уменьшится на 9.



1) $3 + 6 = 9$ (уменьшилось).
2) $27 - 9 = 18$ (стало).
3) $18 : 3 = 6$ (было у Лёни).

4) $6 + 3 = 9$ (было у Миши).
5) $9 + 3 = 12$ (было у Алеся).

Если мы уравняем количество орехов по Алесю, то получим еще один способ решения. Чтобы у Миши и Лёни было столько орехов, сколько у Алеся, надо Мише добавить 3 ореха, а Лёне – 6 орехов. При этом общее количество орехов увеличится.



1) $3 + 6 = 9$ (добавилось).
2) $27 + 9 = 36$ (стало).
3) $36 : 3 = 12$ (было у Алеся).
4) $12 - 3 = 9$ (было у Миши).
5) $9 - 3 = 6$ (было у Лёни).

Задача 2. *В комнате стояли стулья (с четырьмя ножками) и табуретки (с тремя ножками). Когда на каждый стул и каждый табурет село по одному школьнику, то общее число «ног» в комнате составило 39. Сколько стульев и сколько табуреток стояли в комнате?*

Решение.

Так как общее число «ног» в комнате 39, то стульев не больше 6 (4 «ноги» стула +2 ноги человека), получается $6 \cdot 6 = 36$ «ног».

Переберем случаи, когда в комнате $c = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6$ стульев. Тогда число «ног», вносимых в общее количество табуретками: $t = 39 - 6c$ (t должно делиться на 5).

Если

$c = 0$, то $t = 39$;

$c = 1$, то $t = 33$;

$c = 2$, то $t = 27$;

$c = 3$, то $t = 21$;

$c = 4$, то $t = 15$;

$c = 5$, то $t = 9$;

$c = 6$, то $t = 3$.

Условию задачи удовлетворяет только пара: $c = 4$, $t = 15$. $15 : 5 = 3$ — количество табуреток.

Итак, для 4 стульев и 3 табуреток условие задачи выполняется.

Задача 3. *В семье четверо детей, которым 5, 8, 13 и 15 лет. Их зовут Алла, Борис, Вера и Галя. Сколько лет каждому, если одна девочка ходит в детский сад, Алла старше Бориса, а сумма возрастов Аллы и Веры делится на 3?*

Решение.

	5	8	13	15
Алла			+	
Борис		+		
Вера	+			
Галя				+

Задача 4. *Как, имея две полные десятилитровые емкости с березовым соком, отмерить по два литра сока в два пустых бидона емкостью четыре и пять литров?*

Решение.

10 л.	10 л.	4 л.	5 л.
10	10	0	0
5	10	0	5
5	10	4	1
9	10	0	1
9	10	1	0
4	10	1	5
4	10	4	2
8	10	0	2
8	6	4	2
10	6	2	2

Задача 5. *Из 4-х монет — одна фальшивая. Она отличается от остальных только весом. Когда две монеты положили на чашечные весы, то:*

а) их равновесие нарушилось. Как с помощью еще одного взвешивания найти фальшивую монету?

б) остались в равновесии. Как с помощью еще одного взвешивания найти, какая из монет фальшивая?

Решение.

а) так как равновесие весов нарушилось, значит одна из монет на весах фальшивая. Снимем одну из монет с весов и положим вместо нее любую другую из остальных, не лежавших на весах. Если весы окажутся в равновесии, значит, снятая монета — фальшивая; если же равновесие весов нарушится, то фальшивой является монета, которая все время лежала на весах;

б) так как весы находятся в равновесии, то обе монеты не являются фальшивыми. Снимем одну из монет и положим вместо нее другую их тех, что не лежали на весах. Если весы останутся в равновесии, то фальшивая монета — монета, которая не участвовала во взвешивании; если же равновесие весов нарушилось, то фальшивая та монета, которую мы только что положили на весы.

Задача 6. *Решите ребус: $АИСТ + АИСТ + АИСТ + АИСТ = СТАЯ$.*

Решение.

$$\text{АИСТ} = 1000\text{А} + 100\text{Т} + 10\text{И} + \text{Я},\ \text{СТАЯ} = 1000\text{С} + 100\ \text{Т} + 10\text{А} + \text{Я}.$$

Составим уравнение:

$$4(1000\text{А} + 100\text{Т} + 10\text{И} + \text{Я}) = 1000\text{С} + 100\ \text{Т} + 10\text{А} + \text{Я}$$

и решим его в неотрицательных целых числах (однозначных).

Заметим, что А и С $\neq 0$. Перенесем все слагаемые в левую часть, приведем подобные и получим:

$$3990\text{А} - 960\text{С} + 400\text{И} - 96\text{Т} - \text{Я} = 0.$$

Возьмем $\text{А} = 1$ и рассмотрим три первых слагаемых:

$$3990 - 960\text{С} + 400\text{И}.$$

Подберем С так, чтобы сумма двух первых слагаемых была как можно ближе к нулю, но оставалась не больше нуля. Это будет, если взять $\text{С} = 5$. Тогда

$$3990 - 960{\cdot}5 = 810.$$

Рассмотрим сумму:

$$-810 + 400И.$$

Подберем И так, чтобы сумм была как можно ближе к нулю, но оставалась не меньше нуля. Это будет, если взять И=3. Получим:

$$-810 + 400 \cdot 3 = 390.$$

Рассмотрим 390 – 96Т и подберем Т таким, чтобы сумма оставалась не меньше нуля, но как можно ближе к нулю. Это будет при Т = 4. Тогда

$$390 - 96 \cdot 4 = 6.$$

И, наконец, рассмотрим сумму 6 – Я. Она должна равняться 0. Следовательно, Я = = 6.

Значит, АИСТ = 1354, СТАЯ = 5416.

Задача 7. *На доске записано несколько ($\geqslant 3$) попарно различных действительных чисел. Известно, что из любых 3-х записанных чисел можно выбрать два, сумма которых есть некоторое число, записанное на доске. Найдите наибольшее возможное количество записанных на доске чисел.*

Доказательство. Докажем, что среди записанных чисел не может быть более 4-х чисел одного знака. Используем метод от противного.

Пусть среди записанных чисел не менее 4-х положительных. Выберем из них четыре наибольших:

$$\alpha_4 > \alpha_3 > \alpha_2 > \alpha_1 > 0.$$

Рассмотрим тройку $\{\alpha_4; \alpha_3; \alpha_2\}$. По условию задачи, хотя бы одна из сумм $\alpha_3+\alpha_2$, $\alpha_4+\alpha_2$, $\alpha_3+\alpha_4$ должна совпадать с одним из записанных на доске числом. Этими суммами не могут быть $\alpha_4+\alpha_2$, $\alpha_3+\alpha_4$, так как они больше наибольшего числа α_4.

Следовательно, одному из записанных на доске чисел должна равняться сумма $\alpha_3 + \alpha_2$. Так как она больше α_3, то существует единственная возможность

$$\alpha_3 + \alpha_2 = \alpha_4.$$

Эти рассуждения справедливы и для тройки $\{\alpha_4; \alpha_3; \alpha_1\}$. Поэтому $\alpha_3 + \alpha_1 = \alpha_4$. Значит, $\alpha_1 = \alpha_2$.

Мы получили противоречие. Значит, на доске не более 3-х положительных, не более 3-х отрицательных чисел и, возможно, число 0. Следовательно, на доске не более $3 + 3 + 1 = 7$ чисел. Условию задачи удовлетворяют: $-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3$. ■

Задача 8. *В соревнованиях участвовали 35 спортсменов. Можно ли утверждать, что среди них найдутся хотя бы два спортсмена, фамилии которых начинаются с одной буквы?*

Решение.

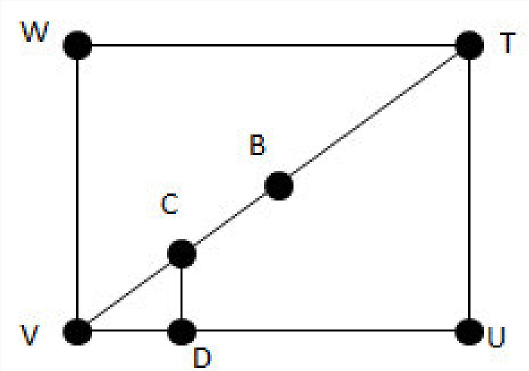
Обозначим 35 спортсменов за «зайцев», а буквы за «клетки». В русском алфавите 33 буквы. Кроме этого, фамилии не могут начинаться с букв Ъ и Ь. Значит, у нас осталась 31 буква. Так как $35 > 31$, то, по принципу Дирихле, найдется 2 спортсмена, у которых фамилия начинается с одной буквы.

Задача 9. *В центре квадратного бассейна находится Саша, а в вершине на берегу стоит Миша. Максимальная скорость Саши в воде в три раза меньше максимальной скорости Миши на суше. Миша плавать не умеет, а на берегу Саша бегает быстрее Миши. Сможет ли Саша убежать от Миши?*

Решение.

Пусть Миша находится в вершине T. Сначала Саша должен плыть к противоположной вершине V. Предположим, что Миша побежит по направлению к вершине W. Пусть в тот момент, когда Миша прибежит в W, Саша доплывёт до точки C. Пусть $TW = 1$. Тогда $BC = \frac{1}{3}$, $CV = \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{3}$, $CD = \frac{1}{2} - \frac{1}{3\sqrt{2}}$, где CD перпендикулярно VU. Миша не сможет добежать до вершины V раньше, чем Саша доплывёт до точки D:

$$\frac{1}{3}-\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3\sqrt{2}}\right)=\frac{\sqrt{2}-1}{6}>0.$$



Следовательно, Саша может убежать.

Задача 10. *2011 человек выстроились в шеренгу. Всегда ли можно их расставить по росту, если за один ход разрешается переставлять только 2 людей, стоящих через одного?.*

Решение.

При перестановке сохраняется четность номера места. Поэтому если самый высокий человек, например, стоит вторым, то он никогда не станет первым, и число 2011 здесь роли не играет. Значит, не всегда 2011 человек можно расставить по росту.

Задача 11. *Из 100 кубиков 80 имеют красную грань, 85 — синюю, 75 — зелёную. Сколько кубиков имеют грани всех трёх цветов?*

Решение.

Определим максимальное число кубиков, имеющих грани всех трёх цветов. Оно равно 75 и достигается в том случае, когда каждый из 75 кубиков, имеющих зелёную грань, имеет также красную и синюю грань. Не имеют красной грани $100 - 80 = 20$ кубиков, синей — 15, зелёной — 25. Сложим полученные числа: $20 + 15 + 25 = 60$. Получили максимальное число кубиков, не имеющих грани всех трёх цветов. Этот максимум достигается в том случае, когда три множества, которые состоят из 20, 15 и 25 кубиков, не имеют попарно общих элементов. Значит, минимальное число кубиков, имеющих грани всех трёх цветов, равно $100 - 60 = 40$. Итак, искомое число n кубиков удовлетворяет неравенству $40 \leqslant n \leqslant 75$.

Задача 12. *В классе 38 человек. Из них 16 играют в баскетбол, 17 — в хоккей, 18 — в футбол. Увлекаются двумя видами спорта — баскетболом и хоккеем — четверо, баскетболом и футболом — трое, футболом и хоккеем — пятеро. Трое не увлекаются ни баскетболом, ни хоккеем, ни футболом. Сколько ребят увлекаются одновременно тремя видами спорта? Сколько ребят увлекается лишь одним из этих видов спорта?*

Решение.

Воспользуемся кругами Эйлера.

Пусть большой круг изображает всех учащихся класса, а три меньших круга B, H и F изображают соответственно баскетболистов, хоккеистов и футболистов. Тогда фигура Z, общая часть кругов B, H и F, изображает ребят, увлекающихся тремя видами спорта.

Из рассмотрения кругов Эйлера видно, что одним лишь видом спорта — баскетболом занимаются

$$16 - (4 + z + 3) = 9 - z;$$

одним лишь хоккеем

$$17 - (4 + z + 5) = 8 - z;$$

одним лишь футболом

$$18 - (3 + z + 5) = 10 - z.$$

Составляем уравнение, пользуясь тем, что класс разбился на отдельные группы:

$$3 + (9 - z) + (8 - z) + (10 - z) + 4 + 3 + 5 + z = 38,$$

$$z = 2.$$

Таким образом, двое ребят увлекаются всеми тремя видами спорта. Складывая числа $9 - z$, $8 - z$ и $10 - z$, где $z = 2$, найдем количество школьников, увлекающихся лишь одним видом спорта: 21 человек.

Итак, двое ребят увлекаются всеми тремя видами спорта; увлекающихся лишь одним видом спорта — 21 человек.

Задача 13. *В вещевой лотерее разыгрывается 8 предметов. Первый подошедший к урне вынимает из нее 5 билетов. Каким числом способов он может их вынуть, чтобы:*

1) ровно два из них оказались выигрышными;

2) по крайней мере, два из них оказались выигрышными.

Всего в урне 50 билетов.

Решение.

1) если среди вынутых 5 билетов оказалось ровно два выигрышных, то остальные три — невыигрышные. Из восьми выигрышных билетов можно выбрать два C_8^2 способами; из $50-8 = 42$ невыигрышных билетов три можно выбрать C_{42}^3 способами. Каждый способ выбора двух выигрышных билетов может сочетаться с любым из способов выбора трех невыигрышных билетов. Следовательно, общее число способов равно

$$C_8^2 \cdot C_{42}^3 = 326240.$$

2) число способов выбора 5 билетов, при котором, по крайней мере, два будут выигрышными, равно сумме числа способов, при которых извлекается ровно два выигрышных билета, ровно три выигрышных билета, ровно четыре выигрышных билета и ровно пять выигрышных билетов. Следовательно, это число равно

$$C_8^2 \cdot C_{42}^3 + C_8^3 \cdot C_{42}^2 + C_8^4 \cdot C_{42}^1 + C_8^5 \cdot C_{42}^0 = 377452.$$

Задача 14. *Можно ли организовать футбольный турнир девяти команд так, чтобы каждая команда провела по четыре встречи?*

Решение.

Изобразим каждую команду точкой, а проведённую ею встречу — отрезком, исходящим из этой точки. Девять точек лучше расположить так, чтобы при последовательном соединении их отрезками образовался выпуклый девятиугольник. Задача сводится к следующей: можно ли 9 точек соединить отрезками так, чтобы из каждой точки выходили четыре отрезка? Другими словами, существует ли граф с девятью вершинами, у которого степень каждой вершины равна 4? Прежде всего, проведём все стороны девятиугольника; они будут означать, что каждая команда провела две встречи. Для того, чтобы получить ещё по две встречи, будем, например, соединять все вершины диагоналями через одну. (Целесообразно для всех вершин держаться одной и той же системы проведения из них отрезков.)

Итак, можно организовать футбольный турнир девяти команд так, чтобы каждая команда провела по четыре встречи.

Задача 15. *Три девочки делили 120 конфет. Сначала Полина дала Валентине и Татьяне столько конфет, сколько у них было. Затем Валентина дала Татьяне и Полине столько конфет, сколько у них стало. И наконец, Татьяна дала Полине и Валентине столько конфет, сколько у них к этому времени имелось. В результате всем досталось поровну. Сколько было конфет у каждой девочки вначале?*

Решение.

В конце у всех девочек стало по 40 конфет, а перед этим у Полины и Валентины было вдвое меньше, то есть по 20, а у Татьяны — 80. А пред этим у Полины и Татьяны было вдвое меньше, то есть у Полины было 10, у Татьяны — 40, у Валентины — 70. И, наконец, заберем половину конфет у Валентины и Татьяны и отдадим Полине. Получилось, что у Полины было 65 конфет, у Валентины — 20, а у Татьяны — 35.

Задача 16. *Дан квадрат $n \times n$ клеток ($n \geqslant 2$). Художник решил закрасить его клетки в три цвета (каждую клетку — в один цвет), так, чтобы у каждой клетки среди ее соседних клеток были клетки двух других цветов (не обязательно, только двух других цветов) (клетки соседние, если у них есть общая сторона). Найдите все n, при которых так можно закрасить клетки данного квадрата.*

Решение.

Обозначим цвета номерами 1, 2, 3. Покажем, что для квадрата 2×2 задача неразрешима.

2	
1	3

Пусть нижняя левая клетка окрашена в цвет 1. Тогда две ее соседние клетки должны быть окрашены в цвета 2 и 3. Так как у клетки 2 только две соседние клетки и одна из них окрашена в цвет 1, то неокрашенная клетка должна быть цвета 3. Аналогично, рассматривая нижнюю правую клетку, заключаем, что неокрашенная клетка сверху должна быть цвета 2. Но эта клетка не может быть одновременно окрашенной в цвета 2 и 3. Следовательно, клетки квадрата 2×2 окрасить так, как требует условие задачи, невозможно. При всех остальных n это можно сделать. Если n — нечетное, то закрасим клетки всех четных столбцов в цвет 3, а остальные — как показано на рисунке:

1	3	2
2	3	1
1	3	2

Если n – четное, то закрасим, как показано ниже:

1	3	2	3
2	3	1	1
1	3	2	2
2	3	1	3

Задача 17. *На столе стоят две коробки, в одной из которых находится m монет, а в другой — n. Саша и Миша играют в такую игру. Они ходят по очереди, причем, начинает ходить Саша, и за один ход может сделать только одну из следующих 3-х операций (любую, по выбору игрока):*

1) *взять из любой коробки 1 монету;*

2) *взять из каждой коробки по монете;*

3) *переложить 1 монету из одной коробки в другую.*

Игра заканчивается, когда в коробках не останется монет. Выигрывает тот, кто сделает ход последним. Найдите все такие m и n, при которых выиграет Саша при его правильной игре. Каждый игрок знает, сколько монет находится в каждой из коробок и какой ход сделал его соперник.

Решение.

Пусть хотя бы одно из чисел m или n нечетно. Укажем выигрышную стратегию Саши: после каждого его хода в каждой из коробок должно быть четное число монет. Покажем, что Саша сможет осуществить эту стратегию. Если в одной коробке четное, а в другой — нечетное число монет, то Саша должен взять 1 монету из той коробки, где их число — нечетно; если же в обеих коробках нечетное число монет, то Саша должен взять из обеих коробок по одной монете. Таким образом, после первого хода в каждой коробке стало по четному числу монет. Теперь как бы ни походил Миша, после его хода хотя бы в одной из коробок число монет будет нечетно, и Саша опять сможет действовать так, как описано выше, и он выиграет.

Если же m и n — оба четные, то уже Миша, применяя описанную выше стратегию, становится победителем.

Задача 18. *Докажите, что для всех натуральных n справедлива формула*

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}.$$

Доказательство.

1) при $n = 1$ левая часть этой формулы принимает вид: $1^3 = 1$; правая часть принимает вид: $\dfrac{1^2(1+1)^2}{4} = 1$. Значит, при $n = 1$ формула верна;

2) предположим, что формула верна при $n = k$, то есть, верно, равенство

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + k^3 = \frac{k^2(k+1)^2}{4};$$

3) докажем, что эта формула верна и при $n = k + 1$, то есть, верно, равенство

$$1^3 + 2^3 + \ldots + k^3 + (k+1)^3 = \frac{(k+1)^2(k+2)^2}{4}.$$

Для этого заметим, что левую часть доказываемого равенства можно записать в виде

$$(1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + k^3) + (k+1)^3.$$

Но по предположению выражение в скобках равно $\dfrac{k^2(k+1)^2}{4}$, и поэтому

$$1^3 + 2^3 + \ldots + k^3 + (k+1)^3 = \frac{k^2(k+1)^2 + 4(k+1)^3}{4} = \frac{(k+1)^2(k^2+4k+4)}{4} = \\ = \frac{(k+1)^2(k+2)^2}{4}.$$

■

Задача 19. *Докажите, что число* $19^{95} + 95^{19}$ *делится нацело на число* $19 + 95$.

Доказательство.

$$19 + 95 = 114 = 2 \cdot 3 \cdot 19.$$

Проверим, делится ли $1995 + 9519$ на 2, на 3 и на 19. Запишем

$$1995 + 9519 = 1919 \cdot (1976 + 519) = \\ = 1919 \cdot ((1976 - 1975) + (1975 - 1974) + \ldots + (192 - 19) + (19 - 1) + \\ + (519 - 517) + (517 - 515) + \ldots + (53 - 5) + 5 + 1).$$

В каждой скобке разность делится на 3 и на 2, так как

$$19n + 1 - 19n = 19n \cdot (19 - 1) = 3 \cdot 6 \cdot 19n$$

и

$$5n + 2 - 5n = 5n \cdot (25 - 1) = 3 \cdot 8 \cdot 5n;$$

кроме этого,

$$1995 + 9519 = 1919 \cdot (1976 + 519)$$

делится на 19. ■

Задача 20. *Найдите две последние цифры числа* 17^{82}.

Решение.

Две последние цифры любого натурального числа определяются остатком от деления этого числа на 100. Следовательно, достаточно решить сравнение

$$17^{82} \equiv r \pmod{100},$$

где $0 \leqslant r < 100$.

Так как $(17, 100) = 1$, то по теореме Эйлера

$$17^{\varphi(n)} \equiv 1 \pmod{100}.$$

Но

$$\varphi(100) = 100\left(1 - \frac{1}{2}\right)\left(1 - \frac{1}{5}\right) = 40,$$

так как $100 = 22 \cdot 52$.

Значит,

$$17^{40} \equiv 1 \pmod{100},$$

и

$$r \equiv 17^{82} \pmod{100} \equiv (17^{40})^2 \cdot 17^2 \pmod{100} \equiv 17^2 \pmod{100} \equiv 89 \pmod{100}.$$

Две последние цифры числа 1782 есть цифры 8 и 9.

Задача 21. *Решите уравнение* $x^2 - 11y^2 = 1$.

Решение.

Запишем его в виде:

$$11y^2 + 1 = x^2.$$

Далее заметим, что

$$(32+2)\cdot 32+1=(32+1)\cdot 2,$$

$$99=99(\text{верно}).$$

Следовательно, $x=10, y=3$ — решение данного уравнения.

Задача 22. *Найдите функцию $f(x)$ определенную на множестве натуральных чисел, удовлетворяющую условию $f(x+1)=f(x)+k$, где k — некоторое действительное число.*

Решение.

Для решения этой задачи используем метод Коши.

Вначале найдем выражения для $x=1,2,3\ldots$. Получим

$$f(2)=f(1)+k,$$

$$f(3)=f(2)+k=f(1)+k+k=f(1)+2k,$$

$$f(4)=f(3)+k=f(1)+3k,\ldots,$$

$$f(n)=f(1)+(x-1)k,$$

где n — натуральное число.

Проверим, действительно ли выполняется последнее равенство:

$$f(n)=f(1)+(x-1)k,$$

где n — натуральное число.

Используем метод математической индукции. Проверим, выполняется ли равенство при $x=1$: $f(1)=f(1)$ — верно. Предположим, что равенство верно при $x=n-1$, где $n\geqslant 2$, то есть $f(n)=f(1)+(n-1)k$ — верно. Докажем, что из этого следует равенство для $x = n$. Так как $f(x+1) = f(x) + k$, то при $x = n$ получим

$$f(n+1) = f(n) + k$$

или

$$f(n+1) = f(1) + (n-1)k + k,$$

$$f(n+1) = f(1) + nk.$$

Значит, равенство верно при любом натуральном n. Решением данного функционального уравнения является функция

$$f(x) = f(1) + (x-1)k,$$

где $f(1)$ — произвольное число.

Задача 23. *Найдите остаток от деления многочлена*

$$f(x) = 1 + x + x^3 + x^9 + x^{27} + x^{81} + x^{243}$$

на многочлен $g(x) = x^2 - 1$.

Решение.

Многочлен $f(x)$ делится на многочлен $g(x)$ с остатком, если существуют такие многочлены $q(x)$ и $r(x)$ (степень $r(x)$ меньше степени $g(x)$), что

$$f(x) = g(x) \cdot q(x) + r(x).$$

Значит,

$$f(x) = (x-1)(x+1) \cdot q(x) + r(x),$$

и степень $r(x) \leqslant 1$, то есть $r(x) = ax + b$.

По теореме Безу

$$\begin{cases} f(\alpha_1) = r(\alpha_1), \\ f(\alpha_2) = r(\alpha_2), \end{cases}$$

где $\alpha_1 = 1$, $\alpha_2 = -1$.

Получаем систему:

$$\begin{cases} a + b = 7, \\ -a + b = -5, \end{cases}$$

Откуда

$$\begin{cases} a = 6, \\ b = 1. \end{cases}$$

Значит, $r(x) = 6x + 1$.

Задача 24. *Стороны треугольника являются корнями уравнения*

$$x^3 - 20x^2 + 280x - 1440 = 0.$$

Найдите площадь треугольника.

Решение.

Пусть x_1, x_2, x_3 — длины сторон треугольника. Для решения задачи используем формулы Виета:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 20, \\ x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 = 280, \\ x_1x_2x_3 = 1440. \end{cases}$$

Используем формулу Герона:

$$S = \sqrt{p(p - x_1)(p - x_2)(p - x_3)},$$

где $p = \frac{x_1+x_2+x_3}{2} = 10$.

Тогда

$$S = \sqrt{10(10 - x_1)(10 - x_2)(10 - x_3)} =$$
$$= \sqrt{10 - 100(x_1 + x_2 + x_3) + 10(x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3) - x_1x_2x_3} = 60.$$

Задача 25. *Докажите, что каковы бы ни были действительные числа a_1, a_2, a_3, a_4,. . . ,a_n и b_1, b_2, b_3, b_4,. . . ,b_n всегда*

$$\sqrt{a_1^2 + b_1^2} + ... + \sqrt{a_n^2 + b_n^2} \geqslant \sqrt{(a_1 + ... + a_n)^2 + (b_1 + ... + b_n)^2}.$$

При каком условии имеет место равенство?

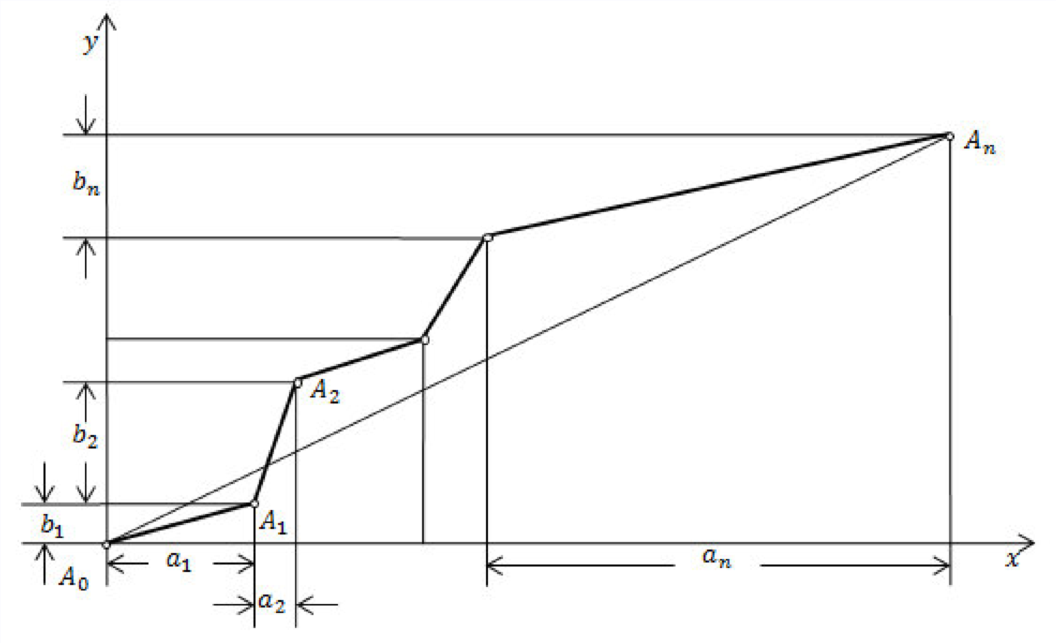
Доказательство. Отметим, что с самого начала, мы можем считать все a_1, a_2, a_3, a_4,. . . ,a_n и b_1, b_2, b_3, b_4,. . . ,b_n положительными.

Рассмотрим ломаную $A_0A_1A_2...A_n$, такую, что проекции отрезков A_0A_1, A_1A_2, ..., $A_{n-1}A_n$ на ось Ox равны соответственно a_1, a_2, a_3, a_4,. . . ,a_n, а на ось Oy — b_1, b_2, b_3, b_4,. . . ,b_n. При этом каждая вершина ломаной будет располагаться правее и выше предшествующей.

Из теоремы Пифагора следует, что

$$A_0A_1 = \sqrt{a_1^2 + b_1^2},$$
$$A_1A_2 = \sqrt{a_2^2 + b_2^2},$$
$$...,$$
$$A_{n-1}A_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2},$$
$$A_0A_n = \sqrt{(a_1 + ... + a_n)^2 + (b_1 + ... + b_n)^2}.$$

Отсюда и получается неравенство задачи.



Ломаная $A_0A_1A_2...A_n$ будет равна отрезку A_0A_n только в том случае, если все ее звенья являются продолжениями одно другого (ломаная является отрезком прямой). Это будет выполняться, если

$$\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = ... = \frac{a_n}{b_n}.$$

Лишь в этом случае будет иметь место равенство:

$$\sqrt{a_1^2 + b_1^2} + ... + \sqrt{a_n^2 + b_n^2} = \sqrt{(a_1 + ... + a_n)^2 + (b_1 + ... + b_n)^2}.$$

■

Заключение

Многие стороны современной жизни нашей страны буквально обязаны своим существованием человеческому интеллекту, его вторжению в материальные и духовные основы цивилизации. Мы с гордостью сегодня наблюдаем за успехами ученых, экономистов, инженеров, врачей, мы радуемся красоте наших городов и сел. Завтрашний день также создается интеллектом, который приводит в движение колоссальные материальные силы, огромный духовный потенциал людей. Каким будет наше с вами будущее, будущее наших детей и внуков, будущее земной цивилизации напрямую зависит от обучения и воспитания интеллектуально одаренных детей. Совокупный человеческий интеллект, чем дальше, тем больше становится главной творческой силой. Будет эта сила служить прогрессу или станет причиной бед и страданий людей? Мир помнит имена гениальных созидателей и не менее гениальных разрушителей.

Факторами, оптимизирующими процесс обучения и воспитания интеллектуально одаренных детей, выступают: ранняя диагностика; ускоренное и обогащенное обучение, применение эффективных педагогических технологий (особенно, проблемного обучения); возможность методов математики, физики, информатики и др. в развитии мышления, формировании индивидуального стиля учебно-познавательной деятельности; образовательная среда, адекватная интеллектуальным потребностям учащихся; педагогическая и психологическая поддержка и сопровождение; реализация системного подхода в организации обучения и воспитания. Ведущими принципами работы с интеллектуально одаренными детьми в общеобразовательных учреждениях являются: сочетание обязательных и осуществляемых по выбору содержания, форм, методов и приемов обучения; принцип индивидуального подхода к каждому интеллектуально одаренному ребенку; принцип обогащения мотивации и содержания деятельности. Значимыми компонентами профессиональной культуры учителя для одаренных должны быть как методы, формы, технологии обучения и воспитания, так и особая педагогическая философия, включающая совокупность ценностей, неразрывно связанных нравственностью, духовностью, личностным способом бытия человека в мире. Образ человека создается воспитанием, главная задача которого состоит в том, чтобы подрастающего человека сделать Человеком. Знания носят двойственный характер. Интеллект отдельного человека может стать силой, служащей людям, а может обернуться против человечества. В основе воспитания интеллектуально одаренных должны лежать общечеловеческие ценности: любовь во всех ее проявлениях, духовность, доброта, порядочность, трудолюбие.

Литература

1. Акимова, С.А. Занимательная математика / С.А. Акимова. — СПб. : Тригон, 1997. — 608 с.

2. Ананьев, Б.Г. Человек как предмет познания / Б.Г. Ананьев. — Л. : Изд-во Ленингр. ун-та, 1968. — 338 с.

3. Бабаева, Ю.Д. Психологический тренинг для выявления одаренности / Ю.Д. Бабаева. — М. : Молодая гвардия, 1997. — 278 с.

4. Бабанский, Ю.К. Проблемное обучение как средство повышения эффективности учения школьников / Ю.К. Бабанский. — Ростов н/Д : Феникс, 1970. – 192 с.

5. Басова, Н.В. Педагогика и практическая психология / Н.В. Басова. — Ростов н/Д : Феникс, 1999. — 416 с.

6. Бахтина, Т.П. Математикон 7: готовимся к олимпиадам, турнирам и математическим боям: пособие для учащихся общеобразоват. шк., гимназий, лицеев / Т.П. Бахтина. — Минск : Аверсэв, 2002. — 253 с.

7. Бахтина, Т.П. Математикон 8: готовимся к олимпиадам, турнирам и математическим боям: пособие для учащихся общеобразоват. учреждений / Т.П. Бахтина. — Минск : Аверсэв, 2003. — 336 с.

8. Бахтина, Т.П. Раз задачка, два задачка...: пособие для учителей / Т.П. Бахтина. — Минск : Асар, 2000. — 224 с.

9. Библер, В.С. Мышление как творчество / В.С. Библер. — М. : Политиздат, 1976. — 399 с.

10. Богданова, Т.Г. Диагностика познавательной сферы ребенка / Т.Г. Богданова, Т.В. Корнилова. — М. : Роспедагентство, 1994. — 148 с.

11. Богоявленская, Д.Б. Одаренность: природа и динамика / Д.Б. Богоявленская. — М. : Издательство Магистр, 1997. — 176 с.

12. Богоявленская, Д.Б. Интеллектуальная активность как проблема творчества / Д.Б. Богоявленская. — Ростов н/Д., 1983. — 176 с.

13. Бурменская, Г.В. Одарённые дети / Г.В. Бурменская, В.М. Слуцкий. — М.: Прогресс, 1991. — 380 с.

14. Виленких, Н.Я. За страницами учебника математики: Арифметика. Алгебра. Геометрия:кн. для учащихся 10-11 кл. общеобразоват. учреждений / Н.Я. Виленкин, Л.П. Шибанов, З.Ф. Шибасова. — М.: Просвещение: Учеб. лит., 1996. — 320 с.

15. Виленкин, Д.В. Познавательная деятельность учащихся при проблемном характере обучения основам наук в школе / Д.В. Вилькеев. — Казань, 1967 — 164 с.

16. Выготский, Л.С. Педагогическая психология / Л.С. Выготский; под ред. В.В. Давыдовы. — М: Педагогика, 1991. — 480 с.

17. Гавриловец, К.В. Воспитание человека: кн. для учителя / К.В. Гавриловц. — Минск: Нар. Асвета, 1985. — 182 с.

18. Гальперин, П.Я. Методы обучения и умственное развитие ребенка / П.Я. Гальперин. — М.: Изд-во МГУ, 1985. — 182 с.

19. Гершунский, Б.С. Философия образования / Б.С. Гершунский. — М.: Флинта, 1998. — 426 с.

20. Гильбух, Ю.З. Умственно одарённый ребенок: психология, диагностика, педагогика / Ю.З. Гильбух. — Киев., 1992. — 120 с.

21. Глейзер, Г.И. История математики в школе / Г.И. Глейзер. — М.: Просвещение, 1964. — 374 с.

22. Гринько, Е.П. Система работы с интеллектуально даренными детьми: монография / Е.П. Гринько; Брест. гос. ун-т имени А.С. Пушкина. — Брест.: Изд-во БрГУ, 2009. — 229 с.

23. Гринько, Е.П. О воспитании интеллектуально одарённых детей / Е.П. Гринько // Праблемы выхавання. — 2011. —№ 3. — С. 30-35.

24. Гринько, Е.П. О системе работы с одаренными детьми. Развитие системы обучения и воспитания одаренных учащихся: материалы республиканской научно-практической конференции, 25 ноябоя 2005г. / Е.П. Гринько; ред. кол. : С.А. Гуцанович [и др.]. — Минск.: НИО, 2005. — С. 312-318

25. Гринько, Е.П. Примерное планирование учебного материала и контрольные работы по матемкатике 11 кл. (повышенный уровень) / Е.П. Гринько // Матэматыка: праблемы выхавання. — 2006. — № 2. — С. 28-38.

26. Гринько, Е.П. Примерное планирование учебного материала и контрольные работы по математике 10 кл. (повышенный уровень) / Е.П. Гринько // Матэматыка: праблемы выкладання. — 2006. — № 1. — С. 12–21.

27. Гринько, Е.П. Проблемы обучения и воспитания интеллектуально одаренных детей / Е.П. Гринько // Социально экономическое и историко-культурное развитие Полесского региона в XXI веке: материалы научно-практической конференции, май 2006 г.; под ред. Ю.И. Дежурко. — Пинск, 2006. — С. 17–19.

28. Гринько, Е.П. Организация работы с интеллектуально одарен-ными детьми в условиях профильного обучения / Е.П. Гринько; Брест. гос. ун-т имени А.С. Пушкина; под общ. ред. С.А. Тузика; редкол.: И.В. Белько [и др.]. // Инновационные технологии управления в экономике 2007: сб. материалов респ. науч.-практ. конф., 24–25 апр. 2007 г. — Брест : Изд-во БрГУ, 2007. — С. 163–164.

29. Гринько, Е.П. О качестве работы с интеллектуально одаренными детьми в общеобразовательных учреждениях / Е.П. Гринько; под общ. ред. Т.В. Пиво-варук ; редкол.: В.С. Дуванова., Н.А. Каллаур, С.В. Селивоник; Брест. гос. ун-т имени А.С. Пушкина // Качество математического образования: проблемы, состояние, перспективы : сб. материалов респ. науч.-практ. конф., Брест, 23–24 окт. 2007 г. — Брест : Изд-во БрГУ, 2007. — С. 31–33.

30. Гринько, Е.П. Технологии обучения интеллектуально одаренных детей / Е.П. Гринько; под общ. ред. Т.В. Пивоварук; редкол.: В.С. Дувано-ва., Н.А. Каллаур, С.В. Селивоник; Брест. гос. ун-т имени А.С. Пушкина // Качество математического образования: проблемы, состояние, перспективы : сб. материалов респ. науч.-практ. конф., Брест, 23–24 окт. 2007 г. — Брест : Изд-во БрГУ, 2007. — С. 154–156.

31. Гринько, Е.П. О необходимости специальной подготовки учителей математики к работе с интеллектуально одаренными детьми / Е.П. Гринько; Брест. гос. ун-т имени А.С. Пушкина; под общ. ред. А.Н. Сендер // Методология, теория и практика естественно-математического и педагогического образования: сб. материалов Междунар. науч.-практ. конф., май 2007 г. — Брест : Изд-во БрГУ, 2007. — С. 16–18.

32. Гринько, Е.П. Обучение интеллектуально одаренных детей: методологические основания / Е.П. Гринько; Брест. гос. ун-т имени А.С. Пушкина // Педагогическая наука в условиях создания национальной инновационной системы: сб.

материалов респ. науч.-практ. конф., 24 апре-ля 2008 г. — Брест : Изд-во БрГУ, 2008. — С. 36–39.

33. Гузик, Н.П. Учить учиться / Н.П. Гузик. — М. : Педагогика, 1981. — 207 с.

34. Гусак, А.А. В мире чисел / А.А. Гусак, Г.М. Гусак, Е.А. Гусак. — Минск : Народная асвета, 1987. — 190 с.

35. Давыдов, У.С. Задачи на исследование уравнений / У.С. Давыдов. – Минск, 1962. — 210 с.

36. Депман, И.Я. За страницами учебника математики: пособие для уч-ся 5–6 классов ср. школы / И.Я. Депман. — М. : Просвещение, 1989. — 286 с.

37. Доровской, А.И. Сто советов по развитию одаренности детей. Родителям, воспитателям, учителям / А.И. Доровской. — М. : Роспедагентство, 1997. — 178 с.

38. Задачи Минской городской математической олимпиады млад-ших школьников / Е.А. Барабанов [и др.]. — Минск : Бел. ассоц. «Конкурс», 2005. — 352 с.

39. Кабанова-Меллер, Е.Н. Формирование приемов умственной деятельности и умственное развитие учащихся / Е.Н. Кабанова-Меллер. — М. : Просвещение, 1968. — 288с.

40. Кабуш, В.Т. Гуманистическое воспитание школьников: теория и методика: пособие для педагогов / В.Т. Кабуш; Акад. последиплом. образования. — 3-е изд. — Минск, 2004. — 200 с.

41. Каннель-Белов, А.Я. Как решают нестандартные задачи / А.Я. Каннель-Белов, А.К. Ковальджи. — М. : МЦНМО, 2004. — 90 с.

42. Капица, П.Л. Эксперимент. Теория. Практика: статьи, выступ-ления / П.Л. Капица. — М. : Наука, 1981. — 495 с.

43. Коджаспирова, Г.М. Педагогический словарь: для студ. высш. и сред. пед. учеб. заведений / Г.М. Коджаспирова, А.Ю. Коджаспиров. — М. : Изд. центр «Академия», 2001. — 176 с.

44. Колмогоров, А.Н. Математика в ее историческом развитии / А.Н. Колмогоров; под ред. В.А. Успенского. — М. : Наука, 1991. — 224 с.

45. Коротяев, Б.И. Учение – процесс творческий: кн. для учителя: из опыта работы / Б.И. Коротяев. — М. : Просвещение, 1989. — 196 с.

46. Коршунов, С.М. Развитие учебно-исследовательской деятельности учащихся (тематика и методические рекомендации по физике, математике и информатике) / С.М. Коршунов. — М. : МФТИ, 1997. — 90 с.

47. Краткий словарь по философии / И.К. Пантина; под общ. ред. И.В. Блауберга. — 4-е изд. — М. : Политиздат, 1982. — 431 с.

48. Крутецкий, В.А. Психология математических способностей школьников / В.А. Крутецкий. — М. : Просвещение, 1968. — 175 с.

49. Кудрявцев, Т.В. Проблемное обучение: истоки, сущность, пер-спективы / ,Т.В. Кудрявцев. — М. : Знание, 1991. — 157 с.

50. Ландау, Э. Одаренность требует мужества: психологическое сопровождение одаренного ребенка / Э. Ландау; пер. с нем. А.П. Голубева; науч. ред. рус. текста Н.М. Назарова. — М. : Издательский центр «Академия», 2002. — 180 с.

51. Лейтес, Н.С. Судьба вундеркиндов / Н.С. Лейтес // Семья и школа. — 1990. — № 12. — С. 27–30.

52. Лернер, И.Я. Проблемное обучение / И.Я. Лернер. — М. : Знание, 1974. – 64 с.

53. Матюшкин, А.М. Загадки одаренности. Проблемы практической диагностики / А.М. Матюшкин. — М. : Школа-пресс, 1993. — 128 с.

54. Матюшкин, А.М. Проблемные ситуации в мышлении и обуче-нии / А.М. Матюшкин. — М. : Педагогика, 1972. — 228 с.

55. Махмутов, М.И. Организация проблемного обучения в школе. Книга для учителей / М.И. Махмутов. — М. : Просвещение, 1977. — 239 с.

56. Махмутов, М.И. Проблемное обучение. Основные вопросы тео-рии / М.И. Махмутов. — М. : Педагогика, 1975. — 218 с.

57. Мелхорн, Г.В. Гениями не рождаются: общество и способности человека: кн. для учителя / Г.В. Мелхорн, — М. : Просвещение, 1989. — 310 с.

58. Менчинская, Н.А. Проблемы учения и умственного развития школьника / Н.А. Менчинская. — М. : Педагогика, 1989. — 268 с.

59. Новейший философский словарь. — 2-е изд., перераб. и доп. — Минск : Интерпрессервис; Кн. дом, 2001. — 1280 с.

60. Обухова, Л.Ф. Этапы развития детского мышления / Л.Ф. Обу-хова. — М. : Просвещение, 1972. — 192 с.

61. Оконь, В.В. Основы проблемного обучения / В.В. Оконь. — М. : Просвещение, 1968. — 186 с.

62. Петровский, Г.Н. Педагогические и образовательные техноло-гии современной школы / Г.Н. Петровский. — Минск : НИО, 2003. — 360 с.

63. Психология: словарь / под общ. ред. А.В. Петровского, М.Г. Ярошевского. — 2-е изд., испр. и доп. — М. : Политиздат, 1990. — 494 с.

64. Рензулли, Дж. Модель обогащающего школьного обучения: практическая программа стимулирования одаренных детей. Основные современные концепции творчества и одаренности / Дж. Рензулли, С.М. Рис. — М. : Молодая гвардия, 1997.

65. Российская педагогическая энциклопедия: в 2 т. / гл. ред. В.В. Давыдов. — М. : Большая Рос. Энцикл., 1993, 1998.

66. Рубинштейн, С.Л. Основы общей психологии / С.Л. Рубин-штейн. — СПб. : Питерком, 1998. — 705 с.

67. Селевко Г.К. Современные образовательные технологии: учеб. пособие. — М. : Нар. образование, 1998. — 256 с.

68. Савенков, А.И. Одаренные дети в детском саду и школе: учеб. пособие для студ. высш. пед. учеб. заведений / А.И. Савенков. — М. : Издательский центр «Академия», 2000. — 232 с.

69. Современный словарь по педагогике / сост. Рапацевич Е.С. — Минск : Современное слово, 2001. — 928 с.

70. Столяр, А.А. Как математика ум в порядок приводит / А.А. Столяр. — Минск : Высш. школа, 1991. — 206 с.

71. Талызина, Н.Ф. Педагогическая психология: психодиагностика интеллекта / Н.Ф. Талызина, Ю.В. Карпов. — М. : Изд-во МГУ, 1987. — 189 с.

72. Теплов, Б.М. Избранные труды: в 5 т. / Б.М. Теплов. — М. : Педагогика, 1985. — Т. 2. — 425 с.

73. Ушинский, К.Д. Избранные педагогические сочинения: в 2 т. / К.Д. Ушинский; под ред. В.Я. Струминского. — М. : Учпедгиз, 1953. — Т. 1. — 639 с.

74. Холодная, М.А. Задачи интеллектуального воспитания учащихся в условиях современной школы / М.А. Холодная // Сайт проекта «Математика, психология, интеллект». —– Режим доступа: http://fp.nsk.fio.ru/works/022/mpi/psihol_2_2.htm.

75. Холодная, М.А. Когнитивные стили и интеллектуальные спо-собности // Псиxол. журн. — Т. 13. — № 3. — 1992. — С. 84–93.

76. Холодная, М.А. Психология интеллекта: парадоксы исследования / М.А. Холодная. — Томск, 1997. — 160 с.

77. Хуторской, А.В. Эвристическое обучение: теория, методология, практика / А.В. Хуторской. — М. : Международная педагогическая академия, 1998. — 226 с.

78. Шустеф, Ф.М. Материал для внеклассной работы по математике / Ф.М. Шустеф. — Минск : Нар. Асвета, 1984. — 224 с.

79. Эрдниев, П.М. Укрупнение дидактических единиц как технология обучения / П.М. Эрдниев. — М. : Столетие, 1995. — 272 с.

80. Юркевич, В.С. Одаренный ребенок: иллюзии и реальность: кн. для учителей и родителей / В.С. Юркевич. — М. : Просвещение, 1996. — 245 с.

81. De Groot, A.D. Thought and choice in chess / A.D. De Groot. — Mouton, 1978.

82. Takacs Carol Addison. Enjoy your gifted child / Carol Addison Takacs. — New York, 1991.