МАТЭМАТЫКА

УДК 371.312:517.0

М.А.Калавур

Навучанне алгарытмам рашэння задач

Школьны курс матэматыкі ўтрымлівае шмат класаў стандартных задач алгарытмічнага тыпу, для якіх існуе агульны метад рашэння, які пераўтвараецца іншым разам у алгарытм. Узнікае магчымасць навучання вучняў пабудове агульных метадаў і алгарытмаў рашэння задач.

Прымяненне алгарытмаў надае мысленню рацыянальнасць і эканамічнасць. Веданне вучнямі агульных метадаў рашэння дапамагае кіраванню і самакіраванню пазнавальнай дзейнасцю. Але не кожны агульны метад рашэння задач з'яўляецца алгарытмам.

Пад алгарытмам звычайна разумеюць некаторае яснае (якое адназначна разумеецца) і дакладнае прадпісанне, выкананне якога за канечны лік крокаў заўсёды прыводзіць да рашэння любой задачы з таго класа задач, для якога гэта прадпісанне прызначана.

Навучанне павінна забяспечыць засваенне ўсімі вучнямі ўменняў і навыкаў прымянення гэтых алгарытмаў да любых канкрэтных задач тых класаў, для якіх яны прызначаны. Гэты вынік можа быць дасягнуты рознымі шляхамі.

Калі навучанне зводзіцца да паведамлення школьнікам гатовых алгарытмаў, якія яны павінны запомніць механічна, прымяняючы дадзены алгарытм шмат разоў пры рашэнні аднастайных задач, то такое навучанне не садзейнічае развіццю творчых здольнасцей вучняў. Пры гэтым узнікае небяспека фармалізму, нятворчага падыходу вучняў да рашэння задач.

Правільны падыход прадугледжвае пошук неабходных алгарытмаў шляхам стварэння такіх сітуацый, у якіх вучні могуць самастойна адкрыць агульны метад рашэння задач пэўнага класа. Гэте адкрыццё адбываецца пры рашэнні некаторых канкрэтных задач дадзенага класа з дапамогай аналізу, супастаўлення, параўнання, аналогіі, абагульнення рашэнняў. У падобнага роду дзейнасці ўдзельнічаюць састаўныя элементы творчага мыслення.

У школьнай матэматыцы мы маем справу з вялікай разнастайнасцю вырашальных і вылічальных алгарытмаў. Аднак сустракаецца шмат агульных метадаў рашэння задач, якія вельмі падобны на алгарытмы, але валодаюць не ўсімі ўласцівасцямі, што характарызуюць кожны алгарытм.

Алгарытм звычайна характарызуецца дэтэрмінаванасцю, масавасцю, выніковасцю [3].

Дэтэрмінаванасць – строга вызначаная паслядоўнасць крокаў алгарытму, дакладнасць і зразумеласць усіх адпаведных яго ўказанняў.

Масавасць – прыгоднасць алгарытма для рашэння цэлага класа задач.

Выніковасць – абавязковае атрыманне шуканага выніку за канечны лік крокаў.

Адкрыццё і фармаванне алгарытмаў стала адной з важных задач матэматыкі з моманту ўзнікнення яе як навукі. Навучанне алгарытмам не толькі не змяншае ініцыятывы вучняў, творчага падыходу да рашэння, пошуку, здагадкі і інтуіцыі, але і служыць развіццю шэрагу якасцяў лагічнага і творчага мыслення. Выпрацоўка ў вучняў пэўных алгарытмічных прыёмаў разумовай працы вызваляе іх інтэлектуальныя сілы для рашэння новых, больш складаных задач, у тым ліку творчага характару. Прымяненне алгарытмаў патрабуе ад вучняў разумовай дзейнасці ў працэсе аналізу ўмоў выкарыстання неабходнага алгарытму.

У методыцы матэматыкі [4] ўстаноўлены патрабаванні да навучання алгарытмам. Для знаходжання алгарытму рашэння задач пэўнага класа неабходна правесці наступныя дзеянні:

а) падрабязны аналіз разнастайнасці прыватных задач гэтага класа, якія прыводзяць да розных вынікаў;

б) выяўленне дзеянняў (аперацый) і паслядоўнасці іх выканання пры рашэнні прыватных задач дадзенага класа;

в) выяўленне ўсіх лагічных умоў, якія аказваюць уплыў на далейшы ход працэсу і прыводзяць да розных вынікаў, у працэсе абагульнення прыватных задач;

г) вызначэнне паслядоўнасці аперацый для ўсіх магчымых выпадкаў выканання лагічных умоў, якія былі знойдзены загадзя.

Разгледзім прыклады навучання алгарытмам. Пры ўвядзенні паняцця вытворнай функцыі ў пункце [2] адразу адкрываецца алгарытм знаходжання вытворнай па азначэнні. Пабудова алгарытму адбываецца ў працэсе рашэння канкрэтнай фізічнай задачы аб імгненнай хуткасці і паралельнага абагульнення на выпадак адвольнай функцыі. Атрымліваецца правіла знаходжання вытворнай функцыі па азначэнні, якое складаецца з чатырох крокаў.

1. Для пункта x_0 надаем прырост $\Delta x \neq 0$, атрымаем пункт $x = x_0 + \Delta x$.
2. Знаходзім прырост функцыі ў пункце x_0
$$\Delta f(x_0) = f(x) - f(x_0).$$
3. Знаходзім стасунак прыросту функцыі да прыросту аргумента $\Delta f(x_0)/\Delta x$.
4. Знаходзім лік, да якога імкнецца стасунак прыросту функцыі да прыросту аргумента пры $\Delta x \to 0$ ($\Delta f(x_0)/\Delta x) \to f'(x_0)$.

Прымяняючы гэтае правіла для рашэння практычных задач, звяртаем увагу вучняў на патрабаванне існавання ліку, да якога імкнецца стасунак прыросту функцыі да прыросту аргумента пры імкненні апошняга да нуля. У гэтым выпадку функцыя будзе дыферэнцаванай у пункце x_0. Карысна разгледзець задачу аб знаходжанні вытворнай функцыі $y = |x|$ у пункце $x = 0$. Пасля гэтага ўдакладняецца атрыманае вышэй правіла і вучні самастойна прыходзяць да неабходнага алгарытму.

1. Для пункта x_0 надаем прырост $\Delta x \neq 0$, атрымаем пункт $x = x_0 + \Delta x$.
2. Знаходзім прырост функцыі ў пункце x_0
$$\Delta f(x_0) = f(x) - f(x_0).$$
3. Знаходзім стасунак прыросту функцыі да прыросту аргумента ў пункце x_0
$$\frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x}.$$
4. Калі існуе лік, да якога імкнецца стасунак $\Delta f(x_0)/\Delta x$, то пераходзім да ўказання 5, у процілеглым выпадку пераходзім да ўказання 6.

5. Знаходзім лік, да якога імкнецца стасунак $\Delta f(x_0)/\Delta x$ пры $\Delta x \to 0$

$$\frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x} \to f'(x_0).$$

6. Функцыя ў дадзеным пункце x_0 не мае вытворнай. Працэс закончаны.

У якасці другога прыкладу разгледзім пабудову алгарытму знаходжання прамежкаў нарастання (спадання) функцыі. Пасля доказу прыкметы нарастання (спадання) і рашэння задачы, прапанаванай пасля гэтага [1, с.140], вучні аналізуюць рашэнне і спрабуюць самастойна адкрыць такі алгарытм. На дадзеным этапе ён будзе выглядаць наступным чынам:

1. Знайдзіце абсяг вызначэння функцыі.
2. Знайдзіце вытворную.
3. Рашыце няроўнасць.
4. Па знаку вытворнай вызначце шуканыя прамежкі.

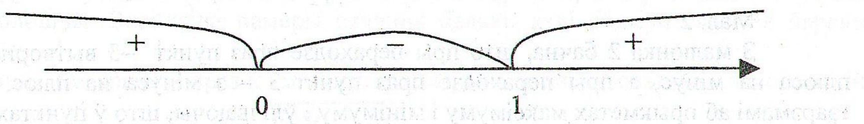
Пасля гэтага можна разгледзець задачу аб знаходжанні прамежкаў манатоннасці функцыі

$$f(x) = 6x + \frac{3}{x^2}.$$

Пры рашэнні гэтай задачы вучні бачаць, што абсягам вызначэння функцыі будзе аб'яднанне прамежкаў $(-\infty; 0)$ і $(0; +\infty)$. Узнікае пытанне, як дзейнічаць у гэтым выпадку. На дапамогу прыходзіць заўвага 2 з падручніка [1]. Вучні могуць карыстацца прыёмам: пункты, у якіх вытворная функцыі роўная нулю ці не існуе, разбіваюць абсяг вызначэння функцыі f на прамежкі, у кожным з якіх f' захоўвае пастаянны знак. У нашым выпадку функцыя ў пункце $x = 0$ не мае вытворнай. Каб вызначыць пункты, у якіх вытворная роўная нулю, трэба знайсці вытворную и прыраўнаць яе да нуля. Вучні знаходзяць:

$$f'(x) = 6 - \frac{6}{x^3}.$$

Адсюль $f'(x) = 0$ пры $x = 1$. Згодна з заўвагай 2, $f'(x)$ будзе захоўваць пастаянны знак на кожным з трох прамежкаў: $(-\infty;0)$, $(0;1)$ і $(1;+\infty)$. На гэтыя прамежкі пункты 0 і 1 разбіваюць абсяг вызначэння функцыі $f(x)$. Вызначаем знак вытворнай на кожным прамежку.



Мал. 1

Выкарыстоўваем даказаную тэарэму і малюнак 1, атрымаем, што функцыя нарастае на прамежках $(-\infty;0)$ і $(1;+\infty)$. Узнікае пытанне, што рабіць з пунктам $x=1$. На дапамогу прыходзіць заўвага 1, зробленая пасля доказу тэарэмы і рашэння прыкладу. Такім чынам, пункт $x = 1$ можна далучыць да прамежку нарастання $[1; +\infty)$ і да прамежку спадання $(0;1]$.

Пасля рашэння гэтай задачы вучням прапануецца ўнесці змены ў алгарытм знаходжання прамежкаў нарастання (спадання) функцыі. Атрымаецца наступны алгарытм.

1. Знайдзіце абсяг вызначэння функцыі.
2. Знайдзіце вытворную.
3. Знайдзіце прамежкі знакапастаянства вытворнай.
4. Вызначце знакі вытворнай на кожным прамежку.
5. Па знаку вытворнай вызначце шуканыя прамежкі.
6. Далучыце пункты, у якіх вытворная роўная нулю, да адпаведных прамежкаў.

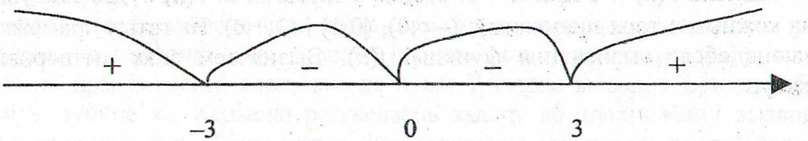
Разгледзім пабудову алгарытма знаходжання пунктаў экстрэмуму функцый, зададзеных формуламі. Пры пабудове алгарытму выкарыстоўваюцца тэарэтычныя веды, засвоеныя пасля вывучэння тэмы «Крытычныя пункты функцыі, яе максімумы і мінімумы». Звяртаецца ўвага вучняў на тое, што пункты экстрэмуму можна шукаць сярод крытычных пунктаў; для вызначэння віду экстрэмуму выкарыстоўваюцца дастатковыя прыкметы экстрэмуму. Рашым задачу.

<u>Задача.</u> Знайсці экстрэмумы функцыі $f(x) = \frac{x}{3} + \frac{3}{x}$.

Абсяг вызначэння дадзенай функцыі – аб'яднанне прамежкаў $(-\infty;0)$ і $(0;+\infty)$. Для вызначэння крытычных пунктаў трэба знайсці вытворную.

$$f'(x) = \frac{x^2-9}{3x^2}.$$

Тады $f'(x) = 0$ пры $x = -3$ і $x = 3$. Функцыя не вызначана ў пункце $x = 0$. Значыць, функцыя мае два крытычныя пункты: -3 і 3. Каб прымяніць дастатковыя прыкметы існавання экстрэмуму, трэба ведаць паводзіны вытворнай пры пераходзе праз крытычныя пункты і ўстанавіць непарыўнасць функцыі ў гэтых пунктах. Знойдзем знак вытворнай на чатырох прамежках: $(-\infty;-3)$, $(-3;0)$, $(0;3)$, $(3;+\infty)$. З'яўленне пункта $x = 0$ пры вызначэнні прамежкаў вучні могуць растлумачыць пры дапамозе заўвагі з папярэдняга пункта.



Мал. 2

З малюнка 2 бачна, што пры пераходзе праз пункт -3 вытворная мяняе знак з плюса на мінус, а пры пераходзе праз пункт 3 – з мінуса на плюс. Карыстаючыся тэарэмамі аб прыкметах максімуму і мінімуму і ўлічваючы, што ў пунктах -3 і 3 функцыя непарыўная, вучні ўстанаўліваюць наяўнасць максімуму ў пункце -3 і наяўнасць мінімуму ў пункце 3. Зараз можна знайсці экстрэмумы функцыі, вызначыўшы яе значэнні ў пунктах экстрэмуму. Падстаўляем значэнні -3 і 3 у формулу, якая задае функцыю, атрымаем:

$$f(-3) = -2,\ f_{max} = -2;\ f(3) = 2,\ f_{min} = 2.$$

Правёўшы аналіз рашэння задачы, вучні могуць пабудаваць алгарытм знаходжання экстрэмумаў функцыі.

1. Знайдзіце абсяг вызначэння функцыі.

2. Знайдзіце вытворную.
3. Знайдзіце крытычныя пункты.
4. Вызначце прамежкі знакапастаянства і знак вытворнай на кожным прамежку.
5. Знайдзіце пункты экстрэмуму функцыі.
6. Знайдзіце экстрэмумы функцыі.

Атрыманы метад можна выкарыстаць для пабудовы схемы даследвання функцыі, дадаўшы знаходжанне прамежкаў нарастання і спадання. Папярэдне з вучнямі праводзіцца праца па адшуканні магчымасцяў скарачэння працэсу даследвання функцыі. У выніку гэтага ўстанаўліваецца, што нам можа дапамагчы цотнасць ці няцотнасць функцыі, а таксама перыядычнасць функцыі. Значыць, у схему даследавання функцыі трэба ўключыць пункты аб вызначэнні цотнасці, няцотнасці і перыядычнасці функцыі. Прычым, гэтыя пункты мэтазгодна паставіць у пачатку. Такім чынам, атрымаем наступную схему даследавання функцыі.

1. Знайдзіце абсяг вызначэння функцыі.
2. Даследуйце функцыю на цотнасць і няцотнасць.
3. Даследуйце функцыю на перыядычнасць.
4. Знайдзіце вытворную.
5. Знайдзіце крытычныя пункты.
6. Вызначце прамежкі знакапастаянства і знак вытворнай на кожным прамежку.
7. Знайдзіце прамежкі нарастання і спадання функцыі.
8. Знайдзіце пункты экстрэмуму.
9. Знайдзіце значэнні функцыі ў крытычных пунктах.

Для больш дакладнай пабудовы графіка функцыі можна знайсці некаторыя дадатковыя пункты. У прыватнасці, карысна знайсці пункты перасячэння графіка з восямі каардынат, даследаваць паводзіны функцыі пры $|x| \to +\infty$.

Пасля адкрыцця алгарытму можна скласці блок–схему, якая з'яўляецца вынікам вывучэння пытання і адначасова сродкам нагляднасці, што садзейнічае трываламу засваенню метаду рашэння задач дадзенага класа. Складанне блок–схемы ўяўляе сабою практыкаванне з важнымі дыдактычнымі і развівальнымі функцыямі.

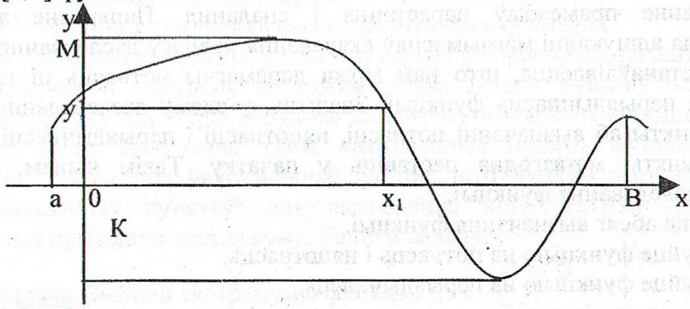
Разгледзім навучанне праз задачы пры вывучэнні тэмы «Найбольшыя і найменшыя значэнні функцыі». Вывучэнне можна пачаць з рашэння наступнай задачы.

Задача. З круглага бервяна выразаюць бэльку з прамавугольным сячэннем найбольшай плошчы. Знайдзіце памеры сячэння бэлькі, калі радыус сячэння бервяна роўны 20 см.

Рашэнне. Абазначым праз x см палавіну шырыні прамавугольніка, тады палавіна даўжыні прамавугольніка роўная $\sqrt{400-x^2}$ см, а плошча прамавугольніка роўная $4x\cdot\sqrt{400-x^2}$ см^2. Па сэнсе задачы лік x задавальняе няроўнасці $0<x<20$, г. зн. належыць інтэрвалу (0;20). Такім чынам, мы прыйшлі да наступнай задачы: знайсці найбольшае значэнне функцыі $S(x)=4x\cdot\sqrt{400-x^2}$ на інтэрвале (0;20). Узнікае пытанне, ці існуе найбольшае значэнне дадзенай функцыі на зададзеным прамежку. На пастаўленае пытанне станоўчы адказ дае тэарэма Веерштраса, доказ якой выходзіць за рамкі школьнай праграмы.

Тэарэма Веерштраса. Калі функцыя непарыўная на адрэзку [*а;в*], то яна мае на гэтым адрэзку найбольшае і найменшае значэнні, г.з. існуюць пункты адрэзка [*а;в*], у якіх функцыя прымае найбольшае і найменшае значэнні на [*а;в*].

Праілюструем гэтую тэарэму геаметрычна. Разгледзім графік непарыўнай на адрэзку [*а;в*] функцыі.



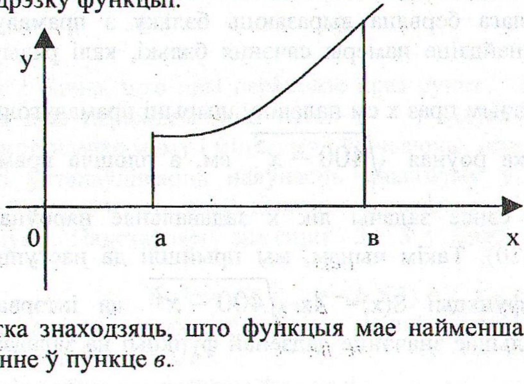
Мал. 3

Калі значэнні аргумента х знаходзяцца паміж *а* і *в*, г.з. $a \leq x \leq в$, то існуюць такія лікі К і М, што ўсе значэнні функцыі, якія адпавядаюць дадзеным значэнням аргумента, размяшчаюцца паміж гэтымі лікамі, г.з. $K \leq y \leq M$. Іншымі словамі, для любога х з адрэзка [*а;в*] выконваецца няроўнасць $K \leq f(x) \leq M$. Пасля высвятлення сутнасці паняццяў найбольшага і найменшага значэнняў функцыі на адрэзку прыступім да пабудовы алгарытму іх знаходжання.

Выведзем правіла знаходжання найбольшага і найменшага значэнняў функцыі f(x), непарыўнай на адрэзку [*а;в*], якая мае на ім канечны лік крытычных пунктаў. Разгледзім задачы.

<u>Задача 1.</u> Няхай дадзена нарастальная на адрэзку функцыя. Знайсці найбольшае і найменшае значэнні функцыі на гэтым адрэзку.

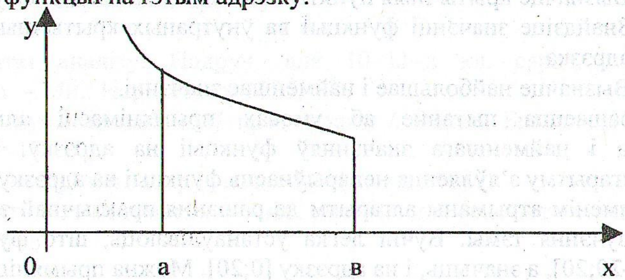
Пры рашэнні задачы вучні ўстанаўліваюць, што функцыя дасягае свайго найменшага значэння ў левым канцы адрэзка, а найбольшае значэнне дасягае ў правым канцы адрэзка. Для нагляднай ілюстрацыі выкарыстоўваем наступны малюнак з графікам нарастальнай на адрэзку функцыі.



Мал. 4

Вучні хутка знаходзяць, што функцыя мае найменшае значэнне ў пункце *а*, а найбольшае значэнне ў пункце *в*.

Задача 2. Няхай дадзена спадальная на адрэзку функцыя. Знайсці найменшае і найбольшае значэнні функцыі на гэтым адрэзку.

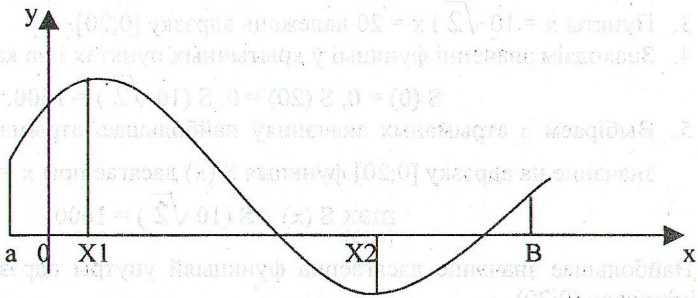


Мал. 5

Пры рашэнні атрымліваецца, што функцыя мае найменшае значэнне ў пункце *в*, а найбольшае значэнне – у пункце *а*.

Пасля абагульнення гэтых рашэнняў вучні робяць выснову, што калі непарыўная на адрэзку функцыя не мае крытычных пунктаў, то яна прымае найбольшае і найменшае значэнні на канцах адрэзка.

Задача 3. Няхай дадзена функцыя, непарыўная на адрэзку, якая мае на ім канечны лік крытычных пунктаў.



Мал. 6

Перад вучнямі ставяцца пытанні. Як паводзіць сябе функцыя да крытычнага пункта x_1 і пасля яго? Як паводзіць сябе функцыя да крытычнага пункта x_2 і пасля яго? Што можна сказаць аб паводзінах функцыі на прамежках $[a;x_1)$, $(x_1;x_2)$, $(x_2;в]$?

Пасля абагульнення адказаў вучні робяць выснову: крытычныя пункты функцыі разбіваюць адрэзак на прамежкі, дзе функцыя манатонна нарастае або спадае. Пры дапамозе высновы, атрыманай пасля рашэння першых дзвюх задач, вучні ўстанаўліваюць, што на кожным з гэтых прамежкаў функцыя мае найбольшае і найменшае значэнні на канцах, г.з. функцыя можа мець найбольшае і найменшае значэнні толькі ў крытычных пунктах x_1 і x_2, а таксама на канцах адрэзка $[a;в]$. Як тады знайсці найбольшае і найменшае значэнні функцыі на адрэзку? Адказваючы на гэтае пытанне, школьнікі атрымаюць правіла: каб знайсці найбольшае і найменшае значэнні функцыі, якая мае на адрэзку канечны лік крытычных пунктаў, трэба вылічыць значэнні функцыі ва ўсіх крытычных пунктах і на канцах адрэзка і з атрыманых значэнняў выбраць найбольшае і найменшае.

Зыходзячы з атрыманага правіла, можна пабудаваць алгарытм знаходжання найбольшага і найменшага значэнняў функцыі, непарыўнай на адрэзку.

1. Знайдзіце вытворную функцыі.

2. Знайдзіце крытычныя пункты функцыі.
3. Вызначце крытычныя пункты, якія належаць дадзенаму адрэзку.
4. Знайдзіце значэнні функцыі ва ўнутраных крытычных пунктах і на канцах адрэзка.
5. Вызначце найбольшае і найменшае значэнні.

Вырашаецца пытанне аб умовах прымянімасці алгарытму знаходжання найбольшага і найменшага значэнняў функцыі на адрэзку. Умовай прымянімасці дадзенага алгарытму з'яўляецца непарыўнасць функцыі на адрэзку.

Прыменім атрыманы алгарытм да рашэння практычнай задачы, прапанаванай у пачатку вывучэння тэмы. Вучні лёгка ўстанаўліваюць, што функцыя непарыўная на прамежку [–20;20], а значыць, і на адрэзку [0;20]. Можна прымяніць алгарытм.

1. Знаходзім вытворную функцыі:

$$S'(x) = \frac{8(200 - x^2)}{\sqrt{400 - x^2}}.$$

2. Знаходзім крытычныя пункты функцыі. Вытворная не існуе пры $x = -20$ і $x = 20$.

$$S'(x) = 0, \text{ г. зн. } x = -10\sqrt{2} \text{ або } x = 10\sqrt{2}$$

3. Пункты $x = 10\sqrt{2}$ і $x = 20$ належаць адрэзку [0;20].
4. Знаходзім значэнні функцыі ў крытычных пунктах і на канцах адрэзка:

$$S(0) = 0,\ S(20) = 0,\ S(10\sqrt{2}) = 1600.$$

5. Выбіраем з атрыманых значэнняў найбольшае, атрымаем, што найбольшае значэнне на адрэзку [0;20] функцыя $S(x)$ дасягае пры $x = 10\sqrt{2}$:

$$\max_{[0;20]} S(x) = S(10\sqrt{2}) = 1600.$$

Найбольшае значэнне дасягаецца функцыяй унутры адрэзка [0;20], значыць, і ўнутры інтэрвалу (0;20).

Застаецца ўспомніць, што x – палавіна шырыні прамавугольніка, які пры дадзеных умовах мае найбольшую плошчу. Атрыманы вынік азначае, што максімальную плошчу прамавугольнае сячэнне мае з шырыней $20\sqrt{2}$ см і даўжыней $2\cdot\sqrt{400 - (10\sqrt{2})^2} = 20\sqrt{2}$ см.

Зробім некаторыя высновы.

1. Навучанне праз задачы дазваляе ствараць вучэбныя сітуацыі для самастойнага знаходжання школьнікамі алгарытму рашэння задач пэўнага класа.
2. Матывацыя вывучэння пэўнага алгарытму адбываецца ў працэсе рашэння практычнай задачы, якая зводзіцца да матэматычнай задачы з класа задач, можна рашыць з дапамогай дадзенага алгарытму.
3. Пры навучанні праз задачы вучні прымаюць актыўны ўдзел у пабудове алгарытму, асэнсоўваючы яго лагічную структуру і асобныя дзеянні па яго стварэнні.

4. Навучанне алгарытмам праз задачы дапускае высвятленне ўмоў прымянімасці пэўнага алгарытму.

1. Алгебра і пачаткі аналізу: Падруч. для 10–11–х кл. сярэд. шк./ Пад рэд. А.М.Калмагорава. – Мн.: Нар. асвета, 1995.
2. М.А. Калавур Вывучэнне паняццяў праз задачы // Веснік Брэсцкага універсітэта.– 1999.– № 4.– С. 9–19.
3. Криницкий И.А. Алгоритмы вокруг нас. – М.: Наука, 1984.
4. Столяр А.А. Педагогика математики: Учеб. пособие для физ.–мат. спец. пед. ин–ов. – Мн.: Выш. шк., 1986.

Рукапіс паступіў у рэдкалегію 23.12.99 г.