Н.А. Каллаур

ИСТОРИЯ МАТЕМАТИКИ

Учреждение образования
«Брестский государственный университет имени А.С. Пушкина»

Кафедра методики преподавания физико-математических дисциплин

Н.А. Каллаур

ИСТОРИЯ МАТЕМАТИКИ

Учебно-методический комплекс
для студентов физико-математического факультета

Брест
БрГУ имени А.С. Пушкина
2020

УДК 514:004.02(075.8)
ББК 22.151.0я73-41
К 17

Рекомендовано редакционно-издательским советом учреждения образования «Брестский государственный университет имени А.С. Пушкина»

Автор-составитель:
Доцент кафедры методики преподавания физико-математических дисциплин
УО «Брестский государственный университет имени А.С. Пушкина»,
кандидат педагогических наук, доцент
Н.А. Каллаур

Рецензенты:

Кафедра высшей математики
УО «Брестский государственный технический университет»

Заведующий кафедрой математического анализа,
дифференциальных уравнений и их приложений
УО «Брестский государственный университет имени А.С. Пушкина»,
кандидат физико-математических наук, доцент
Н.Н. Сендер

К 17 **Каллаур, Н.А.** История математики: учебно-методический комплекс для студ. физико-математического факультета / Н. А. Каллаур ; Брест. гос. ун-т, физ-мат. фак., каф. методики преподавания физико-математических дисциплин. – Брест : Изд-во БрГУ, 2020. – 120 с.

Учебно-методический комплекс предназначен для студентов, обучающихся по специальности «Математика и информатика», и состоит из вводной части, лекций, тем семинаров, тем рефератов, вопросов к зачету и литературы.

УДК 514:004.02(075.8)
ББК 22.151.0я73-41

СОДЕРЖАНИЕ

Вводная часть

Введение

Важным элементом, характеризующим научную и методическую зрелость учителя математики, является стремление дополнить знание усвоенных научных фактов знанием законов науки и ее перспектив.

Рассматривая историю математики, с одной стороны, как хронологическое изложение того, что происходило в деятельности математиков, с другой стороны, как генезис (формирование, существование и преобразование самого объекта (математического знания), которого эта деятельность касается), возможно иллюстрировать ценность и целостность математического знания студентам-математикам.

Курс "История математики" естественным образом дополняет и углубляет содержание дисциплин "Элементарная математики с практикумом по решению задач", "Методика преподавания математики" и, в целом, способствует формированию методической культуры учителя-предметника.

Сказанное определяет статус курса "История математики" как системообразующего в научной подготовке будущего учителя математики. Курс знакомит студентов с опытом развития науки, помогает осмыслить историю и движущие силы развития математики, философские аспекты истории математики, взаимное влияние общественной практики и математики.

Целью курса «История математики» является формирование у студентов умений и навыков применения сведений из истории математики в процессе обучения школьников математике.

Структура ЭУМК:

1. Теоретический раздел, содержащий необходимые теоретические сведения.
2. Практический раздел, содержащий материал для семинаров.
3. Раздел контроля знаний, содержащий вопросы для самопроверки.
4. Вспомогательный раздел, содержащий рекомендуемую литературу.

Задачи курса истории математики:

1) ознакомить студентов с историей математики, способствовать выработке умений творческого построения учебного процесса (с использованием фрагментов истории математики в преподавании математики);

2) систематизировать знания, полученные студентами в различных математических курсах, через изучение истории математики;

3) способствовать формированию у студентов знаний о роли математики в жизни людей и в системе образования.

Курс истории математики строится линейно: развитие математики излагается в хронологическом порядке (основу построения курса составляет периодизация развития математики, предложенная А.Н. Колмогоровым).

Основная форма обучения – лекции и практические занятия.

Изучение курса истории математики предусматривает большую самостоятельную работу студентов, приобщение их к богатству литературы и Интернет-ресурсов по истории математики, написание рефератов по индивидуальным темам и их заслушивание на семинарских занятиях, выступление на итоговой конференции.

В качестве итогового контроля предусмотрен зачёт.

В результате изучения курса «История математики» студенты должны знать:

- основные периоды истории математики, движущие силы развития математики и ее общественные функции;
- зарождение и развитие доминантных математических идей, роль кризисов в обосновании математики;
- значение и роль выдающихся математиков и их теорий в жизни общества различных периодов его развития;
- возможности использования исторического материала на уроках математики средней школы с целью пропаганды математического знания;
- задачи исторического содержания для поддержания интереса учащихся к математике, как в классной, так и внеклассной работе.

На изучение дисциплины отводится **32** аудиторных часа: **20** лекционных, **12** практических.

ЭУМК разработан в соответствии с требованиями ОСВО 1-02 05 01-2013 на основании учебного плана ФМ-24-19/уч. от 30.05.2019 и учебной программы УД-25-003-16 от 30.11.2016.

Содержание учебного материала

1. Введение

Математика: ее предмет, специфика, характерные черты. Движущие силы развития математики, ее периодизация, значение истории математики для подготовки учителя.

2. Зарождение математики

Период зарождения математики: представления о числе и форме в первобытном обществе. Формирование понятия о натуральном числе на разных этапах развития исчисления. Роль измерения величин в формировании понятия дроби. Роль труда в формировании понятия геометрической фигуры.

3. Эпоха накопления первых математических знаний

3.1. Математические знания в Древнем Вавилоне. Развитие математики в древних государствах Востока. Система письма и нумерации вавилонян. Шестидесятиричная полупозиционная система исчисления. Арифметика и алгебра. Решение квадратных уравнений. Геометрия. Возникновение числовой мистики и астрологии (в частности, роль числа 7).

3.2. Математические знания в Древнем Египте. Источники наших знаний о математике древних египтян. Система письма и нумерации. Теория дробей. Арифметические и геометрические задачи. Значение математики Древнего Египта.

4. Период развития учения о постоянных величинах

4.1. Математика в Древней Греции в VI-IV вв. до н. э. Греческое «чудо». Первые математические школы Греции. Школа Фалеса. Преобразование математики в абстрактную дедуктивную науку в натурфилософской школе Пифагора. Основные теории математических школ Древней Греции. Открытие несоизмеримости. Первый кризис в обосновании математики. Геометрическая алгебра. Теория отношений до и после Евдокса. Построения с помощью циркуля и линейки. Три неразрешимые задачи древности. Проблемы бесконечного и апории Зенона. Атомистика Демокрита. Метод исчерпывания Евдокса – античная форма теории пределов. Александрийская научная школа. Концепция дедуктивных наук Аристотеля. «Начала» Евклида и их роль в дальнейшем развитии математики.

4.2. Интегральные и дифференциальные методы в Древней Греции. Интегральные и дифференциальные методы Архимеда и их роль в развитии инфинитезимальных методов XVII столетия. Теория конических сечений Аполлония и ее роль в дальнейшем развитии математики и физики. Александрийская школа в эпоху Римской империи. Система мира Птолемея и установление основных понятий тригонометрии. Арифметика Диофанта и его буквенная алгебра.

4.3. Математика в Индии и Китае. Математика в Древней и Средневековой Индии. Алгебраические знания индусов. Решение уравнений. Десятичная позиционная система исчисления и нумерация. Объяснение отрицательных чисел. Алгебраическая символика. Геометрические и тригонометрические знания индусов.

Математика Древнего и Средневекового Китая. Китайская нумерация. Математические трактаты «Математика в девяти книгах», «Трактат об измерительном шесте». Метод «Фан-чен» и введение отрицательных чисел. Десятичные дроби и метод «Тянь-юань». Геометрические знания китайцев.

4.4. Математика в Средней Азии и на Ближнем Востоке в средних веках. Математика в странах Арабского Халифата. Алгебра Ал-Хорезми и ее развитие в трудах Омара Хайяма. Теория параллельных в трудах арабских математиков. Тригонометрия и инфинитезимальные исследования в Багдадской школе. Десятичные дроби и инфинитезимальные методы Ал-Коши.

4.5. Математика средневековой Европы и эпохи Возрождения. Усвоение античного и восточного наследия. Труды Леонардо Пизанского (Фибоначчи). Предыстория понятия функции. Алгебраическая символика. Решение в радикалах уравнений 3-й и 4-й степени. Возникновение мнимых чисел.

Изобретение логарифмов как удобного вычислительного средства. Построение таблиц логарифмов И. Бюрги и Дж. Непером и другими при различных основаниях.

5. Период создания математики переменных величин

5.1. Развитие математики в XVII веке. Период математики переменных величин. Научная революция XVII столетия и создание новой научной картины мира в трудах Коперника, Кеплера, Галилея, Декарта, Ньютона. Потребность вычислений и открытие логарифмов и других вычислительных средств. Теория чисел, алгебра и теория вероятностей XVII века. Аналитическая геометрия Декарта и Ферма. Проективная геометрия Дезарга и Паскаля, Уолиса и Барроу. Теория флюксий и бесконечных рядов Ньютона. Алгоритмы дифференциального и интегрального исчисления Лейбница. Второй кризис в обосновании математики.

5.2. Развитие математики в XVIII веке. Организация науки в XVIII столетии. Петербургская Академия наук. Развитие понятия функции в трудах Бернулли, Эйлера. Возникновение дифференциальных уравнений как математического аппарата естествознания и техники. Проблема обоснования анализа в трудах Эйлера, Лагранжа, Даламбера. Гаусс и его труды по алгебре, теории вероятностей, теории чисел, геометрии и математическому анализу. Великая французская революция и преобразование математического образования. Политехническая и нормальная школы. Развитие математического анализа и математической физики в трудах Фурье, Пуассона, Лапласа, Остроградского. Перестройка математического анализа в трудах Больцано, Коши, Вейерштрасса, Дедекинда и Кантора. Третий кризис в обосновании математики.

5.3. Развитие математики в XIX веке. Возникновение университетских математических школ. «Арифметические исследования» К. Гаусса. Проблема разрешимости в радикалах уравнений выше 4-й степени. Теория групп и ее значение. Жизнь и судьба Н. Абеля и Э. Галуа. Кватернионы и алгебраические числа. Открытие неевклидовой геометрии. Жизнь и творчество Н.И. Лобачевского. Обобщение предмета геометрии Б. Риманом. «Основания геометрии» Д. Гильберта. Эрлангенская программа Ф. Клейна. Развитие математического анализа и математической физики (Ж. Фурье, С. Пуассон, П.С. Лаплас, М.В. Остроградский и др.). Перестройка математического анализа (Б. Больцано, О. Коши, К. Вейерштрасс, Г. Кантор). Основные достижения математики XIX столетия.

5.4. Развитие математики в XX веке. «Математические проблемы» Д. Гильберта. Возникновение крупных научных школ в странах Европы и Америки. Н. Бурбаки. Развитие традиционных дисциплин и возникновение новых (функциональный анализ, топология и др.). Формирование современной алгебры как теории алгебраических структур. История создания ЭВМ. Математизация науки.

6. Математика в России

6.1. Математика до 1917 года. Математические рукописи. «Арифметика» Магницкого. Л. Эйлер и его роль в развитии математики в России. Работы Остроградского по анализу и по уравнениям математической физики. Н.И. Лобачевский и открытие неевклидовой геометрии. С.В. Ковалевская. Вклад математиков России в мировую науку.

6.2. Возникновение и развитие математических школ. Возникновение и развитие петербургской математической школы (П.Л. Чебышев, А.А. Марков, А.М. Ляпунов). Н.Н. Лузин и московская математическая школа. Судьба ученых-математиков в советское время. В.А. Стеклов и реорганизация Академии наук. Важнейшие направления развития математики в СССР. Достижения советских математиков.

7. Математика в Беларуси

Математика в Беларуси в XIV – начале XX столетий. Важнейшие направления развития математики в Беларуси. Достижения белорусских математиков.

Примерный тематический план

№	Название тем	Ауд		
		Л	П	В
1.	**Введение**	**2**		**2**
2.	**Зарождение математики**		**2**	**2**
3.	**Эпоха накопления первых математических знаний**	**2**	**2**	**4**
3.1.	Математические знания в Древнем Вавилоне		2	2
3.2.	Математические знания в Древнем Египте	2		2
4.	**Период развития учения о постоянных величинах**	**10**	**6**	**16**
4.1.	Математика в Древней Греции	4	2	6
4.2.	Математика в Индии и Китае	2	2	4
4.3.	Математика в Средней Азии и на Ближнем Востоке в средних веках	2		2
4.4.	Математика средневековой Европы и эпохи Возрождения	2	2	4
5.	**Период создания математики переменных величин**	**6**	**2**	**8**
5.1.	Развитие математики в XVII веке	2		2
5.2.	Развитие математики в XVIII веке	2		2
5.3.	Развитие математики в XIX веке	2	2	4
5.4.	Математика XX века			
6.	**Математика в России**			
6.1.	Математика до 1917 года			
6.2.	Возникновение и развитие математических школ			
7.	**Математика в Беларуси**			
	Количество часов	20	12	32

Учебно-методическая карта

№	Название раздела, темы, занятия; перечень изучаемых вопросов	Количество ауд. часов				МО	Лит	КЗ
		Л	Пр	Лаб	УРС			
1	2	3	4	5	6	7	8	9
	История математики (32 ч.)	**20**	**12**	-				
	8 семестр (32 ч.)	*20*	*12*	-				
1	Введение 1. Предмет, специфика и состав математики. История математики как наука. 2. Движущие силы развития математики, значение математики в жизни общества. 3. Периодизация истории математики (А. Н. Колмогоров). 4. Значение истории математики для подготовки учителя.	2					5, 7, 10, 11, 12	
2	Зарождение математики. 1. Представления о числе и форме в первобытном обществе. 2. Формирование понятия о натуральном числе на разных этапах развития исчисления. 3. Роль измерений в формировании понятий дроби. 4. Формирование понятия геометрической фигуры.		2				4, 5, 7, 8, 10, 11, 12, 20, 25	
3	Эпоха накопления первых математических знаний							
3.1	Математические знания в Древнем Вавилоне. 1. Вавилонская 60-ричная полупозиционная система счисления. 2. Числовая алгебра и теорема Пифагора в Древнем Вавилоне. 3. Геометрия. 4. Возникновение числовой мистики и астрологии.		2				5, 7, 10, 11, 12, 20, 25, 32, 33, 35	
3.2	Математические знания в Древнем Египте. 1. Математические и астрономические знания древних египтян. 2. Геометрические знания египтян. 3. Значение математики Древнего Египта.	2					5, 7, 10, 11, 12, 20, 25, 32, 33, 35	

4	Период развития учения о постоянных величинах							
4.1	Математика в Древней Греции в VI-IV вв. до н. э. 1. Греческое «чудо». 2. Первые математические школы Греции. Школа Фалеса.							
	3. Преобразование математики в абстрактную дедуктивную науку в натурфилософской школе Пифагора. 4. Построения с помощью циркуля и линейки. Три неразрешимые задачи древности. 5. Проблемы бесконечного и апории Зенона. Атомистика Демокрита. 6. Открытие несоизмеримости. Первый кризис в обосновании математики. 7. Геометрическая алгебра. 8. Теория отношений до и после Евдокса.	2	2				I, 3, 5, 7, 10, II, 12, 15, 20, 22, 25, 31, 35	
4.2	Интегральные и дифференциальные методы в Древней Греции. 1. Метод исчерпывания Евдокса - античная форма теории пределов. 2. Интегральные и дифференциальные методы Архимеда и их роль в развитии инфинитезимальных методов XVII столетия. 3. Теория конических сечений Аполлония и ее роль в дальнейшем развитии математики и физики. 4. Александрийская школа в эпоху Римской империи. 5. Арифметика Диофанта и буквенная алгебра.	2					I, 3, 5, 7, 10, II, 12, 15, 20, 25, 31, 35	
4.3	Математика в Индии и Китае							

4.3.1	Математика в Древней и Средневековой Индии. 1. Индийская нумерация. Арифметические действия. 2. Введение и объяснение отрицательных чисел. 3. Решение уравнений. Алгебраическая символика. 4. Геометрические и тригонометрические знания индусов.	2					5, 7, 10, 11, 12, 15, 17, 25, 31	
4.3.2	Математика Древнего и Средневекового Китая. 1. Китайская нумерация. Арифметические действия. 2. Математические трактаты «Математика в девяти книгах», «Трактат об измерительном шесте». 3. Метод «фанчен» и введение отрицательных чисел. 4. Десятичные дроби и метод «тянь-юань». 5. Геометрические знания китайцев.		2				5, 7, 10, 11, 12, 15, 17, 25, 31	
4.4	Математика в Средней Азии и на Ближнем Востоке в средних веках. 1. Развитие математики в странах Арабского Халифата. 2. Алгебра ал-Хорезми и ее развитие в трудах Омара Хайяма.							
	3. Теория параллельных в трудах арабских математиков. 4. Тригонометрия и инфинитезимальные исследования в Багдадской школе. 5. Десятичные дроби и инфинитезимальные методы ал-Коши.	2					5, 7, 10, 11, 12, 28, 29, 30, 32, 33	
4.5	Математика средневековой Европы и эпохи Возрождения. 1. Усвоение античного и восточного наследия. 2. Труды Леонардо Пизанского (Фибоначчи). 3. Предыстория понятия функции. Алгебраическая символика. 4. Решение в радикалах уравнений третьей и четвертой степени. Возникновение мнимых чисел.	2	2				1, 3, 4, 5, 12, 15, 17, 19, 20	

5	Период создания математики переменных величин							
5.1	Развитие математики в XVII веке							
5.1.1	Развитие математики в XVII веке. 1. Научная революция XVII столетия и создание новой научной картины мира в трудах Коперника, Кеплера, Галилея, Декарта, Ньютона.	2					1, 2, 3, 5, 9, 10, 13, 29, 35	
	2. Потребность вычислений и открытие логарифмов и других вычислительных средств. 3. Теория чисел, алгебра и теория вероятностей XVII века.							
5.1.2	Создание новых математических теорий в начале XVII века. 1. Аналитическая геометрия Декарта и Ферма. 2. Проективная геометрия Дезарга, Паскаля, Уоллиса и Барроу. 3. Теории флюксий и бесконечных рядов Ньютона. 4. Алгоритмы дифференциального и интегрального исчисления Лейбница. Второй кризис в обосновании математики.	2					1, 2, 3, 5, 9, 10, 13, 29, 35	
5.2	Развитие математики в XVIII веке							
5.2.1	Организация науки в XVIII столетии. 1. Петербургская академия наук. 2. Развитие понятия функции в трудах Бернулли, Эйлера. 3.Возникновение дифференциальных уравнений. Проблема обоснования анализа в трудах Эйлера, Лагранжа, Даламбера.	2					I, 2, 5, 6, 10, II, 15, 13, 23, 33	

5.2.2	Математика на рубеже XVIII-XIX столетий. 1. Гаусс и его труды по алгебре, теории вероятностей, теории чисел, геометрии и математическому анализу. 2. Великая французская революция и преобразования математического образования. Политехническая и нормальная школы. 3. Развитие математического анализа и математической физики в трудах Фурье, Пуассона, Лапласа, Остроградского. 4. Перестройка математического анализа в трудах Больцано, Коши, Вейерштрасса, Дедекинда и Кантора. Третий кризис в обосновании математики.		2				1, 2, 5 6, 10 11, 15 13, 23 33	
5.3	Развитие математики в XIX веке							
5.3.1	Развитие математики в XIX веке. 1. Создание неевклидовой геометрии (Лобачевский, Бойяи, Гаусс). 2. Эрлангенская программа Ф. Клейна. 3. Перестройка математического анализа (Б. Больцано, О. Коши, К. Вейерштрасс, Г. Кантор).	2					1, 3, 4, 5, 9, 26, 34, 33	
5.3.2	Проблема разрешимости уравнений в радикалах. 1. Теорема Абеля и теория Галуа. 2. Возникновение теории групп и ее значение для математики и физики. Формирование нового взгляда на алгебру как на теорию алгебраических структур.		2				1, 3, 4, 5, 9, 26, 30, 34, 33	

5.4	Развитие математики в XX веке. 1. Математика на рубеже 19-20 столетий. 2. Рождение новых дисциплин (теория меры и интеграла, функциональный анализ и топология). 3. Работы Пуанкаре и Гильберта. 4. «Основы геометрии» Гильберта, работы Римана. 5. Проблема аксиоматического построения геометрии. 6. Геометрия и физика 20 века.	2					11, 12, 3, 4, 36	
6	Математика в России							
6.1	Математика до 1917 года. 1. Математические рукописи. «Арифметика» Магницкого. 2. Л. Эйлер и его роль в развитии математики в России. 3. Работы Остроградского по анализу и по уравнениям математической физики.						11, 12, 3, 4, 36	
	4. С.В. Ковалевская. 5. Вклад математиков России в мировую науку.							
6.2	Возникновение и развитие математических школ. 1. Возникновение и развитие петербургской математической школы (П.Л. Чебышев, А.А. Марков, А.М. Ляпунов). 2. Математика в Московском университете и Московском математическом обществе. 3. Московская математическая школа Егорова и Лузина (Привалов, Степанов, Суслин, Лаврентьев, Новиков, Люстерник, Келдыш, Пантрягин). 4. Синтез концепций Московской и Ленинградской математических школ в 30-е годы 20 столетия.						3, 5, 11, 17	

7	Математика в Беларуси. 1. Вклад белорусских математиков в развитие математического образования в 17-19-х столетиях. 2. Творчество математиков и механиков Беларуси в 19 столетии и начале 20 столетия. 3. Современные математические школы Беларуси.						3, 14, 18	

Курс лекций

Предмет истории математики. Периодизация истории математики. Возникновение понятия числа и геометрической фигуры. Математика в древнем Египте и древнем Вавилоне.

1. Слово «история» можно толковать двумя способами. С одной стороны это хронологическое изложение того, что происходило в той или иной сфере человеческой деятельности, например, в сфере деятельности людей, называемых «математиками».

С другой стороны, это генезис: формирование, существование и преобразование самого того объекта, которого эта деятельность касается. Без строгого воссоздания трудов в соответствии с ходом времени нельзя надеяться восстановить моменты генезиса. И наоборот, это воссоздание бессмысленно, если оно не направлено на знание и понимание способа формирования самого объекта, в данном случае математики. Важно понять, что математика имеет свою память и как во всякой памяти в ней есть свои закоулки и тайники, которые необходимо осветить. Зачем это нужно? Разве «изучать математику» означает снова пройти по путям прошлого, заново пережить все их крутые повороты, снова встретиться с уже решенными и потерявшими актуальность проблемами? Нет, конечно, не со всеми. Но с некоторыми – да. И притом обязательно! Кто забывает свое прошлое, становится чужаком настоящему, перестает понимать то, что он в нем делает.

Математика не выходит готовой из головы преподавателя. Ее нынешнее состояние всего лишь одна из форм равновесия, ценная сегодня, но и преходящая, как и все ей предшествующие, чьи следы она сохранила.

Определение 1. *Математика – наука о количественных отношениях и пространственных формах действительного мира.*

Ясное понимание самостоятельного положения математики как особой науки стало возможным только после достаточного накопления большого фактического материала. Такое понимание возникло впервые в 6-5 веках до нашей эры. До этого времени период развития математики относится к периоду зарождения математики.

6-5 века до нашей эры – это начало периода элементарной математики. В течение этих двух периодов математические исследования имеют дело с ограниченным запасом основных понятий, возникших на очень ранних ступенях исторического развития, в связи с самыми простыми запросами хозяйственной жизни. Первые задачи механики и физики могли еще удовлетвориться этим же запасом основных математических понятий.

В 17 веке новые запросы естествознания и техники заставляют математиков сосредоточить внимание на создании методов, позволяющих математически изучать движение, процессы изменения величин, преобразования геометрических фигур.

С употребления переменных величин в аналитической геометрии и создания дифференциального и интегрального исчисления начинается период математики переменных величин.

Дальнейшее расширение круга количественных отношений и пространственных форм, изучаемых математикой, привело в начале 19 века к необходимости отнестись к процессу расширения математических понятий сознательно, поставив перед собой задачу систематического изучения с достаточно общей точки зрения возможных типов количественных отношений и пространственных форм. Создание воображаемой геометрии Н.И.Лобачевского было первым значительным шагом в этом направлении. Развитие подобного рода исследований внесло в математику столь важные новые черты, что математику 19-20 веков естественно отнести к особому периоду современной математики.

1. ПЕРИОД ЗАРОЖДЕНИЯ МАТЕМАТИКИ

Счет предметов на самых ранних ступенях развития культуры привел к созданию простейших понятий арифметики натуральных чисел. Только на основе разработанной системы устного счисления возникают письменные системы счисления и постепенно вырабатываются приемы выполнения над натуральными числами четырех арифметических действий. Потребности измерения (количества зерна, длины дорог и т.д.) приводят к появлению названий и обозначений простейших дробных чисел, к разработке приемов арифметических действий над дробями. Таким образом, накапливается материал, складывается постепенно в древнейшую математическую науку – арифметику.

Измерение площадей и объемов, потребности строительной техники, а несколько позднее астрономии вызывают развитие начатков геометрии. Эти процессы шли у многих народов независимо и параллельно. Особенное значение для дальнейшего развития науки имело накопление арифметических и геометрических знаний в Египте и Вавилонии на основе развитой техники арифметических вычислений появились также начатки алгебры, а в связи с запросами астрономии – начатки тригонометрии.

2. ПЕРИОД ЭЛЕМЕНТАРНОЙ МАТЕМАТИКИ

После накопления большого фактического материала в виде разрозненных приемов арифметических вычислений, способов определения площадей и объемов возникает математика как самостоятельная наука с ясным понимаем метода и необходимости развития основных понятий и предложений в общей форме. В применении к арифметике и алгебре этот процесс начался уже в Вавилонии. Однако вполне определилось это новое течение, заключающееся в систематическом и логически последовательном построении основ науки в Древней Греции. Созданная древними греками система изложения элементарной геометрии на 2 тысячелетия вперед сделалась образцом построения дедуктивной системы. Из арифметики вырастает теория чисел. Создается систематическое учение о вычислениях и измерениях. Процесс формирования действительного числа (в связи с задачей измерения величин) оказывается весьма длительным. Дело в том, что понятия иррационального и отрицательного числа относится к более сложным математическим абстракциям, не имеющим достаточно прочной опоры в донаучном общечеловеческом опыте. Создание алгебры как буквенного исчисления завершается лишь в конце рассматриваемого периода. Период элементарной математики заканчивается (в Западной Европе в начале 17 века), когда центр тяжести переносится в область переменных величин.

3. ПЕРИОД СОЗДАНИЯ МАТЕМАТИКИ ПЕРЕМЕННЫХ ВЕЛИЧИН

С 17 века начинается существенно новый период развития математики. В основном это обусловлено введением в математику идей движения и изменения. Уже в алгебре в скрытом виде содержится идея зависимости между величинами (значение суммы зависит от величины слагаемых и т.д.). Однако чтобы охватить количественные отношения в процессе их изменения, надо сами зависимости между величинами сделать самостоятельным объектом изучения. Поэтому на первый план выдвигается понятие функции. Изучение переменных величин и функциональных зависимостей приводит к основным понятиям математического анализа, вводящим в явном виде в математику идею бесконечного, к понятиям предела, производной, дифференциала и интеграла. Создается анализ бесконечно малых, в первую очередь в виде дифференциального и интегрального исчислений. Основные законы механики и физики записываются в виде дифференциальных уравнений, а задача интегрирования этих уравнений выдвигается в качестве основной задачи математики. Отыскание неизвестных функций, определенных условиями (условием минимума или максимума некоторых связанных с ними величин), составило предмет вариационного исчисления.

Предмет изучения геометрии также существенно расширяется в связи с проникновением в геометрию идей движения и преобразования фигур. Геометрические преобразования изучаются сами по себе (например, в проективной геометрии одним из основных объектов изучении являются проективные преобразования плоскости или пространства). Впрочем, сознательное развитие этих идей относится лишь к концу 18 началу 19 столетия. Гораздо раньше, с созданием в 17 веке аналитической геометрии был найден универсальный способ перевода вопросов геометрии на язык алгебры и анализа, а также решения их чисто алгебраическими и аналитическими методами. С другой стороны открылась широкая возможность изображения алгебраических и аналитических фактов геометрически, например, при графическом изображении функциональных зависимостей.

4. СОВРЕМЕННАЯ МАТЕМАТИКА

Все созданные в 17 и 18 веках разделы математического анализа продолжали с большой интенсивностью развиваться в 19-20 веках. Расширился и круг их применения к задачам, решаемым естествознанием и техникой. Появляются и новые черты. Накопленный фактический материал привел к необходимости углубленного логического анализа и объединению его с новых точек зрения. Возникли и новые теории из внутренних потребностей самой математики (теория функций комплексного переменного, занявшая в начале и середине 19 века центральное место в математике, геометрия Лобачевского).

В более тесной связи и зависимости от запросов математики и физики происходило формирование векторного и тензорного исчислений. Перенесение векторных и тензорных представлений на бесконечномерные величины происходит в рамках функционального анализа. Существенная новизна начавшегося в 19 веке этапа развития математики состоит в том, что потребовалась выработка приемов сознательного и планомерного создания новых систем.

Чрезвычайное расширение математики привлекло в 19 веке внимание к вопросам ее обоснования, то есть критическому пересмотру ее исходных положений (аксиом), построению строгой системы определений и доказательств, а также к критическому рассмотрению логических приемов, используемых в этих доказательствах. Глубокий анализ требований к логической строгости доказательств, строения математических теорий, вопросов алгоритмической разрешимости и неразрешимости математических проблем составил предмет математической логики. Топологические пространства, теория обыкновенных уравнений, уравнений с частными производными, уравнений математической физики, теория вероятностей, теория информации, теория игр, кибернетика, математическая кибернетика составили предмет исследований в период современной математики.

ВОЗНИКНОВЕНИЕ ПОНЯТИЯ ЧИСЛА И ГЕОМЕТРИЧЕСКОЙ ФИГУРЫ

Понятия числа и геометрической фигуры являются абстрактными понятиями, которые могли образоваться только в результате длительной умственной работы. Понятие двух рук и пяти пальцев появилось гораздо раньше понятий 2 и 5. Первое представление о счете присуще даже животным. Это так называемый чувственный счет. Следующий этап развития понятия счета – установление взаимно однозначного соответствия между предметами. Позже появляются эталоны счета (естественные пальцы на руке, искусственные камешки).

Первые эталоны естественные (луна, глаза, пальцы на руке). Пережиток этой системы встречается в древней индийской системе счисления (1 – Луна, Земля, Брахма, 2 – близнецы, рука, глаза, 5 – чувства, стрелы бога любви Камадевы, 6 – запахи, 7 – горы, 8 – боги и т. д.).

Далее происходит выбор одного эталона (у индийцев племени абиконов 5 – рука, 10 – две руки, 20 – руки и ноги, 4 – пальцы страуса). У зулусов каждый палец обозначал число: «взять большой палец руки» – 6,1 – он указал. У африканских племен – чувственный счет, у австралийцев и полинезийцев каждая часть имела свое название, мизинец левой руки, пальцы, запястье, локоть, плечо и т.д.Такая живая шкала всегда при себе. Образец такого счета оставил русский исследователь Новой Гвинеи Миклухо-Маклай. Он попросил папуасов сосчитать количество дней до возвращения корвета «Витязь», нарезав для этого полоски бумаги. Папуасы использовали и действенный счет, и живую шкалу, и групповой счет (1 – наре).

Очень интересны названия числительных на языке народов Восточной Африки: для числительных 1,2,4,5,8,10 они используют свои названия, для чисел 6,7,9 – искаженные арабские числительные, то же и для десятков от 20 до 90.

У большинства народов число десятков образуется по схеме 10п, за исключением французского $70(60 + 10)$, $80(4 * 20)$, $90(4 * 20 + 10)$. Более последовательно счет двадцатками просматривается в грузинском языке (10 – ати, 20 – оци, 30 – оццаати, 40 – ормоци, 50 – ормоцдаати ($2 * 20 + 10$).

В большинстве языков названия числительных основываются на десятичной системе счисления. Несомненно, в основе лежит счет на пальцах.

Сюда уместно добавить слова А.Лебега «если бы люди имели 11 пальцев, была бы принята одиннадцатиричная система счисления». Впрочем следы ее сохранились у новозеландцев: $12 = 11 + 2$, $22 = 2 * 11$.

На самых первоначальных ступенях развития человек пользовался двоичной системой счисления. Например, на языке одного из племен Торресова пролива 1 – урупан, 2 – окоза, 3 – окоза-урупан, 4 – окоза-окоза, 5 – окоза-окоза-урупан и т.д.

Индийское племя абиконов 1,5 века назад считало так: 1 – интара, 2– иньока, 3 – иньока-интара и т.д.

Сведения о результатах счета сохранилось в виде зарубок. Старейшее свидетельство – 55 зарубок на лучевой кости молодого волка длиной 18 см. Зарубки располагались по 5; после 25 шла длинная черта, найдена в Чехословакии в 1937 году и датируется 30 веком до нашей эры.

Зарубки, обозначавшие долги на бирках, раскалывались на две половины, одна хранилась у должника, вторая у кредитора. Ими пользовались в Западной Европе даже в 19 столетии (в 1834 году в Лондоне произошел пожар, возникший при сжигании бирок). Инки записывали свои долги на цветных веревках – перуанских квипу. Аналогичные квипу встречались у земледельцев Японии и Китая еще в 20 столетии.

Изображение чисел называется нумерацией. Такое обозначение первоначально было основано на аддитивном, мультипликативном и субстрактивном принципах. Классическим примером нумерации, основанной на аддитивном и субстрактивном принципах, является римская нумерация.

ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ФИГУРЫ

Человек столкнулся в своей трудовой деятельности при выделке орудий труда и сосудов, при обработке полей и построении зданий с необходимостью названий геометрических фигур. Большинство общепринятых названий в геометрии являются греческими, обозначают предметы той или иной формы. Например, центр – центрум – палка, которой погоняли быков; ромб – волчок; трапеция – столик; призма – опиленная; сфера – мяч; конус – сосновая шишка; цилиндр – валик, каток. Пирамида от древнегреческого пурама (усыпальница), линия от латинского лен. Точка, пункт от глагола ткнуть.

Эти названия говорят о том, что первоначально появились геометрические эталоны, которые затем стали названиями абстрактных фигур. Создание понятий было тесно связано с изображениями на орнаментах и изготовлением моделей.

ДРЕВНИЙ ЕГИПЕТ

С 2500 года до нашей эры до 332 года до нашей эры существовали два царства Верхнего и Нижнего Египта. Были созданы две системы письма – иероглифическая и иератическая. Наиболее ранние свидетельства математических знаний Египта – папирус Райнда (хранится в Британском музее) и московский кожаный свиток. Папирус Райнда содержит 85 задач, записанных писцом Ахмесом, и датируется 1650 годом до нашей эры. Кожаный свиток египетской математики с трудом распрямили в 1927 году.

Кроме целых чисел египтяне использовали аликвотные дроби (дроби с числителем 1). Кроме этого был особый символ для записи дроби $\frac{2}{3}$.

При умножении чисел использовали метод удвоения. Для деления чисел использовался метод раздвоения, а если это оказывалось неэффективным, то разбиение на три части.

Египтяне умели решать линейные уравнения вида $ax + x = b$, $x + ax + cx = b$. Для их решения использовался метод ложного положения. Использовались также некоторые зачатки символической записи: две ноги в различных положениях обозначали знаки, $+$ и $-$. Геродот возводит истоки египетской математики к необходимости восстанавливать поля после каждого разлива Нила. Египтяне знали многие геометрические формулы, например, формулы объемов пирамиды и усеченной пирамиды, но неизвестно как они этого достигли.

Погребальная камера отца фараона Рамсеса 2 (1300 год до нашей эры), оставшаяся неоконченной, дает представление о том, как египтяне украшали внутренние стены и подтверждает, что им были знакомы свойства подобных фигур.

ВАВИЛОН

Культуру Древнего Вавилона, образованного между Тигром и Евфратом, называют вавилонской, по названию одного из крупнейших городов этой области. Называют Двуречье также Месопотамией, то есть Междуречье. Первоначально культура возникла южнее, на берегу Персидского залива. В четвертом тысячелетии здесь жил древний народ – шумеры. Они изобрели клинописное письмо, при котором буквы выдавливались в виде клиньев на сырой глине, которая затем обжигалась. 60-ти десятеричный счет, который лег в основу вавилонской математики, отразился на нашем делении круга и счете времени. Источники (500000 табличек) датируются 1894 – 1595г. до н.э. и 600 – 300г. до н.э. относятся к халдейской династии и к царству Селевкидов.

Профессия писца была одной из самых уважаемых. На фронтоне школы писцов было написано: «Тот, кто в совершенстве овладеет искусством писать на табличках, будет сверкать подобно солнцу».

В нумерации использовались два знака $\prec$ и Υ. Первый означал 10 и 600, второй 1 и 60. В дальнейшем первый знак $\prec$ означал любое число вида $10 * 60^n$. В дальнейшем второй знак обозначал числа 3600 и любое число 60^n и $\dfrac{1}{60^n}$. Большое основание делает сложным операции, особенно деление (проблема №1). Поэтому использовались таблицы.

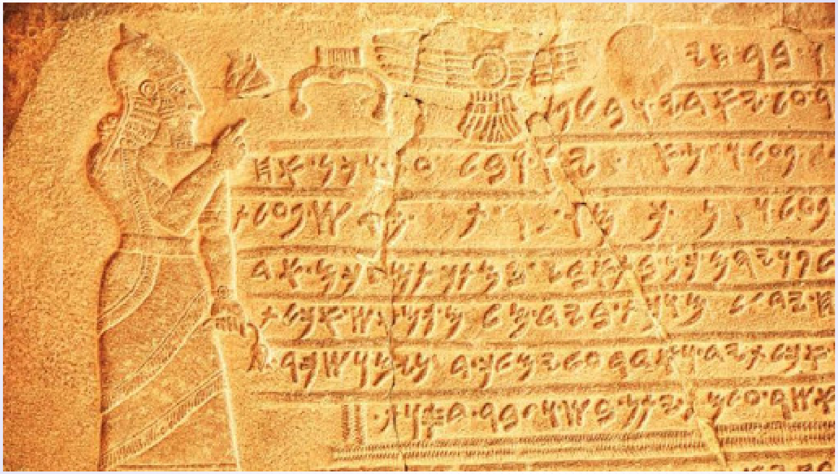
В Вавилонской математике формулировались задачи, решение которых сводилось к решению уравнений вида $x \pm y = a$; $x - y = b$ или системе уравнений $x + y = b$ и $x^2 \pm y = a$. Найгебауэр обнаружил две суммы

$1 + 2 + 2^2 + ... + 2^9 = 2^{10} - 1$ и

$1^2 + 2^2 + 3^2 + ... + 10^2 = (1 * \dfrac{1}{3} + 10 * \dfrac{2}{3}) * 55.$

Есть основание полагать, что вавилоняне были знакомы с пифагорейскими тройками. Но определяли ли они их общими формулами? На этот счет мнения расходятся. У вавилонян практически не существовало геометрии круга. Однако есть правило $A = \frac{p^2}{12}$, где p – периметр круга. Здесь $\pi = 3$.

Другие источники позволяют думать, что вавилоняне использовали $\pi = 3\frac{1}{7}$.



ГРЕЧЕСКОЕ ЧУДО

Формирование математической науки происходило, как убеждает нас история, в научном творчестве ученых Древней Греции. Так принято называть группу государств, сложившуюся в период с 8 до 6 века до нашей эры на территории современной Греции, близлежащего побережья малой Азии и юга Италии.

В 6 веке до нашей эры в большинстве городов происходят восстания. Образуются независимые города – «полисы». В течение трех веков создаются теории, тонкость и глубина которых оценены лишь в 19, а некоторые в 20 веке. Почему стал возможен такой скачок? Он не мог быть вызван внутренними потребностями математики или техники.

ГРЕЧЕСКАЯ НУМЕРАЦИЯ

Первоначально греки пользовались аттической нумерацией (геродиановой – по имени Геродиана, жившего в 5 веке до нашей эры). Числа 1, 5, 10, 50, 100, 500, 1000 обозначались соответственно знаками. Счет велся на абаке. Аттическая нумерация у греков была вытеснена более компактной – буквенной (арабский, греческий, еврейский и латинский языки).

До нас дошли лишь отдельные фрагменты сочинений греческих ученых 6 века до нашей эры. Начало греческой науке положила ионийская школа натурфилософии (6 век до нашей эры). Ее основателем был Фалес – отец греческой науки – купец, политический деятель, политик, астроном и математик. Фалесу приписываются доказательства следующих утверждений: диаметр делит круг пополам; углы при основании равнобедренного треугольника равны; при пересечении двух прямых получаются равные углы; доказательство второго признака равенства треугольников. При доказательстве, скорее всего, использовалось перегибание и наложение фигур.

1	α	alpha	10	ι	iota	100	ρ	rho
2	β	beta	20	κ	kappa	200	σ	sigma
3	γ	gamma	30	λ	lambda	300	τ	tau
4	δ	delta	40	μ	mu	400	υ	upsilon
5	ϵ	epsilon	50	ν	nu	500	ϕ	phi
6	ϛ	vau*	60	ξ	xi	600	χ	chi
7	ζ	zeta	70	o	omicron	700	ψ	psi
8	η	eta	80	π	pi	800	ω	omega
9	θ	theta	90	ϙ	koppa*	900	ϡ	sampi

ШКОЛА ПИФАГОРА

Коренное преобразование математики единодушно приписывают Пифагору. Пифагор родился на богатом острове Самос и около 530 года до нашей эры переехал на остров Кротон (юг Италии), где основал знаменитый пифагорейский союз.

В начале 5 века до нашей эры в результате неудачных выступлений на политической арене пифагорейцы были изгнаны из городов южной Италии. Пифагорейцы занимались астрономией, геометрией, гармонией (теорией музыки) и арифметикой (теорией чисел). Как велика была система аксиом, используемая пифагорейцами, неизвестно. Венцом знаний была знаменитая теорема Пифагора, которая до этого была известна лишь для частных случаев. Доказательство большого продвижения пифагорейцев – отрывки дошедшего до нас сочинения Гиппократа о квадрируемых луночках (5 век до нашей эры).

Пифагорейцы вначале полагали, что все отрезки соизмеримы, т.е. метрическая геометрия сводится к арифметике рациональных чисел. Занимаясь гармонией, пифагорейцы пришли к выводу, что качественное отличие звуков обуславливается количественным различием длин струн. Если длины струн относятся как 1 к 2 (разница в тонах) – октава, 3 к 2 – квинта, 4 к 3 – кварта. Благозвучные музыкальные интервалы они назвали консонантами, неблагозвучные – диссонансами. Это привело пифагорейцев к мысли, что мир в целом является гармонией и числом.

АРИФМЕТИКА ЦЕЛЫХ ЧИСЕЛ

Число для пифагорейцев – собрание единиц. Числа располагались в виде правильных геометрических фигур: треугольные числа, четырехугольные, пятиугольные и т.д.

$$1 + 2 + 3 + ... + n^2 = \frac{n}{n+1}$$

$$1 + 4 + 7 + 10 + ... + 3n - 2 = \frac{n(3n-1)}{2}$$

Изучая числа, пифагорейцы обратили внимание на делимость (четные и нечетные, простые и составные). Основной результат – произведение делится на 2, если хотя бы один из множителей делится на 2. Удивительно, что этот факт обоснован. Пифагорейцы выделили совершенные числа 6,8 и т.д. В началах Евклида доказано, что если $1 + 2 + ... + 2^m = p$– простое, то $2^m p$ – совершенное. Эйлер в 18 веке доказал, что никаких других совершенных чисел не существует. Но вопрос о том, конечно или бесконечно множество совершенных чисел до сих пор не решен.

Пифагорейцы исследовали уравнение $x^2 + y^2 = z^2$ и нашли бесконечно много троек, имеющих вид:$y = m$, $x = \frac{1}{2}(m^2 - 1)$, $z = \frac{1}{2}(m^2 + 1)$

Пифагорейцы связывали с целыми числами различные мистические смыслы: 1 – матерь, 10 – особенно совершенное, $10 = 1 + 2 + 3 + 4$ – декада. Число небесных сфер должно равняться 10 (сферы Неба, Земли, Луны, Меркурия, Венеры, Марса, Юпитера, Сатурна). В качестве десятой была придумана Противоземля.

Начало
Содержание
Страница 36 из 120
Назад
На весь экран
Закрыть

АРИФМЕТИКА ДРОБЕЙ И ПЕРВАЯ ТЕОРИЯ ОТНОШЕНИЙ

Восстановить учение о рациональных числах невозможно, но оно было, на нем основывалась вся теория подобия, широко использовавшаяся Гиппократом. 7 книга Евклида принадлежит, по видимому, Театету, а 8 – Архиту. Поэтому будем следовать Евклиду. Греки исходили из того, что единица неделима, поэтому говорили не о долях единицы, а об отношении целых чисел $\frac{m}{n}$. Согласно седьмой книге начал две пары чисел $(a; b)$ и $(c; d)$ пропорциональны, или имеют одинаковое отношение, если у a и b есть такой делитель f, а у c и d такой делитель g, что, $a = mf$, $b = nf$, $c = mg$, $d = ng$. Таким образом, все пары целых чисел разбивались на непересекающиеся классы пар, имеющих одно и тоже отношение. С нашей точки зрения каждому классу можно поставить в соответствие новый объект – рациональное число. Древние поступали иначе, они выбирали наименьшую пару (a_0, b_0), которая характеризовала класс. Была введена операция составления отношения из отношений, которая соответствует умножению дробей.

НЕСОИЗМЕРИМОСТЬ

Открытие несоизмеримости отрезков явилось поворотным пунктом развития математики. Оно разрушило раннюю систему пифагорейцев и привело к созданию новых и очень тонких теорий. Значение этого открытия можно сравнить лишь с открытием неевклидовых геометрий в 19 веке или теории относительности в начале 20 века. Доказательство проводилось методом от противного.

Пусть диагональ квадрата соизмерима с его стороной.

$$AC : AB = m; AC^2 : AB^2 = m^2 : n^2;$$

По теореме Пифагора $AC^2 = 2AB^2$, $m^2 = 2n^2$, m^2 – четно, значит и m – четно, $m = 2t$, $4t^2 = 2n^2$, $n^2 = 2t^2$, то есть n – четное.

Это показало, что с помощью одних только целых чисел нельзя строить метрическую геометрию. Это поразило греков. Вскоре обнаружилось, что это не единственная несоизмеримость. Феодор доказал, что стороны квадратов с площадями 3, 5, 7, 17 несоизмеримы со стороной единичного квадрата. Первое учение об иррациональности принадлежит юному ученику Феодора – Театету. Театет сумел охарактеризовать первый бесконечный класс иррациональностей $\sqrt{n}$, где n – целое число, не являющееся полным квадратом.

Общая теория делимости дошла до нас в изложении Евклида (VII книга и начало IX книги).

Если A и B – целые числа, то $A = nB + B_1$, $B = n_1B_1 + B_2$ и т. д. Процесс этот конечен, так как существует конечное число целых чисел, меньших B.

Естественнонаучные системы пифагорейцев подвергались критике справа и слева. Гераклит (530 – 470 г.) за мистицизм и эклектику, Платон (429 – 348) – за то, что они исследовали звуки и исследовали числа, на которых основано их звучание, вместо того, чтобы исследовать, какие числа созвучны сами по себе и какие нет, и почему это происходит. (Несоизмеримость – гибель Гиппаса Мессапонтского во время кораблекрушения).

Вместе с открытием несоизмеримости в математику вошло понятие бесконечности. В V веке до нашей эры возникает Эллейская школа, влияние которой на формирование абстрактной научной мысли огромно. Парменид был первым, кто строго различал чувственное и умопостигаемое. Элеаты не приняли пифагорейскую доктрину, ставящую в соответствие каждой вещи число. Если дискретные объекты можно представить целыми числами, то иначе дело обстоит в случае непрерывных величин, таких как длины, площади, объемы и т.д., которые можно представить как дискретные наборы единиц, лишь допустив существование бесконечного числа очень маленьких элементов, из которых эти объекты состоят. В качестве реакции на эту последнюю концепцию Зенон Элейский сформулировал 4 парадокса, иллюстрирующих невозможность бесконечного деления и всякого движения, если мыслить пространство и время, состоящим из неделимых частей.

1. Нет движения, потому что то, что движется должно дойти до середины раньше, чем оно дойдет до конца.

2. Ахиллес. Медленный в беге никогда не будет перегнан быстрым потому, что тот, кого преследуют, должен сначала достичь точки, из которой начал убегающий, так что медленный всегда будет на некотором расстоянии впереди.

3. Стрела. Если все либо покоится, либо движется, занимая пространство, равное ему самому, то, так как движущийся предмет всегда существует в мгновении, движущееся стрела неподвижна.

4. Стадион. Если имеется два ряда тел, каждый состоящий из равного ряда тел равного объема, которые проходят друг мимо друга по беговой дорожке, двигаясь в противоположных направлениях, один ряд, начиная с конца

стадиона, а другой с его середины, то это приводит к заключению, что половина данного времени равна удвоенному времени.

Новые основы математики – общее учение об отношениях и строгие методы предельных переходов были созданы Евдоксом Книдским. Евдокс был не только гениальным математиком, но и выдающимся астрономом, врачом, философом и оратором. Родился Евдокс в 406 году до нашей эры, в 23 года приехал в Афины, где его привлекла академия Платона с высеченной надписью "Пусть сюда не входит не обученный геометрии". Известно, что Евдокс решил задачу, поставленную Платоном: сконструировать модель, в которой видимые движения Солнца, Луны, Земли и планет получались бы путем комбинации равномерных круговых движений. Платон завидовал Евдоксу, превосходя его в философии, но еще больше уступая в математике. Вскоре Евдокс основал собственную школу в Кизике и построил обсерваторию, где впервые в Элладе велись систематические наблюдения.

Однако наиболее глубокие исследования Евдокса находятся в области, которую мы называем введением в анализ бесконечно малых. Теория Евдокса дошла до нас в изложении Евклида (V книга).

Понятие величины по Евдоксу охватывает и числа и непрерывные величины. Оно вводится с помощью аксиом, определяющих отношения равенства и неравенства.

1. Равные одному и тому же равны между собой.

2. И если к равным прибавляются равные, то и целые будут равны.

3. И если от равных отнять равные, то и остатки будут равны.

4. И совмещающиеся друг с другом равны между собой.

5. И целое больше части.

Евдокс добавил сюда аксиому, изгоняющую бесконечно малые и бесконечно большие величины: "Говорят, что величины имеют отношение между собой, если они, взятые кратно, могут превзойти друг друга"(в математику эта аксиома вошла под именем аксиомы Архимеда).

Теория Евдокса была безупречно строга и ею пользовались до конца 19 века, объявив, вслед за Ньютоном отношения числами, однако вся глубина была понята только после работ Дедекинда (вторая половина 19 века). Между их работами существует такая глубокая аналогия, что Липшиц спрашивал Дедекинда в одном из писем, что он сделал нового по сравнению с древними.

МЕТОД ИСЧЕРПЫВАНИЯ

В основе метода исчерпывания лежит основная лемма. Если даны две величины a и b, где $a < b$, то, вычитая из a больше ее половины, из получившегося остатка больше его половины и т. д., получим через конечное число шагов остаток $a_n < b$. Доказательство. По аксиоме Архимеда найдется n, что $nb > a$.

$$a_1 = a - a_1 < \frac{a}{2}$$

$$a_2 = a_1 - a_2 < \frac{a_1}{2} < \frac{a}{4}$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$a_n < \frac{a}{2^n}; 2^n a_n < a < nb$$

На основании этой леммы проводилось доказательство по схеме: для определения неизвестной величины некоторой фигуры в нее вписывали монотонно возрастающую последовательность величин $A_1, A_2, ..., A_n$, $A_n < A$ площади которых известны так, чтобы $A - A_1 < \dfrac{A}{2}$, $A - A_2 < < \dfrac{A}{4}$,..., $A - A_n < \dfrac{A}{2^n}$.

Далее – нахождение предела $A_n(B)$. Понятие предела не вводилось. Следующий шаг: $A = B$.

С помощью своего метода Евдокс доказывал следующие теоремы: площади двух кругов относятся как квадраты их диаметров; объем пирамиды в три раза меньше объема призмы с одним и тем же основанием и равными высотами; та же теорема доказывалась для конуса и цилиндра; объемы двух шаров относятся как кубы их диаметров (Евклид).

ГЕОМЕТРИЧЕСКАЯ АЛГЕБРА

Открытие несоизмеримости явилось причиной того, что в греческой математике, и притом в самой пифагорейской школе, обратили внимание на соотношение между алгеброй и геометрией. После того, как выяснилось, что отношение двух отрезков не может быть выражено как отношение двух целых чисел, система пифагорейцев была разрушена. Начались поиски путей выхода из кризиса. Для этого было несколько путей: 1) расширить понятие числа; 2) строить математику не на основе арифметики рациональных чисел, а на основе геометрии; 3) отказаться от строго логического построения учения о несоизмеримых величинах и перейти к нестрогому оперированию рациональностями. Третий путь был неприемлем для греков, первый путь был слишком труден, и они пошли по второму пути. Это была ошибка в стратегии.

Геометрическая броня сковывала живое тело античной математики. Изображение чисел с помощью точек было оставлено. Теперь числа изображались с помощью отрезков. Основные объекты – отрезки, прямоугольники и прямоугольные параллелепипеды. Сложение – прикладывание отрезков, вычитание – выкидывание из большего отрезка меньшего, умножение – построение прямоугольника.

Мы знаем геометрическую алгебру по второй книге Евклида и по произведениям Архимеда и Апполония.

Прямоугольник, заключенный между двумя отрезками, равен сумме прямоугольников, заключенных между одним из этих отрезков и частями, на которые он рассечен $a(b_1 + b_2 + b_3) = ab_1 + ab_2 + ab_3$ (дистрибутивность умножения). $(a + b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab$.

Для представления произведения трех величин нужно пользоваться пространственными фигурами.

Геометрическая алгебра основывалась на античной планиметрии, представленной циркулем и линейкой. Задачи эквивалентные квадратным уравнениям легко формулируются геометрически. Древние рассматривали три типа таких задач.

1. Преобразовать данный прямоугольник в квадрат $x^2 = ab$.

2. Приложить к заданному отрезку a прямоугольник заданной площади S так, чтобы недостаток был квадратом: $x(a - x) = S$ (эллиптическая задача).

3. К данному отрезку приложить прямоугольник заданной площади так, чтобы избыток был квадратом: $(a + x)x = S$ (гиперболическая задача).

ПЕРВЫЕ НЕРАЗРЕШИМЫЕ ЗАДАЧИ

В V веке до нашей эры были поставлены 3 задачи: удвоение куба, трисекция угла и квадратура круга. Первые две были решены в 30-ых годах 19 века, а третья в конце его. Задача сводится к решению уравнения $x^3 = a^2b$.

Легенда: На острове Делос вспыхнула чума. Оракул, спрошенный о том, как избавиться от этого бедствия, объявил, что надо вдвое увеличить жертвенник, имеющий форму куба. $\sqrt[3]{2}$ пытались представить в виде конечной комбинации квадратных радикалов. Но это не удавалось. Началось исследование. Гиппократ свел задачу к нахождению двух средних пропорциональных между заданными величинами. Пусть есть параллелепипед a^2b, который требуется преобразовать в куб $x^3 = a^2b$. Отсюда $\dfrac{a}{x} = \dfrac{x}{y} = \dfrac{y}{b}$.

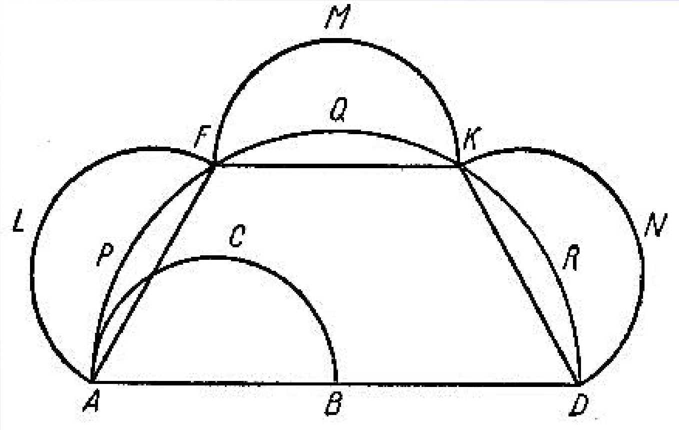
Архит показал, что величину x можно найти, рассматривая пересечения трех поверхностей – конуса, цилиндра и поверхности, полученной вращением окружности вокруг касательной.

К концу деятельности Евклида (конец IV века до н.э.) сложилось убеждение, что задача неразрешима с помощью циркуля и линейки.

Для решения задачи о трисекции угла были применены вставки и построена трансцендентная кривая – квадратрисса. Метод вставок заключался в том, чтобы поместить отрезок определенной длины так, чтобы его концы находились на кривых, а сам он или его продолжение проходили через данную точку. Обычно помещали отрезок между прямой и окружностью. Но кривая при этом может быть очень сложной.

В V веке до нашей эры Гиппий ввел новую кривую – трисектрису, позднее названную Лейбницем квадратриссой, которая определялась механически. Название объясняется тем, что с помощью этой же кривой можно решить задачу о квадратуре круга. Первые две задачи сводятся к кубическим уравнениям, но третья к построению отрезка длины m. Гиппократ пытался подойти к решению задачи о квадратуре круга, рассматривая квадрируемые луночки.

Гиппократ нашел три вида таких луночек. В 30 – 40 годах 20 столетия установлено, что есть 5 видов квадрируемых луночек, но ни одна из них не квадрируема вместе с кругом.



Начало
Содержание
Страница 46 из 120
Назад
На весь экран
Закрыть

Начала Евклида. Дифференциальные и интегральные методы архимеда и их роль в развитии инфинитезимальных методов 17 века. Конические сечения Аполлония.

"Начала" Евклида подводят итог 300 – летнему развитию математики и вместе с тем создают прочную базу для дальнейших исследований. Идея создания "Начал" принадлежит не Евклиду.

Евклид жил в 3 веке до нашей эры в Александрии и преподавал там геометрию. Ему принадлежит высказывание: "В геометрии нет царских путей".

"Начала" Евклида – 13 книг. Каждая книга начинается с определений, кроме того, первой книге предшествуют 5 постулатов и 5 аксиом.

Постулаты:

1. От всякой точки до всякой точки можно провести прямую.
2. Ограниченную прямую можно непрерывно продолжать по прямой.
3. Из всякого центра всяким радиусом может быть описан круг.
4. Все прямые углы равны между собой.
5. Если прямая, падающая на две прямые, образует внутренние и по одну сторону углы, меньшие двух прямых, то продолженные неограниченно эти две прямые встретятся с той стороны, где углы меньше двух прямых.

Первые 4 книги посвящены геометрии. В книге 1 доказаны элементарные свойства треугольников, среди которых условия равенства (доказывались наложением), описываются некоторые геометрические построения: построение биссектрисы угла, середины отрезка, перпендикуляра к прямой. В книгу 1 включены также теория параллельных и вычисление площадей некоторых плоских фигур (треугольника, параллелограмма, квадрата).

В книге 2 заложены основы геометрической алгебры, восходящей к школе Пифагора. Все величины в ней заменены отрезками.

Книга 3 целиком посвящена геометрии окружности.

В книге 4 изучаются правильные многоугольники, вписанные в окружность и описанные около ее.

Если первые 4 книги элементарны, то книга 5 написана на значительно более высоком уровне, а теория отношений, которой она посвящена – вещь более тонкая. Теория отношений принадлежит Евдоксу (400 – 355 годы до нашей эры) – основателю школы в Кизике, которая соперничала с академией Платона.

Понятие отношения возникает интуитивно, когда хотят сравнить две величины, то есть измерить их. Так пифагорейцы разработали теорию отношений, но она была применима лишь к соизмеримым величинам. Теория пропорций в 5 книге Евклида – шедевр математической науки. К. Вейерштрасс отдал ей должное, приняв ряд определений.

В книге 6 теория пропорций применяется к решению задач, равносильных решению квадратных уравнений.

Книги 7 – 9 представляют собой трактат по теории чисел, теория пропорций в них прилагается к числам. Исследуются вопросы четности, делимости, доказывается бесконечность ряда действительных чисел, бесконечность ряда простых чисел. Книга 10 читается с трудом, но считается одной из самых тонких, она содержит классификацию квадратичных иррациональных величин, которые представлены отрезками и прямоугольниками. Книги 11 – 13 посвящены стереометрии. В книге 12, которая восходит вероятно к Евдоксу, с помощью метода исчерпывания площади криволинейных фигур сравниваются с площадями многоугольников. Предметом книги 13 является построение правильных многогранников.

ИНТЕГРАЛЬНЫЕ МЕТОДЫ АРХИМЕДА

Архимед родился в 287 году до н.э. в городе Сиракузы (в Сицилии). Его отец – астроном Фидий привил сыну любовь к математике, механике и астрономии. Работая в Александрийской библиотеке, переписывался с астрономом Кононом, а после его смерти – с Досифеем и Эратосфеном. Иногда Архимед сообщал свои теоремы без доказательства, иногда включал несколько ложных положений. Каждое письмо Архимеда было посвящено одной теме (винт для вычерпывания воды, построил машину, с помощью которой одним движением руки протащил тяжелый корабль по суше, сконструировал планетарий). Защита Сиракуз во время нападения римлян проявила талант Архимеда как создателя метательных машин, мощных кранов, зеркал. “Не трогай мои круги”, – так заявил он неприятельскому воину, из числа ворвавшихся в Сиракузы в 212 г. до н. э.. Согласно желанию Архимеда на его могиле высечен шар, вписанный в цилиндр, и все же основным делом его жизни была математика. В сочинениях “О шаре и цилиндре”, “О спиралях”, “О коноидах и сфероидах” Архимед применил метод верхних и нижних сумм, которые мы называли суммами Римана или Дарбу.

Пусть требуется найти объем тела. Он вписывает и описывает вокруг тела ступенчатые фигуры. Суммируя эти части, он получает величины $\overline{S}$ и $\underline{S}$, $\overline{S} < V < \underline{S}$. $\overline{S} - \underline{S}$ или $\underline{S} - \overline{S}$ может быть сделана сколь угодно малой при достаточном увеличении числа элементарных частей. Далее V находят как общий предел $\underline{S}$ и $\overline{S}$. Хотя это и не отмечается особо, но $\overline{S}$ везде монотонно возрастает, а $\underline{S}$ монотонно убывает. Во всех случаях Архимед по существу вычисляет $\int\limits_a^a x^2 dx = \frac{x^3}{3}$.

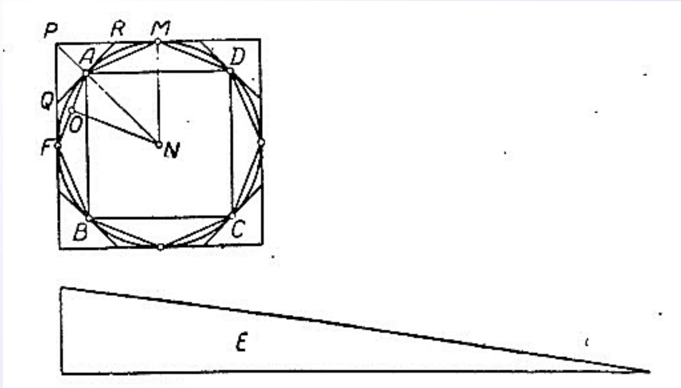
Для нахождения площадей и объемов Архимед пользуется соотношениями, которые в современных обозначениях имеют вид:

$$\sum_{v=1}^{n} vh = = \frac{n(n-1)}{2}h; \ \sum_{v=1}^{n}(vh)^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}h^2.$$

При этом формулу 2 он применил в трех случаях: для нахождения объемов сегментов эллипсоида и параболоида вращения, а так же площади первого витка спирали $\rho = a\varphi$. При этом пользовался неравенствами, находя по существу нижнюю грань верхних сумм и верхнюю грань нижних сумм. С помощью метода верхних и нижних интегральных сумм Архимед решил и более трудную проблему – определение длин дуг и площадей кривых поверхностей. Для этого вводит 5 новых постулатов. Постулаты:

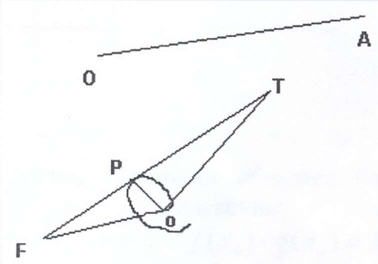
1. Прямая линия есть кратчайшее расстояние между точками.
2. Из двух линий проведенных между теми же самыми точками и обращенных своей выпуклостью в одну и ту же сторону, внешняя линия больше.
3. Плоская поверхность меньше кривой поверхности, ограниченной тем же контуром.
4. Из двух кривых поверхностей, ограниченных одним и тем же плоским контуром и обращенных своей выпуклостью в одну и ту же сторону, внешняя поверхность больше.
5. Большая из двух неравных линий, поверхностей или тел превосходит меньшую на такую величину, которая будучи складываема сама с собой, может превзойти любую заданную величину из тех, которые могут друг с другом находится в определенном отношении.

Это позволило Архимеду найти поверхность сферы и сферичного сегмента и дать метод вычисления длины окружности с любой точностью. Он вписывал в круг правильный многоугольник, число сторон которого кратно 4, и вращал круг и многоугольник вокруг диаметра. Тогда S вращения многоугольника равно $\sum$ поверхностей усеченных конусов. Затем рассматривается поверхность тела вращения многоугольника, описанного вокруг круга, подобного данному. Для нахождения длины окружности используется $\frac{P_{96}}{D} < \frac{C}{D} < \frac{P_{96}}{D}$ и получается знаменитое приближение $3\frac{10}{71} < \frac{C}{D} < 3\frac{1}{7}$.



ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ МЕТОДЫ АРХИМЕДА

В сочинение “О спиралях” Архимед разработал методы определения касательной, которые применены в случае отыскания касательной к спирали $\rho = a\varphi$.



Спираль Архимед определил кинематически. OA равномерно вращается вокруг точки O и одновременно по ней двигается т. M от O к A. Архимед показывает $\rho_1 \div \rho_2 = \varphi_1 \div \varphi_2$. Пусть требуется найти касательную в точке P спирали. Архимед определяет ее как полярную подкасательную. $O'T', OT + OP$.

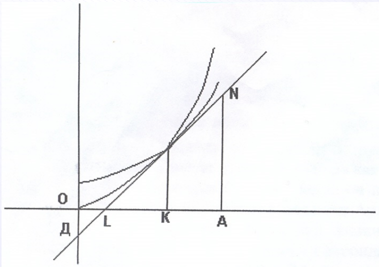
К дифференциальным методам Архимеда относится и его метод нахождения экстремумов. Задачи на нахождение экстремумов у древних возникли как определение условий разрешимости уравнений. Первая из них встречается в “началах” $x(a-x) = S\max$, $x(a-x) = \dfrac{a^2}{4}$ и, значит, уравнение имеет решение при $S \leq \dfrac{a^2}{4}$. Более трудную задачу рассмотрел Архимед. Он провел полное исследование существования положительных корней кубического уравнения $x^2(a-x) = Sc = pbc$. Это уравнение будет иметь положительные корни, если $Sc \leq \max x^2(a-x)$; $0 \leq x \leq a$.

Корни уравнения строились как абсциссы точек пересечения кривых $y = \dfrac{x^2}{p}$ и $y = \dfrac{cb}{a-x}$.

Кривые могут иметь либо 2 точки пересечения, либо 1 точку касания, либо не иметь общих точек. Вывод условий, при котором имеет место каждый случай, связан с отыскиванием экстремума выражения $x^2(a-x)$. Архимед утверждал, что этот экстремум достигается при $x=\dfrac{2a}{3}$ (в тексте нет указаний на то, как это значение было найдено). Но Архимед доказывает, что при $x=\dfrac{2a}{3}$ выражение $x^2(a-x)$ имеет максимум, равный $\dfrac{4a^3}{27}$. Из этого можно извлечь его метод.

Архимед доказывает, что если кривые пересекаются в какой-то точке x, то в этой точке экстремума нет.

$MK = OD$ (по свойству касательной к параболе). $MN = ML$ (по свойству касательной к гиперболе). Но тогда и $OL = LK = KA$ т.е.,$\dfrac{2}{3}a$.



Метод Архимеда обладает большой степенью общности и может быть применен к отысканию экстремума любого произведения $f(x)\cdot g(x) = u(x)$, $u(x_0) = f(x_0)g(x_0) = M$, если экстремум достигается.

$$f(x) = \frac{M}{g(x)};\, f'(x_0) = -\frac{M}{g^2(x_0)}g'(x_0);\, (f(x)g(x))' = 0$$

Таким образом, Архимед нашел способ сведения проблемы нахождения экстремумов к проблеме нахождения касательных.

КОНИЧЕСКИЕ СЕЧЕНИЯ АПОЛЛОНИЯ

Третий из великих греческих геометров эпохи эллинизма – Аполлоний род. Расцвет его деятельности падает приблизительно на 210 г. до н.э., когда он жил в Александрии.

Творчество Аполлония богато новыми красивыми идеями. Его основные работы: "О вставках" (посвящена классификации кривых: плоские, телесные и линейные), "Об упорядоченных иррациональностях", "О касании" (знаменитая задача Аполлония), "О спиралях". Но самые знаменитые работы из области геометрии посвящены коническим сечениям (8 книг – 4 греческий, 3 – арабский перевод, восьмая книга утеряна).

Рассмотрим новую трактовку конических сечений. Кривые второго порядка впервые были рассмотрены в связи с задачей об удвоении куба, и Менехм представил их как плоские сечения прямоугольного, остроугольного и тупоугольного конусов вращения. Такое стереометрическое представление гарантировало существование и непрерывность рассматриваемых кривых. Получали уравнение $y^2 = 2px$. Это и есть уравнение (симптом) кривой. Древние записывали его в словесно геометрической форме.

Квадрат на полухорде в каждой точке равен прямоугольнику $PKSR$, построенному на отрезке PK оси и постоянном отрезке PR.

Аналогично выводились уравнения для сечений остроугольного (эллипс) и тупоугольного (гипербола) конусов.

Аполлоний берет круговой конус, рассматривает обе его полости (обе ветви гиперболы) и проводит сечение под любым углом к образующей.

Аполлоний дает вывод уравнений кривых, при этом он классифицирует кривые по виду уравнения, т.е. в основу кладется точка зрения, свойственная аналитической геометрии. Аполлонию мы обязаны названиями "эллипс", "гипербола".

Аполлоний понимал, что классификация законна, если кривая не изменяется при соотнесении кривой к другому ее диаметру и сопряженным хордам. Он исследует и этот вопрос. В последующих трех книгах Аполлоний изучает свойства сопряженных диаметров и асимптот, получает уравнение гиперболы относительно асимптот и устанавливает основные свойства фокусов эллипса и гиперболы.

Математика в Древней Индии и Древнем Китае. Математика в странах Арабского Халифата.

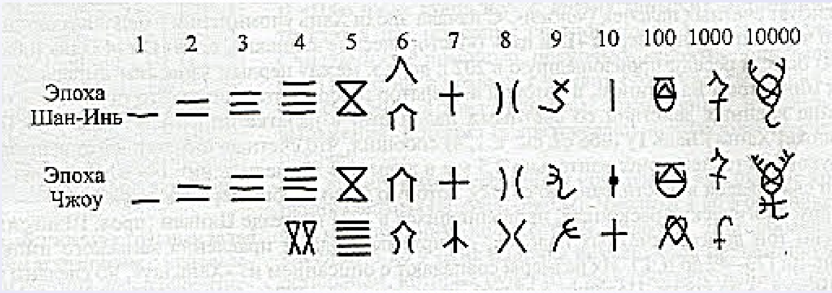
После крушения античного рабовладельческого общества развитие математики в течение нескольких столетий происходило главным образом в странах Ближнего и Среднего Востока – тех самых странах, которые были колыбелью древнейших цивилизаций, и где после завоеваний Александра Македонского находились главные культурные и научные центры. Все эти страны в средние века входят в состав арабского Халифата, и наука в них развивается на арабском языке (Двуречье и Египет – Иран и Среднюю Азию, на западе страны Магриба и мусульманскую Испанию). Значительных успехов достигла наука в Индии и Китае. С X века на этот путь вступает Западная Европа, а через несколько столетий и Восточная Европа.

Средневековая математика – это элементарная математика постоянных величин и неизменных геометрических фигур. Это, прежде всего, вычислительная математика, совокупность расчетных алгоритмов, т.е. поворот математики к решению практических задач, который начался в эллинискую эпоху, но был прерван крушением античного мира. В каждой области отличается особенностями. В математике стран ислама и более поздней математике Западной Европы чувствуется влияние греческой математики, в меньшей степени оно чувствуется в Индии и отсутствует в Китае.

Труды ученых средневековья сохранились в виде рукописей, многие из которых изучены лишь во второй половине двадцатого столетия.

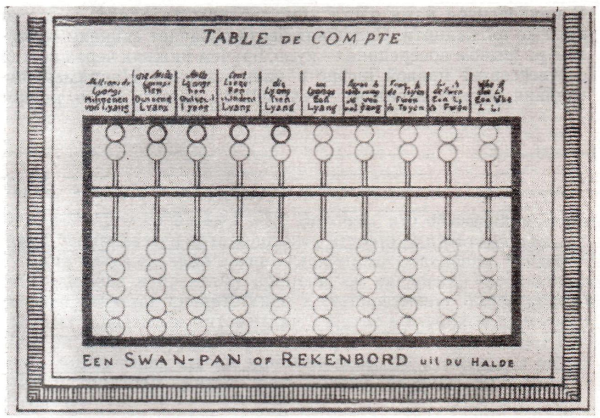
МАТЕМАТИКА В ДРЕВНЕМ КИТАЕ

Китайская цивилизация возникла в начале II тысячелетия до нашей эры на берегах реки Хуанхэ, а затем распространилась на бассейн Янцзы. $XVIII$ – $XVII$ веками до н.э. датируются китайские памятники письменности: надписи на гадательных костях животных и панцирях черепах с обозначением цифр, обломки посуды с орнаментами из правильных 5,7,8,9 – угольников.



КИТАЙСКАЯ НУМЕРАЦИЯ

Китайская нумерация основана на мультипликативном принципе. Форма китайских иероглифических цифр, возникших во *II* тысячелетии до н.э., установилась к *III* в до н.э. Эти иероглифы применяется и в настоящее время. Арифметические действия в древнем Китае производились на счетной доске с помощью палочек. Когда были изобретены отрицательные числа, палочки стали делать двух цветов: красные и черные, или с различным сечением – квадратным и треугольным. До нас дошли слова математиков *III* века в Сунь-цзы. “В методах, которые употребляются при обычном счете, следует, прежде всего, познакомится с разрядами: единицы вертикальны, десятки горизонтальны, сотни стоят, тысячи лежат, тысячи и десятки тысяч выглядят одинаково, десятки тысяч и сотни тоже”. В Китае был изобретен прибор суаньпань, напоминающий русские счеты.



СУАН-ПАН

АРИФМЕТИЧЕСКИЕ ДЕЙСТВИЯ

Сложение и вычитание не нуждалось в таблицах, для умножения составлялись таблицы. В Китае имелась компактная таблица от $9 \cdot 9 = 81$ до $1 \cdot 1 = 1$, которая распевалась учениками. Имелись и другие таблицы, например: $m^2 \cdot n^2$, $m = 9, 8, \ldots, 1$. $n = m, \ldots, 1$.

Древнейшие математические трактаты дошли до нас в редакции II в до н.э., но это обработка более древних сочинений. "Математический трактат об измерительном месте" – посвящен астрономии. Из математических вопросов сюда включены теорема Пифагора и действия с дробями. "Математика в девяти книгах". В ней собраны 246 задач, изложенных догматически: сначала формулируется задача, затем ответ и в весьма сжатой форме способ решения.

Книга 1 "Измерение полей" – посвящена арифметике дробей и вычислению площадей различных плоских фигур. Книга 2 "Соотношение между различными видами зерновых культур" – посвящена решению задач на пропорции. В книге 3 "Деление по ступеням" – содержатся задачи на деление пропорционально данным числам. 4 книга "Шао Гуан" – посвящена нахождению стороны прямоугольника и квадрата по его площади, ребра куба по объему, а также определению диаметров круга и сферы. В книге 5 "Оценка работ" – измеряются объемы стен, рвов, каналов, плотин различной формы и определяется количество рабочих, необходимых для выполнения работ. В книге 6 "Пропорциональное распределение" – решается задача справедливого распределения налогов и поставок между уездами в зависимости от различных условий. В книге 7 "Избыток и недостаток" – решаются системы двух линейных уравнений с двумя неизвестными методом ложного положения. В восьмой книге "Фан Чэн" – решаются системы n линейных уравнений с n неизвестными. В девятой книге "Гоу-гу" решаются задачи на теорему Пифагора. Дроби у китайцев появились почти одновременно с целыми числами задолго до отрицательных чисел ($1/2$, $1/3$, $2/3$ – первые из них). Удивительно, что в китайских операциях с дробями нет ничего необычного. Сложение и вычитание, как у нас, умножение – площадь земельного участка, деление - распределение некоторого количества (монет) между равноправными участниками дележа (3 1/3 человек). Постепенно "фу" стали истолковываться, как долг, недостаток. В III веке до н. э. у китайцев использовалась десятичная система счисления, по существу появились первые десятичные дроби. С помощью дробей давались приближенные выражения иррациональных чисел.

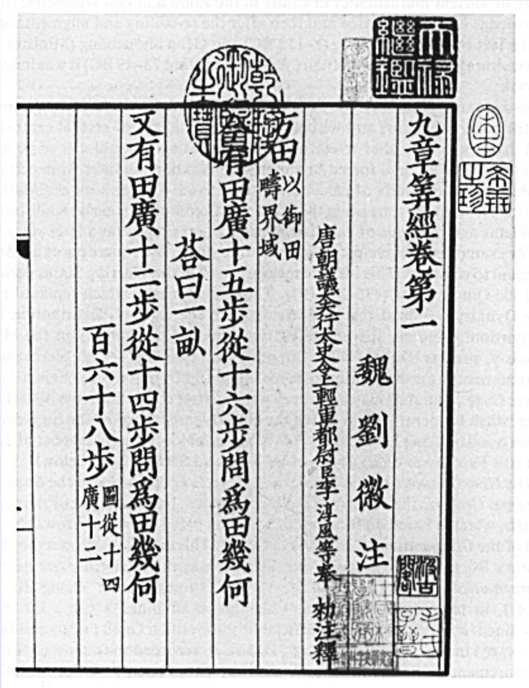
Метод двух ложных положений

Метод двух ложных положений посвящен решению линейных уравнений вида $ax = b$.

x_1, и x_2 – два ложных значения X и при подставлении их в левую часть уравнения, получаем ошибки $ax_1 - b = y_1; ax_2 - b = y_2$. Обычно $x_1 < x < x_2$ и ошибки имеют разные знаки, то есть являются недостатком и избытком. Из пропорции $\dfrac{ax_1 - b}{ax_2 - b} = \dfrac{y_1}{y_2}; \dfrac{ax_1 - ax}{ax_2 - ax} = \dfrac{y_1}{y_2}; \dfrac{ax_1 - b}{ax_2 - b} = \dfrac{y_1}{y_2}; \dfrac{ax_1 - ax}{ax_2 - ax} = \dfrac{y_1}{y_2}$. Числитель и знаменатель легко строится с помощью таблицы $\begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{pmatrix}$ выкладываемой на счетной доске. Метод Фан-Чэн, излагаемый в 8 книге, является вершиной достижения китайских математиков в решении линейных уравнений. Он мало чем отличается от метода Гаусса, только все операции проводятся на счетной доске. Необходимым условием применения метода Фан-Чэн было введение отрицательных чисел. Отрицательные числа выделялись на счетной доске палочками другого цвета, а при письме записывались другими чернилами или отделялись косой чертой. Для них было придумано особое название "фу'. Это позволило расширить класс задач, решаемых с помощью табличного метода. Постепенно "фу" стали истолковывать как долг, недостаток.

Китайские математики, так же как и вавилонские и греческие, решали задачу о нахождении целых решений уравнения $x^2 + y^2 = z^2$. Имеется серия задач,сводящихся к системе вида: $\begin{cases} x^2 \pm y^2 = a \\ x \mp y = b \end{cases}$. Найденные значения $x^2 + y^2 = z^2$; $a = \dfrac{p^2 - q^2}{2}$; $b = pq$; $c = \dfrac{p^2 + q^2}{2}$ позволяли составлять треугольники с целочисленными сторонами.

Метод тянь-юань. В "математике в 9-ти книгах" описываются методы извлечения $\sqrt{}$ и $\sqrt[3]{}$, которые были разработаны к началу н. э., и которые были обобщены на случай корня n-ой степени. Метод связан с нахождением корня с любой степенью точности.

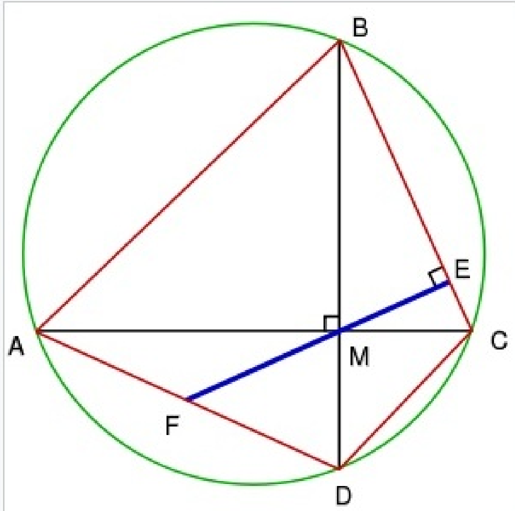

九章筭經卷第一
魏劉徽注
唐朝議大夫行太史令上輕車都尉臣李淳風等奉 勑注釋
方田 以御田疇界域
今有田廣十五步從十六步問爲田幾何
荅曰一畝
又有田廣十二步從十四步問爲田幾何
百六十八步 圖從十四 廣十二

МАТЕМАТИКА В ДРЕВНЕЙ ИНДИИ

Еще в третьем веке до нашей эры в долине Инда существовала развитая цивилизация. В первом тысячелетии до нашей эры появились священные книги брахманов “Веды”.

Сведения о математике древней и средневековой Индии неполны и о некоторых этапах развития индийской математики можно судить лишь предположительно.

В 628 году была написана важнейшая из синдхат Брахмагуптой (20 книг). XII книга посвящена арифметике и геометрии, $XVIII$ – алгебре.



$\overline{BD} \perp \overline{AC}, \overline{EF} \perp \overline{BC} \Rightarrow |\overline{AF}| = |\overline{FD}|$

ИНДИЙСКАЯ НУМЕРАЦИЯ

Счет целых чисел в Индии с древних времен носил десятичный характер. Сначала числа записывались справа налево, начиная с VI века – слева направо. Для записи использовались специальные знаки от 1 до 9. Наряду с цифровой записью в Индии широко применялась словесная запись, чему способствовал богатый синонимами язык (луна – дыра – крылья – луна).

Изобретенные индусами цифры $1, 2, \dots, 9$ мы называем арабскими, но сами арабы называли их индийскими, а арифметику, основанную на десятичной системе счисления – индийским счетом. Арифметические действия

Если наши геометрические знания имеют своими истоками греческую математику, то наша арифметика имеет несомненно индийское происхождение. Вычисления проводились на доске, покрытой песком или пылью, а то и просто на земле. Поэтому арифметические действия называют иногда "дхули – карма" – работа с пылью. Приемов умножения около десяти. Существует несколько способов возведения в квадрат и куб. $n^2 = (a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2, n^3 = (a+b)^3 = \dots,$

$n^2 = (a+b)^2 = (a-b)^2 + 4ab, n^3 = n + 3n + 5n + \dots + (2n-1)n,$

$n^2 = 1 + 3 + 5 + \dots + 2n - 1,$

$n^2 = (n-a)(n+a) + a^2.$

Первое описание извлечения корня квадратного и корня кубического встречается еще в V – веке у Ариабхата (р.475).

"Пада" – корень (основание), мула – основание, арабские переводчики перевели как "джизр', латинские в XII веке как radix, откуда происходят наши термины "корень" и "радикал".

Дроби в Индии известны очень давно. Еще в середине II тысячелетия встречаются дроби $1/4$ – пада, $1/2$ – ардха, $1/16$ – кала. Записывались дроби также как у нас, но без дробной черты. Друг от друга дроби отделялись прямоугольником. При сложении дроби записывались рядом. При вычитании ставился знак "+" справа. В смешанной дроби целая часть записывалась сверху. При умножении дроби записывались рядом, при делении – одну под другой. О смысле можно было судить по контексту. При приведении дробей к общему знаменателю с IX века использовался НОК.

Задачи на пропорции. Задачи на пропорции многочисленны. При решении уравнения – использовалось правило ложного положения. Тройное правило $\frac{a}{b} = \frac{c}{x}$. Правило $\frac{a}{b} = \frac{c}{x}, \frac{d}{e} = \frac{y}{x}, x = \frac{bce}{ad}$.

Алгебра. Выдающимся достижением индийских математиков было создание развитой алгебраической символики. Неизвестную величину они назвали "йават-тават", что означало столько сколько, в дальнейшем использовался символ "йа". Если неизвестных было несколько, то использовались названия цветов: калака (ка) – черный, нилака (ни) – голубой, питака (пи) – желтый, панду (па) – белый, лохита (ло) – красный. Иногда неизвестное обозначалось 0. Символ сложения "йу", "гу" – умножение, "бха" – деление. Вычитание обозначалось точкой над вычитаемым или знаком '+' сзади. x^2 – ва, x^3 – гха, x^4 – ва-ва, x^5 – ва-гха и т.д. Знака $=$ не было.

Отрицательные и иррациональные числа. Начиная с Брагмагупты (598 р.), индийские математики используют отрицательные числа, трактуя их как долг и имущество. Возможно, это заимствовано в Китае. Магавира говорит о двузначности квадратного корня и ставит задачу о $\sqrt{-a}$. Бхаскара (1114 – 1185) приводит равенство:

$$\sqrt{a+\sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a+\sqrt{a^2-b}}{2}} + \sqrt{\frac{a-\sqrt{a^2-b}}{2}}.$$

Линейные уравнения. Задача о курьерах, предложенная Магавирой (IX век), приводит к решению системы уравнений $\begin{cases} 9x+7y=107 \\ 7x+9y=100 \end{cases}$. Метод решения не отличается от метода уравнивания коэффициентов.

Квадратные уравнения. Задачи на квадратные уравнения имеются в "Ведах", "Шалва-сутре", но с их решением мы впервые встречаемся у Ариабхаты. Так задача на сложные проценты приводит к уравнению $tx^2 + px = qp$. Решение этой задачи приведено словесно, ответ можно записать в виде:

$$x = \frac{\sqrt{qpt + \left(\frac{p}{2}\right)^2} - \frac{p}{2}}{t}.$$

К квадратному уравнению приводят и задачи на определение числа членов арифметической прогрессии по данной сумме, первому члену и разности. Брахмагупта сформулировал правило решения квадратных уравнений, приведенных в канонической форме – $ax^2 + bx + c = 0$; $a > 0$. Брахмагупта не говорит о двух корнях уравнения, но Магавира уже знает об этом, формулируя задачу: "Найти число павлинов, $1/16$ часть которых сидит на манговом дереве, а квадрат $1/9$ остатка вместе с 14 другими павлинами на дереве тамала". Бхаскара сформулировал условие существования двух положительных корней. Бхаскара рассматривал специально подобранные уравнения третье и четвертой степени. $x^4 - 2x^2 - 400x = 9999$, $x^4 + 2x^2 + 1 = 4x^2 + 400x + 10000$. $x^2 + 1 = 2x + 100$, $x = 11$.

Неопределенные уравнения. Крупных успехов достигли индийские математики в решении неопределенных уравнений, возникающих в связи с необходимостью определять периоды повторения одинаковых положений небесных светил с различными временами обращения. В отличие от Диофанта, искавшего только рациональные решения, индийцы дали способ нахождения целых положительных решений. Решение в целых числах линейного уравнения $ax + b = cy$ приводит Ариабхата, но более подробно оно описано в сочинениях Брахмагупты и Бхаскары. Способ решения основан на измельчении или рассеивании – разложении $\frac{a}{c}$ — в непрерывную дробь. Вершиной достижения с индийских математиков является решение в целых положительных числах общего неопределенного уравнения второй степени с двумя неизвестными $ax + b = y^2$.

Теорема 1. *(Теорема Пифагора.)*
Знания индийских математиков в области геометрии уступают их арифметическим и алгебраическим знаниям. Геометрические факты приводились без доказательства. Чаще всего это был чертеж со словами “Смотри”. Такого рода доказательство теоремы Пифагора приводит Бхаскара в книге “Венец знаний”. Брахмагупта считал, что площадь четырехугольника можно вычислить по формуле

$$S = \sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)},$$

что на самом деле верно только для четырехугольника, вписанного в окружность.

Известны также некоторые формулы объемов тел:

$$V = \frac{\pi h}{3}(R^2 + R \cdot r + r^2);\ \pi = \sqrt{10};\ V = \frac{1}{3}SH;\ V = \frac{4}{3}\pi R^3; \text{где } \pi = 3,1416.$$

Тригонометрия. Уже древнейшая из синдхат “Сультасутра” – “Принципы измерения хорд” познакомила индийцев с тригонометрией хорд александрийских астрономов. Хорда – джива (тетива) впоследствии было заменено термином полухорда – ардха-джива (полутетива). Арабские переводчики записали это арабскими буквами – джайбл, что означало пазуха, впадина, последнее на латынь было переведено как синус. Пользовались индусы и линией косинуса – котиджива.

Индусам были известны некоторые формулы тригонометрии:
$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$; $\sin\alpha = \cos(90^o - \alpha)$; $\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha \cdot \cos\beta + \sin\beta \cdot \cos\alpha$.

Ариабхата приводит таблицу синусов через $33^o45'$.

Индусы пользовались тенью, отбрасываемой шестом (гномоном), для определения высот и расстояний. Эти вычисления привели потом математиков стран ислама к тангенсам и котангенсам, которые они называли тенями.

Индусских математиков интересовали задачи на суммирование рядов: сумма треугольных чисел, квадратов и кубов. Например, они использовали ряд

$$r\varphi = \frac{r\sin\varphi}{\cos\varphi} - \frac{r\sin^3\varphi}{\cos^3\varphi} + \frac{r\sin^5\varphi}{\cos^5\varphi} - \ldots.\ \text{При } r = 1;\ \varphi =;\ \frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \ldots.$$

Индийские математики предвосхитили не только конечные результаты, но и методы, приводящие к ним. Так в современных учебниках по математическому анализу ряд $\arctan x$ получают с помощью способа, сходного с индийским.

$\arctan x = \int\limits_0^1 \frac{dx}{1+x^2}$ – подинтегральная функция раскладывается в степенной ряд, затем почленно интегрируется.

Математика в странах арабского халифата. В VII веке в Аравии возникла новая религия – ислам (покорность), основанная Мухаммедом (Магометом). В результате распространения ислама, в том числе и насильственного, образовалась группа государств, говорящих на арабском языке (Сирия, Месопотамия, Иран, Египет, Северная Африка, Испания, пиренейский полуостров, Сицилия и юг Италии). Началом ислама считается 622 год – (год бегства Мухаммеда из Мекки). В завоеванных странах арабы застали более высокую культуру, багдадские халифы стали приглашать в Багдад виднейших ученых из покоренных стран. В $IX - X$ веках большинство ученых, работающих в Багдаде, были уроженцами Средней Азии. В X веке возникают новые центры в Бухаре и Хорезме, где воспитывались такие знаменитые ученые как Авиценна (ибн Сина) и ал-Бируни. В XI веке Среднюю Азию, Иран, Сирию, Месопотамию завоевывают турки-сельджуки, а в $XIII$ веке монголы. Организуются новые научные центры. В XI веке Омар Хайям работает в Иране, крупнейший ученый $XIII$ века ад-Дин ат-Туси работает в Мараге (Азербайджан) – столице внука Чингисхана. В XV веке в Самаркандской обсерватории работает ал-Коши.

$VIII - X$ века – первый период развития математики стран ислама. На арабский язык переводятся индийские книги, "Начала Евклида", "О шаре и цилиндре" – Архимеда, "Конические сечения" Апполония, "Сферика" Феодосия и Менелая, "Арифметика" Диофанта, философские сочинения Аристотеля и другие.

Арабская математика была в основном направлена на решение задач практической жизни и астрономии.

В странах ислама два типа нумерации: буквенная и десятичная позиционная, заимствованная у индусов. В буквенной – отдельные знаки для $1, 2, 3, \ldots 9, 10, 20, 30, \ldots 90, 100, 200, 900, 1000$. Введение десятичной позиционной системы счисления появилось в книге ал-Хорезми "Об индийском счете". 9 цифр и маленький кружок, чтобы по нему знали, что разряд пуст (нуль – сыфр, отсюда название – цифра).

Арифметические действия. Первое руководство по арифметике написано ал-Хорезми, где подробно описано сложение, вычитание, умножение, деление и извлечение квадратного корня с помощью индийских цифр. За действиями над целыми следуют операции с десятичными дробями. Термин алгоритм – это латинизированный перевод имени автора. Арабский язык не имеет специальных терминов для выражения долей единицы, поэтому читается – одна часть из n , m частей из n. Дробь представляется в виде суммы долей единицы или их произведения. Например, $\frac{9}{10} = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{10}$. Когда точное представление невозможно, пользовались приближениями: $\frac{3}{17} \approx \frac{1}{6} + \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{10}$. Арабские астрономы использовали почти исключительно шестидесятеричные дроби – традиция, восходящая к Вавилону. Числа от 1 до 59 записывались в алфавитной нумерации. Дробные шестидесятеричные разряды именовались минутами, секундами, терциями, разряд от 1 до 59 градусами, а высшие разряды – первыми поднятыми, вторыми поднятыми и т.д.

Попытки введения десятичных дробей в странах ислама делались несколько раз. Впервые это систематически сделал ал-Коши. Он формулирует основные правила действий с десятичными дробями, правила перевода шестидесятеричных дробей в десятичные и наоборот. Целая часть отделяется от дробной вертикальной чертой или записывалась другим цветом или подписывается название разрядов.

Извлечение корней впервые встречается у Омара Хайяма (в 1074 году его пригласили руководить обсерваторией в Исфагане). В арабской математике чрезвычайно большое значение имеет приближенное вычисление корней. В книге по алгебре Омар Хайям упомянул методы индийцев извлечения квадратных и кубических корней. Вполне вероятно, что Хайям владел способом возведения двучлена в любую натуральную степень. Но сочинение Хайяма не найдено. Первое сочинение, в котором описывается способ извлечения корня любой степени из положительного целого числа встречается в "сборнике по арифметике с помощью доски и пыли" ат-Туси (советник монгольского хана Хулагу (1201 – 1274) организовал в южном Азербайджане крупнейшую обсерваторию).

Что касается понятия отрицательного числа, возникшего в Китае и Индии, то они не нашли заметного применения в арабской математике.

Ал-Хорезми был автором трактата по алгебре "Краткая книга об исчислении ал-джабра и валь-мукабалы". В латинском переводе эта книга оказала большое влияние на средневековую европейскую науку. В книге рассматривается решение шести классов уравнений. 1)$ax^2 = bx$; 2)$ax^2 = c$; 3)$bx = c$; 4)$ax^2 + bx = c$; 5)$ax^2 + c = bx$; 6)$ax^2 = bx + c$. Способ решения ал-джабр (восполнение) – перенос вычитаемых членов в другую часть в виде прибавляемых членов и валь-мукабалы (противопоставление), то есть взаимное уничтожение равных членов в обеих частях уравнения. Приемы численного решения уравнений 3-ей степени были разработаны ал-Бируни.

Математика арабов риторическая. Были сделаны только первые шаги к созданию символики. У арабов существовало 7 способов построения эллипса, параболы, гиперболы с помощью циркуля и линейки по точкам. Итог: арабские цифры, алгебра, алгоритм, цифра, корень, синус.

В области геометрии арабская математика внесла меньший вклад в мировую культуру, чем в области алгебры. В одной книге "что нужно ремесленнику из геометрических представлений" помимо задач на построение, решаемых точно, даются и приближенные построения, например, построение правильных семи и девятиугольников, рассматриваются механические приемы трисекции угла и удвоения куба. Абу-л-Вафа указывает способы построения параболы по точкам (зажигательные зеркала) и рассматривает равные фигуры на сфере.

Среди общих проблем геометрии пристальное внимание арабских ученых привлекла теория параллельности. Постулат параллельности Евклида подвергался тщательному рассмотрению. Сабит-ибн-Корра написал 2 трактата, посвященные постулату параллельных. Постулат он заменяет предложениями: 1) если прямые удаляются друг от друга с одной стороны, то обязательно приближаются с другой; 2) существуют равноотстоящие прямые на плоскости, которое основывается на том, что при поступательном движении вдоль прямой все движущиеся точки описывают прямые линии.

Ибн-ал-Хайсам тоже рассмотрел теорию параллельных в двух сочинениях: “О разрешении сомнений в книге Евклида” и “Книга комментариев к введениям книги Евклида”. В первой он утверждает, что пересекающиеся прямые не могут быть параллельны одной прямой, во второй устанавливает, что конец отрезка, перпендикулярного прямой, вдоль которой происходит движение, описывает прямую, которая является равноотстоящей от данной прямой.

Исследования по теории параллельных ат-Туси стали известными в Европе в $XVII$ веке, в частности Валлису, и это сыграло роль в подготовке одного из крупнейших событий в математике – построении системы неевклидовых геометрий.

Математика в средневековой Европе. Решение уравнений третьей и четвертой степени. Развитие символики.

На европейском континенте математика имеет не столь древнее происхождение, как во многих странах Ближнего и Дальнего Востока. Заметных успехов она достигла только в эпоху развитого средневековья и, особенно в эпоху Возрождения (V век н.э.). В V – веках происходило долгое становление феодализма, $XI - XIV$ века – расцвет феодализма. В $II - V$ веках в борьбе и войнах складываются национальные государства (14 век – крестьянские войны). На протяжении $V - VII$ веков в недрах феодализма складываются капиталистические отношения. Начало этого периода (15 – 16 века) известно под именем эпохи Возрождения.

Уровень математических знаний в $V - I$ веках был очень низок. Бумага стала входить в обиход лишь в XII веке, а книгопечатание изобретено лишь в середине V века. Значительных сочинений или открытий нет. Хранителями математических знаний были ученые монахи, хранившие, изучавшие и переписывающие естественно-математические сочинения древних.

Первое учебное заведение (школа Герберта) было открыто во Франции в конце IX века. В школе Герберта учили и счету. В то время существовало много способов счета. Особое место заняли две враждующие партии – абакистов и алгоритмиков. Абакисты считали на абаке, использовали 12-тиричную римскую нумерацию, алгоритмики – индусские цифры, некоторые – знак нуля, счет вели на бумаге, использовали 60-ричные дроби.

В $II - III$ веках в Европе появились первые университеты – Италия, Франция, Англия, Австрия, подчиненные церкви. Математика входила в 7 свободных искусств, уровень математических знаний был крайне низок, вплоть до VI века от лиц, претендовавших на звание магистра математики, требовалась лишь клятва, что он знает 6 книг евклидовых “Начал”.

Математические знания не совершенствовались, они привносились извне, в большей части путем перевода с арабского языка на латинский язык.

Начало
Содержание
Страница 70 из 120
Назад
На весь экран
Закрыть

Некоторое оживление в математике наступило в $XIII$ веке, в связи с двумя факторами: борьбой против схоластики в богословии (Роджер Бэкон – 1214 – 1294) и математическими трудами Леонардо Пизанского. Леонардо получил хорошее математическое образование в Алжире, по торговым делам изъездил Сирию, Северную Африку, Испанию, Сицилию, пополняя свои знания при любой возможности. Около 1202 года он написал “Книгу об абаке”. По сути дела это была энциклопедия математических знаний народов, живших на берегах Средиземного моря. В течение 200 лет она была непревзойденным образцом для европейцев.

В книге 15 отделов: первые 7 – исчисление целых чисел по десятичной системе счисления и операции с дробями; 8 – 11 отделы – приложения математических знаний к коммерческим расчетам; 12 – 13 – задачи на суммирование, решение уравнений в целых числах; 14 – извлечение квадратных и кубических корней, некоторые равенства, содержащие корни; 15 – краткое изложение алгебры, близкое к алгебре ал-Хорезми и геометрические задачи на применение теоремы Пифагора.

В 1220 году вышло другое сочинение Леонардо Пизанского “Практическая геометрия”. Оно было посвящено измерению площадей многоугольников и объемов тел, вплоть до объема шара. Известно еще одно сочинение Леонардо Пизанского по теории чисел. В нем рассматриваются $\sum\limits_{1}^{n} k$; $\sum\limits_{1}^{n} k^2$; $\sum\limits_{1}^{n}(2k+l)$, , а также решение в целых числах уравнений $y^2 = x^2 + a$, $z^2 = x^2 - a$. Сохранились сведения об участии Леонардо в публичных состязаниях по решению задач. Время, проистекшее после работ Леонардо, вплоть до XY - XYI веков не внесло в математику новых идей,больших открытий. Это время называют временем предпосылок. Наметились два направления развития математики: серьезное усовершенствование алгебраической символики и формирование тригонометрии как особой науки.

Профессор Пражского университета Николай Хорезм (1328 – 1382) обобщил понятие степени, введя дробные показатели, ввел правила производства операций над ними: $27^{\frac{1}{2}} = \frac{1 \cdot p}{2 \cdot 27}$; $3^{\frac{1}{3}} = \frac{1 \cdot p}{3 \cdot 3}$; $8^{\frac{2}{3}} = \frac{2 \cdot p}{3 \cdot 8}$.

В одном из своих сочинений Орезм вводит долготу и ширину в прямоугольнике и использует введенные таким образом ранние формы прямоугольных координат для графического изображения интенсивности физических процессов. При этом он отмечал, что изменение вблизи экстремумов самое медленное. В конце YI века бакалавр Парижского университета Шюке ввел помимо дробных показателей нулевые и отрицательные, ввел специальные обозначения: $5^3\overline{m}$ означает $5x^{-3}$, $a^k\overline{m}$ означает ax^{-k}. $\overline{R_x}$ – знак корня, $\overline{p}$ – знак сложения, $\overline{m}$ – минус, $\sqrt[3]{45+\sqrt{37}}-30x^{-5}\overline{R_x^3}45\overline{p}\overline{R_x^2}37\overline{m}30^5\overline{m}$.

Большой вклад в формально-символическое усовершенствование алгебры внесли в $V - VI$ веках коссисты – математики Южной Германии. Название коссисты происходит от итальянского cosa (вещь), которым обозначали неизвестное. Они разработали несколько систем символов, удобных для записи математических действий, а некоторые из них высказали идеи, близкие к понятию логарифма. Однако решающей роли усовершенствование символики иметь не могло. Новый шаг в алгоритмическо-оперативной части связан с успехами в решении нового класса алгебраических уравнений – кубических уравнений.

Успехи тригонометрии – следствие развития астрономии. В 1461 году появилось сочинение "Пять книг о треугольниках всякого рода", написанное Иоганном Мюллером. В этой книге рассмотрены все задачи на определение треугольников, плоских и сферических по заданным элементам. При этом Мюллер (Региомонтан) расширил понятие числа, включив в рассмотрение иррациональности, полученные в случае несоизмеримости, и приложил алгебру к решению геометрических задач. Он также продолжил работу по составлению таблиц тригонометрических функций (через одну минуту, с точностью до 7-го знака). Он же ввел в практику тригонометрические функции, получившие в VII веке названия тангенс и котангенс, составил таблицу их значений.

В области геометрии в Средневековой Европе наибольшее развитие получила теория перспективы. Центральное проектирование пространственных фигур на плоскость применялось еще древними греками в "сценографии" – искусстве писать сценические декорации. Различные виды центральных проекций в "Огпике". Евклида и работах Птолемея. Теория перспективы рассматривалась в книге польского ученого III века – Витело, которая оказала значительное влияние на развитие науки, например, в сочинении Кеплера "Оптическая часть астрономии" есть раздел "Дополнение к Витело" (конец V века).

К V веку относится деятельность архитектора Альберти из Флоренции и художника Франчески, работавших в Риме при дворе папы.

Франческа разработал в трактате "О перспективе в живописи" метод построения перспективного изображения предмета по его горизонтальной и вертикальной проекциях.

Вопросы теории перспективы рассматриваются и в сочинениях великого итальянского художника Леонардо да Винчи (1452 – 1519), который видел в математике образец научной доказательности, в механике "рай математических наук". Скитания не позволили да Винчи оставить законченные сочинения, по его записным книжкам в 1651 году был опубликован "Трактат о живописи", где рассматривались площади и объемы фигур, равновеликость, построение правильных многоугольников приближенными методами. Им был изобретен пропорциональный циркуль и прибор для вычерчивания параболы.

Много времени теории перспективы уделял немецкий художник Альбрехт Дюрер (1471 – 1528). Он написал специально для художников "Наставления об измерении с помощью циркуля и линейки", "О человеческой пропорции", "О симметрии частей человеческого тела", где рассматривал три проекции различных частей человеческих тел, привел огромный статистический материал, содержащий измерения человеческих тел различной комплекции.

Занимались ученые эпохи Возрождения и теорией параллельных.

Средневековая Русь (Киевская Русь – X – XII века, Влалимерско-Суздальское Княжество – $XII - XIII$ века, Великий Новгород – $XII - XVI$ века). Уже в начале века на Руси существовала письменность. Математическое образование было на уровне европейского. Математические сведения и расчеты записывались с помощью десятичной алфавитной нумерации. 10^4 называли неведением (позднее тьмой),

10^5 – легионом, 10^6 – леодром. В другой системе счета 10^6 называли тьмой, 10^{12} – легионом, 10^{24} – леодром, 10^{48} – вороном, 10^{96} – колодой. “Сего же числа несть больше”.

Помимо вычислений практического характера встречаются теоретические задачи, составленные числолюбцами.

Общий ход развития был прерван нашествием монголов(1240 год – Батый) и крестоносцев (1242). В 1380 году начало конца татаро-монгольского ига (битва на Куликовом поле), окончательно оно было свергнуто в 1480 году. Наметилось длительное отставание России от европейских стран.

Ход открытий, связанных с решением уравнений 3 и 4 степеней такой. Профессор университета в Болонье дель Ферро (1496 – 1526) нашел формулу для нахождения положительного корня конкретных уравнений вида: $x^3 + px = q(p > 0, q > 0)$. Он держал ее в тайне, приберегая как оружие в научных диспутах. К концу своих дней, Ферро сообщил тайну родственнику и преемнику по должности Аннибалу дель Наве и ученику Фиоре.

При решении кубического уравнения использовалась подстановка:
$x = \sqrt[3]{u} - \sqrt[3]{\nu}; \ = \sqrt[3]{u\nu}$.

Подставив значения x и p в уравнение, получим систему $\begin{cases} u - v = q \\ uv = \dfrac{p^3}{27} \end{cases}$

Решив систему,получим: $u = \dfrac{q}{2} + \sqrt{\left(\dfrac{q}{2}\right) + \left(\dfrac{p}{3}\right)}, \nu = -\dfrac{q}{2} + \sqrt{\left(\dfrac{q}{2}\right) + \left(\dfrac{p}{3}\right)}$.

Потом Тарталья смог решить уравнение вида: $x^3 = px + q, (p > 0, q > 0)$ подстановкой $x = \sqrt[3]{u} + \sqrt[3]{\nu};$. Наконец, он сообщил, что уравнения $x^3 + q = px$ сводятся к предыдущему виду, но не дал способа сведения. Корень уравнения имеет вид:

$$x = \sqrt[3]{\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}} + \sqrt[3]{\frac{q}{2} - \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}}$$

для уравнения $x^3 + px = q$.

Кардано с большими предосторожностями пользуется выражениями, содержащими квадратные корни. Иногда, в конце, он допускал отрицательные корни, называя их менее чистыми корнями. Кардано опубликовал формулу корней кубического уравнения в книге “Великое искусство”, в которой присутствуют элементы общей теории алгебраических уравнений. Кардано показал делимость алгебраического полинома $P(x)$ на $x-x_1$. Кардано включил в книгу и метод решения уравнений четвертой степени, путем сведения к уравнению 3-ей степени, открытый учеником Кардано Феррари. Итальянским математиком Колла была задана задача: разделить число 10 на 3 части так, чтобы они составили геометрическую прогрессию, а произведение первых двух частей равнялось 6. По условию задачи получим уравнение: $\frac{6}{x}+x+\frac{x^3}{6}=10$. Преобразовав его, получим: $x^4+6x^2+36=60x$, отсюда $(x^2+6+t)^2-t^2-6x^2-12t-2tx^2=60x$; $(x^2+6+t)^2=t^2+6x^2+12t+2tx^2$. Условие того, чтобы левая часть была квадратом $D=0$.

Успехи в решении уравнений 3-ей и 4-ой степени поставили задачу решения уравнений степени больше четвертой. В поисках решения этой проблемы протекло 300 лет. Только в XIX веке Абель доказал, что уравнения степени выше четвертой неразрешимы в радикалах. Галуа связал с каждым уравнением специальную группу подстановок его корней, группу Галуа, и свел задачу к исследованию структуры этой группы. До 19 века существовали 2 препятствия: сложность, неудобства и необходимость оперировать $\sqrt{-}$.

Смелую попытку справиться с неприводимым случаем предпринял итальянский математик и механик Бомбелли. В 1572 году он ввел формально правила действий с мнимыми числами.

Единую систему алгебраических символов ввел Франсуа Виет (1540 – 1603) – юрист, придворный ученый французских королей. Свой досуг он употребил на написание главного труда своей жизни “Введение в искусство анализа”, этот труд выходил частями и полностью не завершен. Замысел Виета состоял в следующем: найти общий метод решения уравнений, так как у Кардано, например, рассматривалось 66 видов уравнений. Виет вводит новую символику: переменные обозначает гласными буквами, коэффициенты – согласными. $Acubus + BplanuminA_3solido(x^3 + 3xb = d)$. Хотя символика Виета и тяжеловесна, но благодаря ей, стало возможно выражение уравнений и их свойств общими формулами.

В сочинениях Виета подводится своеобразный итог математики эпохи Возрождения. Рассмотрены решения уравнений 1 – 4 степеней. Неприводимый случай Виет свел к задаче о трисекции угла.

Виет задумал книгу "Аналитическое искусство". Хотя геометрически и нельзя представить более трех измерений, Виет без колебаний их использует, что шокировало математиков. Штифель объявил этот противоестественным. Виет рассматривал алгебру как королевскую дорогу к геометрии. Алгебру он рассматривал, как искусство делать открытия.

Таким образом, в европейской математике к концу 16 века сформировалась алгебра как наука о решении уравнений 1 – 4 степеней. Закончилось символическое оформление науки, ученые пытались формулировать и решать проблемы общей теории алгебраических уравнений. Тригонометрия отделилась от астрономии. К концу 16 века математика переменных величин завершила формирование.

Но математика 16 и начала 17 века испытывала огромные трудности вычислительно-практического характера. Десятичные дроби только пробивали себе дорогу. Вычисления делались вручную. Таблицы тригонометрических функций были составлены тремя поколениями математиков (Коперник 1473 – 1543 г., Кеплер 1571 – 1630 г., через 20 лет после смерти Ретинуса (1514 – 1576), ученика Коперника появились, законченные третьим поколением таблицы, составленные через 10 секунд). Логарифмы были изобретены лишь в начале 17 века.

Первую таблицу логарифмов составил Бюрги (1552 – 1632), швейцарец. Он был мастером по ремонту часов и астрономических инструментов, работал в

Праге, в обсерватории с Кеплером 8 лет составлял таблицы. Долго не решался их опубликовать. Медлительность стоила ему приоритета. В 1614 году, на 6 лет раньше его книги, в Англии появилось “Описание удивительных таблиц логарифмов”, автором которого был Непер, шотландский борон, интересовавшийся всякими науками. Непер составил 8-мизначные таблицы логарифмов тригонометрических функций для значений аргумента от 0^o до 90^o через $1'$. Однако $logl \neq 0$, $log10^8 = 1$.

Идея десятичных логарифмов возникла у профессора Лондонского колледжа – Бригса. Таблицы завоевали мир. Английский преподаватель Джон Сейдель составил таблицы натуральных логарифмов (1620 год). Эдмонд Гюнтер – лондонский профессор разработал логарифмическую шкалу.

В 17 веке стали возникать счетные машины. По-видимому, самой ранней машиной была машина немецкого математика Шиккарда (1623г.). О машине Шиккарда долгое время ничего не было известно. В 1958 году ее нашли в музее Кеплера, поэтому считалось, что первый арифмометр изобрел Паскаль (1642г.), затем его усовершенствовал Лейбниц.

Научная революция 17 века. История открытия дифференциального и интегрального исчисления.

В истории математики $XVII$ век занимает особое, весьма значительное место. Он открывает период переменных величин. Энгельс так охарактеризовал начало этого периода: “Поворотным пунктом в математике была Декартова переменная величина”. Благодаря этому в математику вошло движение и тем самым диалектика, благодаря этому немедленно стало необходимым дифференциальное и интегральное исчисление, которое тотчас и возникает, и которое было, в общем и целом завершено, а не изобретено Ньютоном и Лейбницем.

В $XVII$ веке берут начало все математические дисциплины, входящие в классический фонд современного математического образования.

Рене Декарт был выдающимся французским ученым: философом, физиком, математиком, физиологом. Образование получил в иезуитском колледже, славившимся постановкой образования. В 1629 году переезжает в Нидерланды, в 1649 году в Швецию. Декарт считает, что математику надо изучать с единых позиций и предложил название “универсальная математика”. В основу всей геометрии Декарт положил две идеи: введение переменной величины и использование прямоугольных (декартовых) координат.

“Геометрия” состоит из трех книг:

1. “О задачах, которые можно построить, пользуясь только кругами и прямыми линиями”. Доказывается, что все задачи, решаемые с помощью циркуля и линейки, сводятся к уравнениям не выше второй степени.

2. “О природе кривых линий”. В ней рассматриваются кривые различной природы, проводится их классификация, и выявляются их свойства (кривые разделяются на математические и механические). Все кривые можно построить с помощью шарнирных механизмов.

Декарт мимоходом отмечает, что степень уравнения инвариантна относительно выбора системы прямоугольных координат. Но в основу он кладет не порядок уравнения, а число звеньев шарнирного механизма. Этот неудобный принцип был заменен только Ньютоном. Значительную часть второй книги составляют теоремы о проведении нормалей и касательных к алгебраическим кривым. Но у Декарта и речи нет о трех координатах точки и об уравнении поверхности.

3. “О построении телесных или превосходящих телесные задач”. Эта книга посвящена построению общей теории решения уравнений и использованию для этого наряду с алгебраическими методами метода геометрических мест.

Символика Декарта несущественно отличается от современной. Из рассмотрения делимости $P(x)/x - a$ Декарт делает вывод, что число корней уравнения равно показателю степени при наивысшем показателе x. Доказать это утверждение он не смог. Его доказал только Гаусс в 1797 году. Очень глубокой является постановка проблемы о приводимости уравнений (кубическое уравнение решается с помощью циркуля и линейки, если оно приводимое).

Ферма (1601 — 1665) по профессии был юристом. Математикой занимался в свободное время. Не любил печатать сочинения. В небольшом сочинении “Введение в теорию плоских и пространственных мест” Ферма показал, что уравнениям первой степени соответствуют прямые, а коническим сечениям — уравнения второй степени. Также как Декарт вводит метод координат. Вывел уравнения прямой, окружности и всех конических сечений.

Появление анализа бесконечно малых было завершением длительного процесса. Для его развития в $XVII$ веке сложились предпосылки: наличие сложившейся алгебры и вычислительной техники; введение переменной величины и координатного метода; усвоение идей древних (особенно Архимеда); решение задач на вычисление центров масс, касательных, нормалей и т.д.

Побудительными причинами были в первую очередь задачи механики. В тесном взаимодействии математики и смежных наук вырабатывались инфинитезимальные методы — основа математики переменных величин. В решении задач такого вида принимали участие такие ученые как Кеплер, Галилей, Кавальери, Торричелли, Паскаль, Валлис, Ферма, Декарт, Барроу и другие.

Интеграционные методы. Первые интеграционные методы появились в 1615 году в сочинениях Кеплера. Он суммирует актуальные бесконечно малые. Круг состоит из бесконечно большого числа бесконечно малых секторов, шар из конусов. Кеплер часто ссылается на Архимеда. От правильных кривых тел Кеплер переходит к изучению тел, полученных вращением круга около прямой, а также вращением конических сечений. При этом получаются тела, которые Кеплер называет лимонами, яблоками, вишнями, турецкой чалмой и так далее. Метод нахождения объемов тел вращения и их частей у Кеплера следующий: деление тела на ломти, которые перегруппируются, образуя тело, объем которого можно вычислить. Применяемые методы были нестрогими. Андерсон — ученик Виеты, выпустил книгу "В защиту Архимеда".

Широкую известность приобрела геометрия неделимых, изобретенная Кавальери. Кавальери был учеником Галилея, преподавателем кафедры математики в Болонье, монахом и настоятелем католического монастыря. Метод неделимых был изобретен для определения размеров плоских фигур. Как фигуры, так и тела, представлялись в виде элементов с размерностью на единицу меньше. Так фигуры состоят из бесконечно большого числа отрезков прямых, проведенных параллельно направляющей прямой, называемой регулой. У метода появились горячие приверженцы. Но обнаружились и недостатки: его нельзя было применить к вычислению длин кривых. Невыясненное понятие неделимого создавало атмосферу необоснованности. Кавальери избегал применять символику и приемы алгебры.

Паскаль (1623 — 1662) рассматривал квадратуры в форме близкой Кавальери. Сумму неделимых он принимал как сумму элементарных площадок, образуемых бесконечно близкими, одинаково отстоящими друг от друга ординатами, ограниченными осью абсцисс и кривой, то есть вычислял суммы $\sum ydx$. Паскаль сумел решить многие задачи на определение площадей, объемов, статических моментов.

Усовершенствование геометрических квадратур было проделано Ферма, который ввел деление квадрируемой площади ординатами, отстоящими друг от друга на неравные расстояния. Вероятно, Ферма изобрел этот метод под влиянием работ Непера; он называл его логарифмическим. Математики первой половины $XVII$ века с удивлением и восхищением убеждались, какое количество разнородных задач сводилось к квадратурам.

Характерны работы Валлиса (1616 — 1703), английского профессора Оксфордского университета, одного из основателей Лондонского королевского общества. В книге "Арифметика бесконечности", используя метод Кавальери, он показал, что суммы неделимых треугольника и параллелограмма с тем же основанием и высотой, сводятся к отношению $\dfrac{0+1+2+\cdots+n}{n+n+\cdots+n}$, которое при бесконечно возрастающем n равно $1/2$. Валлисом была получена формула, эквивалентная формуле $\int\limits_0^1 x^m dx = \dfrac{1}{m+1}$. Идеи, включающие элементы определенного интегрирования, широко распространились среди математиков западноевропейских стран. Был нужен только один толчок — рассмотрение в совокупности методов, чтобы создать интегральное исчисление.

В математике $XVII$ века наряду с интегральными методами созданы и дифференциальные методы, которые выработались при решении задач: определение касательных к кривым, нахождение экстремумов функций и нахождение условий существования кратных корней алгебраических уравнений. Наследие древних и средневековых авторов в этом вопросе не было таким значительным, как в случае интегральных методов.

В $XVII$ веке дифференциальные задачи решались различными методами. Здесь и геометрические построения в духе античной математики, и механические соображения, и исследования в духе Декарта, и инфинитезимальные соображения. Наиболее явную форму накопление методов дифференциальное исчисление приняло в работах Ферма. В 1638 году он написал Декарту, что решил задачу определения экстремальных значений функции. Ферма составил уравнение $\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h} = 0$, где после преобразований в левой части, полагал $h = 0$. Близок к дифференциальному исчислению метод Ферма отыскания касательных к алгебраическим кривым. Но Ферма не публиковал свои работы и пользовался тяжеловесной символикой Виета.

Последним этапом зарождения анализа бесконечно малых было установления связи между дифференциальным и интегральным исчислением. Побудительных причин было много. Прежде всего — это обратная задача о касательных. Мореплаватели используют кривую истинного курса корабля — локсодромию. Это кривая, касательные к которой пересекают меридианы, проведенные в точке касания под постоянным углом. Многие задачи оптики также приводили к необходимости строить касательные. Решались они приближенными графическими методами.

Попытку дать общий метод предпринял Декарт. Он предложил классифицировать алгебраические кривые, расположить их в ряд, описывать их касательные и проверять, обладают ли они заданным свойством. Предпринята попытка решить задачу де Бона — квадрировать кривую, обладающую свойством: $\dfrac{y}{S_t} = \dfrac{x-y}{a}$, где S_t – подкасательная. Декарт испробовал кривые $y^n = ax^2 + bx + c$, $n = 1, 2, \ldots, 1000$, но безуспешно. Затем изменил систему координат на косоугольную (касательная оказалась постоянной $S_t = a\sqrt{2}$). Задача де Бона указывала на обратимость задачи на проведение касательной. В конце концов появился общий результат о взаимно-обратной зависимости задач на квадратуры и на проведение касательных. Принадлежит он Борроу (1630 — 1677) ученику Виллиса и другу Ньютона.

Работы Ньютона и Лейбница отражают поворотный пункт в истории математического метода (центр внимания сместился с решения отдельных задач на сам метод).

Наиболее ранней формой анализа является теория флюксий, открытие которой принадлежит Ньютону. Исаак Ньютон (1643 — 1727) родился в Англии в семье фермера. В 23 года окончил Кембриджский университет со степенью бакалавра. В 1665 — 1666 в Лондоне свирепствовала чума, и Ньютон работал на ферме у отца. Учителем Ньютона был Барроу. В 1668 году Ньютон получил степень магистра, а в 1669 Барроу, будучи в расцвете сил, уступил кафедру Ньютону.

Математика была нужна Ньютону в качестве аппарата механики, который учитывал бы движение и охватывал связанные с ним понятия скорости и ускорения.

В методе флюксий изучаются переменные величины (флюенты). Далее вводятся скорости течения флюент (флюксии). Бесконечно малые изменения флюент Ньютон назвал моментами.

Ньютон четко сформулировал основные задачи: по данному соотношению между флюентами найти отношение между флюксиями. И обратно. В применении к функции $y = x^n$ его действия таковы: если 0 бесконечно малый промежуток времени, то x и y – бесконечно малые изменения. В уравнении $y = x^n$ заменяют $y = y^0$, x на x^0, $y + y^0 = (x + x^0)^n$. Правая часть равенства разлагается в ряд, затем из правой части вычитаем x^n и результат делим на 0. Пренебрегая всеми членами, содержащими 0, получаем $y = nx^{n-1}$. В следующих сочинениях Ньютон пытается устранить след бесконечно малых и разрабатывает новый метод — метод первых и последних отношений. На этот раз он обозначил 0 – момент, который ранее обозначал x^0, образует отношение $\dfrac{x}{y}$ и избавляется от 0 в этом отношении. Таким образом, он получает отношение $\dfrac{1}{nx^{n-1}}$, которое назвал последним отношением. Приравняв его к первому, – это и было отношением флюксий. Шаги процедуры Ньютона соответствуют образованию производной $f(x) = \lim \dfrac{f(x+h)}{h}$.

Новаторство Ньютона в том, что у него применение бесконечных рядов стало общим методом. Хотя в его работах и нет соображений сходимости, однако интуиция Ньютона поражает.

Вклад Лейбница (1646 – 1716). Изучив философию и право, Лейбниц отправился ко двору герцога в Майнц, где выполнял работу юриста. В 1672 году он был послан в Париж с поручением к королю. В Париже он познакомился с Гюйгенсом, который был членом недавно созданной Академии наук. Беседы с Гюйгенсом показали ему всю глубину его невежества в области математики. Он усердно начинает изучать труды Кавальери, Паскаля, Декарта, Валлиса. В 1676 году уезжает в Ганновер и принимает на себя обязанности библиотекаря и советника герцога. В 1684 году в журнале "Труды ученых" публикует ряд коротких статей. Еще в 1666 году в диссертации "О комбинаторном искусстве" он составил последовательность квадратов и их разностей

0 1 4 9 16 25 36

1 3 5 7 9 11

2 2 2 2 2

Он смог установить связь последовательности с исчислением бесконечно малых и интерпретировал числовую последовательность величин как последовательность значений некоторых функций, а разность между значениями функций обозначил символом $eomne = y$, что означало $\int dx = y$.

В первой публикации Лейбница "Новый метод для максимумов и минимумов" задача о касательной привела его к рассмотрению треугольника, который привел к определению дифференциала $dy/dx = y/\text{подкасательная}$. Лейбниц указал правила нахождения , позднее добавил дифференциалы логарифмических и показательных функций.

Фундаментальной операцией Лейбница было исчисление разностей. Суммирование – это обратная операция; иногда простым сопоставлением можно вывести таблицу интегралов из таблицы дифференциалов. Лейбниц ввел определенный интеграл. Сильными сторонами метода Лейбница была простота алгоритма, хорошо продуманный формализм действий и элегантные обозначения.

Как и Ньютон, он старался не рассматривать бесконечно малых, а только их отношения. Но понятия предела, производной, интеграла еще не были определены.

Итак, в XII веке исчисление бесконечно малых появилось под видом метода флюксий Ньютона и дифференциального исчисления Лейбница, неудивительно, что современники этих двух математиков разделились на 2 школы — английскую и континентальную. Спор, разгоревшийся между Ньютоном и Лейбницем за приоритет в открытии, усилил страсти.

Быстрому распространению дифференциального исчисления способствовала переписка Лейбница с семейством Бернулли, а затем работа маркиза де Лопиталя “Анализ бесконечно малых для изучения кривых линий”.

Отсутствие прочного обоснования дифференциального исчисления не лишило математиков веры в справедливость метода. Общее изучение механических и физических величин привело к установлению описывающих их дифференциальных уравнений. Математизация физики и механики привела к созданию вариационного исчисления. Исследование кривых и поверхностей дифференциальными методами породило дифференциальную геометрию.

Математика XVIII века (Эйлер, Даламбер, Лагранж). Математика XIX века. Арифметизация анализа.

Ведущий математик века Леонард Эйлер (1703 — 1783) посвятил новому исчислению 2 книги “Дифференциальное исчисление” (1755) и “Интегральное исчисление” (1768 — 1770) — настоящие своды результатов и исследований в этой области. С точки зрения Эйлера бесконечно малая — это величина исчезающая, а значит актуально равная нулю. Как же обосновать, что $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{0}{0}$ имеет определенное значение? Ответ Эйлера наивен и прост: $n \cdot 0 = 0$ при любом n , где n – любое число. $(x + w^2) - x^2 = 2xw + w^2$; отношение приращений равно $2x$.

Эйлер рассматривал интегрирование как операцию, обратную дифференцированию и пользовался методами Ньютона (разлагал функции в бесконечные ряды, а затем интегрировал их почленно).

Жан Лерон Даламбер (1717 — 1783) описал свой подход к исчислению бесконечно малых главным образом в статьях, которые он составлял для энциклопедии (толкового словаря наук, искусств и ремесел). Даламбер окончательно порвал с идеей существования статичных бесконечно малых и рассматривал дифференциал как бесконечно малую величину или меньшую чем любая определенная величина, как бесконечно малую разность двух величин, одна из которых бесконечно мало превосходит другую.

Предмет дифференциального исчисления он определял, как способ дифференцировать величины, то есть находить бесконечно разность конечной переменной величины. Даламбер пытался обосновать свой метод с помощью теории пределов. Он рассматривал производную не как отношение бесконечно малых величин, а как предел отношения конечных величин. Попытался дать удовлетворительное представление о понятии предела: одна величина является пределом другой, когда эта другая величина может приблизиться к первой как угодно близко. Но ему не удалось построить логически связного учения о пределах.

Жозеф-Луи Лагранж (1736 – 1813) предпринял попытку развить принципы дифференциального и интегрального исчисления и посвятил новому исчислению две работы “Теория аналитических функций” и “Лекции о функциональном исчислении”. В них Лагранж критикует и отвергает метод бесконечно малых Лейбница, метод отношений двух нулей Эйлера, метод пределов Даламбера и метод флюксий Ньютона. Целью Лагранжа было сведение исчисления бесконечно малых к алгебре, о чем говорит полное название книги “Теория аналитических функций, содержащая начала дифференциального исчисления, освобожденная от какого-либо рассмотрения бесконечно малых, исчезающих, пределов и флюксий, и сведенная к алгебраическому анализу конечных величин”.

В ход пущено понятие функции, главным образом непрерывной функции в смысле Эйлера, с использованием понятия ряда. Бесконечные ряды Лагранж рассматривает как алгебраические выражения. Разложение функции в ряд позволило Лагранжу чисто алгебраически и формально строить из данной функции (первообразной) другие функции (производные f, f',f''). Лагранж считал, что любая функция $f(x)$ может быть разложена в ряд

$f(x+i) = f(x) + pi + qi^2 + ri^3 + \ldots$, где p, q, r – производные $f(x)$, не зависящие от i.

Желая установить существование разложения функции $f(x+i)$, Лагранж использует степенные ряды. Однако он ошибся, считая, что i можно взять настолько малым, чтобы любой член разложения был больше суммы всех следующих за ним членов.

Для Лагранжа дифференциальное исчисление состоит из непосредственного нахождения p, q, r. Чтобы вычислить p, Лагранж отбрасывает все члены, начиная с третьего.

$$f(x+i) - f(x) = pi;\ p = \frac{f(x+i) - f(x)}{i} = f'(x),\ q = \frac{f''(x)}{2!};$$

$$f(x+i) = f(x) + f'(x)i + \frac{f''(x)}{2!}i^2 + \ldots;$$

Таким образом, он нашел производные функций x^m, a^x, $\log_a x$.

В случаях, когда надо было найти значение функции, Лагранж сознавал необходимость доказательства сходимости. Он нашел способ нахождения пределов ошибки при отбрасывании члена.

Удалось ли Лагранжу избавиться от метафизики бесконечного? Чтобы перейти от формальных рядов к сходящимся рядам, “как раз достаточно присоединить к этому подходу понятия предела” (Оверт).

В начале XIX века желание подвести под математику прочное основание стало всеобщим, а необходимость пролить свет на основные понятия анализа сделалась неотложной. Хотя многие одобряли выбор в качестве основы дифференциального и интегрального исчисления разложение в ряды Тейлора, но трактат Лагранжа вместе с работами Эйлера способствовали тому, что центральным понятием анализа становилась функция.

Впервые ясная концепция основных понятий исчисления бесконечно малых (непрерывность, производная, связь между непрерывностью и дифференцируемостью) появилась у Больцано (1781 – 1848), но его работы почти полвека оставались незамеченными. В итоге выделились два направления: 1) Гаусс, Коши, Больцано, Абель стремились к строгости и обоснованности; 2) Фурье, Дирихле, Риман — источником которых были задачи физики и представление функций тригонометрическими рядами.

Коши вывел признаки сходимости рядов, он различает простую и абсолютную сходимость.

Абель заявил, что “расходящиеся ряды являются изобретением дьявола и осмеливаться основывать на них малейшее доказательство позорно”.

Коши и Больцано приводят определение непрерывности функций близкое к современному. У Коши хорошее определение производной. Однако математики долго не ставили под сомнение существование производной у непрерывных функций.

Фурье, решая задачу о распространении тепла, пришел к выводу, что функция одного переменного может быть представлена тригонометрическим рядом. Этот вывод, хотя и нестрогий, был принят большинством математиков.

И только в 1829 году Дирихле доказал предложение, сформулированное Фурье, и уточнил в каких случаях такой ряд сходится.

Эти условия следующие:

1) функция однозначна и ограничена;

2) кусочно непрерывна;

3) кусочно монотонна.

Исследование Дирихле послужило образцом для бесчисленных исследований XIX века.

Оставались следующие проблемы: построить функцию, не удовлетворяющую условиям Дирихле, отделить понятие непрерывности от понятия дифференцируемости, охарактеризовать множество точек разрыва, множество максимумов или минимумов и т.д.

Все эти проблемы разрабатывал дальше Риман. Он развил теорию Дирихле, построил теорию интегрирования, позволяющую представлять рядами Фурье функции, имеющие бесконечное число точек разрыва.

Используя этот результат Римана, Дарбу доказал, что существуют непрерывные функции, не имеющие производной.

Вейерштрасс дал корректные формулировки доказательства теорем о непрерывности, дифференцируемости суммы ряда функций. Использовалась символика ε, δ, систематическое использование неравенств и оценок, что было хлебом насущным современного анализа и составило часть движения, которое Клейн назвал арифметизацией анализа.

Петербургская математическая школа.

После смерти Л. Эйлера (1783) уровень математических исследований в Петербурге снизился. Новый подъём обозначился лишь в 20-е годы XIX в. Он был связан с деятельностью М.В. Остроградского и В.Я. Буняковского. Оба они являлась уроженцами Украины, оба получили серьёзную научную подготовку в Париже – самом значительном в то время центре математической науки. Это обстоятельство определило идейное родство и связь работ петербургских математиков того времени.

1. М.В. Остроградский.

Михаил Васильевич Остроградский (1801 – 1861) окончил Харьковский университет в 1820 г. Он был учеником прогрессивного учёного, ректора университета Т.Ф. Осиповского. Борьба последнего с реакцнонным большинством профессоров, окончившееся изгнанием Осиповского из университета, отразилась и на судьбе Остроградского, который не получил диплома. Остроградский продолжал свою подготовку в Париже (1822 – 1828) и возвратился на родину уже учёным с высокой научной репутацией. Он обосновался в Петербурге, будучи вначале (1828) избран адъюнктом, а затем (с 1830 г.) академиком. Кроме того Остроградский вёл преподавание в ряде технических и военных высших учебных заведений.

Научные интересы Остроградского развиваясь в тесной связи с остальными для парижских математиков проблемами. Даже большинство работ он написал и опубликовал на французском языке.

Собрание сочинений М.В. Остроградского на русском языке было издано только в 1959 – 1961 гг. Академией наук УССР.

Так же как и его современники (Фурье, Лаплас, Коши, Пуассон и др.), Остроградский основные усилия направлял па решение прикладных проблем. Большинство его работ относилось к области механики, математической физики и связаных с ними проблем математического анализа. Кроме того, он оставил после себя первоклассные работы по алгебре, теории чисел и теории вероятностей.

Центральное место в научной деятельности Остроградского занимают его работы по математической физике. Построение математической теории разных явлений природы было в центре внимания многих парижских математиков того времени, когда в Париже учился Остроградский. В 1822 г. появилась "Аналитическая теория тепла" Фурье, в 1825 г. завершён выход в свет пятитомной "Небесной механики" Лапласа, в 1826 г. была написана и первая работа Остроградского (опубликована в 1832 г.). Она была посвящена задаче о распространении волн на поверхности жидкости в цилиндрическом бассейне. Несколько позже (1829) Остроградский решил ту же задачу для бассейна, имеющего форму кругового сектора.

Вернувшись в Петербург, Остроградский опубликовал "Заметку об интеграле, встречающемся в теории притяжения", где он дал оригинальный вывод уравнения Пуассона, который он нашёл и сообщил Коши ещё в 1826 г. Вслед за тем он посвятил несколько мемуаров математической теории тепла. Здесь он развил метод Фурье для твёрдых тел в общей форме, а также впервые дал строгое решение задачи о распростравенвв тепла в жидкости. Его заметка "О теории теплоты" содержит обобщение метода Фурье.

Многие сочинения Остроградского посвящены решению других задач математической физики: о намагничивании разобщённых брусков, о притяжении сфер и сфероидов, об интегрировании уравнений малых колебаний упругих сред и т.п.

С исследованиями по математической физике связана также большая группа работ Остроградского в различных областях механики. Н.Е. Жуковский, знаменитый русский математик и механик, делит эти исследования Остроградского на три части: относящиеся к анализу принципа виртуальных перемещений и вариационных принципов механики, к решению дифференциальных уравнений механики и посвящённые частным задачам механики. В частности, среди обобщений принципа Лагранжа находятся: распространение этого метода на системы с освобождающимися связями, общий метод нахождения скоростей упругих точек при ударе о жёсткую связь и др. Имеются и работы чисто прикладного характера по балистике и артиллерийской технике.

В области математического анализа Остроградскому принадлежат большие открытия. По большей части эти открытия связаны с его прикладными работами и возникли как усовершенствования, необходимые для достаточно общей постановки задачи. Так, например, знаменитая формула Остроградского

$$\iiint\limits_{v}\left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right)dv=\iint\limits_{s}Pdydz+Qdzdx+Rdydx$$

была выведена впервые ещё в 1828 г. Её обобщение на случай n-кратного ингерала было в 1834 г. найдено Остроградским для определения вариации кратного интеграла. В статьях по вариационному исчислению находится также важная формула дифференцирования кратного интеграла по параметру

$$\frac{d}{d\alpha}\int\limits_{L}Udxdydz\ldots=\int\limits_{L}\frac{\partial U}{\partial\alpha}dxdydz\ldots-\int\limits_{S}U\frac{\partial L}{\partial\alpha}\frac{ds}{\sqrt{(\frac{\partial\alpha}{\partial x})^2+(\frac{\partial L}{\partial y})^2+\ldots}},$$

где параметр входит как в подынтегральную функцию U, так и в уравнения, определяющие границу S области интегрирования L.

В статье “О преобразовании переменных в кратных интегралах” (1836, опубликована в 1838 г.) дан метод, употребляющийся и в наше время.

Эти и многие другие результаты Остроградского в области теории интегрирования помимо их связи с прикладными задачами отразили новый этап развития ивтегрального исчисления. Выделение класса функций, интегрируемых в элементарных функциях, в основном было завершено во времена Эйлера и в значительной части благодаря его усилиям. Новая проблематика состояла из более общих проблем относительно природы классов функций, получающахся при интегрировании того или иного класса функций: рациональных, алгебраических, элементарных, трансцендентных и т.д. Помимо Остроградского в этой области работали Абель, Лиувиль и др. Их результаты временами были близки, а иногда даже перекрывались. В последующем общая теория ингегрврования была успешно продвинута П.Л. Чебышевым.

В плане обзора работ Остроградского по математическому анализу укажем ещё на некоторые его результаты В области теории дифференциальных уравнений. В 1838 г. он опубликовал “Заметку о линейных дифферевцвавьных уравнениях”, где для уравнения вида

$$\frac{d^n y}{dx^n} + P_1 \frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + \ldots + p_{n-1}\frac{dy}{dx} + p_n y = 0$$

вывел определитель, называемый теперь детерминантом Вронского

$$W(x) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \cdots & y_n \\ y_1 & y_2 & \cdots & y_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ y_1^{n-1} & y_2^{n-1} & \cdots & y_n^{n-1} \end{vmatrix}$$

Ранее (1835) Остроградский внёс улучшения в метод Ньютона приближенного решения системы дифференциальных уравнений.

В сфере научных интересов Остроградского находилась и теория вероятностей, которой он посвятил шесть статей в разное время. В них он исследовал вопросы теории страхования, азартных игр, статистического контроля качества продукции, производящие функции и другие актуальные для его времени вопросы теории вероятностей, подходя к ним с позиции практических приложений. Не избежал он в одной из своих работ и характерных для математиков того времени заблуждений, состоящих в необоснованном приложении соображений теории вероятностей к решению вопросов судебной практики и других специальных проблем.

2. В.Я. Буняковский.

Виктор Яковлевич Буняковский (1804 – 1889) также получил высшее математическое образование в Париже, где в 1825 г. ему была присуждева учёная степень доктора математики. Возвратился он в Россию в 1827 г. Долгие годы был профессором университета и других высших учебных заведений Петербурга. Вскоре после приезда Буняковский был избран (1828) адъюнктом, а затем (1830) академиком. С 1864 г. и почти до самой смерти он являлся вице-президентом Академии наук.

В большом и разнородном научном наследии Буняковского (ему принадлежит около 130 работ) имеются важные научные результаты. В работах по теории чисел (их более 40) мы ветречаем доказательства квадратичного закона взаимности, решение ряда задач диафантова анализа, учения о простых числах и т.д. Более 20 работ Буняковский посвятил теории вероятностей и её приложениям. Он решил многие важные задачи, возникавшие при организации страхового дела, ссудных касс, анализа народонаселения России, промышленности. В качестве государственного эксперта по статистике и страхованию (с 1858 г.) Буняковский оказал большое содействию в проникновевии математических методов в практику хозяйственного строительства. Написанные им “Основавия теории вероятностей” (1846) охватили все отделы теории вероятностей и её приложений и являлись первым большим руководством по этой науке в России.

В работах Буняковского по анализу решено большое количество конкретных задач в части теории интегрирования, сходимости рядов и т.д. Ему, в частности, принадлежит (1859) честь открытия известного неравенства:

$$\left[\int\limits_a^b f(x)\varphi(x)dx\right]^2 \leq \int\limits_a^b f^2(x)dx \int\limits_a^b \varphi^2(x)dx,$$

которое иногда называют перавенством К. Шварца, хотя последний нашёл

Начало
Содержание
Страница 94 из 120
Назад
На весь экран
Закрыть

и опубликовал его лишь через 16 лет после Буняковекого. Геометрические исследования Буняковского в основном посвящены проблемам основания геометрии. Он тщательно исследовал историю доказательств постулата о параллельных, обнаружил несовершенства всех доказательств. Однако, неевклидова геометрия представлялась ему логически немыслимой. Но в то время (к середине XIX в.) деятельность Остроградского и Буняковского, их учеников, многие из которых стали крупными специалистами в различных областях математики и техники, определила новый подъем математики в России, особенно в Петербурге. Начал складываться коллектив творчески работающих математиков, ведущее место в котором к концу жизни Остроградского занял приехавший из Москвы П. Л. Чебышев.

Чебышев (по его собственному указанию, надо произносить: Чебышов) Пафнутий Львович (1821 – 1894) окончил в 1841 г. Московский университет. На конкурсе студенческих работ за сочинение на тему "Вычисление корней уравнений" он был награжден серебряной медалью. Будучи оставлен при университете, защитил в 1846 г. магистерскую диссертацию: "Опыт элементарного анализа теории вероятностей". В следующем году Чебышев переехал в Петербург и начал работать в университете. При этом университете он защитил в 1849 г. докторскую диссертацию "Теория сравнений" и работал в течение многих лет (1850 – 1882) профессором. Деятельность Чебышева в Академии наук началась в 1853 г., когда его избрали адъюнктом. Рост научного авторитета Чебышева был в дальнейшем отмечен избранием в число академиков (в 1856 г. – экстраординарным, в 1859 г. – ординарным).

В научном наследии Чебышева насчитывается более 80 работ. Оно оказало огромное влияние на развитие математики, и в особенности на формирование Петербургской математической школы. Для работ Чебышева характерна тесная связь с практикой, широкий охват научных проблем, строгость изложения, экономность математических средств в достижении крупных результатов.

Более конкретное изучение творчества Чебышева в настоящее время облегчается тем, что Академия наук издала полное собрание его сочинений. Помимо этого, в 1945 г. был выпущен в свет сборник “Научное наследие П. Л. Чебышева”. Два тома этого сборника составлены из обзорных статей, в которых характеризуются труды Чебышева по математике (1-й том) и кинематике механизмов (2-й том).

Математические результаты Чебышева в основном распространяются на четыре области: теорию чисел, теорию вероятностей, теорию наилучшего приближения функций и общую теорию полиномов, теорию интегрирования.

Расцвет чистой математики в Германии. Основание журнала Крелля.

Новая Германия XIX века, постепенно выросшая из Наполеоновских войн, воспринимала импульс, идущий из Франции. В 1810 году был создан Берлинский университет. С этого времени начался пышный расцвет гуманитарных наук, который был поддержан неогуманистическим учением о свободе формирования личности, которое открыто заявляло о своем безразличии к точным наукам.

Поэтому в голове отдельных личностей (фон Гумбольт, фон Мюфлинг, Шарнхорст) созревает идея организации большого, чисто научного политехнического института, по образцу политехнической школы во Франции. На пост директора была предпринята попытка заполучить Гаусса (без педагогических обязанностей). Но в 1824 году Гаусс отклонил это предложение и широко задуманный план зашел в тупик. Потом в этой школе хотели готовить учителей математики старших классов. В 1829 году послали приглашение Абелю, но оно было получено после смерти Абеля.

Наука Германии в большом долгу перед Креллем (1780 — 1875). Его собственные математические работы многочисленны, но большого значения не имеют. Но организаторский дар, приветливость, многосторонность, умение находить молодые таланты сыграли огромную роль в развитии математики в Германии в XIX веке. Он сплотил математиков и создал стимулы для их работы основанием в 1826 году своего журнала чистой и прикладной математики. Но идеал чистой науки как самоцель, пренебрежение всякой полезностью привел к тому, что он стал журналом абстрактной математики (в шутку его стали называть журналом чистой не прикладной математики). Крелль разделил 2 области своей деятельности и стал издавать "Архитектурный журнал", дорога Берлин — Потсдам была построена по его плану, а также большинство шоссейных дорог в Пруссии.

Первый том журнала содержал 5 работ Абеля, рядом с ними работа Якоби и несколько работ Штейнера. В третьем томе появились новые имена: Дирихле, Мебиус и Плюккер. Это были крупнейшие ученые Германии XIX столетия. Начнем с трех аналитиков — Дирихле, Абеля и Якоби, а затем трех геометров — Мебиуса, Плюккера и Штейнера.

Лежен Дирихле (1805 — 1859) происходил из французской эмигрантской семьи. В 1822 — 1827 годах жил в Париже, был домашним учителем и поддерживал тесные отношения с кругом Фурье. В 1829 году переселился в Берлин, где работал сначала доцентом, а затем профессором. В 1855 году Дирихле был приглашен в качестве преемника Гаусса в Геттинген, но работать там ему довелось недолго, в 1859 году он умер. Минковский так сказало Дирихле: “Он обладал искусством соединять с минимумом слепых формул максимум зрячих мыслей”.

Дирихле доказал:

1) неограниченность числа членов любой арифметической прогрессии, первый член и разность которых взаимно просты;

2) определил число классов бинарных квадратичных форм с заданным определителем;

3) разработал начала теории алгебраических чисел высших степеней.

Величайшим достижением Дирихле было применение к арифметической проблематике аппарата аналитических функций, в частности, центральное место в его исследованиях занимают ряды вида $\sum\limits_{n=1} \dfrac{a^n}{n^s}$, которые теперь называют рядами Дирихле. В теории алгебраических чисел Дирихле очень просто определить число независимых единиц в данном поле ("единица"— целое алгебраическое число, удовлетворяющее уравнению $x^n + ax^{n-1} + bx^{n-2} + \cdots + 1 + 0$ с целочисленными коэффициентами).

Вторую область — основания анализа — Дирихле обогатил лекциями по теории рядов и теории определенных интегралов. Он приводит примеры, где в случаях условно сходящегося ряда путем надлежащей перестановки, его можно заставить приближаться к любому наперед заданному значению.

Сходимость тригонометрических рядов также ставится на более прочный, чем у Фурье фундамент. Дается доказательство представимости кусочно-непрерывной и монотонной функции тригонометрическим рядом. Дирихле занимался также механикой и математической физикой.

Абель происходит из очень бедной семьи, родился в доме пастора в Норвегии, был робок по природе, придавлен нуждой и внешними неудачами. Абель был полным самоучкой, советы нескольких друзей математиков и немногие доступные ему книги были единственной опорой в его, по собственному почину, начавшихся занятиях математикой. В 1822 году он посещал университет в Христиании, где в то время не читались никакие математические курсы. В 1823 году он привлек к себе внимание: ему показалось, что он нашел в радикалах решение произвольного уравнения пятой степени. Но очень скоро Абель обнаружил свою ошибку и пришел к ясному пониманию, что подобного рода решение вообще невозможно, – теорема, которая была опубликована отдельной брошюрой.

Этот успех и работа об интегрировании алгебраических выражений (в оригинальной редакции утеряна) создали счастливый поворот в судьбе Абеля, ему была предоставлена стипендия для образовательной поездки за границу, сначала в Берлин, затем во Францию. В 1825 году в Берлине он встретился с Креллем, который распознал в неловком юноше великого гения и привлек его к сотрудничеству в журнале. За короткий срок им были написаны 5 статей.

Первое сочинение о невозможности решения в радикалах уравнения пятой степени. Абель рассматривает выражения самого общего вида, составленные из радикалов, и доказывает, что ни одно из них не может удовлетворять уравнению пятой степени. За этой работой идет равное ей по силе сочинение о биномиальном ряде. Какого рода функцию представляет ряд $1+m_1x+m_2x^2+\ldots$? Когда он сходится?

Абель наверняка заметил пробел в работе Коши, заполнил этот пробел в работе теоремой, которая и теперь называется теоремой Абеля о непрерывности. Если степенной ряд сходится в какой либо граничной точке его круга сходимости, то он равномерно сходится во всем ведущем в эту точку радиусе и, значит, функция представляется этим рядом внутри круга сходимости, и при стремлении к заданной точке по радиусу, имеет предел, равный сумме ряда. Дальнейший путь Абеля — Италия — Париж. В Париже он страдает от одиночества. Абель передал академии большой труд “Мемуары об одном чрезвычайно широком классе трансцендентных функций”, который содержал теорему Абеля. Рукопись была передана на отзыв Коши, в бумагах которого она затерялась (1826). В 1830 году, когда Коши был выслан, она была передана Жергонну. Но напечатана работа была лишь в 1841 году по настоятельному ходатайству норвежского правительства.

Парижский период дал новый толчок направлению его исследований, благодаря знакомству Абеля с работами французских математиков. Абель пишет работу “Исследования по эллиптическим функциям”. В этой работе он полностью следует направлению, указанному Гауссом. Совпадения в работах этих двух математиков простираются вплоть до обозначений. В 1827 году Абель возвращается в Христианию, где опять был студентом, бедным, как церковная мышь. Небольшое улучшение ему принес 1828 год, когда он заменял одного из университетских преподавателей. В апреле 1829 года Абель умер.

Теперь обратимся к личности совершенно иного типа, к великому сопернику Абеля — **Якоби**. Менее глубокий и самобытный, чем Абель, но гораздо более разносторонний, Якоби обладал не только тягой к научному познанию, но и потребностью изложить познание другим, сделать его более действенным. Это проявилось в его блестящем педагогическом таланте и беспощадном утверждении собственной личности.

Якоб Якоби родился в 1804 году в доме Потсдамского банкира. Учился в Берлинском университете, увлекался филологией, изучал труды Эйлера. В 1825 году Якоби становится доктором и одновременно получает доцентуру. В 1826 году Якоби переселяется в Кенигсберг, где работает 17 лет.

В 1843 году энергичная деятельность привела его к истощению сил, после чего он

1,5 года проводит в Италии, затем переезжает в Берлин, где ему была предоставлена чисто академическая должность. В 1851 году умер от оспы.

В трудах Якоби получила интенсивное развитие теория эллиптических функций (это самые оригинальные его достижения), занимается он и прикладной математикой. Ряд работ, вызванные общением с астрономом Бесселем, посвящены механике и дифференциальным уравнениям в частных производных первого порядка и вариационному исчислению.

От эллиптических функций Якоби переходит к абелевым функциям. Но в поиске этих новых трансцендентных функций Якоби суждено было пойти по ложному следу.

Якоби не только увлекал учеников, но почти насильно навязывал им свой стиль мышления. Якоби и Нейман создали Кенигсбергскую школу. В 1834 году был создан первый в Германии физико-математический семинар.

Состояние полного расцвета школа Якоби переживала еще 30 лет благодаря стараниям его любимого ученика Римело. Но запас идей, которыми он располагал, был задан раз и навсегда, не было нового притока. На первый план стало выступать несущественное — стала односторонне подчеркиваться необходимость изучения эллиптических функций.

Геометры Креллевского журнала.

Из Франции в Германии была воспринята не дифференциальная геометрия, главный интерес был направлен на аналитическую геометрию, в частности, на линейные и квадратичные образы.

Это было вызвано двумя причинами. Уже в Политехнической школе было расхождение во взглядах на то, как должна разрабатываться геометрия аналитически или синтетически? С течением времени этот спор приобрел принципиальный характер. Приверженцы обоих направлений считали делом чести работать только тем методом, который они однажды избрали. Поэтому преимущества и недостатки каждого метода выступали тем четче, чем одностороннее им пользовались.

Аналитическая геометрия обладает удобным алгоритмом, но при этом можно упустить предмет исследования — фигуру и построение.

Синтетическая геометрия грозит увязнуть в рассмотрении конкретных частных случаев. В Германии это отразилось в форме борьбы синтетика Штейнера против Плюккера. Мебиус с его тихим характером стоял в стороне от этих сражений. К этому добавился еще антагонизм между столицей и провинцией.

Мебиус (1790 — 1868) первоначально был астрономом. Должность — директор обсерватории в Лейпциге давала ему возможность спокойно вынашивать идеи. Позже он стал профессором математики в университете.

Первой работой Мебиуса была "Барицентрическое исчисление", опубликованная в 1827 году — это клад новых идей. Основная идея - дать геометрическое применение центру тяжести. Для плоскости Мебиус в качестве координат берет веса p_1, p_2, p_3 грузов, которые надо поместить в вершинах фиксированного треугольника, чтобы центр тяжести этих грузов попал в точку p. Это первый пример однородных координат. Эта новая система координат позволяет Мебиусу выявить ряд новых идей.

1. Мебиус был первый, кто абсолютно последовательно использовал в геометрии принцип знаков, причем "направление обхода" принималось им во внимание не только при измерении длин отрезков, но и при измерении площадей и объемов.

2. Начав приравнивать координаты p_1, p_2, p_3, p_4 текущей точки пространства рациональными функциями нескольких переменных, Мебиус получил новый способ изображения кривых и поверхностей. При этом он обнаружил пространственные кривые третьего порядка.

3. Мебиус четко осознал идею точечного соответствия между двумя пространствами и с ее помощью создал представление о простейших, систематически расположенных ступенях родства: равенство, подобие, афинность, коллинеарность (общий тип родства, при котором прямые переходят в прямые).

Задать коллинеацию ему удалось без метрических понятий, а только указанием четверок, соответствующих друг другу точек в соотносимых плоскостях (5-ти в пространстве) и указанием соответствия между соединяющими их прямыми (сеть Мебиуса).

Вторая книга — “Учебник статики” — это труд содержит геометрический вывод соотношений, выполняющихся при совместном действии сил на жесткие тела или системы тел.

В 1861 году Мебиус послал работу “Об односторонних поверхностях”, которая покоилась в бумагах академии до 1865 года, пока Мебиус сам не опубликовал ее.

Удивительно, что в 1858 году лист Мебиуса был найден и Местингом— еще один пример принудительного развития науки.

Плюккер (1801 — 1868). С 1836 года профессор кафедры математики и физики. Он сделал целый ряд физических открытий. По геометрии Плюккер написал 5 работ.

1. Аналитико-геометрические исследования (1828год – 1 том, 1831 год – 2 том).
2. Система аналитической геометрии (на плоскости) — 1834 год.
3. Теория аналитических кривых — 1839 год.
4. Система аналитической геометрии пространств — 1846 год.
5. Новая геометрия пространства (основана на рассмотрении прямой линии как элемента пространства) — 1828 год — часть 1, 1829 год — часть 2.

Целью, поставленной и достигнутой Плюккером, являлось создание новой системы аналитической геометрии. В Плюккеровской геометрии комбинация уравнений превращается в геометрический факт и наоборот, геометрические факты управляют аналитическими операциями.

Он разработал новый метод доказательства принадлежности точек коническим сечениям и прямым.

Плюккер произвел полную перестройку учения о касательных и полярах.

Так, если уравнение $f = 0$ задает коническое сечение, проходящее через точку (x, y, z), то уравнение $\frac{df}{dx}x' + \frac{df}{dy}y' + \frac{df}{dz}z' = 0$ изображает, в зависимости от того, какие координаты x', y', z' или x, y, z рассматриваются в качестве текущих, либо касательную к кривой $f = 0$ в точке (x, y, z), либо поляру фиксированной точки (x', y', z') относительно кривой $f = 0$.

Чередование этих истолкований одного и того же уравнения было разработано Плюккером до виртуозности и использовалось им для доказательства различных теорем.

Плюккер вводит однородные координаты путем домножения на множитель, с помощью чего удалось дать блестящую аналитическую реализацию смелым идеям Понселе – бесконечно удаленным прямым, циклическим точкам и т. д.

Плюккер вводит координаты x_1, x_2, x_3, $x = \frac{x_1}{x_3}$, $y = \frac{x_2}{x_3}$.

Уравнение окружности $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$ переходит в уравнение $(x_1 - ax_3)^2 + (x_2 - bx_3)^2 = r^2x_3^2$. Поэтому пересечение с бесконечно удаленной прямой $x_3 = 0$ имеет уравнение $x_1^2 + x_2^2 = 0$, а значит, является парой точек с координатами $(x_1, x_2, x_3) = (1, -i, 0)$ или $(1, -i, 0)$ – это и есть циклические точки.

Не менее интересно и уравнение прямой: $u_1x_1 + u_2x_2 + u_3x_3 = 0$. Оно становится однородным относительно координат x_1, x_2, x_3 и значит, его можно рассматривать как уравнение прямой в точечных координатах, или как уравнение точки в линейных координатах. А значит, их можно менять местами.

Плюккеру удалось также внести существенный вклад в общую теорию плоских алгебраических кривых. Главное достижение — нахождение формул, связывающих порядок кривой (степень задающего кривую уравнения в точечных координатах) с ее классом (степенью уравнения в линейных координатах).

Но Плюккер работал в стиле геометров $XVIII$ столетия. Последовательная разработка проективного мышления и окончательное оформление теории инвариантов остались на долю более позднего поколения.

Штейнер — реставратор синтетической геометрии в Германии (1796 — 1863).

Штейнер — сын швейцарского крестьянина, до 19 лет пахавший землю, а затем, движимый страстью к преподавательской деятельности, посвятивший себя преподаванию по системе Песталоцци. Штейнер начал заниматься математикой в зрелом возрасте. Родившись в Утцендорфе в 1796 году в семье крестьянина, он начал заниматься своим образованием только в 1815 году. Учился в Ифертене, в педагогическом институте, основанном Песталоцци. В 1818 году Штейнер покинул Ифертен и до 1821 года продолжал занятия в Гейдельберге, главным образом самостоятельно штудируя французских геометров. Жалкие средства на жизнь добывал частными уроками. Но в Берлинских министерских кругах был жив интерес к системе Песталоцци, и Штейнер был приглашен в Берлин, занимал различные учительские посты. Доступ в дом Вильгельма фон Гумбольта, сына которого он обучал, помог ему продвинуться дальше. В 1834 году для Штейнера был учрежден пост экстраординарного профессора в Берлинском университете.

Одаренность Штейнера проявилась в необычной манере: он воспринимал пространственные формы, сообразуясь с интуицией, с презрением отвергая анализ. Своей пространственной интуицией он обязан богу, но своему пути самоучки он обязан педагогическим искусством. Система Песталоцци культивировала любовный, бережный подход к точке зрения учащегося и применяла для развития Сократовский метод. Штейнер никогда не пользовался на лекциях рисунками, живое соучастие слушателей в мыслительном процессе должно было создать в сознании такую отчетливую картинку, что чувственное восприятие должно было оказаться излишним (еще дальше пошел Дистервег, который на семинарских занятиях специально затемнял помещение).

Работы Штейнера изданы Берлинской академией в виде двухтомного собрания сочинений (1880 – 1882 г.). Они распадаются на 2 периода. Первый из них охватывает период с 1826 года по 1845 год. Второй период охватывает работы, относящиеся к высшим алгебраическим образам, часто это только сообщения о результатах, приводимых без доказательств. Штейнер здесь пользовался английскими и другими источниками, притворяясь, что он их не знает. Поэтому рассмотрим лишь ранние работы Штейнера.

Главной работой является "Систематической изложение зависимостей геометрических образов друг от друга" (было запланировано 5 частей, вышла только одна). План проективного построения геометрии строится на идее проективного порождения (основные образы на плоскости — прямая, пучок прямых, сама плоскость, в пространстве — прямая, плоский пучок лучей, пучок плоскостей, само пространство). Здание геометрии возводится путем последовательного порождения образов более высоких ступеней и исследуются эти образы.

В имеющейся работе Штейнера такое исследование проводится только для конических сечений и однополостных гиперболоидов.

Штейнеровский принцип последовательного порождения геометрических образов более высоких ступеней исходит из того, что приравнивается к нулю определитель некоторой матрицы. Например, линейная поверхность второго порядка может быть проективно порождена путем приравнивания к нулю определителя, полученного из уравнений плоскостей.

Дальнейшее развитие принципа Штейнера осуществляли Рейе, Шур, Штурм.

Темы практических занятий

Зарождение математики

1. Представления о числе и форме в первобытном обществе.
2. Формирование понятия о натуральном числе на разных этапах развития исчисления.
3. Роль измерений в формировании понятия дроби.
4. Формирование понятия геометрической фигуры.

Список литературы: [1], [4], [5], [8], [25].

Математика Древнего Египта и Древнего Вавилона

1. Математические и астрономические знания древних египтян.
2. Геометрические знания египтян.
3. Вавилонская 60-ричная полупозиционная система счисления.
4. Астрономические и геометрические знания древних вавилонян.

Список литературы: [1], [4], [5], [8], [25].

Математика в Древней Греции в VI-IV вв. до н.э.

1. Греческое «чудо».
2. Первые математические школы Греции. Школа Фалеса.
3. Преобразование математики в абстрактную дедуктивную науку в натурфилософской школе Пифагора.
4. Построения с помощью циркуля и линейки. Три неразрешимые задачи древности.
5. Проблемы бесконечного и апории Зенона. Атомистика Демокрита.
6. Открытие несоизмеримости. Первый кризис в обосновании математики.

Список литературы: [1], [3], [5], [7], [10], [11], [12], [15], [20], [25], [31], [35].

Математика Древнего и Средневекового Китая. Математика Древней и Средневековой Индии

1. Китайская нумерация. Арифметические действия.
2. Математические трактаты «Математика в девяти книгах», «Трактат об измерительном шесте».
3. Введение и объяснение отрицательных чисел в Китае и Индии. Метод «Фан-чен».
4. Геометрические знания китайцев.
5. Индийская нумерация. Арифметические действия. Математическая символика.
6. Решение уравнений. Алгебраические, геометрические и тригонометрические знания индусов.

Список литературы: [1], [3], [5], [7], [10], [11], [12], [15], [20], [25], [31], [35].

1. Усвоение античного и восточного наследия.
2. Труды Леонардо Пизанского (Фибоначчи).
3. Предыстория понятия функции. Алгебраическая символика.
4. Решение в радикалах уравнений третьей и четвертой степени. Возникновение мнимых чисел.

Список литературы: [1], [3], [4], [5], [11], [17], [19], [20].

Развитие математики в XVII веке

1. Научная революция XVII столетия и создание новой научной картины мира в трудах Коперника, Кеплера, Галилея, Декарта, Ньютона.

2. Потребность вычислений и открытие логарифмов и других вычислительных средств.

3. Теория чисел XVII века.

4. Алгебра XVII века.

5. Теория вероятностей XVII века.

Список литературы: [1], [3], [4], [5], [9], [10], [11], [13], [29], [35].

Математика на рубеже XVIII–XIX столетий

1. Гаусс и его труды по алгебре, теории вероятностей, теории чисел, геометрии и математическому анализу.
2. Великая французская революция и преобразования математического образования. Политехническая и нормальная школы.
3. Развитие математического анализа и математической физики в трудах Фурье, Пуассона, Лапласа, Остроградского.
4. Перестройка математического анализа в трудах Больцано, Коши, Вейерштрасса, Дедекинда и Кантора. Третий кризис в обосновании математики.

Список литературы: [1], [3], [4], [5], [6], [9], [10], [11], [13], [17].

Проблема разрешимости уравнений в радикалах

1. Вклад Кардано, Тартальи и Феррари в решение уравнений третьей и четвертой степени.

2. Работы Абеля по решению уравнений степени выше второй.

3. Теория Галуа.

4. Возникновение теории групп и ее значение для математики и физики.

5. Формирование нового взгляда на алгебру как на теорию алгебраических структур.

Список литературы: [1], [2], [3], [4], [5], [6], [9], [10], [11], [26], [30].

ТЕМАТИКА РЕФЕРАТОВ

1. Великие математики древности (Евдокс, Пифагор, Архимед).
2. Философские взгляды Аристотеля.
3. «Великое искусство» – искусство решения уравнений.
4. Н.Х. Абель – уравнения пятой степени.
5. Декарт – философ и математик.
6. Жизнь и творчество П. Ферма.
7. Рождение новой математики (разработка основ новой математики в первой половине 17 века).
8. Король математиков (жизнь и творчество К. Гаусса).
9. Ньютон и современное математическое мышление.
10. Феномен многозначных функций (разрешение спора между Лейбницем и И. Бернулли).
11. Блез Паскаль. «Мистический шестивершинник» или «Великая Паскалева теорема».
12. Теория параллельных в истории математики до 19 века.
13. Лобачевский и математическое мышление 19 века.
14. Неевклидова геометрия. Иллюстрации. Новые идеи – Риман. Итог – непротиворечивость.
15. С.В. Ковалевская. Жизнь и творчество.
16. Общая теория относительности – неожиданный финал. Эйнштейн.
17. Вклад Л. Эйлера в развитие науки в России.
18. А.Н. Колмогоров – математик и педагог.
19. Развитие теории функций в Московской математической школе.
20. Э. Нетер – известнейшая женщина-математик 20 столетия.
21. Развитие кибернетики в 20 столетии.
22. Эварист Галуа – математик и революционер.

ВОПРОСЫ К ЗАЧЕТУ

1. Периодизация истории математики.
2. Математика Древнего Египта и Древнего Вавилона.
3. Развитие математики в школе Пифагора.
4. Геометрическая алгебра в работах математиков Древней Греции.
5. Метод исчерпывания Евдокса.
6. Три нерешенные задачи древности.
7. Дифференциальные и интегральные методы Архимеда.
8. Математика средневековой Индии.
9. Математика древнего и средневекового Китая.
10. Математика стран арабского халифата.
11. Математика средневековой Европы.
12. Инфинитезимальные методы в работах Кеплера, Кавальери, Ферма, Паскаля.
13. История открытия логарифмов.
14. История образования теории вероятностей.
15. Аналитическая геометрия Декарта и Ферма.
16. Дифференциальные и интегральные методы Ньютона и Лейбница.
17. Развитие математики во Французской политехнической школе.
18. Развитие дифференциального и интегрального методов в работах Эйлера, Д'аламбера, Лагранжа.
19. Математика на рубеже XVIII-XIX столетий (Гаус, Дирихле, Абель, Якоби, Мебиус, Плюккер, Штейнер).
20. История открытия неевклидовой геометрии.

Перечень рекомендуемой литературы
Основная

1. Болгарский, Б. В. Очерки по истории математики / Б. В. Болгарский. – Минск : Высшая школа, 1979.
2. Глейзер, Г. И. История математики в школе : в 3 т. / Г. И. Глейзер. – М.: Просвещение, 1983.
3. Гусак, А. А. История математики / А. А. Гусак. – Минск : БГУ, 2000. – 232 с.
4. Даан, Д. Пути и лабиринты (очерки по истории математики) / Д. Даан [и др.]. – М.: Мир, 1986.
5. История математики : в 3-х т. / А. П. Юшкевич [и др.] ; под ред. А. П. Юшкевича. – М.: Наука, 1970.
6. Клейн, Ф. Лекции о развитии математики в XIX столетии / Ф.Клейн. – М., 1989.
7. Колмогоров, А. Н. Математика в ее историческом развитии / А. Н. Колмогоров [и др.] ; под ред. В. А. Успенского. – М. : Наука, 1991.
8. Раик, А. Е. Очерки по истории математики в древности / А. Е. Раик. – Саранск : Мордовское книжное изд-во, 1967. – 352 с.
9. Рыбников, К. А. История математики : в 2-х т. / К. А. Рыбников. – МГУ, 1960-1963.
10. Рыбников, К. А. Возникновение и развитие математической науки / К. А. Рыбников. – М.: Просвещение, 1987.
11. Стройк, Д. Я. Краткий очерк истории математики / Д. Я. Стройк. – М.: Наука, 1969.
12. Хрестоматия по истории математики / А. П. Юшкевич [и др.] ; под ред А. П. Юшкевича. – М.: Просвещение, 1977.

Дополнительная

13. Апокин, И. А. Развитие вычислительных машин / И. А. Апокин, Л. Е. Майстров. – М., 1964.
14. Беспамятных, Н. Д. Математическое образование в Белоруссии / Н. Д. Беспамятных. – Минск, 1975.
15. Болгарский, Б. В. Очерки по истории маематики / Б. В. Болгарский. – Минск, 1979.
16. Выгодский, М. Я. Арифметика и алгебра в древнем мире / М. Я. Выгодский. – М., 1967.
17. Глейзер, Г. И. История математики в школе : В 3 кн. / Г. И. Глейзер. – М., 1981–1983.
18. Гусак, А. А. Матэматыка на Беларусі ў XIV – пачатку XX стагодзя / А. А. Гусак. – Мінск, 1995.
19. Гусак, А. А. Матэматыка позняй антычнасці і сярэднявечча / А. А. Гусак. – Мінск, 1996.
20. Депман, И. Я. Рассказы о старой и новой алгебре / И. Я. Депман. – СПб., 1967.
21. Депман, И. Я. За границами учебника математики / И. Я. Депман, Н. Я. Виленкин. – М., 1989.
22. Диксон, О. Символика чисел / О. Диксон. – Киев, 1996.
23. История математики с древних времен до XIX века : В 3 кн. / А.П. Юшкевич [и др.] ; под ред. А. П. Юшкевича. – М., 1970-1972.
24. История отечественной математики : В 2 т. – Киев, 1966-1967.
25. Кольман, Э. Я. Математика до эпохи Возрождения / Э. Я. Кольман, А. П. Юшкевич. – М., 1961.
26. Лишевский, В. П. Рассказы об ученых / В. П. Лишевский. – М., 1986.
27. Математика XIX века. Математическая логика, алгебра, теория чисел, теория

вероятностей. – М., 1987.
28. Матвиевская, Г. П. Учение о числе на средневековом Ближнем и Среднем Востоке / Г. П. Матвиевская. – Ташкент, 1967.
29. Никифоровский, В. А. Из истории алгебры XVI – XVII вв. / В. А. Никифоровский. – М., 1979.
30. Никифоровский, В. А. В мире уравнений / В. А. Никифоровский. – М., 1987.
31. Райк, А. Е. Очерки по истории математик в древности / А. Е. Райк. – Саранск, 1967.
32. Рыбников, К. А. История математики / К. А. Рыбников. – М., 1974.
33. Стройк, Д. Я. Краткий очерк истории математики / Д. Я. Стройк. – М., 1964.
34. Чистяков, В. Д. Беседы о геометрии Лобачевского / В. Д. Чистяков. – Минск, 1973.
35. Чистяков, В. Д. Рассказы о математиках / В. Д. Чистяков. – Минск, 1966.
36. Юшкевич, А. П. История математики в России до 1917 г. / А. П. Юшкевич. – М, 1968.
37. Юшкевич, А. П. История математики в средние века / А. П. Юшкевич. – М., 1961.
38. Васильев, А. В. История математики в России. 1725-1826-1863. С приложением статьи о сущности математики как науки / А.В. Васильев. – Москва: Высшая школа, 2015. – 339 с.
39. Медведев, Ф. А. Очерки истории теории функций действительного переменного / Ф.А. Медведев. – М.: КомКнига, 2006. – 248 с.
40. Нейгебауер, О. Лекции по истории античных математических наук. Том 1. Догреческая математика / О. Нейгебауер. – М.: ОНТИ. Главная редакция общетехнической литературы, 2015. – 244 с.
41. Ньютон, Исаак Математические работы / Исаак Ньютон. – Москва: РГГУ, 2012. – 462 с.

42. Ожигова, Е. П. Математика в Петербургской академии наук в конце XVIII – первой половине XIX века / Е.П. Ожигова. – М.: Ленанд, 2015. – 224 с.
43. Пиковер, Клиффорд Великая математика. От Пифагора до 57-мерных объектов. 250 основных вех в истории математики / Клиффорд Пиковер. – М.: Бином. Лаборатория знаний, 2014. – 540 с.
44. Стройк, Д. Я. Краткий очерк истории математики / Д. Я. Стройк. – М.: Главная редакция физико-математической литературы издательства “Наука”, 2009. – 328 с.