Национальная академия наук Беларуси
Труды Института математики. 2018. Том 26. № 1. С. 88–94

УДК 512.542

О КОМПОЗИЦИОННЫХ ФАКТОРАХ КОНЕЧНОЙ ГРУППЫ С OS-ПОЛУНОРМАЛЬНОЙ СИЛОВСКОЙ ПОДГРУППОЙ

В. С. Монахов, Е. В. Зубей

Гомельский государственный университет имени Ф. Скорины
e-mail: victor.monakhov@gmail.com, ekaterina.zubey@yandex.ru
Поступила 23.05.2018

К 70-летию академика В. И. Янчевского!

Конечная ненильпотентная группа, у которой все собственные подгруппы нильпотентны, называется группой Шмидта. Подгруппа A группы G называется OS *-полунормальной*, если существует подгруппа B такая, что $G = AB$ и A перестановочна со всеми подгруппами Шмидта из B. Для простого числа $r \geq 7$ устанавливается r-разрешимость группы, в которой силовская r-подгруппа OS-полунормальна. Для $r < 7$ перечислены все неабелевы композиционные факторы такой группы. Доказана разрешимость группы с OS-полунормальными силовскими 2- и 3-подгруппами.

1. Введение. Рассматриваются только конечные группы. Конечная ненильпотентная группа, у которой все собственные подгруппы нильпотентны, называется группой Шмидта. Начало изучения таких групп положила работа О. Ю. Шмидта [1], в которой доказано, что группа Шмидта бипримарна, одна из ее силовских подгрупп нормальная, другая циклическая, и указана система индексов главного ряда. Подробный обзор результатов о свойствах групп Шмидта, существовании подгрупп Шмидта в конечных группах и их некоторых приложениях в теории классов конечных групп приведен в статье В. С. Монахова [2].

Одной из первых работ, посвященных перестановочности силовских подгрупп с подгруппами Шмидта, является работа Я. Г. Берковича и Э. М. Пальчика [3]. Результаты этой работы развили В. Н. Княгина и В. С. Монахов [4]. Они установили новые признаки p-разрешимости группы с условием перестановочности силовской p-подгруппы с некоторыми подгруппами Шмидта четного порядка. В частности, из [4, теорема 1] вытекает

Теорема А. *Если некоторая силовская r-подгруппа группы G перестановочна со всеми подгруппами Шмидта, то группа G r-разрешима.*

В настоящей работе изучается группа G, в которой силовская r-подгруппа R перестановочна с подгруппами Шмидта из подгруппы H такой, что $G = RH$. В связи с этим введем понятие OS-полунормальной подгруппы.

Определение. Подгруппа A группы G называется *OS-полунормальной в G*, если существует подгруппа B такая, что $G = AB$ и A перестановочна со всеми подгруппами Шмидта из B. В этой ситуации подгруппу B будем называть *OS-добавлением к подгруппе A в группе G*. Обозначение OS связано с Отто Юльевичем Шмидтом.

Понятие OS-полунормальной подгруппы является обобщением понятия полунормальной подгруппы. Напомним, что подгруппа A называется *полунормальной* в группе G, если существует подгруппа B такая, что $G = AB$ и AB_1 — собственная в G подгруппа для каждой собственной подгруппы B_1 из B. Отдельные свойства полунормальных подгрупп получены в [5–8]. В работе [9] изучены группы с полунормальными подгруппами Шмидта.

Пример 1. Если A — подгруппа группы G и существует нильпотентная подгруппа B такая, что $G = AB$, то A будет OS-полунормальной подгруппой группы G. В частности, любая подгруппа примарного индекса является OS-полунормальной подгруппой.

Пример 2. В группе $PSL(2,7)$ силовская 2-подгруппа Q будет OS-полунормальной, поскольку существует нециклическая подгруппа B порядка 21, которая является группой Шмидта, и $G = QB$.

Пример 3. В группе $SL(2,8)$ силовская 3-подгруппа R будет OS-полунормальной, поскольку существует подгруппа Шмидта $B = [E_{2^3}]Z_7$ такая, что $G = RB$.

Пример 4. В группе $PSL(2,5)$ силовская 5-подгруппа P будет OS-полунормальной, поскольку существует подгруппа $B \simeq A_4$ такая, что $PSL(2,5) = PB$. Здесь A_4 — знакопеременная группа, она является группой Шмидта.

Отметим, что в примерах $2-4$ силовская r-подгруппа, $r \in \{2,3,5\}$, OS-полунормальна, но не полунормальна.

В настоящей работе доказывается следующая теорема.

Теорема 1. *Пусть в группе G силовская p-подгруппа OS-полунормальна.*

(1) *Если $p = 2$, то неабелевы композиционные факторы группы G изоморфны $PSL(2,7)$. В частности, группа G $\{2,3,7\}'$-разрешима.*

(2) *Если $p = 3$, то неабелевы композиционные факторы группы G изоморфны $SL(2,8)$ или являются $3'$-группами.*

(3) *Если $p = 5$, то неабелевы композиционные факторы группы G изоморфны $SL(2,4)$ или являются $5'$-группами.*

(4) *Если $p \geq 7$, то группа G p-разрешима.*

Отсюда вытекает разрешимость группы с OS-полунормальными силовскими 2- и 3-подгруппами.

2. Используемые обозначения и результаты. Все обозначения и используемые определения соответствуют работам [10, 11].

Пусть p — простое число. Группа с нормальной силовской p-подгруппой называется p-замкнутой. Группа, содержащая нормальную подгруппу, индекс который совпадает с порядком силовской p-подгруппы, называется p-нильпотентной. Если порядок подгруппы X делится на простое число p, то говорят, что X — pd-подгруппа. Обозначим через $H^G = \langle H^x \mid x \in G \rangle$ наименьшую нормальную в G подгруппу, содержащую подгруппу H. Центр и коммутант группы G обозначаются через $Z(G)$ и G' соответственно. Симметрическая и знакопеременная группы степени n обозначаются через S_n и A_n; диэдральная, циклическая и элементарная абелева группы порядков m и p^t обозначаются через D_m, Z_m и E_{p^t}; $[A]B$ — полупрямое произведение нормальной подгруппы A и подгруппы B.

Пусть $\mathbb{P}$ — множество всех простых чисел, а π — некоторое множество простых чисел. Дополнение к π во множестве $\mathbb{P}$ обозначим через π'. Итак, $\pi \subseteq \mathbb{P}$ и $\pi' = \mathbb{P} \setminus \pi$. Символом π обозначается также функция, определенная на множестве $\mathbb{N}$ следующим образом: $\pi(m)$ — множество простых чисел, делящих натуральное число m, а $\pi(G) = \pi(|G|)$. Зафиксируем множество простых чисел π. Если $\pi(m) \subseteq \pi$, то натуральное число m называется π-числом. Группа G называется: π-группой, если $\pi(G) \subseteq \pi$; π'-группой, если $\pi(G) \subseteq \pi'$. Если $|\pi(G)| = 1$, то группа G называется примарной, при $|\pi(G)| = 2$ — бипримарной.

Субнормальным рядом группы G называется цепочка подгрупп

$$1 = G_0 \leq G_1 \leq \ldots \leq G_m = G, \tag{1}$$

в которой подгруппа G_i нормальна в группе G_{i+1} для всех $i = 0, 1, \ldots, m-1$. Ряд (1) называется композиционным, если G_i является максимальной нормальной подгруппой группы G_{i+1} для каждого i, фактор-группы G_{i+1}/G_i называются композиционными факторами этого ряда, а числа $|G_{i+1}/G_i|$, $i = 0, 1, \ldots, m-1$ — индексами композиционного ряда.

Группа называется π-разрешимой, если она обладает субнормальным рядом (1), факторы которого являются либо разрешимыми π-группами, либо π'-группами.

В следующей лемме приведены свойства групп Шмидта, полученные самим О. Ю. Шмидтом в 1924 г.

Лемма 1 [1]. *Пусть S — группа Шмидта. Тогда справедливы следующие утверждения:*

(1) $S = [P]Q$*, где P — нормальная силовская p-подгруппа, Q — ненормальная силовская q-подгруппа, p и q — различные простые числа;*

(2) $Q = \langle y \rangle$ *— циклическая подгруппа и* $y^q \in Z(S)$*;*

(3) $|P/P'| = p^m$*, где m — показатель числа p по модулю q.*

Условимся называть $S_{<p,q>}$-группой группу Шмидта с нормальной силовской p-подгруппой P и циклической силовской q-подгруппой Q. Минимальным добавлением к подгруппе A в группе G называется такая подгруппа B, что $G = AB$ и $AB_1 \neq G$ для всех собственных подгрупп B_1 из B.

Лемма 2 [9, лемма 1]. *Если K и D — подгруппы группы G, подгруппа D нормальна в K и K/D — $S_{<p,q>}$-подгруппа, то минимальное добавление L к подгруппе D в K обладает следующими свойствами:*

(1) *L — p-замкнутая $\{p,q\}$-подгруппа;*

(2) *все собственные нормальные подгруппы в L нильпотентны;*

(3) *L содержит $S_{<p,q>}$-подгруппу $[P]Q$ такую, что Q не содержится в D и* $L = ([P]Q)^L = Q^L$.

Лемма 3 [11, VI.4.10]. *Пусть A и B — подгруппы группы G такие, что $G \neq AB$ и $AB^g = B^gA$ для всех $g \in G$. Тогда либо $A^G \neq G$, либо $B^G \neq G$.*

Лемма 4 [4, лемма 11]. *Если простая группа G является произведением p-подгруппы P и подгруппы Шмидта S, то справедливо одно из следующих утверждений:*

(1) $p = 2$, $G \simeq PSL(2,7)$, $P \simeq D_8$, $S \simeq [Z_7]Z_3$;

(2) $p = 3$, $G \simeq SL(2,8)$, $P \simeq Z_9$, $S \simeq [E_8]Z_7$;

(3) $p = 5$, $G \simeq PSL(2,5)$, $P \simeq Z_5$, $S \simeq A_4 \simeq [E_4]Z_3$.

Лемма 5. (1) *Если группа G является произведением двух подгрупп A и B взаимно простых порядков и K — субнормальная в G подгруппа, то* $= (K \cap A)(K \cap B)$, [12, лемма 1].

(2) *Пусть H, K и N — попарно перестановочные подгруппы группы G. Если H холлова, то* $N \cap HK = (N \cap H)(N \cap K)$, ([13], лемма 5).

Лемма 6. *Пусть A — OS-полунормальная подгруппа группы G и B ее OS-добавление.*

(1) *Для любого элемента $g \in G$ подгруппа B^g будет OS-добавлением к подгруппе A в группе G.*

(2) *Для любого элемента $g \in G$ подгруппа A^g будет OS-полунормальной в группе G, а подгруппы B и B^g — ее OS-добавлениями.*

(3) *Если X — непустое множество элементов из группы G, то подгруппа $A^X = \langle A^x \mid x \in G \rangle$ будет OS-полунормальной в группе G, а подгруппы B и B^g, $g \in G$, будут OS-добавлениями к A^X в G.*

Доказательство. 1. Пусть $g = ba$ — произвольный элемент из группы G, где $b \in B$, $a \in A$. Ввиду изоморфизма $B \simeq B^g$ можно считать, что $S^g = S^{ba}$ — произвольная подгруппа

Шмидта из B^g, где S — подгруппа Шмидта в B. Поскольку $S^b \leq B$, то

$$AS^b = S^bA,\ AS^g = AS^{ba} = (AS^b)^a = (S^bA)^a = S^{ba}A = S^gA.$$

Это означает, что B^g — OS-добавление к A в группе G.

2. Если T — подгруппа Шмидта в B^g, то $T = S^g$ для некоторой подгруппы Шмидта S из B. По условию $AS = SA$, поэтому $A^gS^g = S^gA^g$. Так как $A^gB^g = (AB)^g = G$, то A^g — OS-полунормальная подгруппа в G и B^g — ее OS-добавление. Из пункта 1 следует, что $(B^g)^{g^{-1}} = B$ будет OS-добавлением к A^g в группе G.

3. Хорошо известно, что подгруппа, перестановочная с несколькими подгруппами, перестановочна с их порождением. Пусть S — подгруппа Шмидта из B. Тогда S перестановочна с A по определению OS-полунормальной подгруппы и S перестановочна с A^x по пункту 2. Поэтому S перестановочна с A^X. Следовательно, A^X — OS-полунормальная подгруппа группы G и B — ее OS-добавление. По пункту 2 подгруппа B^g, $g \in G$, будет OS-добавлением к A^X. Лемма доказана.

Лемма 7. *Пусть A — OS-полунормальная подгруппа группы G и B — ее OS-добавление.*

(1) *Если $N \lhd G$, то AN — OS-полунормальна в G и B является OS-добавлением к AN в G.*

(2) *Если $N \lhd G$, $N \leq B$, то AN/N — OS-полунормальна в G/N и B/N является OS-добавлением к AN/N в G/N.*

(3) *Если $N \lhd G$, $(|N|, |B|) = 1$, то A/N OS-полунормальна в G/N и BN/N является OS-добавлением к A/N в G/N.*

Доказательство. (1) Нормальная подгруппа перестановочна с любой подгруппой. Поскольку $G = (AN)B$ и AN перестановочна с любой подгруппой Шмидта из B, то AN — OS-полунормальная подгруппа группы G и B — ее OS-добавление.

(2) Ясно, что $G/N = (AN/N)(B/N)$. Пусть D/N — подгруппа Шмидта из B/N и L — минимальное добавление к N в D. По лемме 2 подгруппа L содержит подгруппу Шмидта S такую, что $S^L = L$. Так как $S \leq L \leq D \leq B$, то A перестановочна с S. Из леммы 6 (1) следует, что A перстановочна с S^x для любого $x \in G$. Поэтому A перестановочна с $S^L = L$ и с $LN = D$. Следовательно, AN/N перестановочна с D/N, т. е. AN/N OS-полунормальна в G/N и B/N будет OS-добавлением к AN/N в G/N.

(3) Так как $G = AB$ и $(|N|, |B|) = 1$, то $N \leq A$ и $G/N = (A/N)(BN/N)$. Поскольку $N \cap B = 1$, то $BN = B[N]$. Пусть D/N — подгруппа Шмидта из BN/N. Тогда $D = (B \cap D)[N]$, т. е. $B \cap D$ будет минимальным дополнением к N в D. По лемме 2 существует подгруппа Шмидта S в $B \cap D$ такая, что $S^{B \cap D} = B \cap D$. Так как $SN/N \simeq S \leq D/N$, то $S = B \cap D$. Теперь A перестановочна с $B \cap D$ по условию, поэтому A/N перестановочна с $(B \cap D)N/N$, т. е. A/N OS-полунормальна в G/N и BN/N ее OS-добавление. Лемма доказана.

Минимальным OS-добавлением к подгруппе A в группе G называется такая подгруппа B, что $G = AB$, подгруппа A перестановочна со всеми подгруппами Шмидта из B и $AB_1 \neq G$ для всех собственных подгрупп B_1 из B.

Лемма 8. *Пусть A — неединичная OS-полунормальная подгруппа простой группы G и B — ее минимальное OS-добавление. Тогда все собственные подгруппы в B нильпотентны, т. е. либо B нильпотентна, либо B есть группа Шмидта.*

Доказательство. Предположим, что в B имеется собственная ненильпотентная подгруппа. Тогда существует подгруппа Шмидта $S < B$ и $AS < G$. Из леммы 6 (1) следует, что $AS^g = S^gA$ для любого $g \in G$. По лемме 3 либо $A^G \neq G$, либо $B^G \neq G$, что противоречит условию доказываемого предложения. Поэтому предположение неверно и B либо нильпотентная подгруппа, либо группа Шмидта.

Лемма 9. *Пусть R — неединичная OS-полунормальная r-подгруппа простой группы G и B — ее минимальное OS-добавление. Тогда для R, B, и G возможны только следующие изоморфизмы:*

(1) $R \simeq Z_5$, $B \simeq A_4$, $G \simeq PSL(2,5)$;

(2) $R \simeq D_8$, $B \simeq [Z_7]Z_3$, $G \simeq PSL(2,7)$;

(3) $R \simeq Z_9$, $B \simeq [E_8]Z_7$, $G \simeq SL(2,8)$.

Доказательство. Согласно лемме 8 и теореме Виланда–Кегеля подгруппа B являестя группой Шмидта $B = [P]Q$. По лемме 4 группа $G \in \{PSL(2,7), PSL(2,5), SL(2,8)\}$. Факторизации этих групп известны [14], искомые факторизации указаны в пунктах (1)–(3).

Лемма 10. *Пусть U и N — подгруппы группы G и N нормальна в G. Если все подгруппы Шмидта из U содержатся в N, то UN/N нильпотентна.*

Доказательство. В силу изоморфизма $UN/N \simeq U/U \cap N$ достаточно доказать, что $U/U \cap N$ нильпотента. Предположим противное и пусть $D = U \cap N$, K/D — подгруппа Шмидта из U/D. По лемме 2 существуют подгруппы $S \leq L \leq K \leq U$ такие, что $K = LD$, S — подгруппа Шмидта и $S^L = L$. По условию $S \leq N \cap U = D$. Поэтому $K = LD = S^L D \leq D$, противоречие с тем, что $K/D \neq 1$.

Лемма 11. *Предположим, что в группе G силовская p-подгруппа OS-полунормальна. Если H — субнормальная подгруппа группы G, то силовская p-подгруппа из H OS-полунормальна в H.*

Доказательство. Применим индукцию по порядку группы. Пусть P_1 — силовская p-подгруппа из H и P — силовская p-подгруппа в G такая, что $P_1 \leq P$. По лемме 6 подгруппа P OS-полунормальна в G. Поэтому существует подгруппа B такая, что $G = PB$ и P перестановочна со всеми подгруппа Шмидта из B.

Предположим, что H нормальна в G. Тогда H перестановочна с подгруппами P и B. По лемме 5 $H = (P \cap H)(B \cap H)$. Пусть S — подгруппа Шмидта из $B \cap H$. По условию $SP = PS$. Так как $S \leq B \cap H$, то по тождеству Дедекинда

$$H \cap SP = S(H \cap P) = SP_1 = H \cap PS = (H \cap P)S = P_1 S.$$

Следовательно, силовская p-подгруппа P_1 из H будет OS-полунормальной в H и $B \cap H$ является OS-добавлением к P_1 в H.

Пусть теперь H ненормальна в G. Так как H — субнормальная в G подгруппа, то H субнормальна в H^G и $H^G < G$. По доказанному силовская p-подгруппа из H^G OS-полунормальна в H^G. Теперь по индукции лемма справедлива.

3. Доказательство теоремы 1. Заметим, что p-разрешимость группы G равносильна тому, что порядки всех неабелевых композиционных факторов не делятся на p. Поэтому (4) равносильно следующему утверждению.

($4'$) Если $p \geq 7$, то все неабелевы композиционные факторы группы G являются p'-группами.

Будем доказывать все утверждения одновременно. Воспользуемся индукцией по порядку группы. Пусть H/K — произвольный неабелевый композиционный фактор группы G. Тогда H — субнормальная подгруппа группы G, подгруппа K нормальна в H и фактор-группа H/K простая. Если $H \neq G$, то к H применима индукция. Так как H/K является неабелевым композиционным pd-фактором группы H, то по индукции H/K — группа из пунктов (1)–(3), ($4'$). В этом случае теорема доказана. Поэтому следует считать, что $H = G$ и $p \in \pi(G/K)$.

Теперь $G/K = (PK/K)(BK/K)$ — простая неабелева pd-группа. По теореме Виланда–Кегеля подгруппа BK/K ненильпотента, а по лемме 10 в подгруппе B существует подгруппа

Шмидта S такая, что S не содержится в K. По условию $PS = SP$, а из леммы 6 следует, что $PS^x = S^xP$ для всех $x \in G$. Поэтому

$$(PK/K)(SK/K)^{xK} = (SK/K)^{xK}(PK/K).$$

Так как G/K — простая группа, то из леммы 3 заключаем, что $G/K = (PK/K)(SK/K)$. У группы Шмидта фактор-группы либо циклические, либо являются вновь группами Шмидта. По теореме Виландта–Кегеля подгруппа $SK/K \simeq S/S \cap K$ не циклическая, поэтому SK/K — группа Шмидта и применима лемма 9. Из этой леммы следует, что $p \leq 5$ и $G/K \simeq PSL(2,7)$ при $p = 2$, $SL(2,8)$ при $p = 3$ или $SL(2,4)$ при $p = 5$. Теорема доказана.

Следствие 1.1. *Если в группе G силовские 2- и 3-подгруппы OS-полунормальны, то группа G разрешима.*

Доказательство. Предположим, что группа G неразрешима и H/K — неабелев композиционный фактор группы G. По теореме 1 (1) $H/K \simeq PSL(2,7)$, поэтому $3 \in \pi(H/K)$. По условию силовская 3-подгруппа группы G OS-полунормальна. По теореме 1 (2) $H/K \simeq SL(2,8)$. Так как $PSL(2,7) \not\simeq SL(2,8)$, то имеем противоречие. Поэтому предположение неверно и G разрешима.

Следствие 1.2. *Если в группе G силовские 2- и 7-подгруппы OS-полунормальны, то группа G разрешима.*

Доказательство. Предположим, что группа G неразрешима и H/K — неабелев композиционный фактор группы G. По теореме 1 (1) $H/K \simeq PSL(2,7)$, поэтому $7 \in \pi(H/K)$. По условию силовская 7-подгруппа группы G OS-полунормальна. По теореме 1 (4) группа G 7-разрешима, поэтому H/K 7-разрешима. Противоречие.

Литература

1. *Шмидт О. Ю.* Группы, все подгруппы которых специальные // Матем. сб. 1924. Т. 31. С. 366–372.
2. *Монахов В. С.* Подгруппы Шмидта, их существование и некоторые приложения // Труды Укр. матем. конгресса 2001. Киев: Институт математики НАН Украины. 2002. Секция № 1. С. 81–90.
3. *Беркович Я. Г., Пальчик Э. М* О перестановочности подгрупп конечной группы // Сиб. мат. журн. 1967. Т. 8, № 4. С. 741–753.
4. *Княгина В. Н., Монахов В. С.* О перестановочности силовских подгрупп с подгруппами Шмидта // Тр. ИММ УрО РАН. 2010. Т. 16, № 3. С. 130–139.
5. *Su X.* On seminormal subgroups of finite group // J. Math. (Wuhan). 1988. Vol. 8, № 1. P. 7–9.
6. *Carocca A., Matos H.* Some solvability criteria for finite groups // Hokkaido Math. J. 1997. Vol. 26, № 1. P. 157–161.
7. *Подгорная В. В.* Полунормальные подгруппы и сверхразрешимость конечных групп // Весцi НАН Беларусi. Сер. фiз. матэм. навук. 2000. № 4. С. 22–25.
8. *Монахов В. С.* Конечные группы с полунормальной холловой подгруппой // Матем. зам. 2006. Т. 80, № 4. С. 573–581.
9. *Княгина В. Н., Монахов В. С.* Конечные группы с полунормальными подгруппами Шмидта // Алгебра и логика. 2007. Т. 46, № 4. С. 448–458.
10. *Монахов В. С.* Введение в теорию конечных групп и их классов. Минск: Вышэйшая школа, 2006.
11. *Huppert B.* Endliche Gruppen I. Berlin, Heidelberg, New York, 1967.
12. *Монахов В. С.* О произведении 2-разложимой группы и группы Шмидта // Докл. АН БССР. 1974. Т. 18, № 10. С. 871–874.
13. *Княгина В. Н., Монахов В. С.* О π'-свойствах конечной группы, обладающей π-холловой подгруппой // Сиб. матем. журн. 2011. Т. 52. № 2. С. 297–309.
14. *Монахов В. С.* Произведение конечных групп, близких к нильпотентным // Конечные группы: Сб. ст. Минск: Наука и техника, 1975. С. 70–100.

V. S. Monakhov, E. V. Zubei

On composition factors of a finite group with OS-seminormal sylow subgroup

Summary

A finite non-nilpotent group whose all proper subgroups nilpotent, is called the Schmidt group. A subgroup A of a group G is called OS*-seminormal*, if there exists a subgroup B such that $G = AB$ and A commutes with all Schmidt subgroups of B. For a prime number $r \geq 7$ is established r-solvability of the group, in which the Sylow r-subgroup OS-seminormal. For $r < 7$, all non-Abelian compositional factors are listed such group. The solvability of the group with OS-seminormal Sylow 2- and 3-subgroups.