УДК 515.124.62

З.Н. СИЛАЕВА

ТЕОРЕМА КУРАТОВСКОГО – ДУГУНДЖИ ДЛЯ ПРОСТРАНСТВ С ФИЛЬТРАЦИЯМИ

We extend well-known Kuratowski – Dugundji theorem to the category of metric spaces with filtration. The characterization of finite-dimentional metric absolute extensors with filtration is given as an application.

Целью работы является исследование задачи продолжения частично заданных непрерывных отображений пространств с сохранением имеющихся на них фильтраций. Эта задача наиболее изучена применительно к CW-комплексам и клеточным отображениям: если (Z, A) – клеточная пара, а X – CW-комплекс, то клеточное отображение $f : A \to X$ может быть продолжено до клеточного отображения $\overline{f} : Z \to X$, если каждый остов X_n стягиваем [1, 2]. Доказательство состоит в последовательном распространении f на остовы Z_n. Однако, если заменить слабую топологию Z более сильной (например, метрической), то построенное отображение $\overline{f}$, вообще говоря, перестает быть непрерывным. Вместе с тем в ряде топологических задач (например, в задаче сохранения функторами экстензорных свойств) возникает потребность в изучении пространств с фильтрациями (профильтрованных пространств) и отображений, сохраняющих фильтрации (профильтрованных отображений), именно в метрическом случае. Наиболее естествен здесь вопрос о конечномерных метрических профильтрованных пространствах, обладающих абсолютным свойством продолжимости профильтрованных отображений. Следующее утверждение может быть легко доказано методом от противного.

Теорема 1. *Для любого метрического профильтрованного* ANE-*пространства* $Y = \bigcup_{i=1}^{\infty} Y_i$ ($Y \in \mathcal{N}$-ANE) *выполняются условия*:

1) *любой элемент фильтрации* $Y_i \in$ ANE;

2) $\{Y_i\}_{i\in\mathbf{N}}$ *есть равностепенно* LAE-*семейство* ($\{Y_i\}_{i\in\mathbf{N}} \in$ equi-LAE).

Оказывается, выполнения условия 1) недостаточно для того, чтобы $Y \in \mathcal{N}$-ANE. Хотя условие 2) более сильное, но тоже не влечет $Y \in \mathcal{N}$-ANE. Однако в конечномерном случае справедлива следующая характеризационная теорема конечномерных метрических $\mathcal{N}$-ANE.

Теорема 2. *Для того чтобы профильтрованное метрическое пространство* $Y = \bigcup_{i=1}^{\infty} Y_i$, $\dim Y \le n$, $n>0$, *принадлежало классу* $\mathcal{N}$-ANE, *необходимо и достаточно, чтобы его фильтрация* $\{Y_i\}_{i\in\mathbf{N}}$ *удовлетворяла свойству* 2).

Доказательство теоремы 2 следует из обобщения теоремы Куратовского – Дугунджи на случай профильтрованных пространств:

Теорема 3. *Пусть A – замкнутое подпространство профильтрованного метрического пространства X*, $\dim (X\backslash A) \le n+1$, где $n \ge 0$, *Y – метрическое пространство, фильтрация которого является равностепенно* LC^n-*семейством* ($\{Y_i\}_{i\in\mathbf{N}} \in$ equi-LC^n), $f : A \to Y$ – *произвольное профильтрованное отображение. Тогда*

1) *существует такая окрестность U множества A в X, что f имеет профильтрованное продолжение* $\overline{f} : U \to Y$,

2) *если, дополнительно,* $Y_i \in C^n$ *для любого* $i \in \mathbf{N}$, *то f имеет профильтрованное продолжение* $\overline{f} : X \to Y$.

Предварительные сведения

Профильтрованным пространством, или *$\mathcal{N}$-пространством*, будем называть топологическое пространство X, в котором выделена последовательность замкнутых (возможно, пустых) подмножеств $X_1 \subseteq X_2 \subseteq \ldots$ такая, что $\bigcup_{i=1}^{\infty} X_i = X$. Семейство подмножеств $\{X_i\}_{i\in\mathbf{N}}$ будем называть *фильтрацией* пространства X. Непрерывное *отображение* $f : X \to Y$ двух $\mathcal{N}$-пространств X и Y будем называть *профильтрованным*, или *$\mathcal{N}$-отображением*, если $f(X_i) \subseteq Y_i$ для любого $i \in \mathbf{N}$ [2].

Нетрудно доказать, что композиция двух $\mathcal{N}$-отображений является $\mathcal{N}$-отображением, поэтому профильтрованные пространства образуют категорию, в которой множество морфизмов есть множество $\mathcal{N}$-отображений. Далее мы будем рассматривать категорию метрических профильтрованных пространств.

Степенью точки x профильтрованного пространства X назовем число, определяемое по формуле $\deg x = \min\{i \in \mathbf{N} \mid x \in X_i\}$. Ясно, что непрерывное отображение $f : X \to Y$ двух $\mathcal{N}$-пространств X и Y является $\mathcal{N}$-отображением тогда и только тогда, когда $\deg f(x) \le \deg x$ для любой точки $x \in X$. Обобщением понятия степени точки является понятие *степени подмножества M* профильтрованного пространства X: $\deg M = \min\{i \in \mathbf{N} \mid M \cap X_i \ne \varnothing\}$.

Будем называть *симплициальный комплекс профильтрованным*, или *$\mathcal{N}$-комплексом*, если элементы фильтрации являются его подкомплексами. Примером может быть политоп с естественной остовной фильтрацией. Рассмотрим еще один полезный в дальнейшем пример $\mathcal{N}$-комплекса. Пусть N – нерв покрытия $\mathbf{G}=\{G_\mu\}_{\mu\in M}$ метрического $\mathcal{N}$-пространства X, который является полиэдром со слабой топологией. Для того чтобы ввести фильтрацию на N, сначала введем понятие *степени симплекса* $\sigma=\langle G_0,...,G_k\rangle$: $\deg\sigma=\deg(\bigcap_{i=0}^k G_i)$. Ясно, что если $\tau\subset\sigma$, то $\deg\tau\le\deg\sigma$. *Степенью точки z нерва N* будем называть число deg z=min{deg σ | по всем таким σ, что $z\in\sigma$}. Для любого $i\in\mathbf{N}$, *i-м элементом фильтрации нерва N* будем называть множество N_i = {$z\in\mathbf{N}$ | deg z ≤ i}. Нетрудно доказать, что $N_i=\bigcup\{\sigma\,|\deg\sigma\le i\}$.

Пусть $\{\tau_\mu: X\to[0,1]\}$ – разбиение единицы, подчиненное локально-конечному покрытию **G**. Тогда формула $\varphi(x)=\sum\limits_{\mu\in M}\tau_\mu(x)\langle G_\mu\rangle$, где $x\in X$, $\tau_\mu(x)$ – барицентрические координаты, определяет непрерывное отображение $\varphi: X\to N$, называемое каноническим отображением пространства X в нерв N его покрытия **G** (подробнее см. [3]).

Лемма 1. Каноническое отображение $\varphi: X\to N$ является $\mathcal{N}$-отображением.

Доказательство. Пусть $x\in\bigcap_{i=0}^k G_{\mu_i}$. Тогда $\deg x\ge\deg(\bigcap_{i=0}^k G_{\mu_i})=\deg\sigma(G_{\mu_0},...,G_{\mu_k})$. Но $\varphi(x)\in\sigma(G_{\mu_0},...,G_{\mu_k})$, поэтому $\deg\varphi(x)\le\deg\sigma\le\deg x$, откуда следует, что φ – $\mathcal{N}$-отображение.

Рассмотрим понятия, связанные с продолжением $\mathcal{N}$-отображений (см. также [2, 3]). Профильтрованное отображение $f: A\to Y$, заданное на замкнутом $\mathcal{N}$-подпространстве A $\mathcal{N}$-пространства X, называется *частичным* $\mathcal{N}$*-отображением*. Если для f существует такое $\mathcal{N}$-отображение $\overline{f}: X\to Y$, что $\overline{f}\,|_A=f$, будем говорить, что $\mathcal{N}$*-отображение f допускает* $\mathcal{N}$*-продолжение* на X, а $\mathcal{N}$-отображение $\overline{f}$ будем называть $\mathcal{N}$*-продолжением f*. Будем говорить, что $\mathcal{N}$-пространство Y является *абсолютным (окрестностным)* $\mathcal{N}$*-экстензором* или *принадлежит классу* $\mathcal{N}$-A(N)E, если для любого $\mathcal{N}$-пространства X и любого его замкнутого $\mathcal{N}$-подпространства A любое частичное $\mathcal{N}$-отображение $f: A\to Y$ допускает $\mathcal{N}$-продолжение $\overline{f}: X\to Y$ (допускает $\mathcal{N}$-продолжение $\overline{f}: U\to Y$ на некоторую окрестность U множества A в X).

Будем говорить, что *семейство* $\{Y_i\}_{i\in\mathbf{N}}$ подмножеств метрического пространства Y является *равностепенно локально продолжимым* ($\{Y_i\}_{i\in\mathbf{N}}\in$equi-LAE), если $\bigcup_{i=1}^\infty Y_i=Y$ и для любой точки $y\in Y$ и ее окрестности U существует окрестность $V\subset U$, $y\in V$, такая, что для любого метрического пространства Z и его замкнутого подпространства A любое непрерывное отображение $\varphi: A\to Y_m\cap V$ непрерывно продолжается до отображения $\overline{\varphi}: Z\to Y_m\cap U$. Пусть n=0,1,… . Если в определении под пространствами A и Z понимать соответственно S^k и B^{k+1}, где $0\le k\le n$, получим понятие *равностепенно локально n-связного семейства* ($\{Y_i\}_{i\in\mathbf{N}}\in$equi-LC^n). Если в последнем определении $U=N_\varepsilon(y)$ (то есть U – ε-окрестность точки y), а $V=N_\delta(y)$, $\delta<\varepsilon$, то будем писать δ=equi-LC^n_Y(ε). Ясно, что из условия $\{Y_i\}_{i\in\mathbf{N}}\in$equi-LAE следует, что $\{Y_i\}_{i\in\mathbf{N}}\in$equi-LC^n, а из последнего следует, что $Y_i\in$LC^n для любого $i\in\mathbf{N}$.

Пусть A – замкнутое подпространство метрического пространства X. Локально-конечное открытое покрытие $\{G_\mu\}_{\mu\in M}$ множества $X\backslash A$ называется *примыкающим покрытием* к A, если для любой точки $a\in A$ и любой окрестности V точки a в X существует такая окрестность W точки a в X, что из $G_\mu\cap W\ne\varnothing$ следует $G_\mu\subset V$. Имеет место [3]

Предложение 1. Пусть $n\ge1$. Примыкающее к A покрытие кратности n существует в любом из следующих случаев: dim($X\backslash A$)≤n–1 или dim A≤n–2.

Доказательство обобщенной теоремы Куратовского – Дугунджи

Докажем сначала утверждение 2) теоремы 3: $Y_i\in$C^n. Так как dim($X\backslash A$)≤n+1, то по предложению 1 существует примыкающее к A покрытие $\mathbf{G}=\{G_\mu\}_{\mu\in M}$, кр. **G**=$n$+2. Ясно, что размерность нерва N этого покрытия меньше либо равна n+1.

Для краткости будем говорить, что *симплекс* $\sigma=\langle G_{\mu_0},...,G_{\mu_k}\rangle$ *содержится в* V, если $\bigcup_{i=0}^k G_{\mu_i}\subset V$. Если же $(\bigcup_{i=0}^k G_{\mu_i})\cap V\ne\varnothing$, то скажем, что σ *пересекает* V. Из определения примыкающего покрытия легко следует

Лемма 2. Пусть $a\in A\cap(\overline{X\setminus A})$. Тогда для любой окрестности U точки a существует окрестность V точки a такая, что для любого симплекса σ, пересекающего V, σ содержится в U.

Будем говорить, что *последовательность* $\left\{\left\langle G_{\mu_i}\right\rangle\right\}$ вершин нерва N *сходится к точке* $a\in A$, если для любого $\varepsilon>0$ существует $n\in\mathbf{N}$ такое, что для всех $i\geq n$, G_{μ_i} содержится в окрестности $N_\varepsilon(a)$.

Не теряя общности, можно считать, что $A_1\neq\varnothing$. Поставим в соответствие каждой вершине $\left\langle G_\mu\right\rangle$ точку a_μ из $A_{\deg G_\mu}\neq\varnothing$ так, чтобы $\rho(a_\mu,G_\mu)<2\sup\{\rho(x,A_{\deg G_\mu})\mid x\in G_\mu\}$. При этом возникает $\mathcal{N}$-отображение $g:N^{(0)}\to A$, $g\left(\left\langle G_\mu\right\rangle\right)=a_\mu$, где $N^{(0)}$ – нульмерный остов полиэдра N. Покажем, что справедлива

Лемма 3. Если $\left\{\left\langle G_{\mu_i}\right\rangle\right\}$ сходится к точке $a\in A$, то $\{a_{\mu_i}\}\to a$.

Доказательство. Из того, что $\left\{\left\langle G_{\mu_i}\right\rangle\right\}$ сходится к точке $a\in A$, следует, что для любого $\varepsilon>0$ существует такое $n\in\mathbf{N}$, что для всех $i\geq n$ $G_{\mu_i}\subset N_{\varepsilon/3}(a)$. В силу замкнутости элементов фильтрации пространства A, не ограничивая общности, можно считать, что $\deg N_{\varepsilon/3}(a)=\deg a$, откуда следует, что

$$\deg G_{\mu_i}\geq\deg a. \tag{1}$$

Тогда для $x\in G_{\mu_i}$ выполняется $\rho(a_{\mu_i},a)\leq\ \rho(a_{\mu_i},x)+\rho(x,a)<\ \rho(a_{\mu_i},x)+\varepsilon/3$. Поскольку $\rho(a_{\mu_i},G_{\mu_i})=$ $=\inf\{\rho(a_{\mu_i},x)\mid x\in G_{\mu_i}\}$, то $\rho(a_{\mu_i},a)<\rho(a_{\mu_i},G_{\mu_i})+\varepsilon/3$. Так как $\rho(a_{\mu_i},G_{\mu_i})<\ 2\sup\{\rho(x,A_{\deg G_{\mu_i}})\mid x\in G_{\mu_i}\}<$ $<\ 2\sup\{\rho(x,A_{\deg a})\mid x\in G_{\mu_i}\}<2\varepsilon/3$ (предпоследнее неравенство справедливо в силу (1), а последнее – в силу того, что $G_{\mu_i}\subset N_{\varepsilon/3}(a)$), получаем $\rho(a_{\mu_i},a)<2\varepsilon/3+\varepsilon/3=\varepsilon$. Поэтому $\{a_{\mu_i}\}\to a$.

Рассмотрим $\mathcal{N}$-отображение $f_0=f\circ g:N^{(0)}\to Y$. В силу непрерывности f и леммы 3 для f_0 из условия $\left\{\left\langle G_{\mu_i}\right\rangle\right\}\to a$ следует $\left\{f_0\left(\left\langle G_{\mu_i}\right\rangle\right)\right\}\to f(a)$.

Пусть $N^{(k)}$ – k-мерный остов полиэдра N. Пусть f_k – $\mathcal{N}$-отображение, заданное на границе $\sigma^\bullet$ $(k+1)$-мерного симплекса σ из $N^{(k+1)}$. Тогда для $x\in\sigma^\bullet\subset\ \sigma$ $f_k(x)\subset Y_{\deg x}\subset Y_{\deg\sigma}$. Поэтому $f_k(\sigma^\bullet)\subset Y_{\deg\sigma}$, которое по условию принадлежит классу C^n, следовательно, существует отображение из σ в $Y_{\deg\sigma}$, являющееся непрерывным продолжением отображения $f_k|_{\sigma^\bullet}$. Ясно, что это $\mathcal{N}$-отображение.

Пусть ε_σ – точная нижняя грань диаметров множеств значений всех таких продолжений отображения $f_k|_{\sigma^\bullet}$. Выберем среди них любое продолжение, для которого диаметр не превышает числа $2\varepsilon_\sigma$, и назовем его оптимальным. Если f_k – отображение, заданное на $N^{(k)}$, то таким образом будет построено $\mathcal{N}$-отображение $f_{k+1}:N^{(k+1)}\to Y$, для которого $\mathrm{diam}[f_{k+1}(\sigma)]\leq 2\varepsilon_\sigma$.

Отображение f_{k+1}, построенное с помощью описанного алгоритма, будем называть **оптимальным продолжением** f_k. Поскольку $\mathcal{N}$-отображение $f_0:N^{(0)}\to Y$ уже построено, можно последовательно построить $\mathcal{N}$-отображения $f_1, f_2, \ldots, f_{n+1}$. Покажем, что для $k=0, 1, \ldots, n+1$ отображение f_k удовлетворяет следующему **свойству** $(\boldsymbol{P})_k$: для любой точки $a\in A\cap\overline{(X\setminus A)}$ и для любой окрестности $N_\varepsilon(f(a))$ существует окрестность $N_\delta(a)\subset X$ такая, что для любого $\sigma=\left\langle G_{\mu_0},\ldots,G_{\mu_k}\right\rangle\subset N_\delta(a)$ выполняется $f_k(\sigma)\subset N_\varepsilon(f(a))$. В этом случае будем писать $\delta=\boldsymbol{P}_k(\varepsilon)$.

Лемма 4. Для $k=0, 1, \ldots, n+1$ справедливо свойство $(\boldsymbol{P})_k$.

Доказательство проводится индукцией по k. Свойство $(\boldsymbol{P})_0$ непосредственно следует из леммы 3 и непрерывности отображения f. Предположим теперь, что свойство $(\boldsymbol{P})_k$ верно, и докажем свойство $(\boldsymbol{P})_{k+1}$.

Пусть $\varepsilon>0$, $\varepsilon_1=\text{equi-LC}_Y^n(\varepsilon/5)$ и $\delta=\boldsymbol{P}_k(\varepsilon_1)$. Тогда $N_\delta(a)$ – искомая окрестность. Действительно, для любого $\sigma\in N^{(k+1)}$, $\sigma\subset N_\delta(a)$, выполняется $\sigma^\bullet\subset N_\delta(a)$. Тогда по свойству $(\boldsymbol{P})_k$ $f_k(\sigma^\bullet)\subset N_{\varepsilon_1}(f(a))$. Так как $\varepsilon_1=\text{equi-LC}_Y^n(\varepsilon/5)$, то окрестность $N_{\varepsilon_1}(f(a))$ такова, что непрерывное отображение $f_k:\sigma^\bullet\to Y_m\cap N_{\varepsilon_1}(f(a))$ непрерывно продолжается до отображения $\sigma\to Y_m\cap N_{\varepsilon/5}(f(a))$. Из последнего следует, что диаметры множеств значений всех таких продолжений отображения f_k меньше $2\varepsilon/5$.

В силу оптимальности f_{k+1} diam$[f_{k+1}(\sigma)]<4\varepsilon/5$, и, следовательно, $f_{k+1}(\sigma)\subset N_{\varepsilon_1+4\varepsilon/5}(f(a))\subset N_\varepsilon(f(a))$. Свойство $(\boldsymbol{P})_{k+1}$ доказано.

Определим теперь отображение $\overline{f}:X\to Y$, продолжающее f, формулой $\overline{f}(x)=f_{n+1}\circ\varphi(x)$ для $x\in X\backslash A$, где $\varphi:X\setminus A\to N$ – каноническое $\mathcal{N}$-отображение. Ясно, что $\overline{f}$ сохраняет фильтрацию. Для доказательства того, что $\overline{f}$ есть $\mathcal{N}$-отображение, осталось доказать его непрерывность в точке $a\in A\cap(\overline{X\setminus A})$.

Лемма 5. Отображение $\overline{f}$ непрерывно в точке $a\in A\cap(\overline{X\setminus A})$.

Доказательство. Пусть $N_\varepsilon(f(a))$ – произвольная ε-окрестность точки $f(a)$, $a\in A\cap(\overline{X\setminus A})$. В силу леммы 4 выполняется свойство $(\boldsymbol{P})_{n+1}$, поэтому существует такая окрестность $N_{\delta_1}(a)\subset X$, что для любого $\sigma=\langle G_{\mu_0},...,G_{\mu_{n+1}}\rangle\subset N_{\delta_1}(a)$ выполняется $f_{n+1}(\sigma)\subset N_\varepsilon(f(a))$. В силу непрерывности f для ε существует $\delta_2>0$ такое, что $f(A\cap N_{\delta_2}(a))\subset N_\varepsilon(f(a))$. Пусть δ – радиус окрестности, полученной из $N_{\delta_1}(a)$ по лемме 2. Тогда $N_{\min\{\delta,\delta_2\}}(a)$ – искомая окрестность.

Действительно, покажем сначала, что для любого $x\in N_{\min\{\delta,\delta_2\}}(a)\setminus A$ выполняется $f_{n+1}(\varphi(x))\subset N_\varepsilon(f(a))$. Пусть $\varphi(x)\in\sigma=\langle G_{\mu_0},...,G_{\mu_i}\rangle$, где $i\le n+1$. Из леммы 2 следует, что $\bigcup_{k=0}^{i}G_{\mu_k}\subset N_{\delta_1}(a)$, т. е. $\sigma\subset N_{\delta_1}(a)$. Так как $\delta_1=\boldsymbol{P}_{n+1}(\varepsilon)$, то $f_{n+1}(\sigma)\subset N_\varepsilon(f(a))$, и поэтому $f_{n+1}(\varphi(x))\subset N_\varepsilon(f(a))$. Кроме того, для любого $x\in N_{\min\{\delta,\delta_2\}}(a)\cap A$ выполняется $\overline{f}(x)=f(x)\in N_\varepsilon(f(a))$. Поэтому $\overline{f}(N_{\min\{\delta,\delta_2\}}(a))\subset N_\varepsilon(f(a))$. Утверждение 2) теоремы 3 доказано.

Перейдем к доказательству утверждения 1) теоремы 3. Через Con Y обозначим метрический конус над Y. Будем записывать Con Y в виде $(Y\times[0,1])/\sim$, где $\sim$ есть отношение эквивалентности, единственным нетривиальным классом которого является $Y\times\{0\}$. Тогда Con Y с фильтрацией $\{\text{Con } Y_i\}_{i\in\mathbf{N}}$ называется *профильтрованным конусом над* Y. Несложно показать, что фильтрация $\{\text{Con } Y_i\}_{i\in\mathbf{N}}\in$equi-LC^n, а из $\{Y_i\}_{i\in\mathbf{N}}\in$equi-LC^n следует, что для любого $i\in\mathbf{N}$, $Y_i\in$LC^n. Тогда для любого $i\in\mathbf{N}$, Con$Y_i\in$LC^n. Итак, для $\mathcal{N}$-пространства Con Y выполнено условие 2) теоремы 3. Поэтому для $\mathcal{N}$-отображения $f:A\to Y$, рассматриваемого как отображение в Con Y (при этом Y мы отождествляем с основанием $Y\times\{\,1\,\}$ конуса), существует $\mathcal{N}$-продолжение $f^*:X\to\text{Con } Y$. Рассмотрим открытое подмножество $W=(Y\times(s,1])/\sim$, $0<s<1$, множества Con Y. Отображение f^* непрерывно, W – открытая окрестность $Y\times\{1\}$, поэтому $U=(f^*)^{-1}(W)$ – открытая окрестность множества A. Зададим $\mathcal{N}$-ретракцию $r:W\to Y\times\{1\}$ формулой $r(y,t)=(y,1)$, где $(y,t)\in W$. Искомое $\mathcal{N}$-отображение $\overline{f}:U\to Y$ является композицией $r\circ f^*|_U$. Утверждение 1), а с ним и теорема 3 доказаны.

Доказательство теоремы 2. С помощью обобщенной теоремы Куратовского – Дугунджи и предложения 1 может быть доказан следующий факт, из которого, в свою очередь, будет следовать теорема 2.

Теорема 4. *Пусть* $Y=\bigcup_{i=1}^{\infty}Y_i$ *– профильтрованное метрическое пространство, удовлетворяющее условию* $\{Y_i\}_{i\in\mathbf{N}}\in$equi-LC^n, X *– произвольное метрическое* $\mathcal{N}$*-пространство*, A *– замкнутое подмножество* X *такое*, *что* dim $A\le n$. *Тогда для любого* $\mathcal{N}$*-отображения* $f:A\to Y$ *существует такая окрестность* U *множества* A *в* X, *что* f *имеет* $\mathcal{N}$*-продолжение* $\overline{f}:U\to Y$.

Продолжим доказательство теоремы 2. Поскольку по теореме 1 из условия $Y\in$ $\mathcal{N}$-ANE следует 2), то остается доказать лишь достаточность. В силу теорем Куратовского – Войдыславского и Дугунджи для профильтрованных пространств, для метрического $\mathcal{N}$-пространства Y существует замкнутое топологическое $\mathcal{N}$-вложение в линейное нормированное $\mathcal{N}$-пространство L, которое является $\mathcal{N}$-AE-пространством. В теореме 4 рассмотрим в качестве A конечномерное пространство Y, в качестве X – пространство L, а в качестве $\mathcal{N}$-отображения f – тождественное отображение id$:Y\to Y$. Учитывая тот факт, что из $\{Y_i\}_{i\in\mathbf{N}}\in$equi-LAE следует $\{Y_i\}_{i\in\mathbf{N}}\in$equi-LC^n, все условия теоремы 4 выполнены. Поэтому существует $\mathcal{N}$-продолжение $r : U \to Y$ тождественного отображения, где U – окрестность множества Y в L. Ясно, что r – ретракция. Тогда $Y \in \mathcal{N}$-ANE как образ $\mathcal{N}$-AE-пространства L при окрестностной $\mathcal{N}$-ретракции r.

1. Х у С . Ц . Теория гомотопий. М., 1964.
2. Б о р д м а н Д ж . , Ф о г т Р . Гомотопически инвариантные алгебраические структуры на топологических пространствах. М., 1977.
3. Б о р с у к К . Теория ретрактов. М., 1971.

Поступила в редакцию 23.02.09.

Зоя Николаевна Силаева – аспирант кафедры геометрии, топологии и методики преподавания математики. Научный руководитель – доктор физико-математических наук, профессор С.М. Агеев.