В монографии разработаны и исследованы явные и неявные итерационные процедуры для решения некорректных задач, описываемых операторными уравнениями первого рода с положительными, ограниченными, самосопряженными и несамосопряженными, с точно и приближенно заданными операторами в гильбертовом пространстве. Книга адресована студентам физико-математических факультетов университетов, аспирантам, научным работникам, специализирующимся в области вычислительной математики и теории некорректно поставленных задач.

Регуляризация некорректных задач

Олег Матысик

Итерационная регуляризация некорректных задач

Олег Викторович Матысик. Кандидат физико-математических наук, доцент, заведующий кафедрой прикладной математики и технологий программирования Брестского государственного университета имени А.С. Пушкина. Родился в 1976 году. Закончил БрГУ имени А.С. Пушкина в 1999 году. Имеет 250 публикаций научно-методического характера, в том числе 3 монографии.

978-3-659-40917-2

Матысик

LAP LAMBERT Academic Publishing

Олег Матысик

Итерационная регуляризация некорректных задач

Олег Матысик

Итерационная регуляризация некорректных задач

LAP LAMBERT Academic Publishing

Impressum / Выходные данные
Bibliografische Information der Deutschen Nationalbibliothek: Die Deutsche Nationalbibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliografie; detaillierte bibliografische Daten sind im Internet über http://dnb.d-nb.de abrufbar.

Библиографическая информация, изданная Немецкой Национальной Библиотекой. Немецкая Национальная Библиотека включает данную публикацию в Немецкий Книжный Каталог; с подробными библиографическими данными можно ознакомиться в Интернете по адресу http://dnb.d-nb.de.

Coverbild / Изображение на обложке предоставлено: www.ingimage.com

Verlag / Издатель:
LAP LAMBERT Academic Publishing
ist ein Imprint der / является торговой маркой
OmniScriptum GmbH & Co. KG
Heinrich-Böcking-Str. 6-8, 66121 Saarbrücken, Deutschland / Германия
Email / электронная почта: info@lap-publishing.com

Herstellung: siehe letzte Seite /
Напечатано: см. последнюю страницу
ISBN: 978-3-659-40917-2

Оглавление

Предисловие

Настоящая книга посвящена итерационным методам решения операторных линейных уравнений в гильбертовом пространстве с ограниченными, положительными, самосопряжёнными и несамосопряжёнными операторами в предположении, что погрешности имеются не только в правой части уравнения, но и в операторе. Такими операторными уравнениями задаются некорректные задачи, которые были сформулированы в начале прошлого столетия и долгое время не изучались, поскольку считалось, что они не могут отвечать никакой физической реальности и поэтому их решение не имеет смысла.

Однако потребности практики привели к необходимости решать некорректные задачи. Для их решения предложены и широко применяются метод регуляризации А.Н. Тихонова, метод квазирешений В.К. Иванова и метод невязки, предложенный Д.Л. Филлипсом и В.К. Ивановым. Наибольшее распространение получили итерационные методы решения некорректных задач. Их частое использование связано с тем, что эти методы сравнительно легко программируются на ПЭВМ.

В монографии предлагаются новые регуляризующие алгоритмы для некорректных задач, описываемых операторными уравнениями первого рода, в виде явных и неявных итерационных методов, обладающих более высокими скоростными качествами, чем ранее известные методы. Для построения новых явных и неявных итерационных методов был использован наиболее общий из известных в настоящее время подходов к решению некорректных задач – подход, основанный на введённом А.Н. Тихоновым понятии регуляризатора. Проведено сравнение предложенных методов с наиболее изученным в литературе методом простой итерации.

В частности, метод простой итерации с переменным шагом для получения решения требует в 2,5 раза меньше итераций, чем метод простой итерации с постоянным шагом.

Неявные методы в силу отсутствия ограничений сверху на шаг по антиградиенту позволяют получить оптимальное решение уже на первом шаге итераций.

Для предложенных методов проведено достаточно полное их исследование.

Сначала изучен априорный выбор числа итераций для уравнений с приближенно заданной правой частью и точным оператором. При этом установлены достаточные условия сходимости методов. Получены априорные оценки погрешности в предположении, что известен класс истокопредставимых решений, которому решение при данной правой части операторного уравнения принадлежит. Поскольку такая информация обычно недоступна или неточна, априорный выбор числа итераций имеет в основном теоретическое значение: он позволяет выявлять принципиальные возможности методов.

Использование в работе энергетической нормы делает предложенные методы эффективными и в случае, когда нет сведений об истокопредставимости точного решения. В этом случае удается получить априорные оценки погрешности и априорный момент останова методов уже без дополнительного требования на гладкость точного решения. Получены условия, когда из сходимости в энергетической норме следует сходимость в обычной норме гильбертова пространства.

Предлагается и другой способ сделать методы эффективными и тогда, когда отсутствует дополнительная информация на гладкость точного решения. Для этого в монографии обосновано применение к итерационным методам правил останова по малости невязки и по соседним приближениями. Доказано, что предложенные итерационные методы сходятся к точному решению, для них получены оценки погрешности и оценки для момента останова.

Для всех методов исследован случай неединственного решения уравнения (нуль является собственным значением оператора). Показано, что тогда итерационные процессы сходятся к нормальному решению.

Некоторыми из предложенных методов решены модельные некорректные задачи. Для их решения использовались ПЭВМ, и программы составлялись в среде программирования DELPHI. При решении модельных задач нашли подтверждение выводы о преимуществах предложенных методов по сравнению с наиболее изученным в математической литературе явным методом простой итерации.

Рассмотренные в монографии итерационные методы найдут практическое применение в прикладной математике: они могут быть использованы для решения задач, встречающихся в динамике и кинетике, математической экономике, геофизике, теории потенциала, синтезе антенн, акустике, автоматической обработке результатов физического эксперимента, геологоразведке, сейсмике, спектроскопии и томографии.

Книга предназначена для научных работников и инженеров-исследователей, чьи интересы связаны с некорректными задачами. Её можно использовать в курсе лекций и спецкурсах для студентов физико-математических факультетов университетов.

Автор выражает глубокую благодарность своему научному руководителю доценту В.Ф. Савчуку за ценные советы и полезное обсуждение отдельных результатов книги.

Введение

Встречается большой класс задач, где решения неустойчивы к малым изменениям исходных данных, т. е. сколь угодно малые изменения исходных данных могут приводить к большим изменениям решений. Задачи подобного типа принадлежат к классу некорректных задач.

Значительная часть задач, встречающихся в прикладной математике, физике, технике и управлении может быть представлена в виде операторного уравнения первого рода

$$Ax = y, \quad x \in X, \quad y \in Y \tag{1}$$

с заданным оператором $A : X \to Y$ и элементом y, X и Y – метрические пространства, а в особо оговариваемых случаях – банаховы или даже гильбертовы. Ж. Адамаром (J. Hadamard) [128, 129] было введено следующее понятие корректности:

Определение 1. *Задачу отыскания решения* $x \in X$ *уравнения* (1) *называют* <u>*корректной*</u> *(или* <u>*корректно поставленной*</u>*, или* <u>*корректной по Адамару*</u>*), если при любой фиксированной правой части* $y = y_0 \in Y$ *уравнения* (1) *его решение*:

а) существует в пространстве X *;*

б) определено в пространстве X *однозначно;*

в) устойчиво в пространстве X *, т. е. непрерывно зависит от правой части* $y \in Y$*. В случае нарушения любого из этих условий задачу называют* <u>*некорректной*</u> *(*<u>*некорректно поставленной*</u>*); более конкретно при нарушении условия в) ее принято называть* <u>*неустойчивой*</u>.

Из определения видно, что корректность по Адамару эквивалентна однозначной определенности и непрерывности обратного оператора A^{-1} на всем пространстве Y.

На протяжении многих лет в математике считалось, что только корректные задачи имеют право на существование, что только они правильно отражают реальный мир. О некорректных задачах сложилось мнение, что они не имеют физической реальности, поэтому их решение бессмысленно. В результате долгое время некорректные задачи не изучались.

Однако на практике все чаще и настойчивее стала возникать необходимость решать некорректные задачи. К таким задачам относятся задача Коши для уравнения Лапласа, задача решения интегрального уравнения I-го рода, задача дифференцирования функции, заданной приближенно, численное суммирование рядов Фурье, когда коэффициенты известны приближенно в метрике l_2, обратная задача гравиметрии, обратная задача теории потенциала, задача спектроскопии, задача аналитического продолжения функции, известной на части области, на всю область. Некорректны также и задача проектирования оптимальных систем, конструкций, задача создания систем автоматической обработки результатов физического эксперимента, задача Коши для уравнения теплопроводности с обращенным временем и т.д.

Однако обычные методы, применяемые для решения корректных задач, невозможно было применить к некорректным задачам, поэтому необходимо было пересмотреть определение корректности по Адамару. Это было сделано в 1943 году А.Н. Тихоновым [118].

Определение 2. *Задача отыскания решения уравнения* (1) *называется <u>корректной по Тихонову</u> на множестве* $M \subset X$, *а множество* M – *ее <u>классом корректности</u>, если:*

а) точное решение задачи существует в классе M;

б) в классе M *решение задачи единственно при любой правой части* $y \in F = AM \subset Y$;

в) принадлежащее множеству M решение задачи устойчиво относительно правых частей $y \in F$.

Если $M = X$ и $F = Y$, то корректность по Тихонову совпадает с корректностью по Адамару.

После работ А.Н. Тихонова систематическое изучение некорректных задач и способов их решения началось в 50-х годах, но особенно широкий размах оно приняло в последние 50 лет. Основные результаты отражены в монографиях М.М. Лаврентьева [35], А.Н. Тихонова и В.Я. Арсенина [120], В.А. Морозова [89], В.К. Иванова, В.В. Васина и В.П. Тананы [24], О.А. Лисковца [40], Г.М. Вайникко и А.Ю. Веретенникова [12].

Наиболее общим из известных в настоящее время подходов к решению некорректных задач является подход, основанный на введенном А.Н. Тихоновым понятии регуляризатора.

Пусть имеется некорректная в классическом смысле задача математической физики.

Определение 3. *Параметрическое семейство операторов $\{R_\alpha\}$, действующих из пространства правых частей Y в пространство решений X, называется регуляризующим (регуляризующим алгоритмом, или регуляризатором), если:*

1) *при любом $\alpha > 0$ оператор R_α определен на всем пространстве Y;*

2) *если существует точное решение исходной задачи $x \in X$, то для любого $\delta > 0$ существует $\alpha(\delta)$ такое, что для всех $y_\delta \in Y$, $\|y - y_\delta\| \le \delta$ имеет место соотношение $\left\|R_{\alpha(\delta)} y_\delta - x\right\|_X \to 0, \quad \delta \to 0.$*

Параметр α называется параметром регуляризации, $x_{\alpha,\delta} = R_{\alpha(\delta)} y_\delta$ – регуляризованными решениями.

Использование регуляризатора задачи дает возможность сколь угодно точного ее решения при достаточно точных исходных данных. В работе [119] А.Н. Тихонов предлагает способ построения регуляризующих операторов для уравнения (1). Это метод регуляризации решения некорректных задач. Он основан на вариационном принципе. В методе рационально выбирается параметр регуляризации, используется априорный способ выбора и предложены принципы невязки и сглаживающего функционала.

Для решения некорректных задач В.К. Иванов в работе [21] излагает метод квазирешений. Большое применение для регуляризации некорректных задач имеет также и метод невязки, предложенный Д.Л. Филлипсом (D.L. Phillips) [132] и В.К. Ивановым [23].

Особое место среди методов решения некорректных задач занимают итерационные методы. Еще в 30-е годы в работах Т. Карлемана (T. Carleman) [125], Г.М. Голузина и В.И. Крылова [15], И.Г. Малкина [44] были предложены первые методы приближений, дающие в пределе точные решения уравнения (1), если данные, т. е. оператор A и правая часть y заданы точно. Для решения задачи Коши для уравнения Лапласа с точными данными итерационный метод изложен в работе Б.А. Андреева [1]. В общем виде итеративный метод сформулирован А.К. Маловичко [45]. Однако в этих работах отсутствует необходимое исследование влияния погрешностей данных, которое весьма важно для решения некорректных задач. В работе [35] М.М. Лаврентьев обосновал сходимость метода последовательных приближений при приближенной правой части линейных уравнений и распространил полученные результаты на случай нелинейных уравнений. При других предположениях метод последовательных приближений был исследован Ю.Т. Антохиным [2; 3]. Изучению итерационных методов посвящены работы

В.Н. Страхова [115–117], М.А. Красносельского, Г.М. Вайникко, П.П. Забрейко, Я.Б. Рутицкого и В.Я. Стеценко [31]. Различные схемы итерационных методов, предложенные А.С. Апарциным [4], В.К. Ивановым [22; 23], А.С. Кряневым [34], М.М. Лаврентьевым [35], В. Липфертом (W. Lipfert) [130], А.Б. Бакушинским и А.В. Гончарским [5, 8], Г.В. Гроэтчем (G.W. Groetsch) [127], В.А. Морозовым [87], В.В. Васиным [13], С.М. Оганесяном и В.Ч. Старостенко [90], Л.Э. Сарвом [113], Г.В. Хромовой [123], Х. Бялым (H. Bialy) [124], С.Ф. Гильязовым и Н.Л. Гольдманом (S. F. Gilyazov and N.L. Gol'dman) [126], К.Р. Вогелем (C.R. Vogel) [133], применялись для решения многих некорректных задач в гильбертовых пространствах. Для решения некорректных задач в банаховых пространствах применялись методы итераций, предложенные в работах А.Б. Бакушинского и В.Н. Страхова [6; 7]. Метод простых итераций при приближенно заданных правой части и операторе изучался в работах О.А. Лисковца и Я.В. Константиновой [28; 29]. Различные схемы явных и неявных итерационных методов с априорным выбором числа итераций предложены в работах О.А. Лисковца и В.Ф. Савчука [36–39]. В некоторых из этих работ рассматриваются случай приближенно заданных операторов и случай неединственности решения.

Большинство перечисленных работ посвящено априорному выбору числа итераций. Это означает следующее. В предположении, что точное решение уравнения (1) истокообразно представимо, т.е. $x = A^s z,\ s > 0,$ находилась оценка погрешности метода, которая затем оптимизировалась по n, т.е. вычислялось значение итераций $n_{\text{опт}}$, при котором оценка погрешности являлась минимальной.

Однако поскольку не всегда имеются сведения об истокопредставимости точного решения, то трудно разумным образом определить число итераций $n_{\text{опт}}$. Тем не менее, итерационные методы решения некорректных задач можно сделать вполне эффективными, если воспользоваться правилами останова по невязке и по соседним приближениям. Апостериорный выбор числа итераций для метода простых итераций впервые был предложен И.В. Емелиным и М.А. Красносельским [19–20]. Дальнейшее развитие идеи работы [20] получили в работах Г.М. Вайникко [9–11], Г.М. Вайникко и А.Ю. Веретенникова [12].

В.Ф. Савчук [91–103] продолжил исследования в этом направлении. Им предложено несколько новых итерационных методов решения некорректных задач в гильбертовом пространстве с ограниченным и неограниченным, самосопряженным и несамосопряженным операторами. Обоснована возможность применения правил останова по невязке и по соседним приближениям для различных схем методов итераций, явных и неявных, которые превращают предложенные итерационные методы в регуляризующие алгоритмы для задачи (1), не требуя при этом знания истокопредставимости точного решения, но в случае истокопредставимости обеспечивают оптимальную в классе скорость сходимости.

В монографии продолжено изучение явных и неявных итерационных методов. Предложены и изучены четыре явных и два неявных итерационных метода решения некорректных задач в гильбертовом пространстве. Для них исследован априорный выбор числа итераций при точной и приближенной правой части уравнения: доказана сходимость предложенных методов в исходной норме гильбертова пространства, получены априорные оценки погрешности, вычислительная погрешность. Исследован случай неединственного решения и показано, что в этом случае имеет место сходимость методов к решению с минимальной нормой. Использование энергетической нормы для исследования сходимости методов позволило получить априорные оценки погрешности и априорный момент останова итераций без дополнительного требования на гладкость решения – его истокообразной представимости. Была обоснована возможность применения к итерационным методам правил останова по невязке и по соседним приближениям, что сделало эти методы эффективными и тогда, когда нет сведений об истокопредставимости точного решения. Проведено сравнение предложенных явных методов с широко известным явным методом простой итерации. Показано, что для достижения оптимальной точности зачастую изучаемыми методами требуется выполнить в несколько раз меньше итераций, чем методом простой итерации, хотя по мажорантным оценкам погрешности все методы имеют один и тот же порядок и незначительно отличаются в ту или другую сторону только коэффициентами пропорциональности. Проведено сравнение неявных методов между собой и с явными методами. Показано преимущество неявных методов итераций по сравнению с явными: за счёт выбора итерационного параметра оптимальную оценку погрешности неявными методами можно получить уже на первом шаге итераций, что невозможно для явных методов.

При решении предложенными методами модельных некорректных задач нашли подтверждение выводы о преимуществах методов по сравнению с наиболее изученным явным методом простой итерации, т. е. подтвердилось то, что для достижения оптимальной точности предложенными в книге методами требуется в несколько раз меньше итераций, чем методом простой итерации.

Рассмотренные в монографии итерационные методы могут быть использованы для решения задач, встречающихся в геологоразведке, сейсмике, спектроскопии, гравиметрии, теории потенциала, синтезе антенн, акустике, автоматической обработке результатов физического эксперимента, экономике.

ГЛАВА I

Аналитический обзор литературы.
Объект, предмет и методы исследования

1.1 Теория итерационных методов решения некорректно поставленных задач и основные этапы её развития

В последние десятилетия математическая наука обогатилась важным разделом − теорией некорректно поставленных задач и методов их приближенного решения. Развитие этого раздела математики вызвано многочисленными приложениями в технике, физике, экономике и других естественных науках.

Потребности практики приводят к необходимости решения подобных задач, которые во многих случаях описываются операторными уравнениями I рода. В настоящее время теория некорректных задач успешно применяется для решения широкого круга обратных задач оптики и спектроскопии, электродинамики, радиоастрономии, диагностики плазмы, геофизики, теории потенциала и гравиметрии. Для их решения широко используются итерационные схемы, позволяющие при обработке экспериментальной информации существенно повысить точность определения характеристик изучаемых физических явлений. Поэтому огромное значение имеют разработка и изучение новых итерационных методов решения некорректных задач, получение условий их сходимости, нахождение оценок погрешности и обоснование применения к методам правил останова в процессе вычислений. Изложим некоторые факты из истории развития теории итерационных методов решения некорректных задач.

Лаврентьев М.М. в работе [35] для операторного уравнения I рода $Au = f$, где A – линейный вполне непрерывный оператор, $A = A^* > 0$, $\|A\| \le 1$ и $0 \in S_A$ (S_A – спектр оператора A) при приближённой правой части f_δ: $\|f - f_\delta\| \le \delta$ рассмотрел применение следующей явной итеративной схемы:

$$u_n = u_{n-1} - \left(Au_{n-1} - f_\delta\right), \ u_0 = f_\delta .$$

Доказана сходимость предложенного итеративного метода к точному решению уравнения $\bar{u}$ при специальном выборе $n = n(\delta)$(при согласовании с погрешностью δ), т. е. что $u_n \to \bar{u}$, когда $\delta \to 0, n \to \infty$. Получена оценка погрешности метода: $\|u_n - \bar{u}\| \le \omega\left(\dfrac{1}{n+2}\right) + n\delta$. Здесь (см. [35]) $\omega = \omega(n)$. Автором была обоснована сходимость предложенного метода последовательных приближений для некоторых классов нелинейных операторных уравнений.

При других предположениях метод простой итерации был исследован *Антохиным Ю.Т.* [2]. Здесь рассматривается уравнение $Ax = f$ в гильбертовом пространстве, $A = A^*$ – линейный, неограниченный оператор со всюду плотной областью определения $D(A)$. Для оператора нуль служит точкой его же спектра, но в то же время не является собственным значением, т. е. существует последовательность $\{x_n\}$ такая, что $\|x_n\| = 1$, $\|Ax_n\| \to 0, n \to \infty$ и $Ax_n \ne 0$ при $x \ne 0$. В дальнейшем предполагается, что решение уравнения существует. Предложенная здесь схема явного метода последовательных приближений выглядит так:

$$x_1 = f, \ x_n = \left(E - \frac{1}{n}A\right)x_{n-1} + \frac{1}{n}f .$$

Для данного метода при условии, что оператор $A = A^* > 0$, доказана сходимость $\|R_n\|^2 = \|x - x_n\|^2 \to 0,\ n \to \infty$ и также ещё получена оценка погрешности

$$\|R_n\|^2 = \int_0^{\|A\|} |r_n(\lambda)|^2 \, d\left(E_\lambda x, x\right) \le \int_0^{\varepsilon} d\left(E_\lambda x, x\right) + \left(\frac{K_1^2}{n^{2\varepsilon}} + \frac{1}{(n!)^2}\right) K^2,$$

где $K_1 \ne K_1(n)$, $K \ne K(n)$ и $\forall\, \varepsilon \in (0,1)$: $|r_n| \le 1$ при $0 \le \lambda \le \varepsilon$; $|r_n| \le K_1(\varepsilon)/n^{\varepsilon}$ при $\varepsilon \le \lambda \le n + 1 - \varepsilon$; $|r_n| \le \lambda^n/n!$ при $n < \lambda$, в предположении, что $f \in D\left(A^n\right)$, $n = 1,2,\ldots$, причём $\left\|A^n f\right\| \le K$ и $\|x\| \le K$.

Апарциным А.С. [4] в гильбертовом пространстве H решается уравнение I рода $A\varphi = f$ с положительным самосопряжённым вполне непрерывным оператором A. Предполагается, что уравнение разрешимо. Пусть $\bar{\varphi}$ – нормальное решение, т. е. решение с минимальной нормой (случай неединственного решения рассматриваемого операторного уравнения). Хорошо известно, что задача нахождения $\bar{\varphi}$ некорректна. В настоящей работе рассматривается явная итерационная процедура вида

$$\varphi_{n+1,\alpha_{n+1}} = \left[(1 - \mu\alpha_n)E - \mu A\right]\varphi_{n,\alpha_n} + \mu f,\ \varphi_{0,\alpha_0} = \mu f,$$

которая является дискретным аналогом линейного дифференциального уравнения $\dfrac{dW(t)}{dt} + \left[\alpha(t)E + A\right]W(t) = f$, где $W(t_0) = W_0 \in H$, $\alpha(t)$ – положительная монотонно убывающая функция при $t \ge t_0$ и $\lim\limits_{t \to \infty} \alpha(t) = 0$. Рассмотрена сходимость метода и доказана

Теорема 1.1. *Пусть последовательность неотрицательных чисел* α_n *такова, что* $\lim\limits_{n\to\infty} \alpha_n = 0$, *и* $0 < \mu < \dfrac{2}{\alpha_n + \|A\|}$, $n = 0,1,2,\ldots$ ($A: H \to H$). *Тогда выполняется* $\lim\limits_{n\to\infty} \left\| \overline{\varphi} - \varphi_{n+1,\alpha_{n+1}} \right\|_H = 0$.

Также доказана сходимость предложенной процедуры при приближенной правой части уравнения ($\|f - f_n\| \le \delta_n$), и когда оператор A заменяют некоторым более удобным для вычислений “приближенным оператором” (если A – интегральный оператор, то его заменяют квадратурной формулой).

Крянев А.В. [34] решает линейное уравнение $Ax = y$, где $A: H \to H$ – ограниченный, самосопряжённый, линейный и неотрицательный оператор. Если A – вполне непрерывный, то $A(H) \ne H$ (задача некорректна, так как не для всех $y \in H$ разрешима). Рассмотрен случай неединственного решения данного уравнения.

Вводится $B: H \to H$ – ограниченный, самосопряжённый, линейный и положительно определённый оператор, для которого $M_B = \sup\limits_{\|x\|=1}(Bx, x)$, $m_B = \inf\limits_{\|x\|=1}(Bx, x) > 0$ и $M_A = \sup\limits_{\|x\|=1}(Ax, x)$. При сделанных предположениях определён оператор $C = (A + B)^{-1} B$, спектральный радиус которого, очевидно, равен 1. Для решения линейного уравнения автор предлагает неявный итерационный процесс $Ax_n + Bx_n = Bx_{n-1} + f$, который можно переписать в эквивалентной форме:

$$x_n = Cx_{n-1} + (A + B)^{-1} f.$$

Доказана сходимость метода при точной и приближенной правой части уравнения.

Рассмотрен случай суммарных возмущений оператора и правой части уравнения: ΔA и Δf , получена оценка погрешности

$$\|x-x_n\| \le M_0(n)+\delta\frac{q^n-1}{(q-1)m_B}\left[MqN_0+\frac{MN}{m_B}+1+O(\delta)\right],$$

где $\|C\|=q,\ \ \|\Delta A\|\le M\delta,\ \ \|\Delta f\|\le\delta,\ \ \|f\|\le N,\ \ 0\le M_0(n)\to 0$ при $n\to\infty$ и $0\le O(\delta)\le C_0\delta\ \ (C_0\ge 0,\ C_0\ne C_0(\delta)),\ \left\|(A+B)^{-1}\Delta A\right\|<1$.

Автором решён следующий *численный пример*. Ищется решение интегрального уравнения Фредгольма I рода

$$\int_{-3}^{3}K(t-s)x(s)ds=f(t),\quad |t|\le 3,\quad \text{где}\ K(z)=\begin{cases}1+\cos(\pi z/3),|z|\le 3,\\ 0,|z|>3.\end{cases}$$

Бралась такая функция $f(t)$, которой соответствует решение $x(t) = K(t)$. Интеграл заменялся квадратурной формулой по правилу Симпсона (число точек разбиения $m=29$). В качестве матрицы B бралась трехдиагональная (формата 29×29) – матрица (b_{ij}): $b_{ii}=2,\ i=\overline{1,29},\quad b_{i,i-1}=b_{i-1,i}=-1,\ i=\overline{2,29}$. Сначала рассматривается итерационная схема $Ax_n+\varepsilon Bx_n=\varepsilon Bx_{n-1}+f,\ \varepsilon>0$, где $A+\varepsilon B-$ положительно определенная симметричная матрица формата $m\times m$ (A, B – положительно определенные симметричные матрицы формата $m\times m$, но A – плохо обусловленная), которая при достаточно больших $\varepsilon>0$ хорошо обусловленная. Представляется $A+\varepsilon B=C^TC$, где C – верхняя треугольная матрица, и предложенная схема заменяется более удобной

$$C^TCx_n=\varepsilon Bx_{n-1}+f,\ \varepsilon>0,$$

которой и решается рассмотренный численный пример.

Фридман В.М. в статье [122] для решения в гильбертовом пространстве уравнения I рода $Lx = Ax - y = 0$ с линейным ограниченным оператором A предлагает итерационный метод

$$x_{n+1} = x_n - \frac{\|Lx_n\|^2}{\|A^* Lx_n\|^2} A^* Lx_n .$$

С использованием интегрального представления оператора $A^* A$ рассмотрен случай неединственности решения уравнения (рассматриваемая задача некорректна) и доказана сходимость предлагаемого метода: $x_n \to Px_0 + u$, где $x_0 \in H$ – начальное приближение, u – единственное решение уравнения, P – оператор проектирования на подпространство нулей оператора A.

Страховым В.Н. [115] в гильбертовом пространстве H решается уравнение I рода $f = (E - T)\varphi$, где оператор $T = T^* \geq 0$ и $\|T\| = 1$, $1 \in S_T$, $f \in R(E - T)$. Для решения уравнения предлагается итерационная схема

$$\varphi_n = T\varphi_{n-1} + f ,$$

из которого следует $\varphi - \varphi_n = T^n(\varphi - \varphi_0)$. С помощью интегрального представления положительного самосопряжённого оператора T получено: $\|\varphi - \varphi_n\|^2 = \int\limits_0^1 \mu^{2n} \, d\left(E_\mu(\varphi - \varphi_0), \varphi - \varphi_0\right)$. Доказана сходимость метода, и для получения оценки погрешности $\left(\|\varphi - \varphi_n\| = O\left(\frac{1}{n^x}\right)\right)$ использовалось предположение об истокопредставимости точного решения, т. е. что $\varphi \in R\left((E - T)^x\right)$, $x > 0$.

В работе [117] *Страхов В.Н.* решает операторное уравнение I рода $A\varphi = f$ $\left(\left\|A^{-1}\right\| = +\infty\right)$ методом

$$\varphi_0 = f_0,\ \varphi_n = (E - A)\varphi_{n-1} + f\ ,$$

потребовав $\|E - A\| = 1$. Автором используется начальное приближение: $\varphi_0 = f_0$, где f_0 – произвольная функция из гильбертова пространства $H = L_2(-\infty, +\infty)$. В работе доказана сходимость метода: $\|\varphi_n - \varphi\| = \left\|(E - A)^n(\varphi_0 - \varphi)\right\| \to 0,\ n \to \infty.$ Оценка погрешности метода не получена.

Наиболее подробно априорный выбор числа итераций для метода простой итерации

$$x_{n+1,\delta} = x_{n,\delta} + \alpha(y_\delta - Ax_{n,\delta}),\ x_{0,\delta} = 0 \qquad (1.1)$$

изучен *Лисковцом О.А.*, *Константиновой Я.В.* [28]. Здесь авторами показано, что метод простой итерации сходится к точному решению уравнения $Ax = y_\delta$ ($A: H \to H$ – положительный ограниченный самосопряжённый оператор) при условии $0 < \alpha < \frac{2}{\|A\|}$, если ограничиться числом итераций $n = n(\delta)$, зависящим от δ так, чтобы $n(\delta)\delta \to 0$ при $n \to \infty$, $\delta \to 0$. Приусловии $0 < \alpha \le \frac{5}{4\|A\|}$ и в предположении, что точное решение истоко-представимо, т. е. $x = A^s z,\ s > 0$, получена справедливая при всех $n \ge 1$ оценка погрешности $\|x - x_{n,\delta}\| \le s^s(n\alpha e)^{-s}\|z\| + n\alpha\delta.$ Полученная оценка оптимизирована по n. Для этого при заданном δ найдено такое значение числа итераций n, при котором оценка погрешности становится минимальной. Оптимальная оценка погрешности для метода итераций (1.1) имеет вид $\left\|x - x_{n,\delta}\right\|_{\text{опт}} \le (s+1)e^{-\frac{s}{s+1}}\delta^{\frac{s}{s+1}}\|z\|^{\frac{1}{s+1}}$ и получается при $n_{\text{опт}} = s\alpha^{-1}e^{-\frac{s}{s+1}}\delta^{-\frac{1}{s+1}}\|z\|^{\frac{1}{s+1}}$. Очевидно, для уменьшения $n_{\text{опт}}$ (здесь и далее $n_{\text{опт}}$ есть целое число) и, значит, числа итераций для получения решения x уравнения следует выбирать параметр α возможно большим из условия $0 < \alpha \le \frac{5}{4\|A\|}$. Также для итерационной процедуры получена погрешность в счете и изучен случай приближенно заданного оператора A_h : $\|A_h - A\| \le h$. С учетом погрешности в операторе получена оценка погрешности итерационного метода

$$\left\|x - y_{n,\delta}\right\| \le s^s (n\alpha e)^{-s}\|z\| + n\alpha\delta + \left((1+\alpha h)^n - n\alpha h - 1\right)h^{-1}\|y_\delta\|,$$

принимающая оптимальный для задач этого класса порядок

$$\left\|y_{n,\delta} - x\right\| = O\left((\delta + h)^{s/(s+1)}\right), \text{ если } n \underset{\cap}{\overset{\cup}{}} (\delta + h)^{-1/(s+1)}.$$

В [124] *Bialy H.* решает уравнение I рода $Ax = y$, где $H -$полное, сепарабельное гильбертово пространство, $A : H \to H -$линейный ограниченный положительный оператор, нуль является его собственным значением (решение уравнения не единственно). Для решения рассматриваемого уравнения используется итеративная схема

$$x_n = x_{n-1} + \tau\left(y - Ax_{n-1}\right),\ x_0 \in H,\ 0 < \tau < \frac{2}{\|A\|}.$$

Доказана сходимость метода в случае неединственного решения. Показано, что в этом случае метод сходится к решению с минимальной нормой. Автором рассматриваются обобщения метода простой итерации:

$$x_n = x_{n-1} + T(y - Ax_{n-1}),\ x_0 \in H,\ T: H \to H,\ T = \tau A^*\ ,\ 0 < \tau < \frac{2}{\|A\|^2}\ ;$$

и в случае, когда $A -$эрмитов оператор $\left(A \neq \varnothing,\ A = A^* \text{ и } \forall x \in H\ (Ax, x) \geq 0\right)$,

$$x_n = x_{n-1} + (-1)^{n-1}\tau(y - Ax_{n-1}),\ x_0 \in H,\ 0 < \tau < \frac{\sqrt{2}}{\|A\|}.$$

Для всех приведенных схем автор доказывает сходимость в случае неединственного решения.

Впервые *Савчуком В.Ф.* и *Лисковцом О.А.* [37] при условии $0 < \alpha < 2\|A\|^{-1}$ доказана сходимость метода простой итерации (1.1) в энергетической норме гильбертова пространства: $\|x\|_A = \sqrt{(Ax, x)}$, где $x \in H$. Для получения оценок погрешности не потребовалось сведений об истокопредставимости точного решения. Переход к энергетической норме как бы заменяет предположение об истокопредставимости порядка $s = 1/2$ для точного решения.

Справедлива

Теорема 1.2. *Итерационный процесс* (1.1) *при условии* $0 < \alpha \leq \frac{5}{4\|A\|}$ *сходится в энергетической норме пространства H, если выбирать число итераций* n *из условия* $\sqrt{n}\delta \to 0,\ n \to \infty,\ \delta \to 0.$ *Для процесса* (1.1) *справедлива оценка погрешности* $\|x - x_{n,\delta}\|_A \leq (2n\alpha e)^{-1/2}\|x\| + [(35/54)n\alpha]^{1/2}\delta,\quad n \geq 2.$

Полученная оценка оптимизирована по n и найдено $n_{\text{опт}}$:

$$\|x - x_{n,\delta}\|_A^{\text{опт}} \leq (35/27)^{1/4}(2\delta\|x\|)^{1/2}e^{-1/4},$$

$$n_{\text{опт}} = (35/27)^{-1/2}\alpha^{-1}e^{-1/2}\delta^{-1}\|x\|.$$

Работа *Лисковца О.А.*, *Константиновой Я.В.* [29] посвящена решению в гильбертовом пространстве H уравнения $Ax = y$ с положительным ограниченным самосопряжённым оператором A. $0 \in S_A$, но нуль не является собственным значением оператора. Предполагается существование единственного решения уравнения. Для его отыскания строится градиентный метод итерации с переменным шагом

$$x_{n+1} = x_n - \alpha_{n+1}(Ax_n - y),\ x_0 = 0.$$

При условиях

$$0 < \alpha_i < \frac{2}{\|A\|}\ ,\ \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n = \infty \tag{1.2}$$

доказана сходимость предложенного метода при точной правой части уравнения. В случае, когда правая часть уравнения известна приближенно $y_\delta : \|y - y_\delta\| \le \delta$, метод сходится при условиях (1.2) и если $(\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n)\delta \to 0,\ n \to \infty,\ \delta \to 0$. В предположении, что точное решение x истокопредставимо и при условии $0 < \alpha_i \le \frac{r(c_i)}{\|A\|}$ (где $r(c)$ – единственный корень уравнения $r = 1 + \left(\frac{c}{er}\right)^c,\ c > 0$) получена общая оценка погрешности в случае приближенно заданного оператора ($\|A - A_h\| \le h$) :

$$\|x - y_{n,\delta}\| \le s^s (\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n)^{-s} e^{-s} \|z\| + (\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n)\delta +$$
$$+ ((1 + \alpha_1 h)(1 + \alpha_2 h) \cdot \ldots \cdot (1 + \alpha_n h) - (\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n)h - 1)h^{-1} \|y_\delta\|.$$

В статье [30] *Константиновой Я.В.* строится регуляризующий алгоритм в виде неявного итерационного процесса

$$x_{n+1,\delta}=x_{n,\delta}-\alpha(Ax_{n+1,\delta}-y_\delta),\ \alpha>0,\ x_{0,\delta}=0.$$

в случае, когда правая часть уравнения $Ax=y_\delta$ задана приближённо. Здесь доказывается сходимость предложенного метода, но не получена эффективная оценка погрешности.

В [33] целая глава (автор *Лисковец О.А.*) посвящена некорректным задачам и методам их решений. Здесь для решения операторного уравнения I рода $Ax=y_\delta$ предлагаются вариационные методы решения (метод квазирешений Иванова, метод тихоновской регуляризации, метод и принцип невязки Филлипса и Иванова), обобщенное суммирование рядов, конечноразностный метод и метод итераций. Даются определения корректности задачи по Адамару и по Тихонову, определения регуляризующего алгоритма рассматриваемой задачи, формулируются достаточные условия сходимости предлагаемых методов.

С помощью метода квазирешений, метода невязки, метода регуляризации и при $\alpha=9{,}6$ итерационного метода (1.1) в гильбертовом пространстве $L_2(0,1)$ решается модельная задача в виде уравнения $\int\limits_0^1 A(t,s)\ x(s)\,ds=y(t),\quad 0\le t\le 1$ с симметричным положительным ядром $A(t,s)=\begin{cases}t(1-s), 0\le t\le s\le 1,\\ s(1-t), 0\le s\le t\le 1,\end{cases}$ точной правой частью $y(t)=\dfrac{t(t-1)(t^2-t-1)}{12}$ и точным решением $x(t)=t(1-t)$. Оператор, описанный выше интегральным уравнением, непрерывен, взаимнооднозначен и аддитивен.

В статье [19] *Емелиным И.В., Красносельским М.А.* решается операторное уравнение $Ax=f$, где $A:H\to H-$ограниченный оператор. Известно, что $0\in S_A$, но не является собственным значением оператора. Предполагается, что $\|A\| \le 1$. Если уравнение разрешимо $\left(f \in R(A)\right)$, то применяется итерационный процесс

$$y_{n+1} = y_n - A^* A y_n + A^* \bar{f} + u_n, \tag{1.3}$$

где $\left\|f - \bar{f}\right\| \le \delta$, $\|u_n\| \le \beta$ (u_n – ошибки вычисления итераций). В статье для решения уравнения используется останов по поправке (по соседним приближениям)

$$\begin{cases} \|y_n - y_{n+1}\| > \varepsilon, (n < m), \\ \|y_m - y_{m+1}\| \le \varepsilon. \end{cases}$$

Здесь ε – заданное до начала вычислений положительное число (уровень останова). Доказана сходимость метода (1.4) и получена оценка для момента останова. Справедлива

Теорема 1.3. *Пусть уровень останова* $\varepsilon = \varepsilon(\delta, \beta)$ *выбирается как функция от оценок* δ *и* β *норм погрешностей* $\bar{f} - f$ и u_n. *Тогда справедливы следующие утверждения:*

а) если $\varepsilon(\delta, \beta) > 2\beta$, *то момент останова* m *определён при любом начальном приближении* $y_0 \in H$ *и любых* $\bar{f}$ *и* $\{u_n\}$, *удовлетворяющих условиям* $\left\|f - \bar{f}\right\| \le \delta$, $\|u_n\| \le \beta$;

б) если $\varepsilon(\delta, \beta) > \delta + 2\beta$, *то справедлива оценка*

$$m \le \frac{\left\|y_0 - x^*\right\|^2}{(\varepsilon - \delta - 2\beta)(\varepsilon - \delta)};$$

где x^* – *точное решение уравнения* $Ax = f$;

в) если $\varepsilon(\delta, \beta) \to 0$, $\delta, \beta \to 0$ *и при этом* $\varepsilon(\delta, \beta) \ge c(\delta + \beta^p)$, *где* $c > 1$, $p \in (0, 1)$, *то справедливо равенство* $\lim\limits_{\delta, \beta \to 0} \left\|y_m - x^*\right\| = 0.$

Этими же авторами [20] при решении линейного уравнения $Ax = f + u$, где $A: H \to H$ – ограниченный оператор, $\|A\| \le 1$, $0 \in S_A$ и $\|u\| \le \delta$ для итерационного метода

$$y_{n+1} = y_n - A^* A y_n + A^* f + A^* u \tag{1.4}$$

обосновывается применение останова по невязке

$$\|Ay_n - f - u\| > \varepsilon, \quad n < m, \quad \|Ay_m - f - u\| \le \varepsilon.$$

Предполагается, что $\|Ay_0 - f - u\| > \varepsilon$. Справедливы

Теорема 1.4. *Пусть уровень останова* $\varepsilon = \varepsilon(\delta)$ *итерационной процедуры* (1.4) *определяется по числу* δ, *удовлетворяет неравенству* $\varepsilon(\delta) > \delta$ *и стремится к нулю при* $\delta \to 0$. *Тогда справедливо равенство*

$$\lim_{\delta \to 0} \sup_{\|u\| \le \delta} \left\| y_m - x_* \right\| = 0,$$

где x_* *– точное решение уравнения,* $y_m = y_m(\varepsilon, u, y_0)$ *– приближённое решение, полученное процедурой* (1.4) *с уровнем останова* ε.

Теорема 1.5. *Пусть* $\varepsilon(\delta)$ *процесса* (1.4) *удовлетворяет неравенству* $\varepsilon(\delta) > \delta$ *и пусть* $y_0 - x_* = (A^* A)^p v$, *где* $0 < p \le 1/2$. *Тогда справедлива оценка*

$$\left\| y_m - x_* \right\| < [\delta + \varepsilon(\delta)]^{2p/(1+2p)} \|v\|^{1/(1+2p)} + \delta. \tag{1.5}$$

При $p > 1/2$ *из* (1.5) *вытекает оценка*

$$\left\| y_m - x_* \right\| \le [\delta + \varepsilon(\delta)]^{1/2} \left\| (A^* A)^{p-1/2} v \right\|^{1/2} + \delta.$$

Теорема 1.4 показывает, что метод (1.4) с правилом останова по невязке может трактоваться как метод регуляризации в смысле Тихонова.

Вайникко Г.М., Веретенников А.Ю. в монографии [12] для решения операторного уравнения $Au = f$, где $A \in L(H_1, H_2)$ (в самосопряжённом случае $H_1 = H_2$, $A = A^* \geq 0, \|A\| \leq M$) используют явную и неявную итерационные схемы:

$$u_n = u_{n-1} - \mu(Au_{n-1} - f),\ 0 < \mu < \frac{2}{\|A\|},$$

$$\alpha u_n + Au_n = \alpha u_{n-1} + f,\ \alpha = \text{const} > 0,$$

которые в случае несамосопряжённого оператора и приближённой правой части уравнения $f_\delta : \|f - f_\delta\| \leq \delta$ запишутся

$$u_{n,\delta} = u_{n-1,\delta} - \mu A^*(Au_{n-1,\delta} - f_\delta),\ 0 < \mu < \frac{2}{\|A\|^2},$$

$$\alpha u_{n,\delta} + A^* Au_{n,\delta} = \alpha u_{n-1,\delta} + A^* f_\delta,\ \alpha = \text{const} > 0.$$

Авторами подчеркивается, что в итеративных методах решение операторных уравнений, описывающих некорректные задачи, с приближенной правой частью $f_\delta : \|f - f_\delta\| \leq \delta$ в приближениях $u_{n,\delta}$ нельзя устремлять n к бесконечности (при $n \to \infty$ эти приближения, как правило, расходятся). Вместо этого следует указать такое согласование $n = n(\delta)$ числа итераций n с уровнем погрешности δ правой части, чтобы при $\delta \to 0$ соответствующие приближения $u_{n,\delta}$ стремились к точному решению уравнения. Это согласование желательно провести так, чтобы получить оптимальные по порядку, а при возможности оптимальные по точности методы. В [12] используются два основных способа выбора (согласования с δ) параметра регуляризации – априорный и апостериорный. В итерационных методах параметром регуляризации является номер итерации. Априорный выбор n возможен, если известен класс решений (например, класс истокопредставимых решений), которому решение при данном $f \in R(A)$ принадлежит. Поскольку такая информация обычно недоступна или неточна, то априорный выбор *n* имеет в основном теоретическое значение: он позволяет выявлять принципиальные возможности метода. Более практичен апостериорный выбор по невязке (или по поправке [19]): выбирается то значение *n*, при котором норма невязки $\|Au_{n,\delta} - f_\delta\|$ будет достаточно малой. Подобное согласование *n* с δ принято называть принципом невязки. Оказывается [12], что при выборе *n* по принципу невязки получаются оптимальные по порядку методы на классах истокопредставимых решений и некоторых других классах, при этом сам выбор *n* не использует информацию об истокопредставимости и вообще какую-либо другую информацию, кроме оценки $\|f - f_\delta\| \le \delta$.

В работе [12] исследуется априорный выбор числа итераций с приближенной правой частью уравнения. Для явного метода итераций доказана сходимость при $n\delta \to 0$, $n \to \infty$, $\delta \to 0$ и в предположении истоко-представимости точного решения уравнения $u_0 - u_* = \left(A^* A\right)^{p/2} v$, $p > 0$, $\|v\| \le \rho$ для них получены оценки погрешности. Также авторами рассматривается апостериорный выбор параметра регуляризации, с этой целью обосновывается применение к явному методу итераций следующих правил останова:

Правило останова (П. 1). *Зададим* $b_1 > 1$ *и* $b_2 \ge b_1$. *Если* $\|Au_0 - f_\delta\| \le b_2\delta$, *то положим* $n = 0$ *(т. е.* u_0 *– приближённое решение уравнения). В противном случае выберем такое* $n > 0$, *для которого* $b_1\delta \le \|Au_{n,\delta} - f_\delta\| \le b_2\delta$.

Правило останова (П. 2). *Зададим* $b > 1$ *и* $\theta \in (0,1)$. *Если* $\|Au_0 - f_\delta\| \le b\delta$, *то положим* $n = 0$. *В противном случае выберем* *любое такое* $n>0$, *что* $\|Au_{n,\delta}-f_\delta\|\le b\delta$, $\|Au_{n',\delta}-f_\delta\|>b\delta$ *для некоторого* $n'\in[\theta n,n]$.

Кроме того, в работе рассматривается случай, когда не только правая часть, но и оператор в линейном уравнении считаются известными приближенно: вместо $f\in R(A)$ и $A\in L(H_1,H_2)$ даны некоторые их приближения $f_\delta\in H_2$, и $A_\eta\in L(H_1,H_2)$, $\|f_\delta-f\|\le\delta$, $\|A_\eta-A\|\le\eta$. В этом случае при условии $n(\delta,\eta)\to\infty$, $(\delta+\eta)n(\delta,\eta)\to 0$, при $\delta,\eta\to 0$ доказана сходимость явного метода к точному решению уравнения. При условии истокообразной представимости начальной погрешности: $u_0-u_*=|A|^p v$, $p>0$, $\|v\|\le\rho$ получены оптимальные оценки погрешности методов $\|u_{n(\delta,\eta)}-u_*\|_{\text{опт}}\le C_{p,\rho,d}(\delta+\eta)^{p/(p+1)}$, $0<p\le p_0$ при выборе $n_{\text{опт}}=d(\delta+\eta)^{-1/(p+1)}$ $(d>0)$. Здесь же рассматривается и апостериорный выбор параметра регуляризации:

Правило останова (П. 3). *Зададим* $b_1>1$ *и* $b_2\ge b_1$. *Если* $\|A_\eta u_0-f_\delta\|\le\ \le b_2(\delta+\|u_*\|\eta)$, *то положим* $n=0$. *В противном случае выберем такое* $n>0$, *для которого* $b_1(\delta+\|u_*\|\eta)\le\|A_\eta u_{n(\delta,\eta)}-f_\delta\|\le b_2(\delta+\|u_*\|\eta)$.

Правило останова (П. 4). *Зададим* $b>1$ *и* $\theta\in(0,1)$. *Если при* $n=0$ $\|A_\eta u_{n(\delta,\eta)}-f_\delta\|\le b(\delta+\|u_*\|\eta)$ (*), *то положим* $n=0$, *иначе выберем любое такое* $n>0$, *при котором* (*) *выполнено, причем для некоторого* $n'\in[\theta n,n]$ $\|Au_{n'(\delta,\eta)}-f_\delta\|\ge b(\delta+\|u_*\|\eta)$.

В [12] рассматривается устойчивость предложенных итерационных методов приближений относительно малых возмущений типа погрешностей округления: помехоустойчивость итерационных методов (в некорректных задачах подобные возмущения безопасны лишь при не слишком большом количестве итераций). В этом случае в правой части предложенных итерационных схем появится слагаемое $\omega_n \in H,\ n \ge 1$ – малые в каком-то смысле возмущения и $\|\omega_n\| \le \varepsilon$. Тогда в случае, когда $A = A^* > 0,\ \ A_\eta = A_\eta{}^*,\ \ \|A_\eta - A\| \le \eta,\ \ \|A_\eta\| \le a,\ \ f \in R(A),\ \ \|f_\delta - f\| \le \delta,$ $\|\omega_n\| \le \varepsilon\ \ (0 < \varepsilon << \delta + \eta)$ и $u_0 - u_* = A^p v,\ p > 0,\ \|v\| \le \rho$ (и в случае несамосопряженной задачи тоже) получены оценки погрешности методов: $\|\tilde{u}_{n(\delta,\eta,\varepsilon)} - u_*\| \le C_{a,p,\rho}(\delta + \eta + \varepsilon)^{p/(p+1)},\ 0 < p < \infty$.

Здесь также рассмотрен случай нормально разрешимой задачи, т. е. задачи $Au = f$ с оператором $A \in L(H_1, H_2)$, имеющим замкнутую область значений $R(A) \subseteq H_2$. Изучен априорный и апостериорный выборы параметра регуляризации.

Кроме этого авторы рассматривают предложенную ими явную итерационную процедуру в некорректных задачах в условиях случайных ошибок: доказана сходимость методов по вероятности, сходимость методов в среднем квадратичном, обоснован статистический подход к выбору числа итераций.

Различные схемы явных и неявных итеративных методов с априорным выбором числа итераций предложены в работах *О.А. Лисковца* и *В.Ф. Савчука* [36–39, 42]. *В.Ф. Савчук* [26–27, 91–103] продолжил исследования в этом направлении. Им предложено несколько новых явных и неявных итеративных методов решения некорректных задач в гильбертовом пространстве с ограниченным и неограниченным, самосопряженным и несамосопряженным операторами. Для этих методов подробно рассмотрен априорный выбор числа итераций, доказана их сходимость, получены эффективные оценки погрешности. Для некоторых из предложенных итеративных схем обоснована возможность применения правил останова по невязке и по соседним приближениям, которые превращают эти методы в регуляризующие алгоритмы для задачи $Ax = y_\delta$, не требуя при этом знания истокопредставимости точного решения, но в случае истокопредставимости обеспечивают оптимальную в классе скорость сходимости.

1.2 Описание объекта, предмета и методов исследования

Объектом исследования в данной работе являются операторные некорректные уравнения первого рода в гильбертовом пространстве.

Предметом исследования являются явные и неявные итерационные схемы решения операторных некорректных уравнений первого рода в гильбертовом пространстве с положительным ограниченным самосопряженным и несамосопряженным оператором.

Разработанные в монографии итерационные методы могут быть использованы для решения прикладных некорректных задач, встречающихся в физике, технике и экономике.

В данной работе использованы следующие методы исследования:

- методы общей теории некорректно поставленных задач,
- методы математического анализа,
- методы функционального анализа,
- методы вычислительной математики.

ГЛАВА II

Явные итерационные методы решения некорректных задач

В настоящей главе предлагаются явные итерационные методы для решения операторных уравнений I рода. Даются достаточные условия сходимости таких методов, получены априорные оценки погрешности. Изучается сходимость некоторых методов в энергетической норме. Рассматривается случай неединственного решения. Обосновывается возможность применения правил останова по невязке и по соседним приближениям, что делает эти методы эффективными и тогда, когда нет сведений об истокообразной представимости точного решения. Проведено сравнение предложенных методов с методом простой итерации.

2.1 Метод итераций явного типа для решения операторных уравнений

2.1.1 Априорные оценки погрешности в методе итераций решения операторных уравнений

В действительном гильбертовом пространстве H решается уравнение I рода

$$Ax = y, \tag{2.1}$$

где A – ограниченный положительный самосопряженный оператор, для которого нуль не является собственным значением. Однако нуль принадлежит спектру оператора A и, следовательно, задача некорректна. Предположим, что при точной правой части y существует единственное решение x уравнения (2.1). Для отыскания решения уравнения (2.1) применим итерационный метод

$$x_{n+1} = \left(E - \alpha A^2\right)x_n + \alpha A y, \quad x_0 = 0. \tag{2.2}$$

В случае, когда правая часть уравнения (2.1) известна приближенно, $\|y - y_\delta\| \le \delta$, метод итераций явного типа (2.2) примет вид

$$x_{n+1,\delta} = \left(E - \alpha A^2\right)x_{n,\delta} + \alpha A y_\delta, \;\; x_{0,\delta} = 0. \tag{2.3}$$

Ниже, как обычно, под сходимостью метода (2.3) понимается утверждение о том, что приближения (2.3) сколь угодно близко подходят к точному решению уравнения (2.1) при подходящем выборе n и достаточно малых δ. Иными словами, метод (2.3) является сходящимся, если

$$\lim_{\delta \to 0}\left(\inf_n \|x - x_{n,\delta}\|\right) = 0 .$$

Рассмотрим сходимость метода (2.2) при точной правой части y операторного уравнения (2.1). Нетрудно показать по индукции, что $x_n = A^{-1}\left[E - \left(E - \alpha A^2\right)^n\right]y.$ Тогда $x - x_n = A^{-1}\left(E - \alpha A^2\right)^n y.$

Используя [25] интегральное представление самосопряжённого оператора $A = \int_0^M \lambda\, dE_\lambda$ ($M = \|A\|$, E_λ $-$соответствующая оператору A спектральная функция), получим $x - x_n = \int_0^M \lambda^{-1}\left(1 - \alpha\lambda^2\right)^n dE_\lambda y$. Для сходимости метода (2.2) потребуем, чтобы $\left|1 - \alpha\lambda^2\right| < 1, \;\; \lambda \in (0, M]$. Отсюда

$$0 < \alpha < \frac{2}{M^2}. \tag{2.4}$$

Разобьём выписанный интеграл на два интеграла

$$x - x_n = \int_0^{\varepsilon} \lambda^{-1}\left(1-\alpha\lambda^2\right)^n dE_\lambda y + \int_{\varepsilon}^{M} \lambda^{-1}\left(1-\alpha\lambda^2\right)^n dE_\lambda y.$$

При условии (2.4) $\left|1-\alpha\lambda^2\right| \le q < 1$ для $\lambda \in [\varepsilon, M]$, поэтому

$$\left\|\int_{\varepsilon}^{M} \lambda^{-1}\left(1-\alpha\lambda^2\right)^n dE_\lambda y\right\| \le q^n \left\|\int_{\varepsilon}^{M} \lambda^{-1} dE_\lambda y\right\| = q^n \left\|\int_{\varepsilon}^{M} dE_\lambda x\right\| \to 0,\ n \to \infty.$$

Для первого интеграла

$$\left\|\int_0^{\varepsilon} \lambda^{-1}\left(1-\alpha\lambda^2\right)^n dE_\lambda y\right\| \le \left\|\int_0^{\varepsilon} \lambda^{-1} dE_\lambda y\right\| = \left\|\int_0^{\varepsilon} dE_\lambda x\right\| = \left\|E_\varepsilon x\right\| \to 0,$$

так как E_ε сильно стремится к нулю при $\varepsilon \to 0$ [25, с. 302].

Таким образом, $\|x - x_n\| \to 0$, $n \to \infty$ и, значит, сходимость метода (2.2) к точному решению x для случая $x_0 = 0$ при условии (2.4) доказана, т.е. доказана

Теорема 2.1. *При условии* (2.4) *итерационный процесс* (2.2) *сходится в исходной норме гильбертова пространства*.

Скорость убывания к нулю $\|x - x_n\|$ неизвестна и может быть сколь угодно малой. Для ее оценки предположим, что решение x истокопредставимо, т.е. $x = A^s z$, $s > 0$. Следовательно, $y = A^{s+1} z$ и

$$x - x_n = \int_0^{M} \lambda^{-1}\left(1-\alpha\lambda^2\right)^n dE_\lambda y = \int_0^{M} \lambda^{s}\left(1-\alpha\lambda^2\right)^n dE_\lambda z.$$

Чтобы получить оценку для $\|x - x_n\|$, оценим максимум модуля подынтегральной функции $f(\lambda) = \lambda^s\left(1-\alpha\lambda^2\right)^n$. Для этого $f'(\lambda)$ приравняем к нулю

$$f'(\lambda) = \lambda^{s-1}(1-\alpha\lambda^2)^{n-1}[s - (2n+s)\alpha\lambda^2] = 0.$$

Отсюда видно, что производная обращается в нуль при равенстве нулю любого из трех сомножителей. Но при обращении в нуль первых двух $f(\lambda)$ тоже обращается в нуль. Поэтому остаётся $s-(2n+s)\alpha\lambda^2=0$, откуда $\lambda^*=\left[\frac{s}{(2n+s)\alpha}\right]^{\frac{1}{2}}$ – стационарная точка. Она является точкой локального максимума, так как

$$f''(\lambda^*)=-\left[\frac{s}{(2n+s)\alpha}\right]^s\left(\frac{2n}{2n+s}\right)^{n-1}2(2n+s)\alpha^2<0.$$

Оценим $f(\lambda^*)=\left|f(\lambda^*)\right|$:

$$f(\lambda^*)=\lambda^s(1-\alpha\lambda^2)^n\,|_{\lambda=\lambda^*}=s^{\frac{s}{2}}\alpha^{-\frac{s}{2}}(2n+s)^{-\frac{s}{2}}\left(\frac{2n}{2n+s}\right)^n=$$

$$=s^{\frac{s}{2}}\alpha^{-\frac{s}{2}}(2n)^{-\frac{s}{2}}\left(\frac{2n+s}{2n}\right)^{-n-\frac{s}{2}}=s^{\frac{s}{2}}\alpha^{-\frac{s}{2}}(2n)^{-\frac{s}{2}}\left[\left(1+\frac{s}{2n}\right)^{\frac{2n}{s}}\right]^{\frac{s}{2n}(-n-\frac{s}{2})}<$$

$$<s^{\frac{s}{2}}(2n\alpha e)^{-\frac{s}{2}}.$$

Покажем, что последнее значение не меньше максимального значения модуля $|f|$ для всех α, удовлетворяющих условию

$$0<\alpha\le\frac{5}{4M^2},\qquad (2.5)$$

более сильному, чем условие (2.4). Можно было бы считать, что $\alpha M^2\in(0{,}2-\varepsilon]$, но тогда последнее утверждение было бы верным лишь при достаточно больших *n*, а не для всех *n*.

Чтобы проверить доказываемое утверждение, исследуем поведение функции $f(\lambda)$ на концах отрезка $[0,M]$. Очевидно, $f(0)=0$, и максимума в точке $\lambda = 0$ быть не может. Проверим, что $|f(M)| < s^{\frac{s}{2}}(2n\alpha e)^{-\frac{s}{2}}$, т. е. $\left|M^s\left(1-\alpha M^2\right)^n\right| < s^{\frac{s}{2}}(2n\alpha e)^{-\frac{s}{2}}$.

При $\lambda < \alpha^{-\frac{1}{2}}$ функция $f(\lambda)$ имеет локальный максимум в точке λ^*.

Для $\lambda > \alpha^{-\frac{1}{2}}$ будет $f'(\lambda) > 0$ при чётных n и $f'(\lambda) < 0$ при нечётных n. Поэтому наибольшее значение $|f(\mathrm{M})|$ для $\lambda > \alpha^{-\frac{1}{2}}$ получим при $\lambda = M$. А значение $|f(M)| = \left|M^s\left(1-\alpha M^2\right)^n\right|$ тем больше, чем больше α, так как $\alpha M^2 > 1$. Поэтому достаточно вычислить $|f(\lambda)|$ при максимальном $\alpha = \frac{5}{4M^2}$. Нам нужно доказать $|f(M)| < s^{s/2}(2n\alpha e)^{-s/2}$ или $\left|\left(-\frac{1}{4}\right)^n\right| < (4s)^{s/2}(10ne)^{-s/2}$, т. е. $(4s)^{-s/2}(10ne)^{s/2} < 4^n$. Максимум выражения слева достигается при $s = \frac{10n}{4}$ и равен $e^{\frac{5n}{4}}$. Следовательно, должно выполняться неравенство $e^{\frac{5n}{4}} < 4^n$ или $e^5 < 4^4$ (последнее неравенство очевидно).

Таким образом, при α, удовлетворяющему условию (2.5), справедлива следующая оценка

$$\max_{\lambda\in[0,M]} |f(\lambda)| < s^{s/2}(2n\alpha e)^{-s/2}, \tag{2.6}$$

следовательно, $\|x - x_n\| < s^{s/2}(2n\alpha e)^{-s/2}\|z\|$.

Оценим $\|x_n - x_{n,\delta}\|$, где

$$x_n - x_{n,\delta} = \int_0^M \lambda^{-1}\left[1-\left(1-\alpha\lambda^2\right)^n\right] dE_\lambda\left(y - y_\delta\right).$$

Для этого оценим подынтегральную функцию (она положительна) $g_n(\lambda) = \lambda^{-1}\left[1-\left(1-\alpha\lambda^2\right)^n\right]$.

При $n=1$ $g_1(\lambda) = \alpha\lambda = \left(\alpha\lambda^2\right)^{\frac{1}{2}} \alpha^{\frac{1}{2}} \le \left(\frac{5}{4}\right)^{\frac{1}{2}} \alpha^{\frac{1}{2}}$.

При $n=2$ $g_2(\lambda) = 2\alpha\lambda - \alpha^2\lambda^3$. Приравняем к нулю производную от $g_2(\lambda)$, получим $g_2'(\lambda) = \left[2-3\alpha\lambda^2\right]\alpha = 0$, следовательно, $\lambda^* = \left[\frac{2}{3\alpha}\right]^{\frac{1}{2}}$ – стационарная точка функции $g_2(\lambda)$. Поскольку $g_2''\left(\lambda^*\right) = -6\alpha^2\lambda^* < 0$, то λ^* – точка максимума функции $g_2(\lambda)$ и $\max\limits_{\lambda\in[0,M]} g_2(\lambda) = g_2\left(\lambda^*\right) = \frac{4}{3}\alpha^{\frac{1}{2}}\left[\frac{2}{3}\right]^{\frac{1}{2}}$.

Очевидно, что $g_2\left(\lambda^*\right) \le 2\cdot 2^{\frac{1}{2}}\alpha^{\frac{1}{2}}$, так как

$$\frac{4}{3}\alpha^{\frac{1}{2}}\left[\frac{2}{3}\right]^{\frac{1}{2}} \le 2\cdot 2^{\frac{1}{2}}\alpha^{\frac{1}{2}}. \qquad (2.7)$$

Итак, при $n=2$ $g_2(\lambda) \le 2\cdot 2^{\frac{1}{2}}\alpha^{\frac{1}{2}}$.

Покажем по индукции, что при $n \ge 2$

$$g_n(\lambda) = \left|g_n(\lambda)\right| \le 2n^{\frac{1}{2}}\alpha^{\frac{1}{2}}. \qquad (2.8)$$

При $n=2$ неравенство (2.8) проверено выше. Предположим, что оно верно при $n=m$, т. е. $g_m(\lambda) \le 2m^{\frac{1}{2}}\alpha^{\frac{1}{2}}$ и рассмотрим

$$g_{m+1}(\lambda)=\lambda^{-1}\left[1-\left(1-\alpha\lambda^2\right)^{m+1}\right]=\lambda^{-1}\left[1-\left(1-\alpha\lambda^2\right)^{m}\right]+$$

$$+\lambda^{-1}\left[1-\left(1-\alpha\lambda^2\right)^{m+1}\right]-\lambda^{-1}\left[1-\left(1-\alpha\lambda^2\right)^{m}\right]\le 2m^{\frac{1}{2}}\alpha^{\frac{1}{2}}+\left(1-\alpha\lambda^2\right)^{m}\alpha\lambda .$$

Покажем, что

$$2m^{\frac{1}{2}}\alpha^{\frac{1}{2}}+\left(1-\alpha\lambda^2\right)^{m}\alpha\lambda\ \le 2(m+1)^{\frac{1}{2}}\alpha^{\frac{1}{2}}, \tag{2.9}$$

что равносильно неравенству $\left(1-\alpha\lambda^2\right)^{m}\alpha^{\frac{1}{2}}\lambda\ \le 2\left(\sqrt{m+1}-\sqrt{m}\right)$. Имеем

$$\sqrt{m+1}=\sqrt{m\left(1+\frac{1}{m}\right)}=\sqrt{m}\left\{1+\frac{1}{2m}+\frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)}{2!m^2}+\frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)\left(\frac{1}{2}-2\right)}{3!m^3}+\ldots+\right.$$

$$\left.+\frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)\ldots\left[\frac{1}{2}-(2p-2)\right]}{1\cdot2\cdot3\cdot\ldots\cdot(2p-1)m^{2p-1}}+\frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)\ldots\left[\frac{1}{2}-(2p-2)\right]\left[\frac{1}{2}-(2p-1)\right]}{1\cdot2\cdot3\cdot\ldots\cdot(2p-1)2pm^{2p}}+\ldots\right\}.$$

Покажем, что каждый положительный член ряда больше модуля сле-дующего за ним отрицательного члена, т.е.

$$\frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)\ldots\left[\frac{1}{2}-(2p-2)\right]}{1\cdot2\cdot3\cdot\ldots\cdot(2p-1)m^{2p-1}}>\left|\frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)\ldots\left[\frac{1}{2}-(2p-2)\right]\left[\frac{1}{2}-(2p-1)\right]}{1\cdot2\cdot3\cdot\ldots\cdot(2p-1)2pm^{2p}}\right|,$$

что равносильно $1>\dfrac{\left|\frac{1}{2}-(2p-1)\right|}{2pm}$ или $\dfrac{(2p-1)-\frac{1}{2}}{2pm}<1$, а это уже очевидно. Следовательно, $\sqrt{m+1}>\sqrt{m}\left(1+\dfrac{1}{2m}-\dfrac{1}{8m^2}\right)$.

Вернёмся к доказательству неравенства (2.9). Поскольку в силу (2.6) $\left(1-\alpha\lambda^2\right)^m\lambda < (2m\alpha e)^{-\frac{1}{2}}$, то вместо (2.9) докажем более сильное неравенство

$$(2m\alpha e)^{-\frac{1}{2}}\alpha^{\frac{1}{2}} \le 2m^{\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{2m}-\frac{1}{8m^2}\right). \qquad (2.10)$$

Преобразуем его:

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{2}} m^{-\frac{1}{2}} e^{-\frac{1}{2}} \le 2m^{\frac{1}{2}}\frac{1}{2m}\left(1-\frac{1}{4m}\right),$$

$$m^{-\frac{1}{2}} e^{-\frac{1}{2}} \le m^{-\frac{1}{2}}\left(1-\frac{1}{4m}\right), \quad 1 \le e^{\frac{1}{2}}\left(1-\frac{1}{4m}\right).$$

При $m \ge 2$, $1-\frac{1}{4m} \ge \frac{7}{8}$, следовательно, $e^{\frac{1}{2}}\left(1-\frac{1}{4m}\right) \ge \frac{7}{8}e^{\frac{1}{2}} > 1$.

Значит, неравенство (2.10) выполняется и, тем более, выполняется (2.9). Таким образом, для $n \ge 2$ при условии (2.5) справедлива оценка $g_n(\lambda) \le 2n^{\frac{1}{2}}\alpha^{\frac{1}{2}}$, ч т.д.

Для уточнения порядка оценки функции $g_n(\lambda)$ найдем её производную по λ и приравняем к нулю. Получим, что в стационарной точке $\left(1-\alpha\lambda^2\right)^{n-1}\left[1+(2n-1)\alpha\lambda^2\right]=1$.

Обозначим $a_n = \alpha\lambda^2$, тогда $(1-a_n)^{n-1}\left[1+(2n-1)a_n\right]=1$.

При условии (2.4) $|1-a_n| \le 1$. Чтобы последнее равенство выполнялось, нужно, чтобы $a_n \to 0$, $n \to \infty$.

$$(1-a_n)^{n-1} = \frac{1}{1+(2n-1)a_n}, \quad 1-(1-a_n)^n = \frac{2na_n}{1+(2n-1)a_n}.$$

Очевидно, $0 \le 1-(1-a_n)^n \le 2$, а $1+(2n-1)a_n$ ограничено снизу, поэтому, чтобы последнее равенство выполнялось, числитель должен быть ограничен, а это будет тогда, когда $a_n = \frac{b_n}{n}$, где $0 \le b_n \le B < \infty$. Тогда в стационарной точке

$$g_n(\lambda) = \frac{\left[1-(1-a_n)^n\right]\alpha^{\frac{1}{2}}}{a_n^{\frac{1}{2}}} = \frac{2na_n\alpha^{\frac{1}{2}}}{\left[1+(2n-1)a_n\right]a_n^{\frac{1}{2}}} = \frac{2b_n^{\frac{1}{2}}n^{\frac{1}{2}}\alpha^{\frac{1}{2}}}{1+(2n-1)\frac{b_n}{n}}.$$

Отсюда видно, что n должно входить в оценку максимума модуля в степени $\frac{1}{2}$, значит, порядок оценки для $|g_n(\lambda)|$ найден верно.

Таким образом, при условии (2.5) справедливы следующие оценки погрешности

$$\|x_n - x_{n,\delta}\| \le \left(\frac{5}{4}\right)^{\frac{1}{2}} 2n^{\frac{1}{2}}\alpha^{\frac{1}{2}}\delta,\ n \ge 1, \quad \|x_n - x_{n,\delta}\| \le 2n^{\frac{1}{2}}\alpha^{\frac{1}{2}}\delta,\ n \ge 2.$$

Поскольку $\|x - x_{n,\delta}\| \le \|x - x_n\| + \|x_n - x_{n,\delta}\| \le \|x - x_n\| + 2n^{\frac{1}{2}}\alpha^{\frac{1}{2}}\delta,\ n \ge 2$,

то для сходимости процесса (2.3) достаточно, чтобы $n^{\frac{1}{2}}\delta \to 0$, $n \to \infty$, $\delta \to 0$. Таким образом, если выбирать число итераций n, зависящих от δ так, чтобы $n^{\frac{1}{2}}\delta \to 0$, $n \to \infty$, $\delta \to 0$, то последовательность $x_{n,\delta}$ сходится к точному решению x.

Общая оценка погрешности метода (2.3) для истокопредставимого решения при условии (2.5) имеет вид

$$\|x - x_{n,\delta}\| \le s^{\frac{s}{2}}(2n\alpha e)^{-\frac{s}{2}}\|z\| + \left(\frac{5}{4}\right)^{\frac{1}{2}} 2n^{\frac{1}{2}}\alpha^{\frac{1}{2}}\delta,\ n \ge 1, \tag{2.11}$$

$$\left\| x - x_{n,\delta} \right\| \le s^{\frac{s}{2}} (2n\alpha e)^{-\frac{s}{2}} \| z \| + 2n^{\frac{1}{2}} \alpha^{\frac{1}{2}} \delta, \; n \ge 2. \qquad .12)$$

Итак, доказана

Теорема 2.2. *Итерационный процесс* (2.3) *при усл*овии (2.4) *сходится, если выбрать число итераций* n *из условия* $n^{\frac{1}{2}} \delta \to 0$, $n \to \infty$, $\delta \to 0$. *Для процесса* (2.3) *при условии* (2.5) *и* $x = A^s z$, $s > 0$, *справедливы оценки погрешности* (2.11) *и* (2.12).

Оптимизируем оценку (2.12). Для этого при заданном δ найдём такое $n_{\text{опт}}$, при котором оценка погрешности будет минимальной. Приравняв нулю производную по n от правой части неравенства (2.12), получим

$$n_{\text{опт}} = s^{\frac{s+2}{s+1}} 2^{-\frac{s+2}{s+1}} \alpha^{-1} e^{-\frac{s}{s+1}} \| z \|^{\frac{2}{s+1}} \delta^{-\frac{2}{s+1}}. \qquad (2.13)$$

Подставив $n_{\text{опт}}$ в оценку (2.12), получим

$$\left\| x - x_{n,\delta} \right\|_{\text{опт}} \le (1+s) \left(\frac{s}{2} \right)^{-\frac{s}{2(s+1)}} e^{-\frac{s}{2(s+1)}} \delta^{\frac{s}{s+1}} \| z \|^{\frac{1}{s+1}}, \; n \ge 2. \qquad (2.14)$$

Итак, доказана

Теорема 2.3. *При условии* (2.5) *и* $x = A^s z$, $s > 0$ *оптимальная оценка погрешности для итерационного процесса* (2.3) *имеет вид* (2.14) *и получается при* $n_{опт}$ *из* (2.13).

Замечание 2.1. *Оптимальная оценка* (2.14) *не зависит от* α, *но* $n_{опт}$ *зависит от него, поэтому для уменьшения* $n_{опт}$ *и, следовательно, объёма вычислительной работы следует брать* α *возможно большим, удовлетворяющим условию* $0 < \alpha \le \frac{5}{4M^2}$, *и так, чтобы* $n_{опт}$ *было целым*.

Рассмотрим погрешность метода (2.3) при счёте с округлениями. Пусть $x_{n+1,\delta}$ – точное значение, полученное по формуле

$$x_{n+1,\delta} = x_{n,\delta} + \alpha A(y_\delta - Ax_{n,\delta}),\ x_{0,\delta} = 0,$$

а z_{n+1} – значение с учётом вычислительной погрешности, т.е.

$$z_{n+1} = z_n + \alpha A(y_\delta - Az_n) + \alpha\gamma_n,\ z_0 = 0.$$

Обозначим $\varepsilon_n = z_n - x_{n,\delta}$, тогда $\varepsilon_{n+1} = \left(E - \alpha A^2\right)\varepsilon_n + \alpha\gamma_n$, $\varepsilon_0 = 0$. Так как $x_{0,\delta} = z_0 = 0$, то $\gamma_0 = 0$. По индукции легко проверить, что

$$\varepsilon_n = \sum_{k=0}^{n-1}\left(E - \alpha A^2\right)^{n-1-k}\alpha\gamma_k .$$

Так как нуль принадлежит спектру оператора A, то при условии (2.4) $\left\|E - \alpha A^2\right\| \le 1$, поэтому $\|\varepsilon_n\| \le n\alpha\gamma$, где $\gamma = \sup\limits_k|\gamma_k|$.

Итак, при $n \ge 2$ при условии (2.5) справедлива следующая оценка погрешности с учетом погрешности вычислений

$$\|x - z_n\| \le \|x - x_{n,\delta}\| + \|x_{n,\delta} - z_n\| \le s^{\frac{s}{2}}(2n\alpha e)^{-\frac{s}{2}}\|z\| + 2n^{\frac{1}{2}}\alpha^{\frac{1}{2}}\delta + n\alpha\gamma,\ n \ge 2.$$

2.1.2 Сходимость метода итераций решения операторных уравнений в случае неединственного решения

Покажем, что метод (2.2) пригоден и в случае неединственного решения уравнения (2.1), т. е. когда $\lambda = 0$ – собственное значение оператора A. Обозначим через $N(A) = \{x \in H \mid Ax = 0\}$, $M(A) = H\Theta N(A)$, т. е. $M(A)$ – ортогональное дополнение ядра $N(A)$ до H. Пусть $P(A)x$ – проекция $x \in H$ на $N(A)$, а $\Pi(A)x$ – проекция $x \in H$ на $M(A)$. Справедлива

Теорема 2.4. *Пусть* $A \geq 0$, $y \in H$, $0 < \alpha < 2\|A\|^{-2}$, *тогда для итерационного процесса* (2.2) *верны следующие утверждения*:

а) $Ax_n \to \Pi(A)y$, $\|Ax_n - y\| \to I(A, y) = \inf\limits_{x \in H} \|Ax - y\|$,

б) *метод* (2.2) *сходится тогда и только тогда, когда уравнение* $Ax = \Pi(A)y$ *разрешимо. В последнем случае* $x_n \to P(A)x_0 + x^*$, *где* x^* – *минимальное решение уравнения*.

Доказательство. Применив оператор A к методу (2.2), получим $Ax_n = Ax_{n-1} + \alpha A^2 [P(A)y + \Pi(A)y - Ax_{n-1}]$, где $y = P(A)y + \Pi(A)y$. Так как $AP(A)y = 0$, то $Ax_n = Ax_{n-1} + \alpha A^2 [\Pi(A)y - Ax_{n-1}]$.

Последнее равенство запишется в виде $v_n = v_{n-1} - \alpha A^2 v_{n-1}$, где $v_n = Ax_n - \Pi(A)y$ и $v_n \in M(A)$. Отсюда $v_n = \left(E - \alpha A^2\right)^n v_0$.

Имеем $A^2 \geq 0$ и A^2 – положительно определён в $M(A)$, т. е. $(Ax, x) > 0 \quad \forall x \in M(A)$. Так как $0 < \alpha < 2\|A\|^{-2}$, то $\left\|E - \alpha A^2\right\| < 1$, поэтому справедлива цепочка неравенств

$$\|v_n\| = \left\|\left(E - \alpha A^2\right)^n v_0\right\| = \left\|\int_0^M \left(1 - \alpha\lambda^2\right)^n dE_\lambda v_0\right\| \leq \left\|\int_0^{\delta_0} \left(1 - \alpha\lambda^2\right)^n dE_\lambda v_0\right\| +$$

$$+ \left\|\int_{\delta_0}^M \left(1 - \alpha\lambda^2\right)^n dE_\lambda v_0\right\| \leq \left\|\int_0^{\delta_0} dE_\lambda v_0\right\| + q^n(\delta_0)\left\|\int_{\delta_0}^M dE_\lambda v_0\right\| =$$

$$= \left\|E_{\delta_0} v_0\right\| + q^n(\delta_0)\left\|v_0 - E_{\delta_0} v_0\right\| < \varepsilon,$$

при $\delta_0 \to 0$ и $n \to \infty$. (Здесь $\left|1 - \alpha\lambda^2\right| \leq q(\delta_0) < 1$ при $\lambda \in [\delta_0, M]$). Следовательно, $v_n \to 0$, откуда получаем, что $Ax_n \to \Pi(A)y$ и

$\Pi(A)y \in A(H)$. $\|Ax_n - y\| \to \|\Pi(A)y - y\| = \|P(A)y\| = I(A,y)$ [124]. Итак, утверждение а) доказано.

Докажем б). Пусть процесс (2.2) сходится. Покажем, что уравнение $Ax = \Pi(A)y$ разрешимо. Из сходимости $\{x_n\} \in H$ к $z \in H$ и из а) следует $Ax_n \to Az = \Pi(A)y$, следовательно, $\Pi(A)y \in A(H)$ и уравнение $\Pi(A)y = Ax$ разрешимо.

Пусть теперь $\Pi(A)y \in A(H)$, следовательно, $\Pi(A)y = Ax^*$, где x^* – минимальное решение уравнения $Ax = y$ (оно единственно в $M(A)$).

Тогда (2.2) примет вид

$$x_n = x_{n-1} + \alpha A[\Pi(A)y - Ax_{n-1}] = x_{n-1} + \alpha A\left[Ax^* - Ax_{n-1}\right] = \\ = x_{n-1} + \alpha A^2\left[x^* - x_{n-1}\right].$$

Разобьём последнее равенство на два:

$$P(A)x_n = P(A)x_{n-1} + \alpha P(A)A^2\left(x^* - x_{n-1}\right) = P(A)x_{n-1} + \alpha A\left[AP(A)\left(x^* - x_{n-1}\right)\right] = \\ = P(A)x_{n-1} = P(A)x_0,$$

так как $AP(A)\left(x^* - x_{n-1}\right) = 0$.

$$\Pi(A)x_n = \Pi(A)x_{n-1} + \alpha\Pi(A)A^2\left(x^* - x_{n-1}\right) = \Pi(A)x_{n-1} - \alpha A^2\left[\Pi(A)\left(x_{n-1} - x^*\right)\right] = \\ = \Pi(A)x_{n-1} - \alpha A^2\left[\Pi(A)x_{n-1} - x^*\right],$$

так как $x^* \in M(A)$.

Обозначим $\omega_n = \Pi(A)x_n - x^*$, тогда $\omega_n = \omega_{n-1} - \alpha A^2\omega_{n-1}$ и, аналогично v_n, можно показать, что $\omega_n \to 0$, $n \to \infty$. Следовательно, $\Pi(A)x_n \to x^*$. Отсюда $x_n = P(A)x_n + \Pi(A)x_n \to P(A)x_0 + x^*$. Теорема 2.4 доказана.

Замечание 2.2. *Так как* $x_0 = 0$, *то* $x_n \to x^*$, *т.е. процесс* (2.2) *обеспечивает сходимость к нормальному решению, т. е. к решению с минимальной нормой.*

2.1.3 Сходимость метода итераций в энергетической норме

Рассмотрим теперь сходимость методов (2.2) и (2.3) в энергетической норме $\|x\|_A = \sqrt{(Ax, x)}$. Использование энергетической нормы позволяет получить оценки погрешности без предположения истокопредставимости точного решения уравнения (2.1).

Получим оценки погрешности для метода (2.3) в энергетической норме. Справедлива

Теорема 2.5. *При условии* (2.5) *итерационный процесс* (2.3) *сходится в энергетической норме гильбертова пространства, если выбирать число итераций* $n(\delta)$ *из условий* $n^{\frac{1}{4}}\delta \to 0$, $n \to \infty$, $\delta \to 0$.

Доказательство. В подразделе 2.1.1 показано, что $x - x_n = A^{-1}\left(E - \alpha A^2\right)^n y = \left(E - \alpha A^2\right)^n x$. Воспользовавшись определением энергетической нормы $\|x\|_A = \sqrt{(Ax, x)}$ и интегральным представлением самосопряжённого оператора, запишем

$$\|x - x_n\|_A^2 = \left(A\left(E - \alpha A^2\right)^n x, \left(E - \alpha A^2\right)^n x\right) = \int\limits_0^M \lambda\left(1 - \alpha\lambda^2\right)^{2n} d(E_\lambda x, x)$$

.

Для положительной подынтегральной функции $f(\lambda) = \lambda\left(1 - \alpha\lambda^2\right)^{2n}$ при условии (2.5) справедлива оценка (см. раздел 2.1)

$$\max_{\lambda\in[0,M]} |f(\lambda)| \le (4n\alpha e)^{-1/2}.$$

Следовательно, $\|x-x_n\|_A^2 \le (4n\alpha e)^{-1/2}\|x\|^2$, $\|x-x_n\|_A \le (4n\alpha e)^{-1/4}\|x\|$. Отсюда $\|x-x_n\|_A \to 0$, $n\to\infty$. Оценим $\|x_n - x_{n,\delta}\|_A$. Имеем

$$\|x_n - x_{n,\delta}\|_A^2 = \int_0^M \lambda^{-1}\left[1-\left(1-\alpha\lambda^2\right)^n\right]^2 d\left(E_\lambda\left(y-y_\delta\right), y-y_\delta\right).$$

Оценим сверху подынтегральную функцию $g_n(\lambda) = \lambda^{-1}\left[1-\left(1-\alpha\lambda^2\right)^n\right]^2 \ge 0$ при условии (2.5). Имеем $g_n(\lambda) = \lambda^{-1}\left[1-\left(1-\alpha\lambda^2\right)^n\right]\left[1-\left(1-\alpha\lambda^2\right)^n\right]$. Так как $\lambda^{-1}\left[1-\left(1-\alpha\lambda^2\right)^n\right] \le \left(\frac{5}{4}\right)^{1/2} 2(n\alpha)^{1/2}$ при $n\ge 1$, $\lambda^{-1}\left[1-\left(1-\alpha\lambda^2\right)^n\right] \le 2(n\alpha)^{1/2}$ при $n\ge 2$ и $\left|1-\left(1-\alpha\lambda^2\right)^n\right| \le 2$, то $g_n(\lambda) \le \left(\frac{5}{4}\right)^{1/2} 4(n\alpha)^{1/2}$ при $n\ge 1$, и $g_n(\lambda) \le 4(n\alpha)^{1/2}$ при $n \ge 2$. Следовательно, при условии (2.5)

$$\|x_n - x_{n,\delta}\|_A \le \left(\frac{5}{4}\right)^{\frac{1}{4}} 2n^{\frac{1}{4}}\alpha^{\frac{1}{4}}\delta,\ n\ge 1, \quad \|x_n - x_{n,\delta}\|_A \le 2n^{\frac{1}{4}}\alpha^{\frac{1}{4}}\delta,\ n \ge 2.$$

Поскольку $\|x - x_{n,\delta}\|_A \le \|x-x_n\|_A + \|x_n - x_{n,\delta}\|_A \le \|x-x_n\|_A + 2n^{\frac{1}{4}}\alpha^{\frac{1}{4}}\delta$, $n\ge 2$ и $\|x-x_n\|_A \to 0$, $n\to\infty$, то для сходимости $\|x - x_{n,\delta}\|_A \to 0$, $n\to\infty$, достаточно, чтобы $n^{\frac{1}{4}}\delta \to 0$, $n\to\infty$, $\delta\to 0$. Таким образом, если в процессе (2.3) выбрать число итераций $n = n(\delta)$, зависящим от δ так, чтобы $n^{\frac{1}{4}}\delta \to 0$, $n \to \infty$, $\delta \to 0$, то получим регуляризованный метод, обеспечивающий сходимость к точному решению в энергетической норме. Теорема 2.5 доказана.

Запишем общую оценку погрешности метода (2.3) в энергетической норме

$$\|x - x_{n,\delta}\|_A \le \left(\frac{5}{4}\right)^{\frac{1}{4}} 2n^{\frac{1}{4}}\alpha^{\frac{1}{4}}\delta + (4n\alpha e)^{-\frac{1}{4}}\|x\|,\ n \ge 1, \tag{2.15}$$

$$\|x - x_{n,\delta}\|_A \le 2n^{\frac{1}{4}}\alpha^{\frac{1}{4}}\delta + (4n\alpha e)^{-\frac{1}{4}}\|x\|,\ n \ge 2. \tag{2.16}$$

Полученные результаты объединим в теорему

Теорема 2.6. *Для итерационного процесса* (2.3) *при условии* (2.5) *справедливы оценки погрешности* (2.15) *и* (2.16).

Оптимизируем по *n* полученную оценку (2.16). Приравняв к нулю производную по *n* от правой части неравенства (2.16), имеем

$$n_{\text{опт}} = 2^{-3}\alpha^{-1}e^{-\frac{1}{2}}\|x\|^2\delta^{-2}. \tag{2.17}$$

Подставив $n_{\text{опт}}$ в оценку (1.16), получим оптимальную оценку погрешности

$$\|x - x_{n,\delta}\|_A^{\text{опт}} \le 2^{\frac{5}{4}}e^{-\frac{1}{8}}\delta^{\frac{1}{2}}\|x\|^{\frac{1}{2}}, n \ge 2. \tag{2.18}$$

Итак, доказана

Теорема 2.7. *В условиях предыдущей теоремы оптимальная оценка погрешности в энергетической норме для метода* (2.3) *имеет вид* (2.18) *и получается при* $n_{опт}$ *из* (2.17).

Таким образом, энергетическая норма как бы заменяет истокопредставимость точного решения уравнения степени $s = \frac{1}{2}$. Её использование позволило получить априорные оценки погрешности и априорный момент останова без дополнительного требования на гладкость точного решения – его истокообразную представимость. Следовательно, энергетическая норма позволяет сделать итерационный метод (2.3) эффективным и тогда, когда нет сведений об истокопредставимости точного решения.

Рассмотрим вопрос о том, когда из сходимости в энергетической норме следует сходимость в обычной норме гильбертова пространства H. Эти условия дает

Теорема 2.8. *Если выполнены условия* 1) $E_\varepsilon x_{n,\delta} = 0$, 2) $E_\varepsilon x = 0$, *где* $E_\varepsilon = \int_0^\varepsilon dE_\lambda$, ε – *фиксированное положительное число* $(0 < \varepsilon < \|A\|)$, *то из сходимости* $x_{n,\delta}$ *к* x *в энергетической норме следует сходимость в обычной норме гильбертова пространства.*

Доказательство. Так как по условию теоремы $E_\varepsilon x_{n,\delta} = 0$ и $E_\varepsilon x = 0$, то имеем $E_\varepsilon(x_{n,\delta} - x) = 0$ и $\left(E_\varepsilon(x_{n,\delta} - x), x_{n,\delta} - x\right) = 0$, т. е.

$$\int_0^\varepsilon d(E_\lambda\ (x_{n,\delta} - x), x_{n,\delta} - x) = 0.$$

Следовательно, $\int_0^\varepsilon \frac{1}{\lambda} d(E_\lambda\ (x_{n,\delta} - x), A(x_{n,\delta} - x)) = 0$. Тогда получим, что

$$\|x_{n,\delta} - x\|^2 = \int_0^M \frac{1}{\lambda} d(E_\lambda\ (x_{n,\delta} - x), A(x_{n,\delta} - x)) =$$

$$=\int_0^{\varepsilon}\frac{1}{\lambda}\ d(E_\lambda\ (x_{n,\delta}-x), A(x_{n,\delta}-x))+\int_{\varepsilon}^{M}\frac{1}{\lambda}\ d(E_\lambda\ (x_{n,\delta}-x), A(x_{n,\delta}-x))\ =$$

$$=\int_{\varepsilon}^{M}\frac{1}{\lambda}\ d(E_\lambda\ (x_{n,\delta}-x), A(x_{n,\delta}-x))\le\frac{1}{\varepsilon}\left\|x_{n,\delta}-x\right\|_A^2.$$

Теорема 2.8 доказана.

Замечание 2.3. *Так как* $x_{n,\delta}=A^{-1}\left[E-\left(E-\alpha A^2\right)^n\right]y_\delta$, *то для того, чтобы* $x_{n,\delta}$ *удовлетворяло условию* $E_\varepsilon x_{n,\delta}=0$, *достаточно потребовать, чтобы* $E_\varepsilon y_\delta=0$. *Таким образом, если* $E_\varepsilon x=0$ *и* $E_\varepsilon y_\delta=0$, *то из сходимости метода итераций* (2.3) *в энергетической норме следует его сходимость в обычной норме пространства* H. *И, следовательно, для оценки погрешности не потребуется предположения истокопредставимости точного решения.*

2.1.4 Правило останова по невязке в методе итераций

Решается задача из подраздела 2.1.1. Для её решения используется метод (2.3). Все результаты подраздела 2.1.1 получены в предположении, что точное решение x уравнения (2.1) истокообразно представимо, т. е. $x=A^s z,\ s>0$. Однако, поскольку сведения об элементе z и степени истокопредставимости s имеются не всегда, то на основании результатов подраздела 2.1.1 трудно определить число итераций n, обеспечивающих сходимость метода (2.3). Тем не менее, этот метод можно сделать вполне эффективным, если воспользоваться следующим правилом останова по невязке, аналогичным [9, 12, 20, 54, 94].

Определим момент m останова итерационного процесса (2.3) условием

$$\left.\begin{array}{l}\|Ax_{n,\delta}-y_\delta\|>\varepsilon, \quad (n<m),\\ \|Ax_{m,\delta}-y_\delta\|\le\varepsilon,\end{array}\right\} \quad \varepsilon=b\delta, \quad b>1. \tag{2.19}$$

Предполагаем, что при начальном приближении $x_{0,\delta}$ невязка достаточно велика, больше уровня останова ε, т.е. $\|Ax_{0,\delta}-y_\delta\|>\varepsilon$. Покажем возможность применения правила (2.19) к методу (2.3).

Рассмотрим семейство функций $g_n(\lambda)=\lambda^{-1}\left[1-\left(1-\alpha\lambda^2\right)^n\right]$.

Нетрудно показать, что для $g_n(\lambda)$ выполняются условия:

$$\sup_{0\le\lambda\le M}|g_n(\lambda)|\le\gamma n^{1/2},\ n>0,\ 0<\alpha\le\frac{5}{4M^2}\left(\gamma=\left(\frac{5}{4}\right)^{1/2}2\alpha^{1/2}, M=\|A\|\right), \tag{2.20}$$

$$\sup_{0\le\lambda\le M}|1-\lambda g_n(\lambda)|\le\gamma_0,(\gamma_0=1),\ 0<\alpha<\frac{2}{M^2}, \tag{2.21}$$

$$1-\lambda g_n(\lambda)\to 0,\ n\to\infty,\ 0<\alpha<\frac{2}{M^2},\forall\lambda\in(0,M], \tag{2.22}$$

$$\sup_{0\le\lambda\le M}\lambda^s|1-\lambda g_n(\lambda)|\le\gamma_s n^{-s/2},\ n>0, 0<\alpha\le\frac{5}{4M^2}, 0\le s<\infty, \tag{2.23}$$

где $\gamma_s=\left(\frac{s}{2\alpha e}\right)^{s/2}$. Справедливы

Лемма 2.1. *Пусть* $A=A^*\ge 0,\|A\|\le M$. *Тогда для* $\forall\omega\in H$ $(E-Ag_n(A))\omega\to 0,\ n\to\infty$.

Доказательство. Воспользуемся интегральным представлением самосопряженного оператора $A=\int\limits_0^M \lambda dE_\lambda$, где E_λ - спектральная функция. Рассмотрим

$$(E-Ag_n(A))\omega=\int\limits_0^M (1-\lambda g_n(\lambda))dE_\lambda\omega=\int\limits_0^M \left(1-\alpha\lambda^2\right)^n dE_\lambda\omega .$$

Так как при $0<\alpha<\frac{2}{M^2}$, $\lambda\in[\varepsilon_0,M]$ имеем $\left|1-\alpha\lambda^2\right|\le q<1$, то

$$\left\|\int\limits_{\varepsilon_0}^M \left(1-\alpha\lambda^2\right)^n dE_\lambda\omega\right\|\le q^n\left\|\int\limits_{\varepsilon_0}^M dE_\lambda\omega\right\|\le q^n\|\omega\|\to 0,\ n\to\infty .$$

$\left\|\int\limits_0^{\varepsilon_0} \left(1-\alpha\lambda^2\right)^n dE_\lambda\omega\right\|\le\left\|\int\limits_0^{\varepsilon_0} dE_\lambda\omega\right\|\le\left\|E_{\varepsilon_0}\omega\right\|\to 0$, $\varepsilon_0\to 0$ в силу свойств спектральной функции. Следовательно, $(E-Ag_n(A))\omega\to 0$, $n\to\infty$. Лемма 2.1 доказана.

Лемма 2.2. *Пусть* $A=A^*\ge 0,\|A\|\le M$. *Тогда для* $\forall v\in\overline{R(A)}$ *имеет место соотношение* $n^{s/2}\left\|A^s(E-Ag_n(A))v\right\|\to 0,\quad n\to\infty$, $0\le s<\infty$.

Доказательство. Так как верно равенство (2.23), то $n^{\frac{s}{2}}\left\|A^s(E-Ag_n(A))\right\|\le n^{\frac{s}{2}}\sup\limits_{0\le\lambda\le M}\lambda^s|1-\lambda g_n(\lambda)|\le\gamma_s$, где $\gamma_s=\left(\frac{s}{2\alpha e}\right)^{\frac{s}{2}}$.

Воспользуемся теоремой Банаха-Штейнгауза [43, с. 151], по которой сходимость $B_n u\to Bu$ при $n\to\infty$ для $\forall u\in H$ имеет место тогда и только тогда, когда эта сходимость имеет место на некотором плотном в H подмножестве и $\|B_n\|$, $n=1,2,\ldots$ ограничены независящей от n постоянной. Здесь $\|B_n\| = n^{\frac{s}{2}} \left\| A^s\left(E - Ag_n(A)\right) \right\| \le \gamma_s$, т.е. $\|B_n\|$ совокупно ограничены. В качестве плотного в $\overline{R(A)} = H$ подмножества возьмём множество $R(A)$. Положим $s_1 = s + 1$. Тогда для каждого $\nu = A\omega \in R(A)$ имеем

$$n^{\frac{s}{2}} \left\| A^s(E - Ag_n(A))\nu \right\| = n^{\frac{s}{2}} \left\| A^{s+1}(E - Ag_n(A))\omega \right\| \le n^{\frac{s}{2}} \left(\frac{s+1}{2\alpha e} \right)^{\frac{s+1}{2}} n^{-\frac{s+1}{2}} \|\omega\| =$$

$= \gamma_{s_1} n^{-\frac{1}{2}} \|\omega\| \to 0$, $n \to \infty$, так как $s_1 < \infty$. Лемма 2.2 доказана.

Лемма 2.3. *Пусть* $A = A^* \ge 0, \|A\| \le M$. *Если для некоторого* $n_k < \bar{n} = const$ *и* $v_0 \in \overline{R(A)}$ *при* $k \to \infty$ *имеем* $\omega_k = A(E - Ag_{n_k}(A))v_0 \to 0$, *то* $v_k = (E - Ag_{n_k}(A))v_0 \to 0$.

Доказательство. В силу (2.21) последовательность ν_k ограничена $\|\nu_k\| \le \gamma_0 \|\nu_0\|$, $k \in N = \{1,2,\ldots\}$. Поэтому в гильбертовом пространстве из этой последовательности можно извлечь слабо сходящуюся подпоследовательность. Пусть $\nu_k \dashrightarrow \nu$, $(k \in N' \subseteq N)$, тогда $A\nu_k \dashrightarrow A\nu$, $(k \in N')$. Но по условию $\omega_k = A\nu_k \to 0$, следовательно, $A\nu = 0$. Поскольку нуль не является собственным значением оператора A, то $\nu = 0$. Тогда

$$\|\nu_k\|^2 = \left(\nu_k, \left(E - Ag_{n_k}(A)\right)\nu_0\right) = (\nu_k, \nu_0) - \left(\nu_k, Ag_{n_k}(A)\nu_0\right) =$$
$$= (\nu_k, \nu_0) - \left(\omega_k, g_{n_k}(A)\nu_0\right) \to (\nu, \nu_0) = 0,$$

так как $\omega_k \to 0$, $\nu = 0$ и по условиям $\left\| g_{n_k}(A) \right\| \le \gamma n_k^{1/2} \le \gamma \bar{n}^{1/2}$. Следовательно, $\|\nu_k\| \to 0$. Итак, всякая слабо сходящаяся подпоследовательность указанной выше ограниченной последовательности ν_k стремится к нулю по норме. Следовательно, и вся последовательность $\nu_k \to 0$, $k \to \infty$. Лемма 2.3 доказана.

Теорема 2.9. *Пусть* $A = A^* \geq 0, \|A\| \leq M$ *и пусть момент останова* $m = m(\delta)$ *в методе* (2.3) *выбирается по правилу* (2.19). *Тогда* $x_{m,\delta} \to x$ при $\delta \to 0$.

Доказательство. По индукции имеем, что $x_{n,\delta} = A^{-1}\Big[E - \left(E - \alpha A^2\right)^n\Big] y_\delta$. Итак,

$$x_{n,\delta} - x = g_n(A)(y_\delta - y) - (E - Ag_n(A))x, \qquad (2.24)$$

$$Ax_{n,\delta} - y_\delta = -A\ [E - Ag_n(A)]x - (E - Ag_n(A))(y_\delta - y). \qquad (2.25)$$

В силу лемм 2.1 и 2.2 имеем

$$\|(E - Ag_n(A))x\| \to 0, n \to \infty, \qquad (2.26)$$

$$\sigma_n = n^{1/2}\|A(E - Ag_n(A))x\| \to 0, n \to \infty. \qquad (2.27)$$

Кроме того, из (2.20) и (2.21) следует, что

$$\|g_n(A)(y_\delta - y)\| \leq \gamma n^{1/2}\delta, \qquad (2.28)$$

$$\|E - Ag_n(A)\| \leq \gamma_0 = 1. \qquad (2.29)$$

Применим правило останова (2.19). Тогда $\left\|Ax_{m,\delta} - y_\delta\right\| \leq b\delta, b > 1$ и из (2.25) и (2.29) получим

$$\|A(E - Ag_m(A))x\| \leq \left\|Ax_{m,\delta} - y_\delta\right\| + \|(E - Ag_m(A))(y_\delta - y)\| \leq (b+1)\delta. \qquad (2.30)$$

Для $\forall n < m$ $\left\|Ax_{n,\delta} - y_\delta\right\| > \varepsilon$, поэтому

$$\|A(E - Ag_n(A))x\| \geq \left\|Ax_{n,\delta} - y_\delta\right\| - \\ - \|(E - Ag_n(A))(y - y_\delta)\| \geq (b-1)\delta.$$

Итак, для $\forall n < m$

$$\|A(E - Ag_n(A))x\| \geq (b-1)\delta. \qquad (2.31)$$

Из (2.27) и (2.31) при $n = m-1$

$$\frac{\sigma_{m-1}}{(m-1)^{1/2}} = \|A(E - Ag_{m-1}(A))x\| \geq (b-1)\delta$$

или $(m-1)^{1/2}\delta \leq \dfrac{\sigma_{m-1}}{b-1} \to 0, \delta \to 0$ (так как из (2.27) $\sigma_m \to 0, m \to \infty$).

Если при этом $m \to \infty$ при $\delta \to \infty$, то используя (2.24), получим

$$\|x_{m,\delta} - x\| \leq \|(E - Ag_m(A))x\| + \|g_m(A)(y_\delta - y)\| \leq$$
$$\leq \|(E - Ag_m(A))x\| + \gamma m^{1/2}\delta \to 0,\ m \to \infty,\ \delta \to 0,$$

так как из (2.26) $\|(E - Ag_m(A))x\| \to 0,\ m \to \infty.$

Если же для некоторых δ_n последовательность $m(\delta_n)$ окажется ограниченной, то и в этом случае $x_{m(\delta_n),\delta_n} \to x,\ \delta_n \to 0$. Действительно, из (2.30) выполняется $\|A(E - Ag_{m(\delta_n)}(A))x\| \leq (b+1)\delta_n \to 0,\ \delta_n \to 0.$ Следовательно, имеем $A\left(E - Ag_{m(\delta_n)}(A)\right)x \to 0,\ \delta_n \to 0$ и по лемме 2.3 получаем, что при $\delta_n \to 0$ $\left(E - Ag_{m(\delta_n)}(A)\right)x \to 0.$ Отсюда

$$\|x_{m(\delta_n),\delta_n} - x\| \leq \left\|\left(E - Ag_{m(\delta_n)}(A)\right)x\right\| + \gamma m^{1/2}(\delta_n)\delta_n \to 0,\ \delta_n \to 0.$$

Теорема 2.9 доказана.

Теорема 2.10. *Пусть выполняются условия теоремы* 2.9. *Если* $x = A^s z, s > 0$, *то справедливы оценки*

$$m(\delta) \leq 1 + \frac{s+1}{2\alpha e}\left[\frac{\|z\|}{(b-1)\delta}\right]^{\frac{2}{s+1}},$$

$$\left\|x_{m(\delta),\delta}-x\right\| \le [(b+1)\delta]^{\frac{s}{s+1}}\|z\|^{\frac{1}{s+1}} + \left(\frac{5}{4}\right)^{\frac{1}{2}} 2\alpha^{\frac{1}{2}}\left\{1+\frac{s+1}{2\alpha e}\left[\frac{\|z\|}{(b-1)\delta}\right]^{\frac{2}{s+1}}\right\}^{\frac{1}{2}}\delta. \tag{2.32}$$

Доказательство. Имеем

$$\|A(E-Ag_{m-1}(A))x\| = \left\|A^{s+1}(E-Ag_{m-1}(A))z\right\| =$$

$$= \left\|\int_0^M \lambda^{s+1}\left(1-\alpha\lambda^2\right)^{m-1} dE_\lambda z\right\| \le (s+1)^{\frac{s+1}{2}}[2\alpha e(m-1)]^{-\frac{s+1}{2}}\|z\|.$$

Воспользовавшись (2.31), получим

$$(b-1)\delta \le (s+1)^{\frac{s+1}{2}}[2\alpha e(m-1)]^{-\frac{s+1}{2}}\|z\|,$$

откуда

$$m(\delta) \le 1+\frac{s+1}{2\alpha e}\left[\frac{\|z\|}{(b-1)\delta}\right]^{\frac{2}{s+1}}.$$

При помощи неравенства моментов оценим

$$\|(E-Ag_m(A))x\| \le \left\|A^s(E-Ag_m(A))z\right\| \le \left\|A^{s+1}(E-Ag_m(A))z\right\|^{\frac{s}{s+1}} \times$$

$$\times \|(E-Ag_m(A))z\|^{\frac{1}{s+1}} \le \|A(E-Ag_m(A))x\|^{\frac{s}{s+1}}\|z\|^{\frac{1}{s+1}} \le [(b+1)\delta]^{\frac{s}{s+1}}\|z\|^{\frac{1}{s+1}}.$$

Так как соотношение (1.24) справедливо для любых n, то

$$\left\|x_{m,\delta}-x\right\| \le \|(E-Ag_m(A))x\| + \|g_m(A)(y_\delta-y)\| \le [(b+1)\delta]^{\frac{s}{s+1}}\|z\|^{\frac{1}{s+1}} +$$

$$+\gamma m^{\frac{1}{2}}\delta \le [(b+1)\delta]^{\frac{s}{s+1}}\|z\|^{\frac{1}{s+1}} + \left(\frac{5}{4}\right)^{\frac{1}{2}} 2\alpha^{\frac{1}{2}}\left\{1+\frac{s+1}{2\alpha e}\left[\frac{\|z\|}{(b-1)\delta}\right]^{\frac{2}{s+1}}\right\}^{1/2}\delta.$$

Теорема 2.10 доказана.

Замечание 2.4. *Порядок оценки* (2.32) *есть* $O\left(\delta^{\frac{s}{s+1}}\right)$ *и, как следует из* [12], *он оптимален в классе задач с истокопредставимыми решениями* $x = A^s z, s > 0$.

Замечание 2.5. *Хотя формулировка теоремы* 2.10 *даётся с указанием степени истокопредставимости* s *и истокопредставимого элемента* z, *на практике их значения не потребуются, так как они не содержатся в правиле останова* (2.19). *И тем не менее в теореме* 2.10 *утверждается, что будет автоматически выбрано количество итераций m, обеспечивающее оптимальный порядок погрешности. Но даже если истокопредставимость точного решения отсутствует, останов по невязке* (2.19), *как показывает теорема* 2.9, *обеспечивает сходимость метода, т. е. его регуляризирующие свойства.*

2.1.5 Правило останова по соседним приближениям в методе итераций для уравнений с несамосопряжённым оператором

Как известно [31], уравнение $Ax = y$ с действующим в гильбертовом пространстве H оператором, не обладающим свойством самосопряжённости или положительной определённости, может быть сведено к решению уравнения $A^*Ax = A^*y$ уже с положительно определённым и самосопряжённым оператором A^*A. Применение вышеописанных результатов для уравнения (2.1) приводит к аналогичным результатам для уравнений $Ax = y$ уже с произвольным действующим в гильбертовом пространстве оператором A.

Решаем уравнение (2.1) с несамосопряжённым оператором A. В случае, когда правая часть y уравнения (2.1) известна приближённо, $\|y-y_\delta\| \le \delta$ используем явную схему метода итераций

$$z_{n+1} = \left(E - \alpha\left(A^* A\right)^2\right) z_n + \alpha\left(A^* A\right) A^* y_\delta + \left(E - \alpha\left(A^* A\right)^2\right) u_n,$$
$$z_0 \in H,\ 0 < \alpha \le \frac{5}{4\left\|A^* A\right\|^2}. \tag{2.33}$$

Здесь u_n – ошибки вычисления итераций, $\|u_n\| \le \beta$. Обозначим $C = E - \alpha\left(A^* A\right)^2$, $B = \alpha\left(A^* A\right) A^*$. Для простоты считаем, что $\|A\| = 1$. Метод (2.33) примет вид $z_{n+1} = Cz_n + By_\delta + Cu_n$.

Определим момент m останова итерационного процесса условием [9, 19, 96]

$$\left.\begin{aligned} &\|z_n - z_{n+1}\| > \varepsilon, \quad (n < m), \\ &\|z_m - z_{m+1}\| \le \varepsilon, \end{aligned}\right\} \tag{2.34}$$

где ε – заданное до начала вычислений положительное число (уровень останова). Аналогично [19] докажем, что метод (2.33) с правилом останова (2.34) сходится, и получим оценку для момента останова. Справедливы леммы.

Лемма 2.4. *Пусть приближение* w_n *определяется равенствами* $w_0 = z_0,$ $w_{n+1} = Cw_n + By + Cu_n$, $n \ge 0$, *тогда справедливо неравенство*

$$\sum_{k=0}^{n} \left\|w_k - w_{k+1} + Cu_k\right\|^2 \le \left\|w_0 - x\right\|^2 + \sum_{k=0}^{n-1} \left\|Cu_k\right\|^2.$$

Доказательство. Из (2.33) имеем $Cu_k = w_{k+1} - Cw_k - By.$ Отсюда, используя равенство $A^* Ax = A^* y$, получим

$$u_k = C^{-1}w_{k+1} - w_k - C^{-1}By = C^{-1}w_{k+1} - w_k -$$

$$-\left(E - \alpha\left(A^*A\right)^2\right)^{-1}\left(A^*A\right)^{-1}\left[E - \left(E - \alpha\left(A^*A\right)^2\right)\right]A^*y = C^{-1}w_{k+1} - w_k -$$

$$-\left(E - \alpha\left(A^*A\right)^2\right)^{-1}\left(A^*A\right)^{-1}\left[E - \left(E - \alpha\left(A^*A\right)^2\right)\right]A^*Ax = C^{-1}w_{k+1} - w_k -$$

$$-C^{-1}(E-C)x = C^{-1}w_{k+1} - w_k - C^{-1}x + x = C^{-1}(w_{k+1} - x) - (w_k - x).$$

Обозначим $\Delta_k = w_k - x$, тогда $u_k = C^{-1}\Delta_{k+1} - \Delta_k$, откуда $Cu_k = \Delta_{k+1} - C\Delta_k$. Имеем

$$\sum_{k=0}^{n-1}\|Cu_k\|^2 = \sum_{k=0}^{n-1}(\Delta_{k+1} - C\Delta_k, \Delta_{k+1} - C\Delta_k) = \sum_{k=1}^{n}(\Delta_k, \Delta_k) + \sum_{k=0}^{n-1}(C\Delta_k, C\Delta_k) -$$

$$-2\sum_{k=0}^{n-1}(\Delta_{k+1}, C\Delta_k) = \sum_{k=1}^{n}(\Delta_k, \Delta_k) + \sum_{k=0}^{n-1}(C\Delta_k, C\Delta_k) - 2\sum_{k=0}^{n-1}\left(C^{\frac{1}{2}}\Delta_{k+1}, C^{\frac{1}{2}}\Delta_k\right). \tag{2.35}$$

Оценивая абсолютную величину последнего слагаемого правой части (2.35) по неравенству Коши–Буняковского, приходим к неравенству

$$\sum_{k=0}^{n-1}\|Cu_k\|^2 \geq \sum_{k=1}^{n}(\Delta_k, \Delta_k) + \sum_{k=0}^{n-1}(C\Delta_k, C\Delta_k) -$$
$$-2\left\{\sum_{k=0}^{n-1}(C\Delta_k, \Delta_k)\right\}^{\frac{1}{2}}\left\{\sum_{k=1}^{n}(C\Delta_k, \Delta_k)\right\}^{\frac{1}{2}}, \ n \geq 1. \tag{2.36}$$

Покажем, что $(E-C)\Delta_k = w_k - w_{k+1} + Cu_k$, $k \geq 0$. Имеем $Cu_k = \Delta_{k+1} - C\Delta_k$, $\Delta_k + Cu_k = \Delta_k + \Delta_{k+1} - C\Delta_k$, тогда имеем $\Delta_k + Cu_k = (E-C)\Delta_k + \Delta_{k+1}$, $w_k - x + Cu_k = (E-C)\Delta_k + w_{k+1} - x$, отсюда справедливо, что

$$(E-C)\Delta_k = w_k - w_{k+1} + Cu_k, \ k \geq 0. \tag{2.37}$$

Запишем неравенство (2.36) в виде

$$\sum_{k=0}^{n-1}\|Cu_k\|^2 \geq \sum_{k=1}^{n}(\Delta_k,\Delta_k)+\sum_{k=0}^{n-1}(C\Delta_k,C\Delta_k)-$$

$$-2\left\{\sum_{k=0}^{n-1}(C\Delta_k,\Delta_k)\right\}^{\frac{1}{2}}\left\{\sum_{k=1}^{n}(C\Delta_k,\Delta_k)\right\}^{\frac{1}{2}}=$$

$$=-(\Delta_0,\Delta_0)+\sum_{k=0}^{n}(\Delta_k,\Delta_k)+\sum_{k=0}^{n}(C\Delta_k,C\Delta_k)-(C\Delta_n,C\Delta_n)-2\sum_{k=0}^{n}(C\Delta_k,\Delta_k)+$$

$$+2\sum_{k=0}^{n}(C\Delta_k,\Delta_k)-2\left\{\sum_{k=0}^{n-1}(C\Delta_k,\Delta_k)\right\}^{\frac{1}{2}}\left\{\sum_{k=1}^{n}(C\Delta_k,\Delta_k)\right\}^{\frac{1}{2}}=-(\Delta_0,\Delta_0)+$$

$$+2\sum_{k=0}^{n}(C\Delta_k,\Delta_k)+\sum_{k=0}^{n}((E-C)\Delta_k,(E-C)\Delta_k)-$$

$$-(C\Delta_n,C\Delta_n)-2\left\{\sum_{k=0}^{n-1}(C\Delta_k,\Delta_k)\right\}^{\frac{1}{2}}\left\{\sum_{k=1}^{n}(C\Delta_k,\Delta_k)\right\}^{\frac{1}{2}}=$$

$$=-(\Delta_0,\Delta_0)+\sum_{k=0}^{n}((E-C)\Delta_k,(E-C)\Delta_k)+\gamma_n,$$

где

$$\gamma_n=2\sum_{k=0}^{n}(C\Delta_k,\Delta_k)-(C\Delta_n,C\Delta_n)-2\left\{\sum_{k=0}^{n-1}(C\Delta_k,\Delta_k)\right\}^{\frac{1}{2}}\left\{\sum_{k=1}^{n}(C\Delta_k,\Delta_k)\right\}^{\frac{1}{2}}.$$

Докажем, что $\gamma_n \geq 0$ при любых $\Delta_1,\Delta_2,\ldots,\Delta_n$. Для этого сначала докажем неравенство: $(C\Delta_n,C\Delta_n)\leq(C\Delta_n,\Delta_n)$. Ему равносильно неравенство: $\|C\Delta_n\|^2 \leq \left\|C^{1/2}\Delta_n\right\|^2$. Так как $\|C\|=\left\|\left(E-\alpha\left(A^*A\right)^2\right)\right\|=\sup\limits_{\lambda}\left|1-\alpha\lambda^2\right|=1,$ то имеем $\|C\Delta_n\|\leq\left\|C^{1/2}\right\|\left\|C^{1/2}\Delta_n\right\|=\left\|C^{1/2}\Delta_n\right\|$. Поэтому $(C\Delta_n,C\Delta_n)\leq(C\Delta_n,\Delta_n)$. Следовательно,

$$\gamma_n \geq 2\sum_{k=0}^{n}(C\Delta_k,\Delta_k)-(C\Delta_n,\Delta_n)-2\left\{\sum_{k=0}^{n-1}(C\Delta_k,\Delta_k)\right\}^{\frac{1}{2}}\left\{\sum_{k=1}^{n}(C\Delta_k,\Delta_k)\right\}^{\frac{1}{2}}.$$

Покажем, что

$$2\sum_{k=0}^{n}(C\Delta_k,\Delta_k)-(C\Delta_n,\Delta_n)-2\left\{\sum_{k=0}^{n-1}(C\Delta_k,\Delta_k)\right\}^{\frac{1}{2}}\left\{\sum_{k=1}^{n}(C\Delta_k,\Delta_k)\right\}^{\frac{1}{2}} \geq 0\ . \tag{2.38}$$

В самом деле, неравенство (2.38) равносильно неравенству

$$2\sum_{k=0}^{n-1}(C\Delta_k,\Delta_k)+2(C\Delta_n,\Delta_n)-2\left\{\sum_{k=0}^{n-1}(C\Delta_k,\Delta_k)\right\}^{\frac{1}{2}}\times$$

$$\times\left\{\sum_{k=0}^{n-1}(C\Delta_k,\Delta_k)+(C\Delta_n,\Delta_n)-(C\Delta_0,\Delta_0)\right\}^{\frac{1}{2}}-(C\Delta_n,\Delta_n)\geq 0,$$

которое, в свою очередь, равносильно такому

$$2\sum_{k=0}^{n-1}(C\Delta_k,\Delta_k)+(C\Delta_n,\Delta_n)\geq$$

$$\geq 2\left\{\sum_{k=0}^{n-1}(C\Delta_k,\Delta_k)\right\}^{\frac{1}{2}}\left\{\sum_{k=0}^{n-1}(C\Delta_k,\Delta_k)+(C\Delta_n,\Delta_n)-(C\Delta_0,\Delta_0)\right\}^{\frac{1}{2}}.$$

Возведя обе части последнего неравенства в квадрат, получим

$$4\left\{\sum_{k=0}^{n-1}(C\Delta_k,\Delta_k)\right\}^{2}+4\sum_{k=0}^{n-1}(C\Delta_k,\Delta_k)(C\Delta_n,\Delta_n)+(C\Delta_n,\Delta_n)^2\geq$$

$$\geq 4\sum_{k=0}^{n-1}(C\Delta_k,\Delta_k)\left\{\sum_{k=0}^{n-1}(C\Delta_k,\Delta_k)+(C\Delta_n,\Delta_n)-(C\Delta_0,\Delta_0)\right\}.$$

Пришли к очевидному неравенству $4\sum_{k=0}^{n-1}(C\Delta_k,\Delta_k)(C\Delta_0,\Delta_0)+$ $+(C\Delta_n,\Delta_n)^2 \geq 0$, поэтому неравенство (2.38) справедливо в виду равносильности неравенств. (Здесь возведенное в квадрат неравенство на самом деле содержало лишь положительные члены). Следовательно, $\gamma_n \geq 0$. Отсюда, имеем

$$\sum_{k=0}^{n-1}\|Cu_k\|^2 \geq -(\Delta_0,\Delta_0)+\sum_{k=0}^{n}((E-C)\Delta_k,(E-C)\Delta_k).$$

Используя равенство (2.37), получим неравенство

$\sum_{k=0}^{n-1}\|Cu_k\|^2 \geq -(\Delta_0,\Delta_0)+\sum_{k=0}^{n}\|w_k-w_{k+1}+Cu_k\|^2$, откуда выполняется

$\sum_{k=0}^{n}\|w_k-w_{k+1}+Cu_k\|^2 \leq \|w_0-x\|^2+\sum_{k=0}^{n-1}\|Cu_k\|^2$. Лемма 2.4 доказана.

Лемма 2.5. *При любом* $w_0 \in H$ *и произвольной последовательности ошибок* $\{u_n\}$, *удовлетворяющих условию* $\|u_n\| \leq \beta$, *выполнено неравенство*

$$\underline{\lim}_{n\to\infty}\|w_n-w_{n+1}\| \leq 2\|C\|\beta. \qquad (2.39)$$

Доказательство.

$$\underline{\lim}_{n\to\infty}\|w_n-w_{n+1}\| \leq \underline{\lim}_{n\to\infty}\|w_n-w_{n+1}+Cu_n\|+\|C\|\beta \leq \|C\|\beta+$$

$$+\overline{\lim}_{n\to\infty}\left\{\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\|w_k-w_{k+1}+Cu_k\|^2\right\}^{\frac{1}{2}} \leq$$

$$\leq \overline{\lim}_{n\to\infty}\left\{\frac{1}{n}\|w_0-x\|^2+\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\|Cu_k\|^2\right\}^{\frac{1}{2}}+\|C\|\beta \leq$$

$$\leq \overline{\lim_{n\to\infty}} \left\{ \frac{1}{n}\|w_0 - x\|^2 + \frac{1}{n} n\|C\|^2 \beta^2 \right\}^{\frac{1}{2}} + \|C\|\beta = 2\|C\|\beta,$$

так как $\overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{1}{n}\|w_0 - x\|^2 = 0$. Отсюда следует (2.39). Лемма 2.5 доказана.

Обе леммы будут использованы при доказательстве следующей теоремы.

Теорема 2.11. *Пусть уровень останова* $\varepsilon = \varepsilon(\delta,\beta)$ *выбирается как функция от уровней* δ *и* β *норм погрешностей* $y - y_\delta$ *и* u_n. *Тогда справедливы следующие утверждения:*

а) если $\varepsilon(\delta,\beta) > 2\|C\|\beta$, *то момент останова* m *определен при любом начальном приближении* $z_0 \in H$ *и любых* y_δ *и* u_n, *удовлетворяющих условиям* $\|y - y_\delta\| \leq \delta$, $\|u_n\| \leq \beta$;

б) если $\varepsilon(\delta,\beta) > \|B\|\delta + 2\|C\|\beta$, *то справедлива оценка*

$$m \leq \frac{\|z_0 - x\|^2}{(\varepsilon - \|B\|\delta - 2\|C\|\beta)(\varepsilon - \|B\|\delta)};$$

в) если, кроме того, $\varepsilon(\delta,\beta) \to 0$, $\delta,\beta \to 0$ и $\varepsilon(\delta,\beta) \geq d\left(\|B\|\delta + \|C\|\beta^p\right)$, *где* $d > 1$, $p \in (0,1)$, *то* $\lim\limits_{\delta,\beta\to 0}\|z_m - x\| = 0$.

Доказательство. а). По индукции нетрудно показать, что

$$z_n = C^n z_0 + C\sum_{k=0}^{n-1} C^k\left(C^{-1}By_\delta + u_{n-k-1}\right), \tag{2.40}$$

При $n = 1$ из $z_n = Cz_{n-1} + By_\delta + Cu_{n-1}$ имеем $z_1 = Cz_0 + By_\delta + Cu_0$, из (2.40) получим тоже самое, т.е. при $n = 1$ формула (2.40) верна. Предположим, что формула (2.40) верна при $n = p$, т.е.

$z_p = C^p z_0 + C\sum_{k=0}^{p-1} C^k \left(C^{-1}By_\delta + u_{p-k-1}\right)$, и докажем ее справедливость при $n = p+1$. Имеем

$$z_{p+1} = Cz_p + By_\delta + Cu_p = C\left[C^p z_0 + C\sum_{k=0}^{p-1} C^k \left(C^{-1}By_\delta + u_{p-k-1}\right)\right] + By_\delta + Cu_p =$$
$$= C^{p+1}z_0 + C^2\left(C^{-1}By_\delta + u_{p-1} + CC^{-1}By_\delta + Cu_{p-2} + \ldots + C^{p-1}C^{-1}By_\delta + C^{p-1}u_0\right) +$$

$$+ By_\delta + Cu_p = C^{p+1}z_0 + C\left(By_\delta + Cu_{p-1} + CBy_\delta + C^2 u_{p-2} + \ldots + C^{p-1}By_\delta +\right.$$
$$\left. + C^p u_0 + C^{-1}By_\delta + u_p\right) = C^{p+1}z_0 + C\sum_{k=0}^{p} C^k \left(C^{-1}By_\delta + u_{p-k}\right).$$

Таким образом, справедливость (2.40) доказана. Отсюда

$$w_n = C^n w_0 + C\sum_{k=0}^{n-1} C^k \left(C^{-1}By + u_{n-k-1}\right) = C^n w_0 + \sum_{k=0}^{n-1} C^k By + C\sum_{k=0}^{n-1} C^k u_{n-k-1} =$$
$$= C^n w_0 + \left(E + C + C^2 + \ldots + C^{n-1}\right)By + C\sum_{k=0}^{n-1} C^k u_{n-k-1} = C^n w_0 +$$
$$+ C\sum_{k=0}^{n-1} C^k u_{n-k-1} + \left(E - C^n\right)(E-C)^{-1}\left(A^*A\right)^{-1}(E-C)A^*y =$$
$$= C^n w_0 + A^{-1}\left(E - C^n\right)y + C\sum_{k=0}^{n-1} C^k u_{n-k-1}.$$

Учитывая, что $z_0 = w_0$, получим

$$z_n - z_{n+1} = C^n z_0 + A^{-1}\left(E - C^n\right)y_\delta +$$
$$+ C\sum_{k=0}^{n-1} C^k u_{n-k-1} - C^{n+1}z_0 - A^{-1}\left(E - C^{n+1}\right)y_\delta - - C\sum_{k=0}^{n} C^k u_{n-k}$$
$$= C^n w_0 + A^{-1}\left(E - C^n\right)y - A^{-1}\left(E - C^n\right)y + A^{-1}\left(E - C^n\right)y_\delta +$$
$$+ C\sum_{k=0}^{n-1} C^k u_{n-k-1} - C^{n+1}w_0 - A^{-1}\left(E - C^{n+1}\right)y + A^{-1}\left(E - C^{n+1}\right)y - A^{-1}\left(E - C^{n+1}\right)y_\delta -$$
$$- C\sum_{k=0}^{n} C^k u_{n-k} = w_n - w_{n+1} - A^{-1}\left(E - C^n\right)(y - y_\delta) + A^{-1}\left(E - C^{n+1}\right)(y - y_\delta) =$$

$$= w_n - w_{n+1} + A^{-1}\left[(y - y_\delta) - C^{n+1}(y - y_\delta) - (y - y_\delta) + C^n(y - y_\delta)\right] =$$
$$= w_n - w_{n+1} + A^{-1}\left(C^n - C^{n+1}\right)(y - y_\delta) = w_n - w_{n+1} +$$
$$+ A^{-1}(E - C)C^n(y - y_\delta) = w_n - w_{n+1} + BC^n(y - y_\delta).$$

Следовательно,

$$\|z_n - z_{n+1}\| \le \|w_n - w_{n+1}\| + \left\|BC^n(y - y_\delta)\right\|. \qquad (2.41)$$

Обозначим $\sigma = B(y - y_\delta)$, тогда, используя интегральное представление самосопряжённого оператора, при условии $0 < \alpha \le 5/4$, $\lambda \in [0, 1]$ получим $\left\|BC^n(y - y_\delta)\right\| = \left\|C^n \sigma\right\| \to 0,\ n \to \infty$. Поэтому (см. лемму 2.5) $\varliminf\limits_{n\to\infty} \|z_n - z_{n+1}\| = \varliminf\limits_{n\to\infty} \|w_n - w_{n+1}\| \le 2\|C\|\beta.$ Следовательно, условием $\varepsilon(\delta, \beta) > 2\|C\|\beta$ момент останова m определен при любом начальном приближении $z_0 \in H$ и любых y_δ, $\|y - y_\delta\| \le \delta$ и u_n, $\|u_n\| \le \beta$.

б). Рассмотрим последовательность

$$w_0 = z_0, \quad w_{n+1} = Cw_n + By + Cu_n,\ n \ge 0,$$

и определим момент останова m' условием

$$\left.\begin{aligned} &\|w_n - w_{n+1}\| > \varepsilon - \|B\|\delta, \quad (n < m'), \\ &\|w_{m'} - w_{m'+1}\| \le \varepsilon - \|B\|\delta. \end{aligned}\right\} \qquad (2.42)$$

Из (2.41) следует, что $m \le m'$. Из леммы 1.4 при $n = m'$ получим $\sum\limits_{k=0}^{m'} \|w_k - w_{k+1} + Cu_k\|^2 \le \|w_0 - x\|^2 + \sum\limits_{k=0}^{m'-1} \|Cu_k\|^2,$ поэтому справедливо

$\sum_{k=0}^{m'-1} \|w_k - w_{k+1} + Cu_k\|^2 \le \|w_0 - x\|^2 + \sum_{k=0}^{m'-1} \|Cu_k\|^2$. Отсюда получим неравенство $\sum_{k=0}^{m'-1} (\|w_k - w_{k+1}\| - \|C\|\beta)^2 \le \|w_0 - x\|^2 + \sum_{k=0}^{m'-1} \|Cu_k\|^2$. Так как по (2.42) при $n < m'$ имеем $\|w_n - w_{n+1}\| > \varepsilon - \|B\|\delta,$ то $m'(\varepsilon - \|B\|\delta - \|C\|\beta)^2 \le \|w_0 - x\|^2 + m'\|C\|^2 \beta^2.$

Учитывая, что $w_0 = z_0$ и $m \le m'$, из последнего неравенства получим

$$m \le m' \le \frac{\|z_0 - x\|^2}{(\varepsilon - \|B\|\delta - \|C\|\beta)^2 - \|C\|^2 \beta^2} = \frac{\|z_0 - x\|^2}{(\varepsilon - \|B\|\delta - 2\|C\|\beta)(\varepsilon - \|B\|\delta)}.$$

в). Докажем, что

$$x = C^n x + \sum_{k=0}^{n-1} BC^k y. \tag{2.43}$$

Предположим, что (2.43) верна, тогда имеем

$$x - C^n x = \sum_{k=0}^{n-1} BC^k y, \quad (E - C^n)x = \sum_{k=0}^{n-1} BC^k y,$$

$$(E - C^n)x = B(E + C + C^2 + \ldots + C^{n-1})y,$$

$$(E - C^n)x = A^{-1}(E - C)(E - C^n)(E - C)^{-1} y, \quad (E - C^n)x = (E - C^n)A^{-1} y,$$

$$(E - C^n)x = (E - C^n)x.$$

Следовательно, предположение верно и формула (2.43) доказана. Из (2.40) вычтем (2.43), получим

$$z_n - x = C^n (z_0 - x) + C\sum_{k=0}^{n-1} C^k \left[C^{-1} B(y_\delta - y) + u_{n-k-1}\right]. \tag{2.44}$$

Отсюда $\Delta_n = C^n \Delta_0 + C \sum_{k=0}^{n-1} C^k \left[C^{-1} B(y_\delta - y) + u_{n-k-1} \right]$, где $\Delta_n = z_n - x$ и $\Delta_0 = z_0 - x$. Следовательно,

$$\|\Delta_n\| \le \left\| C^n \Delta_0 \right\| + \left(\|B\| \delta + \|C\| \beta \right) n. \qquad (2.45)$$

В частности, (2.45) справедлива и при $n = m$. Если $m \to \infty$ при $\varepsilon, \delta, \beta \to 0$, тогда, как показано ранее, $\left\| C^m \Delta_0 \right\| \to 0,\ m \to \infty$. Поэтому для доказательства $\|z_m - x\| \to 0,\ \delta \to 0,\ \beta \to 0$ достаточно показать, что $m\left(\|B\| \delta + \|C\| \beta \right) \to 0,\ m \to \infty,\ \delta \to 0,\ \beta \to 0$. Из (2.44)

$$z_n - z_{n+1} = (z_n - x) - (z_{n+1} - x) =$$

$$= C^n (z_0 - x) + C \sum_{k=0}^{n-1} C^k \left[C^{-1} B(y_\delta - y) + u_{n-k-1} \right] -$$

$$- C^{n+1} (z_0 - x) - C \sum_{k=0}^{n} C^k \left[C^{-1} B(y_\delta - y) + u_{n-k} \right] = C^n (E - C)(z_0 - x) +$$

$$+ \sum_{k=0}^{n-1} C^k B(y_\delta - y) + C \sum_{k=0}^{n-1} C^k u_{n-k-1} - \sum_{k=0}^{n} C^k B(y_\delta - y) - C \sum_{k=0}^{n} C^k u_{n-k} =$$

$$= C^n (E - C)(z_0 - x) - C^n B(y_\delta - y) + C\left(u_{n-1} + C u_{n-2} + C^2 u_{n-3} + \ldots + C^{n-1} u_0 \right) -$$

$$- C\left(u_n + C u_{n-1} + C^2 u_{n-2} + \ldots + C^n u_0 \right) = C^n (E - C)(z_0 - x) - C u_n -$$

$$- C^n B(y_\delta - y) + C\left[\left(u_{n-1} - C u_{n-1} \right) + \left(C u_{n-2} - C^2 u_{n-2} \right) + \ldots + \left(C^{n-1} u_0 - C^n u_0 \right) \right].$$

Отсюда получим

$$\begin{gathered} z_n - z_{n+1} = C^n (E - C)(z_0 - x) - \\ - C^n B(y_\delta - y) - C u_n + C \sum_{k=0}^{n-1} C^k (E - C) u_{n-k-1}. \end{gathered} \qquad (2.46)$$

Нетрудно показать, что при $0 < \alpha \le 5/4$

$$\left\| C^n (E - C) \right\| \le \frac{1}{n+1}. \tag{2.47}$$

Из (2.46) при $n = m - 1$ получим

$$\|z_{m-1} - z_m\| \le \left\| C^{(m-1)/2} C^{(m-1)/2} (E - C)(z_0 - x) \right\| + \left\| C^{m-1} B(y_\delta - y) \right\| + \|Cu_{m-1}\| +$$

$$+ \left\| C \sum_{k=0}^{m-2} C^k (E - C) u_{m-k-2} \right\| \le \left\| C^{(m-1)/2} (E - C) \right\| \left\| C^{(m-1)/2} (z_0 - x) \right\| + \|B\|\delta + \|C\|\beta +$$

$$+ \|C\|\beta \sum_{k=0}^{m-2} \frac{1}{k+1} \le \frac{2}{m} \left\| C^{(m-1)/2} (z_0 - x) \right\| + \|B\|\delta + \|C\|\beta(2 + \ln m),$$

так как $\sum_{k=1}^{m-1} \frac{1}{k} \le 1 + \ln m$ [16, с. 16].

Поскольку по условию теоремы $\varepsilon(\delta, \beta) \ge d\left(\|B\|\delta + \|C\|\beta^p \right)$, $d > 1$, $p \in (0,1)$, то при всех достаточно малых δ, β выполняется неравенство $\varepsilon(\delta, \beta) > \|B\|\delta + 2\|C\|\beta$, поэтому из б) получим $m \le \|z_0 - x\|^2 \left[(\varepsilon - \|B\|\delta - 2\|C\|\beta)(\varepsilon - \|B\|\delta) \right]^{-1}$. Так как $\|z_{m-1} - z_m\| > \varepsilon$, то имеем $\varepsilon \le \frac{2}{m} \left\| C^{(m-1)/2} (z_0 - x) \right\| + \|B\|\delta + \|C\|(2 + \ln m)\beta$. Отсюда получим, что

$$m \le \frac{2\left\| C^{(m-1)/2} (z_0 - x) \right\|}{\varepsilon - \|B\|\delta - \|C\|\beta \left\{ 2 + \ln\left(\|z_0 - x\|^2 \left[(\varepsilon - \|B\|\delta - 2\|C\|\beta)(\varepsilon - \|B\|\delta) \right]^{-1} \right) \right\}}.$$

Умножив обе части последнего неравенства на $\|B\|\delta + \|C\|\beta$, получим

$$m\left(\|B\|\delta+\|C\|\beta\right)\le$$

$$\le\frac{2\left\|C^{(m-1)/2}(z_0-x)\right\|\left(\|B\|\delta+\|C\|\beta\right)}{\varepsilon-\|B\|\delta-\|C\|\beta\left\{2+\ln\left(\|z_0-x\|^2\left[\left(\varepsilon-\|B\|\delta-2\|C\|\beta\right)\left(\varepsilon-\|B\|\delta\right)\right]^{-1}\right)\right\}}.$$

При $m\to\infty$ множитель $\left\|C^{(m-1)/2}(z_0-x)\right\|\to 0$, и при $\delta,\beta\to 0$ дробь

$$\frac{2\left(\|B\|\delta+\|C\|\beta\right)}{\varepsilon-\|B\|\delta-\|C\|\beta\left[2+\ln\dfrac{\|z_0-x\|^2}{\left(\varepsilon-\|B\|\delta-2\|C\|\beta\right)\left(\varepsilon-\|B\|\delta\right)}\right]}$$ ограничена. Поэтому

при $m\to\infty,\ \delta,\beta\to 0$ $m\left(\|B\|\delta+\|C\|\beta\right)\to 0$. Отсюда и из неравенства (2.45) при $m\to\infty$ следует

$$\lim_{\substack{\delta\to 0\\ \beta\to 0}}\|\Delta_m\|=\lim_{\substack{\delta\to 0\\ \beta\to 0}}\|z_m-x\|\le\lim_{\substack{\delta\to 0\\ \beta\to 0}}\left(\left\|C^m\Delta_0\right\|+m\left(\|B\|\delta+\|C\|\beta\right)\right)=0.$$

Теорема 2.11 доказана.

2.2 Сходимость в гильбертовом пространстве явного итерационного метода решения операторных уравнений

2.2.1 Априорный выбор числа итераций в итерационном методе решения некорректных задач

В действительном гильбертовом пространстве H решается уравнение первого рода (2.1), где $A-$ ограниченный, положительный, самосопряженный оператор, для которого нуль не является собственным значением. Причём нуль принадлежит спектру оператора A, т. е. задача некорректна. Предположим, что при точной правой части y существует единственное решение x уравнения (2.1). Для отыскания решения уравнения (2.1) применим итерационный метод

$$x_{n+1} = (E - \alpha A)^2 x_n + 2\alpha y - \alpha^2 A y, \quad x_0 = 0. \tag{2.48}$$

Однако на практике часто правая часть y уравнения (2.1) бывает неизвестной, а вместо y известно приближение $y_\delta : \|y - y_\delta\| \le \delta$, тогда явный итерационный метод (2.48) примет вид:

$$x_{n+1,\delta} = (E - \alpha A)^2 x_{n,\delta} + 2\alpha y_\delta - \alpha^2 A y_\delta, \quad x_{0,\delta} = 0. \tag{2.49}$$

Рассмотрим сходимость метода (2.1) при точной правой части y уравнения (2.1). Справедлива

Теорема 2.12. *Итерационный процесс* (2.48) *при условии*

$$0 < \alpha < \frac{2}{\|A\|} \tag{2.50}$$

сходится.

Доказательство. Покажем по индукции, что

$$x_n = A^{-1}\left[E - (E - \alpha A)^{2n}\right] y. \tag{2.51}$$

При $n = 0$ из формулы (2.48) получаем:

$$x_1 = (E - \alpha A)^2 x_0 + A^{-1}\left[E - (E - \alpha A)^2\right] y = A^{-1}\left[E - (E - \alpha A)^2\right] y,$$

так как $x_0 = 0$. Из (2.51) также $x_1 = A^{-1}\left[E - (E - \alpha A)^2\right] y$, следовательно, формула (2.51) справедлива при $n = 1$.

Предполагаем, что (2.51) верна при $n = p$, т. е. $x_p = A^{-1}\left[E - (E - \alpha A)^{2p}\right] y$.

Покажем, что формула (2.51) справедлива для $n = p + 1$:

$$x_{p+1} = (E - \alpha A)^2 x_p + A^{-1}\left[E - (E - \alpha A)^2\right] y = (E - \alpha A)^2 A^{-1}\left[E - (E - \alpha A)^{2p}\right] y +$$
$$+ A^{-1}\left[E - (E - \alpha A)^2\right] y = A^{-1}\left[(E - \alpha A)^2 - (E - \alpha A)^{2+2p} + E - (E - \alpha A)^2\right] y =$$

$$= A^{-1}\left[E - (E - \alpha A)^{2(p+1)}\right]y.$$

Так как уравнение (2.1) имеет по определению единственное точное решение, то $x = A^{-1}y$ и, следовательно,

$$x - x_n = A^{-1}y - A^{-1}\left[E - (E - \alpha A)^{2n}\right]y = A^{-1}(E - \alpha A)^{2n}\, y.$$

Воспользовавшись интегральным представлением самосопряжённого оператора $A = \int\limits_0^M \lambda dE_\lambda$ (E_λ – соответствующая спектральная функция, $M = \|A\|$), получим $x - x_n = \int\limits_0^M \lambda^{-1}(1 - \alpha\lambda)^{2n}\, dE_\lambda\, y.$ Разобьём полученный интеграл на два:

$$x - x_n = \int\limits_0^\varepsilon \lambda^{-1}(1 - \alpha\lambda)^{2n}\, dE_\lambda y + \int\limits_\varepsilon^M \lambda^{-1}(1 - \alpha\lambda)^{2n}\, dE_\lambda y.$$

При условии (2.3) $|1 - \alpha\lambda| < 1$. Отсюда

$$\left\|\int\limits_\varepsilon^M \lambda^{-1}(1 - \alpha\lambda)^{2n}\, dE_\lambda\, y\right\| \le q^{2n}\left\|\int\limits_\varepsilon^M \lambda^{-1} dE_\lambda\, y\right\| = q^{2n}\left\|\int\limits_\varepsilon^M dE_\lambda\, x\right\| \to 0, \quad n \to \infty,$$

(здесь $|1 - \alpha\lambda| \le q < 1,\ \lambda \in [\varepsilon, M]$).

$$\left\|\int\limits_0^\varepsilon \lambda^{-1}(1 - \alpha\lambda)^{2n} dE_\lambda y\right\| \le \left\|\int\limits_0^\varepsilon \lambda^{-1} dE_\lambda y\right\| = \left\|\int\limits_0^\varepsilon dE_\lambda x\right\| = \|E_\varepsilon x\| \to 0, \quad \varepsilon \to 0,$$

так как E_ε сильно стремится к нулю при $\varepsilon \to 0$ в силу свойств спектральной функции. Следовательно, $\|x - x_n\| \to 0,\ n \to \infty$, т. е. итерационный процесс (2.48) сходится. Теорема 2.12 доказана.

Скорость убывания к нулю $\|x - x_n\|$ неизвестна и может быть сколь угодно малой. Для её оценки предположим, что точное решение

x уравнения (2.1) истокопредставимо, т.е. $x = A^s z$, $s > 0$. Тогда $y = A^{s+1} z$ и, следовательно, $x - x_n = \int\limits_0^M \lambda^s (1-\alpha\lambda)^{2n} dE_\lambda z$.

Для оценки $\|x - x_n\|$ найдём максимум модуля подынтегральной функции $f(\lambda) = \lambda^s (1-\alpha\lambda)^{2n}$. Приравняв к нулю производную от $f(\lambda)$, получим $\lambda^{s-1}(1-\alpha\lambda)^{2n-1}[s(1-\alpha\lambda) - 2n\alpha\lambda] = 0$. Первые два сомножителя не равны нулю, ибо в противном случае $f(\lambda) = 0$. Поэтому $s(1-\alpha\lambda) - 2n\alpha\lambda = 0$. Отсюда $\lambda_* = \dfrac{s}{\alpha(s+2n)}$ – стационарная точка функции $f(\lambda)$.

Поскольку $f''(\lambda_*) < 0$, то λ_* – точка локального максимума для $f(\lambda)$. Найдём его.

$$f(\lambda_*) = \left[\frac{s}{\alpha(s+2n)}\right]^s \left[1 - \frac{\alpha s}{\alpha(s+2n)}\right]^{2n} = s^s \alpha^{-s} (s+2n)^{-s} \left[\frac{2n}{s+2n}\right]^{2n} =$$

$$= (2n)^{2n} s^s \alpha^{-s} (s+2n)^{-2n-s} < s^s (2n\alpha e)^{-s},$$

так как $\left[1 + \dfrac{s}{2n}\right]^{s+2n} > e^s$ при всех $n > 0$.

Отсюда $f(\lambda_*) < s^s (2n\alpha e)^{-s}$. Покажем, что последняя величина не меньше максимального значения $|f(\lambda)|$ для всех α, удовлетворяющих условию

$$0 < \alpha \le \frac{5}{4M},$$

более сильному, чем (2.50). Чтобы проверить это, достаточно исследовать поведение функции $f(\lambda)$ на концах отрезка $[0, M]$. Очевидно, что $f(0) = 0$, и максимум в точке $\lambda = 0$ быть не может. Проверим, что $|f(M)| < s^s (2n\alpha e)^{-s}$.

При $\lambda < \frac{1}{\alpha}$ функция $f(\lambda)$ имеет максимум, оцененный ранее. При $\lambda > \frac{1}{\alpha}$ $f'(\lambda) > 0$, поэтому наибольшее значение $|f(\lambda)|$ получает в точке $\lambda = M$. А значение $|f(M)| = \left|M^s(1-\alpha M)^{2n}\right|$ тем больше, чем больше α, так как $\alpha M > 1$ (напомним, что исследуется случай $\lambda > \frac{1}{\alpha}$). Поэтому достаточно вычислить $|f(M)|$ при максимальном $\alpha = \frac{5}{4M}$.

$$|f(M)| = \left|M^s\left(1 - \frac{5}{4M}M\right)^{2n}\right| = \left|M^s\left(-\frac{1}{4}\right)^{2n}\right| = \left|M^s\,\frac{1}{4^{2n}}\right|.$$

Нужно доказать, что $|f(M)| < s^s(2n\alpha e)^{-s}$ или $\left|M^s\,\frac{1}{4^{2n}}\right| < (4s)^s(10ne)^{-s}M^s$, т. е. $(4s)^{-s}(10ne)^s < 4^{2n}$.

Обозначим $\phi(s) = (4s)^{-s}(10ne)^s$ и найдём максимум функции $\phi(s)$. Приравняв к нулю производную $\phi'(s)$, получим $(4s)^{-s}(10ne)^s \ln\frac{10n}{4s} = 0$.

Поскольку $(4s)^{-s} \neq 0$, $(10ne)^s \neq 0$, то $\ln\frac{10n}{4s} = 0$ и, следовательно, $s^* = \frac{5n}{2}$ – стационарная точка функции $\phi(s)$. Так как $\phi''(s) < 0$, то s^* – точка максимума. Найдём его.

$$\varphi\left(s^*\right) = (4s)^{-s}(10ne)^s\Big|_{s=s^*} = \left[4\frac{10n}{4}\right]^{-\frac{5n}{2}}(10ne)^{\frac{5n}{2}} =$$

$$= (10n)^{-\frac{5n}{2}}(10ne)^{\frac{5n}{2}} = e^{\frac{5n}{2}}.$$

Итак, нужно доказать, что $e^{\frac{5n}{2}} < 4^{2n}$, что очевидно при $n \geq 1$, поскольку $e^{\frac{5}{2}} < 4^2$. Таким образом, при α, удовлетворяющих условию $0 < \alpha \leq \dfrac{5}{4M}$, для любых $n \geq 1$ справедливо неравенство

$$\max_{\lambda \in [0, M]} |f(\lambda)| \leq s^s (2n\alpha e)^{-s},$$

и, следовательно,

$$\|x - x_n\| \leq s^s (2n\alpha e)^{-s} \|z\|.$$

Ниже, как обычно, под сходимостью метода (2.49) понимается утверждение о том, что приближения (2.49) сколь угодно близко подходят к точному решению уравнения (2.1) при подходящем выборе n и достаточно малых δ, т. е. $\lim\limits_{\delta \to 0} \left(\inf\limits_{n} \|x - x_{n,\delta}\| \right) = 0$.

Покажем, что при условии (2.50) процесс (2.49) можно сделать сходящимся, если нужным образом выбрать число итераций n в зависимости от уровня погрешности δ. Имеет место

Теорема 2.13. *При условии* (2.50) *итерационный процесс* (2.49) *сходится, если выбирать число итераций* n *в зависимости от* δ *так, чтобы* $n\delta \to 0,\ n \to \infty,\ \delta \to 0$.

Доказательство. Будем считать, $x_{0,\delta} = 0$ и рассмотрим разность

$$x - x_{n,\delta} = (x - x_n) + (x_n - x_{n,\delta}).$$

Как показано ранее, $x - x_n \to 0,\ n \to \infty$. Воспользовавшись интегральным представлением самосопряженного оператора A, получим

$$x_n - x_{n,\delta} = A^{-1}\left[E-(E-\alpha A)^{2n}\right](y-y_\delta) = \int_0^M \lambda^{-1}\left[1-(1-\alpha\lambda)^{2n}\right]dE_\lambda(y-y_\delta).$$

По индукции нетрудно показать, что

$$g_n(\lambda) = \lambda^{-1}\left[1-(1-\alpha\lambda)^{2n}\right] \le 2n\alpha. \qquad (2.52)$$

Тогда $\|x_n - x_{n,\delta}\| \le 2n\alpha\delta$. Поскольку $\|x - x_{n,\delta}\| \le \|x - x_n\| + \|x_n - x_{n,\delta}\| \le$ $\le \|x - x_n\| + 2n\alpha\delta$, и, как показано ранее, $\|x - x_n\| \to 0,\ n\to\infty$, то для сходимости итерационного метода (2.49) достаточно, чтобы $n\delta \to 0,\ n\to\infty,\ \delta\to 0$. Теорема 2.13 доказана.

Общая оценка погрешности метода (2.49) при приближённой правой части y_δ : $\|y - y_\delta\| \le \delta$, запишется в виде

$$\|x - x_{n,\delta}\| \le \|x - x_n\| + \|x_n - x_{n,\delta}\| \le s^s(2n\alpha e)^{-s}\|z\| + 2n\alpha\delta.$$

Итак, доказана

Теорема 2.14. *Если точное решение* x *уравнения* (2.1) *истокообразно представимо, то при условии* $0 < \alpha \le \frac{5}{4M}$ *для метода* (2.49) *справедлива оценка погрешности* $\|x - x_{n,\delta}\| \le s^s(2n\alpha e)^{-s}\|z\| + 2n\alpha\delta.$

Оптимизируем по n полученную оценку погрешности. Для этого найдём значение числа итераций n, при котором оценка становится минимальной. Обозначим $\xi(n) = s^s(2n\alpha e)^{-s}\|z\| + 2n\alpha\delta$. Приравняем $\xi'(n)$ нулю. Получим $-s^{s+1}n^{-s-1}(2\alpha e)^{-s}\|z\| + 2\alpha\delta = 0$. Отсюда

$$n_{\text{опт}} = s(2\alpha)^{-1} e^{-\frac{s}{s+1}} \delta^{-\frac{1}{s+1}} \|z\|^{\frac{1}{s+1}}.$$

Подставив полученное выражение для $n_{\text{опт}}$ в оценку, найдём оптимальное её значение $\left\|x - x_{n,\delta}\right\|_{\text{опт}} \le (1+s)e^{-\frac{s}{s+1}}\delta^{\frac{s}{s+1}}\|z\|^{\frac{1}{s+1}}$.

Таким образом, доказана

Теорема 2.15. *Если точное решение* x *уравнения* (2.1) *истокообразно представимо, то при условии* $0 < \alpha \le \frac{5}{4M}$ *оптимальная оценка погрешности для итерационного метода* (2.49) *имеет вид* $\left\|x - x_{n,\delta}\right\|_{\text{опт}} \le (1+s)e^{-\frac{s}{s+1}}\delta^{\frac{s}{s+1}}\|z\|^{\frac{1}{s+1}}$ *и достигается при* $n_{\text{опт}} = s(2\alpha)^{-1}e^{-\frac{s}{s+1}}\delta^{-\frac{1}{s+1}}\|z\|^{\frac{1}{s+1}}$.

Оптимальная оценка погрешности не зависит от параметра α, но от него зависит априорный момент останова итераций $n_{\text{опт}}$. Поэтому для уменьшения $n_{\text{опт}}$ и, значит, объёма вычислительной работы, следует брать α по возможности большим, удовлетворяющим условию $0 < \alpha \le \frac{5}{4M}$ и так, чтобы $n_{\text{опт}}$ было целым.

Сравнение метода (2.49) с наиболее изученным методом простой итерации $x_{n+1,\delta} = x_{n,\delta} + \alpha(y_\delta - Ax_{n,\delta})$, $x_{0,\delta} = 0$ [1–3, 9–10, 12–13, 17, 19–20, 28, 33, 35, 86, 112, 115, 117, 124] показывает, что по мажорантным оценкам погрешности эти методы одинаковы. Однако для метода (2.49) $n_{\text{опт}}$ в два раза меньше, чем для метода простой итерации, поэтому для достижения оптимальной точности методом (2.49) достаточно сделать в два раза меньше итераций, чем методом простой итерации.

Рассмотрим погрешность метода (2.49) при счёте с округлениями. Пусть $x_{n,\delta}$ – точное значение, полученное по формуле

(2.49), а z_n – значение, полученное по той же формуле с учётом вычислительных погрешностей γ_n, т. е.

$$z_{n+1} = (E-\alpha A)^2 z_n + A^{-1}\left[E-(E-\alpha A)^2\right]y_\delta + \alpha\gamma_n, \quad z_0 = 0. \quad (2.53)$$

Обозначим $\varepsilon_n = z_n - x_{n,\delta}$ и вычтем из (2.53) равенство (2.49), получим

$$\varepsilon_{n+1} = (E-\alpha A)^2 \varepsilon_n + \alpha\gamma_n \ . \quad (2.54)$$

Так как нулевые приближения равны нулю, то $\gamma_0 = 0$. По индукции покажем, что:

$$\varepsilon_n = \sum_{i=0}^{n-1} (E-\alpha A)^{2(n-1-i)} \alpha\gamma_i \ . \quad (2.55)$$

При $n=0$ из (2.54) получаем: $\varepsilon_1 = \alpha\gamma_0$. Из (2.55): $\varepsilon_1 = \alpha\gamma_0$. Следовательно, при $n=1$ формула (2.55) верна. Предположим, что (2.55) верно при $n=p$:

$$\varepsilon_p = (E-\alpha A)^{2(p-1)}\alpha\gamma_0 + (E-\alpha A)^{2(p-2)}\alpha\gamma_1 + \ldots + (E-\alpha A)^2\alpha\gamma_{p-2} + \alpha\gamma_{p-1}.$$

Покажем, что данная формула верна при $n = p+1$. Из (2.54) получаем:

$$\varepsilon_{p+1} = (E-\alpha A)^2\varepsilon_p + \alpha\gamma_p = (E-\alpha A)^2\Big[(E-\alpha A)^{2(p-1)}\alpha\gamma_0 + (E-\alpha A)^{2(p-2)}\alpha\gamma_1 +$$

$$+ \ldots + (E-\alpha A)\alpha\gamma_{p-2} + \alpha\gamma_{p-1}\Big] + \alpha\gamma_p = (E-\alpha A)^{2p}\alpha\gamma_0 + (E-\alpha A)^{2(p-1)}\alpha\gamma_1 +$$

$$+ \ldots + (E-\alpha A)^4\alpha\gamma_{p-2} + (E-\alpha A)^2\alpha\gamma_{p-1} + \alpha\gamma_p = \sum_{i=0}^{p}(E-\alpha A)^{2(p-i)}\alpha\gamma_i.$$

Следовательно, формула (2.55) верна $\forall n \in N$.

В силу (2.50) и принадлежности нуля спектру оператора A: $\|E-\alpha A\| \le 1$, поэтому $\|\varepsilon_n\| \le n\alpha\gamma$, где $\gamma = \sup\limits_p |\gamma_p|$.

Таким образом, оценка погрешности метода (2.49) при счёте с округлениями имеет вид

$$\|x-z_n\| \le \|x-x_{n,\delta}\| + \|x_{n,\delta}-z_n\| \le s^s(2n\alpha e)^{-s}\|z\| + 2n\alpha\delta + n\alpha\gamma.$$

2.2.2 Сходимость итерационного метода решения операторных уравнений в случае неединственного решения

Покажем, что метод (2.48) пригоден и тогда, когда $\lambda = 0$ – собственное значение оператора A (случай неединственного решения уравнения (2.1)). Обозначим через $N(A) = \{x \in H \mid Ax = 0\}$, $M(A)$ – ортогональное дополнение ядра $N(A)$ до H. Пусть $P(A)x$ – проекция $x \in H$ на $N(A)$, а $\Pi(A)x$ – проекция $x \in H$ на $M(A)$. Справедлива

Теорема 2.15. *Пусть* $A \ge 0$, $y \in H$, $0 < \alpha < 2/\|A\|$, *тогда для итерационного процесса* (2.48) *верны следующие утверждения*:

а) $Ax_n \to \Pi(A)y, \|Ax_n - y\| \to I(A,y) = \inf\limits_{x \in H}\|Ax - y\|$;

б) метод (2.48) *сходится тогда и только тогда, когда уравнение* $Ax = \Pi(A)y$ *разрешимо. В последнем случае* $x_n \to P(A)x_0 + x^*$, *где* x^* – *минимальное решение уравнения.*

Доказательство. Применим оператор A к методу (2.48) и получим

$$Ax_n = A(E-\alpha A)^2 x_{n-1} + \left[E-(E-\alpha A)^2\right][P(A)y + \Pi(A)y],$$

где $y = P(A)y + \Pi(A)y$. Так как $AP(A)y = 0$, то справедливо равенство $Ax_n = A(E-\alpha A)^2 x_{n-1} + \left[E-(E-\alpha A)^2\right]\Pi(A)y.$ Последнее равенство запишется в виде $v_n = (E-\alpha A)^2 v_{n-1}$, где $v_n = Ax_n - \Pi(A)y$ и

$v_n \in M(A)$. Отсюда $v_n = (E - \alpha A)^{2n} v_0$. Имеем $A \geq 0$ и A – положительно определён в $M(A)$, т. е. $(Ax, x) > 0 \quad \forall x \in M(A)$. Так как $0 < \alpha < \frac{2}{\|A\|}$, то $\|E - \alpha A\| < 1$, поэтому справедлива цепочка неравенств

$$\|v_n\| = \left\|(E - \alpha A)^{2n} v_0\right\| = \left\|\int_0^{\|A\|} (1 - \alpha\lambda)^{2n} dE_\lambda v_0\right\| \leq \left\|\int_0^{\varepsilon_0} (1 - \alpha\lambda)^{2n} dE_\lambda v_0\right\| +$$

$$+ \left\|\int_{\varepsilon_0}^{\|A\|} (1 - \alpha\lambda)^{2n} dE_\lambda v_0\right\| \leq \left\|\int_0^{\varepsilon_0} dE_\lambda v_0\right\| + q^n(\varepsilon_0)\left\|\int_{\varepsilon_0}^{\|A\|} dE_\lambda v_0\right\| = \left\|E_{\varepsilon_0} v_0\right\| +$$

$$+ q^n(\varepsilon_0)\left\|v_0 - E_{\varepsilon_0} v_0\right\| < \varepsilon$$

при $\varepsilon_0 \to 0,\ n \to \infty$ (здесь $|1 - \alpha\lambda| \leq q(\varepsilon_0) < 1$ при $\lambda \in [\varepsilon_0, \|A\|]$). Следовательно, $v_n \to 0$, откуда $Ax_n \to \Pi(A)y$ и $\Pi(A)y \in A(H)$. Таким образом, $\|Ax_n - y\| \to \|\Pi(A)y - y\| = \|P(A)y\| = I(A, y)$ [124]. Итак, а) доказано.

Докажем б). Пусть процесс (2.48) сходится. Покажем, что уравнение $Ax = \Pi(A)y$ разрешимо. Из сходимости $\{x_n\} \in H$ к $z \in H$ и из а) следует $Ax_n \to Az = \Pi(A)y$, следовательно, $\Pi(A)y \in A(H)$ и уравнение $Ax = \Pi(A)y$ разрешимо.

Пусть теперь $\Pi(A)y \in A(H)$ (уравнение $Ax = \Pi(A)y$ разрешимо), следовательно, $\Pi(A)y = Ax^*$, где x^* – минимальное решение уравнения $Ax = y$ (оно единственно в $M(A)$). Тогда метод (2.48) имеет вид

$$x_n = (E - \alpha A)^2 x_{n-1} + A^{-1}\left[E - (E - \alpha A)^2\right]\Pi(A)y =$$
$$= (E - \alpha A)^2 x_{n-1} + A^{-1}\left[E - (E - \alpha A)^2\right]Ax^* =$$

$$= (E - \alpha A)^2 x_{n-1} + \left[E - (E - \alpha A)^2\right] x^* =$$
$$= x_{n-1} + \left[E - (E - \alpha A)^2\right]\left(x^* - x_{n-1}\right).$$

Разобьём последнее равенство на два:

$$P(A)x_n = P(A)x_{n-1} + P(A)\left[E - (E - \alpha A)^2\right]\left(x^* - x_{n-1}\right) =$$
$$= P(A)x_{n-1} + \left[E - (E - \alpha A)^2\right] P(A)\left(x^* - x_{n-1}\right) =$$
$$= P(A)x_{n-1} = P(A)x_0,$$

так как $AP(A)\left(x^* - x_{n-1}\right) = 0$;

$$\Pi(A)x_n = \Pi(A)x_{n-1} + \Pi(A)\left[E - (E - \alpha A)^2\right]\left(x^* - x_{n-1}\right) =$$
$$= \Pi(A)x_{n-1} - \left[E - (E - \alpha A)^2\right]\left(\Pi(A)x_{n-1} - \Pi(A)x^*\right) =$$
$$= \Pi(A)x_{n-1} - \left[E - (E - \alpha A)^2\right]\left(\Pi(A)x_{n-1} - x^*\right),$$

так как $x^* \in M(A)$.

Обозначим $w_n = \Pi(A)x_{n-1} - x^*$, тогда $w_n = (E - \alpha A)^2 w_{n-1}$ и, аналогично v_n, можно показать, что $w_n \to 0,\ n \to \infty$. Следовательно, $\Pi(A)x_n \to x^*$. Отсюда $x_n = P(A)x_n + \Pi(A)x_n \to P(A)x_0 + x^*$. Теорема 2.15 доказана.

Замечание 2.6. *Так как* $x_0 = 0$, то $x_n \to x^*$, *т.е. процесс* (2.48) *сходится к нормальному решению, т. е. к решению с минимальной нормой*.

2.2.3 Сходимость итерационного метода в энергетической норме

Сходимость процессов (2.48) и (2.49) в норме пространства H рассмотрена в подразделе 2.2.1. Изучим сходимость метода (2.49) в энергетической норме $\|x\|_A = \sqrt{(Ax, x)}$, где $x \in H$. При этом, как обычно, число итераций n нужно выбирать в зависимости от уровня погрешности δ. Полагаем $x_{0,\delta}=0$ и рассмотрим разность

$$x-x_{n,\delta}=(x-x_n)+(x_n-x_{n,\delta}). \qquad (2.56)$$

Запишем первое слагаемое в виде

$$x-x_n=A^{-1}(E-\alpha A)^{2n}y=(E-\alpha A)^{2n}x.$$

Как было доказано в подразделе 2.2.1, $x-x_n$ бесконечно мало в норме пространства H при $n\to\infty$, но скорость сходимости при этом может быть сколь угодно малой, и для её оценки делалось предположение об истокопредставимости точного решения. При использовании энергетической нормы нам это дополнительное предположение не потребуется. Действительно, с помощью интегрального представления самосопряжённого оператора имеем

$$\|x-x_n\|_A^2=\left(A(E-\alpha A)^{2n}x,\,(E-\alpha A)^{2n}x\right)=\int\limits_0^M\lambda(1-\alpha\lambda)^{4n}\,d(E_\lambda x,x),$$

где $M=\|A\|$, E_λ – соответствующая спектральная функция, E – единичный оператор. Для оценки интересующей нас нормы найдём максимум подынтегральной функции при $\lambda\in[0,M]$. Функция $f(\lambda)=\lambda(1-\alpha\lambda)^{4n}$ – частный случай при $s=1$ функции, оцененной в подразделе 2.2.1. Поэтому при условии

$$0<\alpha\le\frac{5}{4M} \qquad (2.57)$$

$\max\limits_{\lambda\in[0,M]}|f(\lambda)|\le(4n\alpha e)^{-1}$. Следовательно, при выполнении (2.57) справедлива оценка $\|x-x_n\|_A\le(4n\alpha e)^{-1/2}\|x\|$.

Таким образом, переход к энергетической норме как бы заменяет предположение об истокопредставимости порядка $s = 1/2$ точного решения.

Оценим второе слагаемое в (2.57). Как показано в подразделе 2.2.1, справедливо равенство $x_n - x_{n,\delta} = A^{-1}\left[E - (E - \alpha A)^{2n}\right](y - y_\delta)$. Воспользовавшись интегральным представлением самосопряжённого оператора, получим

$$\|x_n - x_{n,\delta}\|_A^2 = \int_0^M \lambda^{-1}\left[1 - (1 - \alpha\lambda)^{2n}\right]^2 d(E_\lambda(y - y_\delta), y - y_\delta).$$

Обозначим через $g(\lambda)$ подынтегральную функцию и оценим ее сверху при условии (2.57). Покажем, что при любом $p = 2n \in H$ выполняется неравенство

$$g(\lambda) = \lambda^{-1}\left[1 - (1 - \alpha\lambda)^p\right]^2 \le (35/54)p\alpha, \quad p \ge 2. \tag{2.58}$$

При $p = 2$ утверждение верно. Предположим, что оно справедливо при $p = l$, т.е. $\lambda^{-1}\left[1 - (1 - \alpha\lambda)^l\right]^2 \le (35/54)l\alpha$, и покажем, что (2.58) выполняется при $p = l + 1$. Рассмотрим интересующее нас выражение

$$\lambda^{-1}\left[1 - (1 - \alpha\lambda)^{l+1}\right]^2 = \lambda^{-1}\left[1 - 2(1 - \alpha\lambda)^{l+1} + (1 - \alpha\lambda)^{2(l+1)}\right] =$$

$$= \lambda^{-1}\left[1 - (1 - \alpha\lambda)^l\right]^2 + \lambda^{-1}\left\{2(1 - \alpha\lambda)^l \alpha\lambda - (1 - \alpha\lambda)^{2l}\left[1 - (1 - \alpha\lambda)^2\right]\right\} \le$$

$$\le (35/54)l\alpha + \alpha\left[2(1 - \alpha\lambda)^l - (1 - \alpha\lambda)^{2l}(2 - \alpha\lambda)\right].$$

Чтобы доказать требуемое, достаточно убедиться что

$$B \equiv 2(1 - \alpha\lambda)^l - (1 - \alpha\lambda)^{2l}(2 - \alpha\lambda) \le 35/54. \tag{2.59}$$

Рассмотрим два случая.

1). $1 \le \alpha\lambda \le 5/4$, l – чётное $(l \ge 2)$. Тогда $0 \le (1-\alpha\lambda)^l < 1$. Требуется доказать неравенство (2.59), что равносильно

$$1-2(1-\alpha\lambda)^l+(1-\alpha\lambda)^{2l}+$$

$$+(1-\alpha\lambda)^{2l+1}-19/54 \ge 0,$$

что в свою очередь равносильно

$$1+(1-\alpha\lambda)^{2l}\ (2-\alpha\lambda)-\left[2(1-\alpha\lambda)^l+19/54\right] \ge 0. \qquad (2.60)$$

Имеем $-1/4 \le 1-\alpha\lambda \le 0$. Следовательно, $2(1-\alpha\lambda)^l+19/54<1$, а поэтому неравенство (2.60) справедливо и, значит, верно доказываемое неравенство (2.59).

2). $0<\alpha\lambda<1$, l – чётное $(l \ge 2)$. Тогда $0<(1-\alpha\lambda)^l<1$. Неравенство (2.59) равносильно $35/54-2(1-\alpha\lambda)^l+$ $+(1-\alpha\lambda)^{2l}+(1-\alpha\lambda)^{2l+1} \ge 0$, которое в свою очередь равносильно

$$4/27+2\left[1/2-(1-\alpha\lambda)^l\right]^2+(1-\alpha\lambda)^{2l+1}-(1-\alpha\lambda)^{2l} \ge 0. \qquad (2.61)$$

Так как $2\left[1/2-(1-\alpha\lambda)^l\right]^2 \ge 0$, то для доказательства справедливости неравенства (2.61) достаточно показать, что выполняется:: $\varphi_l(\lambda) \equiv 4/27+(1-\alpha\lambda)^{2l+1}-(1-\alpha\lambda)^{2l} \ge 0$. Нетрудно убедиться, что $\min\limits_{0<\alpha\lambda<1} \varphi_l(\lambda) \ge 0$ для $l \ge 2$. Отсюда вытекает справедливость неравенства (2.61) и, следовательно, неравенства (2.59). Эти два рассмотренных случая исчерпывают индукцию, значит, неравенство (2.58) справедливо. Таким образом, $\left\|x_n-x_{n,\delta}\right\|_A^2 \le (35/54)2n\alpha\delta^2$, $n \ge 1$. Отсюда

$$\left\| x_n - x_{n,\delta} \right\|_A \le \left[(35/27) n\alpha \right]^{1/2} \delta, \quad n \ge 1 . \qquad (2.62)$$

Покажем, что порядок оценки для $\left\| x_{n,\delta} - x_n \right\|_A$ нельзя улучшить, т.е. показатель степени, с которым n входит в оценку, найден правильно. Найдём $g'_n(\lambda)$.

$$g'_n(\lambda) = -\lambda^{-2} \left[1 - (1-\alpha\lambda)^{2n} \right]^2 + 4\lambda^{-1} \left[1 - (1-\alpha\lambda)^{2n} \right] n\alpha (1-\alpha\lambda)^{2n-1} =$$
$$= \lambda^{-2} \left[1 - (1-\alpha\lambda)^{2n} \right] \left[-1 + (1-\alpha\lambda)^{2n} + 4n\alpha\lambda (1-\alpha\lambda)^{2n-1} \right].$$

Если $1-(1-\alpha\lambda)^{2n} = 0$, то $g_n(\lambda) = 0$, и функция $g_n(\lambda)$ не будет достигать максимального значения. Значит, точка максимума определяется из $-1 + (1-\alpha\lambda)^{2n} + 4n\alpha\lambda(1-\alpha\lambda)^{2n-1} = 0$. Отсюда $1 = (1-\alpha\lambda)^{2n-1}(1-\alpha\lambda + 4n\alpha\lambda)$.

Пусть $\alpha\lambda = a_n$, тогда последнее равенство перепишется в виде

$$(1-a_n)^{2n-1}(1-a_n + 4na_n) = 1. \qquad (2.63)$$

Так как $|1-a_n| < 1$, то $|1-a_n|^{2n-1} < 1$. Значит, если бы a_n не стремились к нулю при $n \to \infty$, а были бы лишь ограничены снизу, то равенство (2.63) не выполнялось бы. Таким образом, получаем, что $a_n \to 0$ при $n \to \infty$. Из (2.63) следует, что $(1-a_n)^{2n-1} = \dfrac{1}{1+(4n-1)a_n}$, $(1-a_n)^{2n} = \dfrac{1-a_n}{1+(4n-1)a_n}$, отсюда

$$1-(1-a_n)^{2n} = \frac{4na_n}{1+(4n-1)a_n}. \qquad (2.64)$$

В левой части (2.64) стоит величина ограниченная, следовательно, и в правой части должна быть ограниченная величина.

В знаменателе правой части стоит величина, ограниченная снизу, поэтому, для ограниченности величины $\dfrac{4na_n}{1+(4n-1)a_n}$, необходимо, чтобы a_n стремилось к нулю не медленнее, чем $1/n$, т.е. $a_n = b_n/n$, где $\{b_n\}$ – ограниченная числовая последовательность: $0 < b_n \le B < \infty$. Подставим $a_n = b_n/n$ в выражение для $g_n(\lambda)$, получим

$$g_n(\lambda) = \frac{\left[1-(1-a_n)^{2n}\right]^2}{a_n}\alpha = \frac{(4na_n)^2\alpha}{a_n\left[1+(4n-1)a_n\right]^2} = \frac{16nb_n\alpha}{\left[1+(4n-1)\,b_n/n\right]^2}.$$

Покажем, что нуль не является предельной точкой для последовательности $\{b_n\}$. Предположим противное, что какая-то подпоследовательность $\{b_m\}$, где $m \in N_0 \subset N$, последовательности $\{b_n\}$ стремится к нулю при $m \to \infty$, тогда $\dfrac{4ma_m}{1+(4m-1)a_m} = \dfrac{4b_m}{1+(4m-1)\,b_m/m} \sim 4b_m$.

С другой стороны,

$$(1-b_m/m)^{2m} = 1-2b_m + \frac{2m-1}{m}b_m{}^2 - \frac{(2m-1)(2m-2)}{3m^2}b_m{}^3 + \dots\ .$$

Следовательно, $1-(1-b_m/m)^{2m} \sim 2b_m$. Так как из (2.64) следует, что

$$1-(1-b_m/m)^{2m} = \frac{4b_m}{1+(4m-1)\,b_m/m}, \qquad (2.65)$$

то $4b_m$ должно быть эквивалентно $2b_m$, что неверно. Пришли к противоречию. Значит, b_m не стремится к нулю при $m \to \infty$, и нуль не является предельной точкой числовой последовательности $\{b_n\}$. Значит, $0 < b \le b_n \le B < \infty$.

Из $g_n(\lambda)=\dfrac{16nb_n\alpha}{[1+(4n-1)b_n/n]^2}$ видно, что в оценку для $\|x_n - x_{n,\delta}\|_A$ n входит с показателем степени $1/2$. Значит, найденная оценка для $\|x_n - x_{n,\delta}\|_A$ верна по порядку.

Попытаемся уточнить константу $(35/27)^{1/2}$, фигурирующую в оценке $\|x_n - x_{n,\delta}\|_A$. Для этого найдём предельную точку числовой последовательности $\{b_n\}$. Покажем, что $\{b_n\}$ сходится. Так как $\{b_n\}$ – ограниченная числовая последовательность и пространство H гильбертово, то по лемме Больцано-Вейерштрасса [121, с. 105] из нее можно выделить сходящуюся подпоследовательность $\{b_m\}$ такую, что $b_m \to b^*$.

Перейдём к пределу в обеих частях равенства (2.65), получим

$$\lim_{m\to\infty}\left[1-(1-b_m/m)^{2m}\right]=1-\lim_{m\to\infty}\left\{\left[(1-b_m/m)^{-m/b_m}\right]^{-b_m}\right\}^2=$$

$$=1-e^{-2b^*}, \qquad \lim_{m\to\infty}\frac{4b_m}{1+(4m-1)b_m/m}=\frac{4b^*}{1+4b^*}.$$

Таким образом, если обозначить через $z=2b^*$, то получим следующее уравнение:

$$1-e^{-z}=\frac{2z}{1+2z},\quad e^{-z}=1-\frac{2z}{1+2z},\quad e^{-z}=\frac{1}{1+2z},\quad e^{z}=1+2z.$$

Это уравнение имеет два решения: $z_1=0$ и $z_2\approx 1{,}256$. Т. е. $b_1^*=0$ и $b_2^*\approx 1{,}256/2$ и так как нуль не является предельной точкой для последовательности $\{b_n\}$, то $b_m\to b_2^*\approx 0{,}628$. Так как $\{b_m\}$ –

произвольная подпоследовательность последовательности $\{b_n\}$, то и сама $\{b_n\}$ сходится к b_2^*.

А теперь вернёмся к уточнению константы $(35/27)^{1/2}$ в оценке для $\|x_n - x_{n,\delta}\|_A$. Рассмотрим функцию $g_n(\lambda) = \dfrac{16nb_n\alpha}{[1+(4n-1)b_n/n]^2}$.

Отсюда $\max\limits_{0<a_n\le 5/4} \dfrac{g_n(\lambda)}{n\alpha} \to \dfrac{16b^*}{\left(1+4b^*\right)^2} \approx 0{,}814$. Поэтому нельзя получить оценки лучшей, чем $\|x_{n,\delta} - x_n\|_A \le (0{,}814n\alpha)^{1/2}\delta$. Таким образом, полученная нами константа $(35/27)^{1/2}$ завышена не более чем в 1,26 раза.

Поскольку имеем

$$\|x - x_{n,\delta}\|_A \le \|x - x_n\|_A + \|x_n - x_{n,\delta}\|_A \le \|x - x_n\|_A +$$

$$+\left[(35/27)n\alpha\right]^{1/2}\delta, \quad n \ge 1 \text{ и } \|x - x_n\|_A \to 0, \quad n \to \infty,$$

то для сходимости $\|x - x_{n,\delta}\|_A \to 0, \quad n \to 0$, достаточно, чтобы $\sqrt{n}\delta \to 0,\ n \to \infty,\ \delta \to 0$.

Таким образом, если в процессе (2.2) выбрать число итераций $n = n(\delta)$, зависящим от δ так, что $\sqrt{n}\delta \to 0,\ n \to \infty,\ \delta \to 0$, то получим регу-ляризованный метод, обеспечивающий сходимость к точному решению в энергетической норме.

Запишем теперь общую оценку погрешности для метода (2.49) при выполнении условия (2.57)

$$\|x - x_{n,\delta}\|_A \le (4n\alpha e)^{-1/2}\|x\| + \left[(35/27)n\alpha\right]^{1/2}\delta, \quad n \ge 1. \qquad (2.66)$$

Итак, доказана

Теорема 2.16. *Итерационный процесс* (2.49) *при условии* (2.57) *сходится в энергетической норме пространства* H, *если выбирать* *число итераций* n *из условия* $\sqrt{n}\delta \to 0,\ n \to \infty,\ \delta \to 0.$ *Для процесса* (2.49) *справедлива оценка погрешности* (2.66).

Оптимизируем полученную оценку (2.66) по n, т. е. при заданном δ найдем такое значение числа итераций n, при котором оценка погрешности становится минимальной. Приравняв нулю производную по n от правой части неравенства (2.66), получим

$$n_{\text{опт}} = (35/27)^{-1/2}\,(2\alpha)^{-1} e^{-1/2} \delta^{-1} \|x\|. \tag{2.67}$$

Подставив $n_{\text{опт}}$ в оценку (2.66), получим её оптимальное значение

$$\|x - x_{n,\delta}\|_A^{\text{опт}} \le (35/27)^{1/4} \left(2\delta\|x\|\right)^{1/2} e^{-1/4}. \tag{2.68}$$

Из (2.68) вытекает, что оптимальная оценка погрешности не зависит от параметра α. Но $n_{\text{опт}}$ зависит от α, поэтому для уменьшения n и, значит, объема вычислительной работы следует брать α возможно большим, удовлетворяющим условию (2.57), и так, чтобы $n_{\text{опт}}$ было целым. Таким образом, доказана

Теорема 2.17. *В условиях предыдущей теоремы оптимальная оценка погрешности для итерационного процесса* (2.49) *имеет вид* (2.68) *и получается при* $n_{опт}$ *из* (2.67).

Ответ на вопрос о том, когда из сходимости метода (2.49) в энергетической норме следует сходимость в обычной норме гильбертова пространства H, даёт

Теорема 2.18. *Если выполнены условия* 1) $E_\varepsilon x_{n,\delta} = 0,$ 2) $E_\varepsilon x = 0,$ *где* $E_\varepsilon = \int_0^\varepsilon dE_\lambda,$ ε – *фиксированное положительное число* $(0 < \varepsilon < \|A\|)$, *то из сходимости* $x_{n,\delta}$ *к* x *в энергетической норме следует сходимость в обычной норме гильбертова пространства*.

Замечание 2.7. *Так как* $x_{n,\delta} = A^{-1}\left[E - (E - \alpha A)^{2n}\right] y_\delta$, *то для того, чтобы* $x_{n,\delta}$ *удовлетворяло условию* $E_\varepsilon x_{n,\delta} = 0$, *достаточно потребовать, чтобы* $E_\varepsilon y_\delta = 0$. *Таким образом, если* $E_\varepsilon x = 0$ *и* $E_\varepsilon y_\delta = 0$, *то из сходимости метода итераций в энергетической норме следует его сходимость в обычной норме пространства* H. *И, следовательно, для оценки погрешности не потребуется предположения истокопредставимости точного решения.*

2.2.4 Правило останова по невязке в итерационном методе решения операторных уравнений

Решается задача из подраздела 2.2.1. Априорный выбор числа итераций $n_{\text{опт}}$ получен в предположении, что точное решение x истокопредставимо, т. е. $x = A^s z,\ s > 0$. Однако не всегда имеются сведения об элементе z и степени истокопредставимости s. Тем не менее, метод (2.49) становится вполне эффективным, если воспользоваться следующим правилом останова по невязке [9, 12, 20, 54, 94].

Пусть ε – уровень останова, $\varepsilon = b\delta,\ b > 1$. Момент останова m определяется условиями (2.19). Предположим, что при начальном приближении невязка достаточно велика, а именно, больше уровня останова, т. е. $\|Ax_{0,\delta} - y_\delta\| > \varepsilon$. Докажем возможность применения правила (2.19) для метода итераций (2.49).

Рассмотрим семейство функций $g_n(\lambda) = \lambda^{-1}\left[1 - (1 - \alpha\lambda)^{2n}\right]$ из подраздела 2.2.1, откуда следует, что для $g_n(\lambda)$ выполняются условия:

$$\sup_{0 \le \lambda \le M} |g_n(\lambda)| \le 2\gamma n,\ \ n > 0,\ 0 < \alpha < \frac{2}{M}, (\gamma = \alpha, M = \|A\|), \tag{2.69}$$

$$\sup_{0\le\lambda\le M} |1-\lambda g_n(\lambda)| \le \gamma_0, \; 0<\alpha<\frac{2}{M}, (\gamma_0=1), \tag{2.70}$$

$$1-\lambda g_n(\lambda)\to 0,\; n\to\infty,\; \forall\lambda\in(0,M],\; 0<\alpha<\frac{2}{M}, \tag{2.71}$$

$$\sup_{0\le\lambda\le M} \lambda^s|1-\lambda g_n(\lambda)| \le \gamma_s n^{-s},\; n>0, 0<\alpha\le\frac{5}{4M}, 0\le s<\infty, \tag{2.72}$$

где $\gamma_s = \left(\frac{s}{2\alpha e}\right)^s$. Аналогично подразделу 2.1.4 доказываются следующие леммы.

Лемма 2.6. *Пусть* $A=A^*\ge 0,\ \|A\|\le M$. *Тогда для* $\forall w\in H$ $(E-Ag_n(A))w\to 0,\ n\to\infty$.

Лемма 2.7. *Пусть* $A=A^*\ge 0,\ \|A\|\le M$. *Тогда* $\forall v\in\overline{R(A)}$ *имеет место соотношение*

$$n^s\left\|A^s(E-Ag_n(A))v\right\|\to 0,\; n\to\infty,\; 0\le s<\infty. \tag{2.73}$$

Лемма 2.8. *Пусть* $A=A^*\ge 0, \|A\|\le M$. *Если для некоторого* $n_k<\bar{n}=const$ *и* $v_0\in\overline{R(A)}$ *при* $k\to\infty$ *имеем* $\omega_k = A(E-Ag_{n_k}(A))v_0\to 0$, *то* $v_k=(E-Ag_{n_k}(A))v_0\to 0.$

Используем доказанные леммы при доказательстве следующей теоремы.

Теорема 2.19. *Пусть* $A=A^*\ge 0,\ \|A\|\le M$ *и пусть момент останова* $m=m(\delta)$ *в методе* (2.49) *выбирается по правилу* (2.19). Тогда $x_{m,\delta}\to x$ при $\delta\to 0$.

Доказательство. По индукции легко показать, что

$$x_{n,\delta}=A^{-1}\left[E-(E-\alpha A)^{2n}\right]y_\delta.$$

Следовательно,

$$x_{n,\delta} - x = g_n(A)(y_\delta - y) - (E - Ag_n(A))x. \tag{2.74}$$

Отсюда,

$$Ax_{n,\delta} - y_\delta = -A[E - Ag_n(A)]x - (E - Ag_n(A))(y_\delta - y). \tag{2.75}$$

В силу лемм 2.6 и 2.7 имеем

$$\|(E - Ag_n(A))x\| \to 0, \; n \to \infty, \tag{2.76}$$

$$\sigma_n = n\|A(E - Ag_n(A))x\| \to 0, \; n \to \infty. \tag{2.77}$$

Кроме того, из (2.69) и (2.70) следует, что

$$\|g_n(A)(y_\delta - y)\| \le 2\gamma n\delta, \tag{2.78}$$

$$\|E - Ag_n(A)\| \le \gamma_0 = 1. \tag{2.79}$$

Применим правило останова (2.19). Тогда $\| Ax_{m,\delta} - y_\delta \| \le b\delta, \; b > 1$ и из (2.75) и (2.79) получим

$$\|A(E - Ag_m(A))x\| \le \|Ax_{m,\delta} - y_\delta\| + \|(E - Ag_m(A))(y_\delta - y)\| \le (b+1)\delta. \tag{2.80}$$

Для $\forall n < m \quad \| Ax_{n,\delta} - y_\delta \| > \varepsilon$, поэтому

$$\|A(E - Ag_n(A))x\| \ge \|Ax_{n,\delta} - y_\delta\| - \|(E - Ag_n(A))(y - y_\delta)\| \ge (b-1)\delta.$$

Итак, для $\forall n < m$

$$\|A(E - Ag_n(A))x\| \ge (b-1)\delta. \tag{2.81}$$

Из (2.77) и (2.81) получаем при $n = m - 1$ $\frac{\sigma_{m-1}}{m-1} = \|A(E - Ag_{m-1}(A))x\| \ge (b-1)\delta$ или $(m-1)\delta \le \frac{\sigma_{m-1}}{b-1} \to 0, \; \delta \to 0$, (так как из (2.77) $\sigma_m \to 0, \; m \to \infty$). Если при этом $m \to \infty$ при $\delta \to 0$, то, используя (2.74), получим

$$\|x_{m,\delta} - x\| \le \|(E - Ag_m(A))x\| + \|g_m(A)(y_\delta - y)\| \le \|(E - Ag_m(A))x\| + 2\gamma m\delta \to 0,$$

при $m\to\infty,\ \delta\to 0$, так как из (2.76) $\|(E-Ag_m(A))x\|\to 0,\ m\to\infty$.

Если же для некоторых δ_n последовательность $m(\delta_n)$ окажется ограниченной, то и в этом случае $x_{m(\delta_n),\delta_n}\to x,\ \delta_n\to 0$. Теорема 2.19 доказана.

Теорема 2.20. *Пусть выполнены условия теоремы* 2.19 *и пусть* $x=A^S z,\ s>0$, *тогда справедливы оценки*

$$m(\delta)\le 1+\frac{s+1}{2\alpha e}\left[\frac{\|z\|}{(b-1)\delta}\right]^{\frac{1}{s+1}},$$

$$\|x_{m(\delta),\delta}-x\|\le[(b+1)\delta]^{\frac{s}{s+1}}\|z\|^{\frac{1}{s+1}}+2\alpha\left\{1+\frac{s+1}{2\alpha e}\left[\frac{\|z\|}{(b-1)\delta}\right]^{\frac{1}{s+1}}\right\}\delta. \qquad (2.82)$$

Доказательство. Используя результаты подраздела 2.2.1, имеем

$$\|A(E-Ag_{m-1}(A))x\|=\|A^{s+1}(E-Ag_{m-1}(A))z\|=\left\|\int_0^M\lambda^{s+1}(1-\alpha\lambda)^{2(m-1)}dE_\lambda z\right\|\le$$
$$\le(s+1)^{s+1}[2(m-1)\alpha e]^{-(s+1)}\|z\|.$$

Из неравенства (2.81) получим $(b-1)\delta\le(s+1)^{s+1}[2(m-1)\alpha e]^{-(s+1)}\|z\|$, откуда $m\le 1+\frac{s+1}{2\alpha e}\left[\frac{\|z\|}{(b-1)\delta}\right]^{\frac{1}{s+1}}$. При помощи неравенства моментов оценим

$$\|(E-Ag_{m-1}(A))x\|=\|A^s(E-Ag_{m-1}(A))z\|\le$$
$$\le\|A^{s+1}(E-Ag_{m-1}(A))z\|^{\frac{s}{s+1}}\|(E-Ag_{m-1}(A))z\|^{\frac{1}{s+1}}\le$$
$$\le\|A(E-Ag_{m-1}(A))x\|^{\frac{s}{s+1}}\|z\|^{\frac{1}{s+1}}\le[(b+1)\delta]^{\frac{s}{s+1}}\|z\|^{\frac{1}{s+1}}.$$

Тогда, поскольку соотношение (2.74) справедливо для любых n, то имеем

$$\left\|x_{m,\delta}-x\right\| \le \left\|(E-Ag_m(A))x\right\| + \left\|g_m(A)(y_\delta - y)\right\| \le \left[(b+1)\delta\right]^{\frac{s}{s+1}} \|z\|^{\frac{1}{s+1}} + 2m\alpha\delta \le$$

$$\le \left[(b+1)\delta\right]^{\frac{s}{s+1}} \|z\|^{\frac{1}{s+1}} + 2\alpha\left\{1+\frac{s+1}{2\alpha e}\left[\frac{\|z\|}{(b-1)\delta}\right]^{\frac{1}{s+1}}\right\}\delta .$$

Теорема 2.20 доказана.

Замечание 2.8. *Порядок оценки* (2.82) *есть* $O\left(\delta^{s/(s+1)}\right)$ *и, как следует из* [12]*, он оптимален в классе задач с истокопредставимыми решениями.*

Замечание 2.9. *Хотя формулировка теоремы* 2.20 *даётся с указаниями степени истокопредставимости* s *и истокопредставляемого элемента* z*, на практике их значение не потребуется, так как они не содержатся в правиле останова* (2.19). *И тем не менее в теореме* 2.20 *утверждается, что будет автоматически выбрано количество итераций* m*, обеспечивающее оптимальный порядок погрешности. Но даже если истокопредставимость точного решения отсутствует, останов по невязке* (2.19), *как показывает теорема* 2.19, *обеспечивает сходимость метода, т. е. его регуляризующие свойства.*

2.2.5 Правило останова по соседним приближениям в итерационном методе решения операторных уравнений

В действительном гильбертовом пространстве H решается уравнение I рода (2.1), где A – ограниченный, положительный, несамосопряжённый оператор, для которого нуль не является собственным значением. Считается, тем не менее, что нуль принадлежит спектру оператора A, и, следовательно, задача некорректна. Предположим, что $y \in R(A)$, т. е. при точной правой части

y существует единственное решение x уравнения (2.1). Для его отыскания используем явную схему метода итераций

$$x_{n+1} = \left(E - \alpha A^* A\right)^2 x_n + A^{-1}\left[E - \left(E - \alpha A^* A\right)^2\right] y,\ x_0 \in H. \qquad (2.83)$$

В случае, когда правая часть y уравнения (2.1) известна приближённо, $\|y - y_\delta\| \le \delta$, метод (2.83) примет вид:

$$z_{n+1} = \left(E - \alpha A^* A\right)^2 z_n + A^{-1}\left[E - \left(E - \alpha A^* A\right)^2\right] y_\delta + \left(E - \alpha A^* A\right)^2 u_n,\ z_0 \in H. \qquad (2.84)$$

Здесь $0 < \alpha \le \dfrac{5}{4\|A^* A\|}$, u_n – ошибки вычисления итераций, $\|u_n\| \le \beta$. Для простоты считаем, что $\|A\| = 1$. Обозначим через $C = \left(E - \alpha A^* A\right)^2$, $B = A^{-1}\left[E - \left(E - \alpha A^* A\right)^2\right]$. Тогда метод (2.84) запишется в виде $z_{n+1} = Cz_n + By_\delta + Cu_n$. В дальнейшем будем использовать равенство $A^* Ax = A^* y$.

Воспользуемся правилом останова (2.34). Покажем, что метод (2.84) с правилом останова (2.34) сходится. Получим оценку для момента останова. Аналогично подразделу 2.1.5 доказываются следующие леммы.

Лемма 2.9. *Пусть приближение* w_n *определяется равенствами* $w_0 = z_0,$ $w_{n+1} = Cw_n + By + Cu_n,\ n \ge 0,$ *тогда справедливо неравенство*

$$\sum_{k=0}^{n} \left\|w_k - w_{k+1} + Cu_k\right\|^2 \le \left\|w_0 - x\right\|^2 + \sum_{k=0}^{n-1} \left\|Cu_k\right\|^2.$$

Лемма 2.10. *При любом* $w_0 \in H$ *и произвольной последовательности ошибок* $\{u_n\}$, *удовлетворяющих условию* $\|u_n\| \le \beta$, *выполнено неравенство*

$$\varlimsup_{n\to\infty} \|w_n - w_{n+1}\| \le 2\|C\|\beta.$$

Справедлива

Теорема 2.21. *Пусть уровень останова* $\varepsilon = \varepsilon(\delta, \beta)$ *выбирается как функция от уровней* δ *и* β *норм погрешностей* $y - y_\delta$ *и* u_n. *Тогда справедливы следующие утверждения:*

а) если $\varepsilon(\delta,\beta) > 2\|C\|\beta$, *то момент останова* m *определен при любом начальном приближении* $z_0 \in H$ *и любых* y_δ *и* u_n, *удовлетворяющих условиям* $\|y - y_\delta\| \le \delta, \quad \|u_n\| \le \beta$;

б) если $\varepsilon(\delta,\beta) > \|B\|\delta + 2\|C\|\beta$, *то справедлива оценка*

$$m \le \frac{\|z_0 - x\|^2}{(\varepsilon - \|B\|\delta - 2\|C\|\beta)(\varepsilon - \|B\|\delta)};$$

в) если, кроме того, $\varepsilon(\delta,\beta) \to 0,\ \delta,\beta \to 0$ и $\varepsilon(\delta,\beta) \ge d\left(\|B\|\delta + \|C\|\beta^p\right)$, *где* $d > 1,\ p \in (0,1)$, *то* $\lim\limits_{\delta,\beta\to 0} \|z_m - x\| = 0.$

Доказательство. а). По индукции нетрудно показать, что

$$z_n = C^n z_0 + C\sum_{k=0}^{n-1} C^k \left(C^{-1} B y_\delta + u_{n-k-1}\right), \tag{2.85}$$

отсюда $w_n = C^n w_0 + A^{-1}\left(E - C^n\right) y + C\sum\limits_{k=0}^{n-1} C^k u_{n-k-1}$. Учитывая, что $z_0 = w_0$, получим

$$\|z_n - z_{n+1}\| \le \|w_n - w_{n+1}\| + \left\|BC^n (y - y_\delta)\right\|. \tag{2.86}$$

Используя интегральное представление оператора, показывается, что $\left\|BC^{n}(y-y_{\delta})\right\| \to 0,\ n \to \infty$. Поэтому (см. лемму 2.10)

$$\underline{\lim}_{n\to\infty} \|z_n - z_{n+1}\| \le \underline{\lim}_{n\to\infty} \|w_n - w_{n+1}\| \le 2\|C\|\beta.$$

Следовательно, условием $\varepsilon(\delta,\beta) > 2\|C\|\beta$ момент останова m определён при любом начальном приближении $z_0 \in H$ и любых y_δ, $\|y_\delta - y\| \le \delta$, и u_n, $\|u_n\| \le \beta$.

б). Рассмотрим последовательность

$$w_0 = z_{0,}\quad w_{n+1} = Cw_n + By + Cu_n,\ n \ge 0$$

и определим момент останова m' условием

$$\left.\begin{aligned} &\|w_n - w_{n+1}\| > \varepsilon - \|B\|\delta, \quad (n < m'),\\ &\|w_{m'} - w_{m'+1}\| \le \varepsilon - \|B\|\delta. \end{aligned}\right\} \tag{2.87}$$

Из (2.86) следует, что $m \le m'$. Из леммы 2.9 при $n = m'$ получим

$$\sum_{k=0}^{m'} \|w_k - w_{k+1} + Cu_k\|^2 \le \|w_0 - x\|^2 + \sum_{k=0}^{m'-1} \|Cu_k\|^2 .$$

Отсюда $\sum\limits_{k=0}^{m'-1} \|w_k - w_{k+1} + Cu_k\|^2 \le \|w_0 - x\|^2 + \sum\limits_{k=0}^{m'-1} \|Cu_k\|^2$. Так как при $n < m'$ имеем $\|w_n - w_{n+1}\| > \varepsilon - \|B\|\delta$, то $m'(\varepsilon - \|B\|\delta - \|C\|\beta)^2 \le \|w_0 - x\|^2 + m'\|C\|^2\beta^2$.

Учитывая, что $w_0 = z_0$ и $m \le m'$, получим

$$m' \le m \le \frac{\|z_0 - x\|^2}{(\varepsilon - \|B\|\delta - 2\|C\|\beta)(\varepsilon - \|B\|\delta)}.$$

в). Из (2.85) вычтем $x = C^n x + \sum\limits_{k=0}^{n-1} BC^k y$, получим

$$z_n - x = C^n(z_0 - x) + C\sum_{k=0}^{n-1} C^k\left[C^{-1}B(y_\delta - y) + u_{n-k-1}\right]. \qquad (2.88)$$

Отсюда

$$\|\Delta_n\| \le \left\|C^n\Delta_0\right\| + \left(\|B\|\delta + \|C\|\beta\right)n\,, \qquad (2.89)$$

где $\Delta_n = z_n - x$, $\Delta_0 = z_0 - x$. В частности, (2.89) справедливо и при $n = m$.

Так как спектр оператора $C = \left(E - \alpha A^* A\right)^2$ принадлежит $[0,1]$, то нетрудно показать, что при $0 < \alpha \le 5/4$ $\left\|C^n(E - C)\right\| \le \dfrac{1}{n+1}$. Поэтому из (2.88) при $n = m-1$ имеем $\|z_{m-1} - z_m\| \le \dfrac{2}{m}\left\|C^{\frac{m-1}{2}}(z_0 - x)\right\| + \|B\|\delta + \|C\|(2 + \ln m)\beta$.

Поскольку по условию теоремы $\varepsilon(\delta,\beta) \ge d\left(\|B\|\delta + \|C\|\beta^p\right)$, $d > 1$, $p \in (0,1)$, то при всех достаточно малых δ, β выполняется неравенство $\varepsilon(\delta,\beta) > \|B\|\delta + 2\|C\|\beta$, поэтому из б) получим $m \le \dfrac{\|z_0 - x\|^2}{\left(\varepsilon - \|B\|\delta - 2\|C\|\beta\right)\left(\varepsilon - \|B\|\delta\right)}$. Так как $\|z_{m-1} - z_m\| > \varepsilon$, то $\varepsilon \le \dfrac{2}{m}\left\|C^{\frac{m-1}{2}}(z_0 - x)\right\| + \|B\|\delta + \|C\|(2 + \ln m)\beta$. Отсюда

$$m\left(\|B\|\delta + \|C\|\beta\right) \le \frac{2\left\|C^{\frac{m-1}{2}}(z_0 - x)\right\|\left(\|B\|\delta + \|C\|\beta\right)}{\varepsilon - \|B\|\delta - \|C\|\beta\left[2 + \ln\dfrac{\|z_0 - x\|^2}{\left(\varepsilon - \|B\|\delta - 2\|C\|\beta\right)\left(\varepsilon - \|B\|\delta\right)}\right]}.$$

Следовательно, $m(\|B\|\delta + \|C\|\beta) \to 0$ при $m \to \infty$, $\delta, \beta \to 0$. Так как при $m \to \infty$ $\left\|C^m \Delta_0\right\| \to 0$, то

$$\lim_{\substack{\delta\to 0\\ \beta\to 0}} \|\Delta_m\| \le \lim_{\substack{\delta\to 0\\ \beta\to 0}} \|z_m - x\| \le \lim_{\substack{\delta\to 0\\ \beta\to 0}} \left(\left\|C^m \Delta_0\right\| + m(\|B\|\delta + \|C\|\beta)\right) = 0 .$$

Теорема 2.21 доказана.

2.3 Итерационный метод явного типа с переменным шагом решения некорректных уравнений

Как известно, погрешность метода простой итерации с постоянным [28] или переменным [29] шагом зависит от суммы шагов по антиградиенту, и притом так, что для сокращения числа операций желательно, чтобы шаги по антиградиенту были как можно большими. Однако на эти шаги накладываются ограничения сверху [28–29]. Возникает идея попытаться ослабить эти ограничения. Это удается сделать, выбирая для шага три значения α, β, γ попеременно, где γ уже не обязано удовлетворять прежним требованиям.

В гильбертовом пространстве H решается уравнение (2.1) с положительно определённым ограниченным самосопряжённым оператором A, для которого нуль не является собственным значением. Однако нуль принадлежит спектру оператора A, следовательно, задача некорректна. Предполагая существование единственного точного решения x при точной правой части y, будем искать его приближенное значение x_n, используя метод

$$\begin{gathered} x_{n+1} = x_n - \alpha_{n+1}(Ax_n - y), \quad x_0 = 0, \\ \alpha_{3n+1} = \alpha, \quad \alpha_{3n+2} = \beta, \quad \alpha_{3n+3} = \gamma, \quad n = 0,1,2,\ldots. \end{gathered} \tag{2.90}$$

В случае приближенной правой части y_δ, $\|y - y_\delta\| \le \delta$ уравнения (2.1) метод (2.90) примет вид

$$x_{n+1,\delta} = x_{n,\delta} - \alpha_{n+1}\left(Ax_{n,\delta} - y_\delta\right), \quad x_{0,\delta} = 0,$$
$$\alpha_{3n+1} = \alpha, \quad \alpha_{3n+2} = \beta, \quad \alpha_{3n+3} = \gamma, \quad n = 0,1,2,\ldots. \tag{2.91}$$

2.3.1 Сходимость метода с априорным выбором числа итераций

По индукции нетрудно показать, что

$$x_{n+1} = \alpha_{n+1} y + \alpha_n (E - \alpha_{n+1} A) y +$$
$$+ \ldots + \alpha_1 (E - \alpha_{n+1} A)(E - \alpha_n A) \ldots (E - \alpha_2 A) y.$$

Для упрощения считаем $\| A \| = 1$. Воспользовавшись интегральным представлением самосопряженного оператора, получим

$$x - x_n = A^{-1} y - [\alpha_n + \alpha_{n-1}(E - \alpha_n A) + \ldots + \alpha_1 (E - \alpha_n A)(E - \alpha_{n-1} A) \ldots (E - \alpha_2 A)] y =$$
$$= \int_0^1 \frac{1}{\lambda} \{1 - \lambda[\alpha_n + \alpha_{n-1}(1 - \alpha_n \lambda) + \ldots + \alpha_1 (1 - \alpha_n \lambda) \ldots (1 - \alpha_2 \lambda)]\}\, dE_\lambda y.$$

Так как

$$1 - \lambda[\alpha_n + \alpha_{n-1}(1 - \alpha_n \lambda) + \ldots + \alpha_1 (1 - \alpha_n \lambda) \ldots (1 - \alpha_2 \lambda)] = (1 - \alpha_1 \lambda)(1 - \alpha_2 \lambda) \ldots (1 - \alpha_n \lambda),$$

то

$$x - x_n = \int_0^1 \lambda^{-1} (1 - \alpha_1 \lambda)(1 - \alpha_2 \lambda) \ldots (1 - \alpha_n \lambda)\, dE_\lambda y =$$
$$= \int_0^1 \lambda^{-1} (1 - \alpha\lambda)^k (1 - \beta\lambda)^l (1 - \gamma\lambda)^m \, dE_\lambda y .$$

Здесь k, l, m – натуральные показатели, где $l + m + k = n$. Потребуем, чтобы при $\lambda \in (0,1]$ и положительных α, β, γ выполнялись условия

$$\left.\begin{array}{l} |(1-\alpha\lambda)| < 1, \text{ (т.е. } 0 < \alpha < 2), \\ |(1-\alpha\lambda)(1-\beta\lambda)| < 1, \\ |(1-\alpha\lambda)(1-\beta\lambda)(1-\gamma\lambda)| < 1. \end{array}\right\} \qquad (2.92)$$

Докажем сходимость процесса (2.90) при точной правой части y. Справедлива

Теорема 2.22. *Итерационный процесс* (2.90) *при условии* (2.92) *сходится в норме гильбертова пространства*.

Доказательство. Поскольку

$$x - x_n = \int_0^{\varepsilon} \lambda^{-1}(1-\alpha\lambda)^k (1-\beta\lambda)^l (1-\gamma\lambda)^m \, dE_\lambda y +$$

$$+ \int_{\varepsilon}^{1} \lambda^{-1}(1-\alpha\lambda)^k (1-\beta\lambda)^l (1-\gamma\lambda)^m \, dE_\lambda y \ ,$$

то, считая $k = l = m = n/3$, при условиях (2.92) получим

$$\left\| \int_{\varepsilon}^{1} \lambda^{-1}(1-\alpha\lambda)^k (1-\beta\lambda)^l (1-\gamma\lambda)^m \, dE_\lambda y \right\| \le q^{n/3} \left\| \int_{\varepsilon}^{1} dE_\lambda x \right\| \to 0, \ n \to \infty.$$

Здесь $q = \max\limits_{\lambda \in [\varepsilon, 1]} |(1-\alpha\lambda)(1-\beta\lambda)(1-\gamma\lambda)| < 1$. В силу свойств спектральной функции

$$\left\| \int_0^{\varepsilon} \lambda^{-1}(1-\alpha\lambda)^k (1-\beta\lambda)^l (1-\gamma\lambda)^m \, dE_\lambda y \right\| \le \left\| \int_0^{\varepsilon} \lambda^{-1} \, dE_\lambda y \right\| = \left\| \int_0^{\varepsilon} dE_\lambda x \right\| = \| E_\varepsilon x \| \to 0,$$

$\varepsilon \to 0$. Таким образом, $\| x - x_n \| \to 0, \ n \to \infty$. Теорема 2.22 доказана.

Замечание 2.10. *Условие* $|(1-\alpha\lambda)(1-\beta\lambda)| < 1$ *равносильно совокупности условий* $\alpha\beta < \alpha + \beta$ *и* $(\alpha+\beta)^2 < 8\alpha\beta$. *Отсюда* $\alpha + \beta < 8$.

Докажем сходимость процесса (2.91) при приближенной правой части уравнения (2.1). Справедлива

Теорема 2.23. *При условии* (2.92) *итерационный процесс* (2.91) *сходится, если выбирать число итераций* n *из условия* $n\delta \to 0,\ n\to\infty,\ \delta\to 0.$

Доказательство. Рассмотрим $x - x_{n,\delta} = (x - x_n) + (x_n - x_{n,\delta})$. Оценим $\left\| x_n - x_{n,\delta} \right\|$, где

$$x_n - x_{n,\delta} = [\alpha_n + \alpha_{n-1}(E-\alpha_n A) + \ldots + \alpha_1 (E-\alpha_n A)(E-\alpha_{n-1}A)\ldots(E-\alpha_2 A)](y -$$

$$- y_\delta) = \int_0^1 \lambda^{-1}\left[1-(1-\alpha\lambda)^k (1-\beta\lambda)^l (1-\gamma\lambda)^m\right] dE_\lambda\,(y - y_\delta).$$

Оценим на $[0,1]$ максимум подынтегральной функции

$$g_n(\lambda) = \lambda^{-1}\left[1-(1-\alpha\lambda)^k (1-\beta\lambda)^l (1-\gamma\lambda)^m\right] > 0\,.$$

Так как $\lambda^{-1}[1-(1-\alpha_1\lambda)(1-\alpha_2\lambda)\ldots(1-\alpha_n\lambda)] \le \alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_n$, то $g_n(\lambda) \le k\alpha + l\beta + m\gamma$. Отсюда $\left\| x_n - x_{n,\delta}\right\| \le (k\alpha + l\beta + m\gamma)\,\delta$. Если $k = l = m = n/3$, то $\left\| x_n - x_{n,\delta}\right\| \le \dfrac{n}{3}(\alpha+\beta+\gamma)\,\delta$. Поскольку

$$\left\| x - x_{n,\delta}\right\| \le \left\| x - x_n\right\| + \left\| x_n - x_{n,\delta}\right\| \le$$

$$\le \left\| x - x_n\right\| + (k\alpha + l\beta + m\gamma)\,\delta$$

и $\left\| x - x_n\right\| \to 0,\ n\to\infty$, то для сходимости метода (2.91) достаточно потребовать, чтобы $(k\alpha + l\beta + m\gamma)\delta \to 0,\ n\to\infty,\ \delta\to 0$. Таким образом, достаточно, чтобы $n\delta\to 0,\ n\to\infty,\ \delta\to 0$. Теорема 2.23 доказана.

Получим оценку скорости сходимости. Предположим, что точное решение x истокопредставимо, т.е. $x = A^s z,\ s>0$. Тогда

$y = A^{s+1}z$ и $x - x_n = \, = \int_0^1 (1-\alpha\lambda)^k (1-\beta\lambda)^l (1-\gamma\lambda)^m \lambda^s \, dE_\lambda z$. Оценим максимум подынтегральной функции

$$f(\lambda) = (1-\alpha_1\lambda)(1-\alpha_2\lambda)\ldots(1-\alpha_n\lambda)\lambda^s = \prod_{i=1}^{n}(1-\alpha_i\lambda)\lambda^{\frac{\alpha_i s}{\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_n}} = \prod_{i=1}^{n}\varphi_i(\lambda).$$

Обозначим $c_i = \dfrac{\alpha_i s}{\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_n}$. В подразделе 2.1.1 показано, что $|\varphi_i(\lambda)| \le \max\left\{\left|(1-\alpha_i M)M^{c_i}\right|, \left(\dfrac{c_i}{e\alpha_i}\right)^{c_i}\right\}$, где $M = \|A\|$. Поскольку $\|A\| = 1$, то получим

$$|f(\lambda)| = \prod_{i=1}^{n}|\varphi_i(\lambda)| \le \max\left\{\prod_{i=1}^{n}|(1-\alpha_i)|, \prod_{i=1}^{n}\left(\frac{c_i}{e\alpha_i}\right)^{c_i}\right\} =$$

$$= \max\left\{|(1-\alpha_1)(1-\alpha_2)\ldots(1-\alpha_n)|, \left[s\Big/\left(e\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\right)\right]^s\right\} =$$

$$= \max\left\{\left|(1-\alpha)^k(1-\beta)^l(1-\gamma)^m\right|, s^s\left[(k\alpha+l\beta+m\gamma)e\right]^{-s}\right\}.$$

При $k = l = m = n/3$ $(n = 3p,\ p \in N)$ получим

$$|f(\lambda)| \le \max\left\{\left|(1-\alpha)^{n/3}(1-\beta)^{n/3}(1-\gamma)^{n/3}\right|, s^s\left[\frac{n}{3}(\alpha+\beta+\gamma)e\right]^{-s}\right\}.$$

Для достаточно больших n

$$\left|(1-\alpha)^{n/3}(1-\beta)^{n/3}(1-\gamma)^{n/3}\right| \le s^s\left[\frac{n}{3}(\alpha+\beta+\gamma)e\right]^{-s},$$

поэтому для таких n справедлива оценка

$$|f(\lambda)| \le s^s\left[(k\alpha+l\beta+m\gamma)e\right]^{-s} = s^s\left[\frac{n}{3}(\alpha+\beta+\gamma)e\right]^{-s}.$$

Поэтому, $\|x - x_n\| \le s^s \left[(k\alpha + l\beta + m\gamma)e\right]^{-s} \|z\|$. Отсюда

$$\|x - x_{n,\delta}\| \le s^s \left[(k\alpha + l\beta + m\gamma)e\right]^{-s} \|z\| + (k\alpha + l\beta + m\gamma)\delta.$$

Итак, доказана

Теорема 2.24. *Если* $x = A^s z$, $s > 0$, *то для метода* (2.91) *справедлива оценка погрешности*

$$\|x - x_{n,\delta}\| \le s^s \left[(k\alpha + l\beta + m\gamma)e\right]^{-s} \|z\| + (k\alpha + l\beta + m\gamma)\delta. \qquad (2.93)$$

Замечание 2.11. *Для упрощения считали* $\|A\| = 1$. *На самом деле все результаты легко переносятся на случай, когда* $\|A\| < \infty$.

При $k = l = m = n/3$ оценка (2.93) примет вид

$$\|x - x_{n,\delta}\| \le s^s \left[\frac{n}{3}(\alpha + \beta + \gamma)e\right]^{-s} \|z\| + \frac{n}{3}(\alpha + \beta + \gamma)\delta.$$

Ее оптимальная по *n* оценка имеет вид

$$\|x - x_{n,\delta}\|_{\text{опт}} \le (1+s)e^{-s/(s+1)}\delta^{s/(s+1)}\|z\|^{1/(s+1)} \qquad (2.94)$$

и получается при

$$n_{\text{опт}} = s\left(\frac{\alpha + \beta + \gamma}{3}\right)^{-1} e^{-s/(s+1)}\delta^{-1/(s+1)}\|z\|^{1/(s+1)}.$$

Таким образом, оптимальная оценка (2.94) для метода (2.91) при неточности в правой части уравнения (2.1) оказывается такой же, как и оптимальная оценка для метода простой итерации [28]. Следовательно, метод (2.91) не дает преимущества в мажорантных оценках по сравнению с методом простых итераций. Но он дает выигрыш в следующем. В методе простых итераций с постоянным шагом [28] требуется условие $0 < \alpha \le 1{,}25$, а в методе (2.91)

$0<\alpha<2,\ \alpha+\beta<8$, а γ выбирается из условия $|(1-\alpha\lambda)(1-\beta\lambda)(1-\gamma\lambda)|<1$. Итак, выбирая α, β, γ соответствующим образом, можно сделать $n_{\text{опт}}$ в методе (2.91) меньшим, чем для метода простых итераций с постоянным шагом. Таким образом, используя метод (2.91), для достижения оптимальной точности потребуется сделать число итераций по крайней мере в 2,5 раза меньше, чем методом итераций [28].

Рассмотрим погрешность метода (2.91) при счёте с округлениями. Пусть $x_{n,\delta}$ – точное значение, полученное по методу (2.91), а z_n – значение, полученное по той же формуле с учетом вычислительных погрешностей η_n, т.е.

$$z_{n+1}=z_n-\alpha_{n+1}\left(Az_n-y_\delta\right)+\alpha_{n+1}\eta_n,\ z_0=0.$$

Обозначим $\varepsilon_n=z_n-x_{n,\delta}$ и вычтем (2.91) из последнего равенства, в результате получим $\varepsilon_{n+1}=\left(E-\alpha_{n+1}A\right)\varepsilon_n+\alpha_{n+1}\eta_n,\ \varepsilon_0=\varepsilon_1=0,\ \eta_0=0.$ По индукции получим $\varepsilon_n=\sum\limits_{k=0}^{n-2}\alpha_{n-k}\prod\limits_{i=0}^{k-1}\left(E-\alpha_{n-i}A\right)\eta_{n-k-1}$. Так как $\|E-\alpha A\|\le 1,\quad \|(E-\alpha A)(E-\beta A)\|\le 1,\quad \|(E-\alpha A)(E-\beta A)(E-\gamma A)\|\le 1$, то $\|\varepsilon_n\|\le\dfrac{n}{3}(\alpha+\beta+\gamma)\eta$, где $\eta=\sup\limits_i|\eta_i|$. Следовательно, оценка погрешности при счете с округлениями для итерационного процесса (2.91) совпадает с аналогичной оценкой для метода итерации [28].

2.3.2 Случай неединственного решения

Покажем, что метод (2.90) пригоден и тогда, когда $\lambda=0$ является собственным значением оператора A (в этом случае уравнение (2.1) имеет неединственное решение).

Обозначим через $N(A)=\{x\in H \,|\, Ax=0\}$, $M(A)-$ортогональное дополнение ядра $N(A)$ до H. Пусть $P(A)x-$проекция $x\in H$ на $N(A)$, а $\Pi(A)x-$проекция $x\in H$ на $M(A)$. Справедлива

Теорема 2.25. *Пусть* $A\geq 0$, $y\in H$, $0<\alpha<2$, $|(1-\alpha\lambda)(1-\beta\lambda)|<1$, $|(1-\alpha\lambda)(1-\beta\lambda)(1-\gamma\lambda)|<1$. *Тогда для итерационного процесса* (2.90) *верны следующие утверждения*:

а) $Ax_n\to\Pi(A)y$, $\|Ax_n-y\|\to I(A,y)=\inf\limits_{x\in H}\|Ax-y\|$;

б) метод (2.90) *сходится тогда и только тогда, когда уравнение* $Ax=\Pi(A)y$ *разрешимо. В последнем случае* $x_n\to P(A)x_0+x^*$, *где* x^* *– минимальное решение уравнения.*

Доказательство. Применим оператор A к формуле (2.90), получим $Ax_n=A(E-\alpha_nA)x_{n-1}+\alpha_nAy$, где $y=P(A)y+\Pi(A)y$. Так как $AP(A)y=0$, то $Ax_n=A(E-\alpha_nA)x_{n-1}+\alpha_nA\Pi(A)y$. Отсюда

$$Ax_n-\Pi(A)y=A(E-\alpha_nA)x_{n-1}+\alpha_nA\Pi(A)y-\Pi(A)y=$$
$$=A(E-\alpha_nA)x_{n-1}-(E-\alpha_nA)\Pi(A)y=(E-\alpha_nA)(Ax_{n-1}-\Pi(A)y)=$$
$$=(E-\alpha_nA)(E-\alpha_{n-1}A)\ldots(E-\alpha_1A)(Ax_0-\Pi(A)y).$$

Обозначим $\nu_n=Ax_n-\Pi(A)y$, тогда

$$\nu_n=(E-\alpha_nA)(E-\alpha_{n-1}A)\ldots(E-\alpha_1A)\nu_0.$$

Имеем $A\geq 0$ и $A-$ положительно определен в $M(A)$, т.е. $(Ax,x)>0$ для любого $x\in M(A)$. Так как $0<\alpha<2$, $|(1-\alpha\lambda)(1-\beta\lambda)|<1$, $|(1-\alpha\lambda)(1-\beta\lambda)(1-\gamma\lambda)|<1$, то воспользовавшись интегральным представлением самосопряженного оператора A (для упрощения считаем, что $\|A\|=1$), получим

$$\|\nu_n\| = \left\| \int_0^1 (1-\alpha_1\lambda)(1-\alpha_2\lambda)\ldots(1-\alpha_n\lambda)dE_\lambda \nu_0 \right\| =$$

$$= \left\| \int_0^1 (1-\alpha\lambda)^k (1-\beta\lambda)^l (1-\gamma\lambda)^m dE_\lambda \nu_0 \right\|.$$

Здесь l, m, k – натуральные показатели, где $l+m+k=n.$ Считаем, что $k=l=m=n/3$. Справедлива цепочка неравенств

$$\|\nu_n\| \le \left\| \int_0^{\varepsilon_0} (1-\alpha\lambda)^k (1-\beta\lambda)^l (1-\gamma\lambda)^m dE_\lambda \nu_0 \right\| +$$

$$+ \left\| \int_{\varepsilon_0}^1 (1-\alpha\lambda)^k (1-\beta\lambda)^l (1-\gamma\lambda)^m dE_\lambda \nu_0 \right\| \le$$

$$\le \left\| E_{\varepsilon_0} \nu_0 \right\| + q^{n/3}(\varepsilon_0) \left\| \nu_0 - E_{\varepsilon_0} \nu_0 \right\| < \varepsilon,$$

при $\varepsilon_0 \to 0,$ $n \to \infty.$ Здесь $q = \max\limits_{\lambda \in [\varepsilon_0, 1]} \left|(1-\alpha\lambda)(1-\beta\lambda)(1-\gamma\lambda)\right| < 1.$ Следовательно, $\nu_n \to 0,$ откуда $Ax_n \to \Pi(A)y$ и $\Pi(A)y \in A(H)$. Таким образом, $\|Ax_n - y\| \to \|\Pi(A)y - y\| = \|P(A)y\| = I(A, y)$ [124]. Итак, утверждение а) доказано.

Докажем б). Пусть процесс (2.90) сходится. Покажем, что уравнение $Ax = \Pi(A)y$ разрешимо. Из сходимости $\{x_n\} \in H$ к $z \in H$ и из а) следует, что $Ax_n \to Az = \Pi(A)y,$ следовательно, $\Pi(A)y \in A(H),$ и уравнение $\Pi(A)y = Ax$ разрешимо.

Пусть теперь $\Pi(A)y \in A(H)$ (уравнение $Ax = \Pi(A)y$ разрешимо), следовательно, $\Pi(A)y = Ax^*,$ где x^* – минимальное решение уравнения $Ax = y$ (оно единственно в $M(A)$). Тогда (2.90) примет вид

$$x_n = (E - \alpha_n A)x_{n-1} + \alpha_n y = (E - \alpha_n A)x_{n-1} + \alpha_n \Pi(A)y =$$

$$= (E - \alpha_n A)x_{n-1} + \alpha_n Ax^* = x_{n-1} + \alpha_n A\left(x^* - x_{n-1}\right).$$

Разобьем последнее равенство на два, так как $x_n = P(A)x_n + \Pi(A)x_n$.
Тогда

$$P(A)x_n = P(A)x_{n-1} + \alpha_n P(A)A\left(x^* - x_{n-1}\right) = P(A)x_{n-1} = P(A)x_0,$$

так как $AP(A)\left(x^* - x_{n-1}\right) = 0.$

$$\Pi(A)x_n = \Pi(A)x_{n-1} + \alpha_n \Pi(A)A\left(x^* - x_{n-1}\right) = \Pi(A)x_{n-1} + \alpha_n A\Big(\Pi(A)x^* - \\ - \Pi(A)x_{n-1}\Big) = \Pi(A)x_{n-1} - \alpha_n A\left(\Pi(A)x_{n-1} - x^*\right),$$

так как $x^* \in M(A)$ и, следовательно, $\Pi(A)x^* = x^*.$ Обозначим $\omega_n = \Pi(A)x_{n-1} - x^*,$ тогда $\Pi(A)x_n - x^* = \Pi(A)x_{n-1} - x^* - \alpha_n A\left(\Pi(A)x_{n-1} - x^*\right).$ Отсюда

$$\omega_n = \omega_{n-1} - \alpha_n A\omega_{n-1} = \\ = (E - \alpha_n A)\omega_{n-1} = (E - \alpha_n A)(E - \alpha_{n-1}A)\ldots(E - \alpha_1 A)\omega_0$$

и, аналогично v_n, можно показать, что $\omega_n \to 0,\ n \to \infty.$ Тогда $\Pi(A)x_n \to x^*.$ Следовательно, $x_n = P(A)x_n + \Pi(A)x_n \to P(A)x_0 + x^*.$ Теорема 2.25 доказана.

Замечание 2.12. *Так как у нас* $x_0 = 0,$ *то* $x_n \to x^*,$ *т.е. процесс* (2.90) *сходится к нормальному решению, т.е. к решению с минимальной нормой*.

2.3.3 Правило останова по невязке

Априорный выбор числа итераций $n_{\text{опт}}$ получен в предположении, что точное решение x истокопредставимо, т.е. $x = A^s z,\ s > 0.$ Однако не всегда имеются сведения об элементе z и степени истокопредставимости s. Тем не менее метод (2.91) становится вполне эффективным, если воспользоваться следующим правилом останова по невязке: зададим $\varepsilon > 0$ и момент останова m определим условиями (2.19). Предположим, что при начальном приближении невязка достаточно велика, а именно, больше уровня останова, т.е. $\|Ax_{0,\delta} - y_\delta\| > \varepsilon$. Докажем возможность применения правила (2.19) для метода (2.91). Рассмотрим при $n = 3p,\ p = 1,2,\ldots$ семейство функций

$$g_n(\lambda) = \lambda^{-1}\left[1-(1-\alpha\lambda)^{n/3}(1-\beta\lambda)^{n/3}(1-\gamma\lambda)^{n/3}\right].$$

Из подраздела 2.3.1 при условиях (2.92) получим

$$\sup_{0\le\lambda\le1} |g_n(\lambda)| \le \frac{n(\alpha+\beta+\gamma)}{3},$$

$$\sup_{0\le\lambda\le1} |1-\lambda g_n(\lambda)| = \sup_{0\le\lambda\le1}\left|(1-\alpha\lambda)^{\frac{n}{3}}(1-\beta\lambda)^{\frac{n}{3}}(1-\gamma\lambda)^{\frac{n}{3}}\right| \le 1,$$

$$1-\lambda\, g_n(\lambda) = (1-\alpha\lambda)^{\frac{n}{3}}(1-\beta\lambda)^{\frac{n}{3}}(1-\gamma\lambda)^{\frac{n}{3}} \to 0, \quad n\to\infty,\ \forall\lambda\in(0,1],$$

$$\sup_{0\le\lambda\le1} \lambda^s\, |1-\lambda g_n(\lambda)| \le s^s\left[\frac{n(\alpha+\beta+\gamma)e}{3}\right]^{-s},\ n>0,\ 0\le s<\infty.$$

Аналогично подразделу 2.1.4 доказываются следующие леммы и теоремы.

Лемма 2.11. *Пусть* $A = A^* \ge 0$, $\|A\| \le 1$. *Тогда для любого* $w\in H$ $\quad (E - Ag_n(A))w \to 0,\quad n\to\infty.$

Лемма 2.12. *Пусть* $A = A^* \ge 0$, $\|A\| \le 1$. *Тогда для любого* $v \in \overline{R(A)}$ *имеет место соотношение* $n^s\left\|A^s(E - Ag_n(A))v\right\| \to 0$ *при* $n\to\infty,\ 0\le s<\infty.$

Лемма 2.13. *Пусть* $A = A^* \geq 0$, $\|A\| \leq 1$. *Если для некоторой подпоследовательности* $n_k < \bar{n} = const$ *и* $v_0 \in \overline{R(A)}$ *при* $k \to \infty$ *имеем* $\omega_k = A\left(E - Ag_{n_k}(A)\right)v_0 \to 0$, *то* $v_k = \left(E - Ag_{n_k}(A)\right)v_0 \to 0$.

Используем эти леммы при доказательстве следующих теорем.

Теорема 2.26. *Пусть* $A = A^* \geq 0$, $\|A\| \leq 1$ *и пусть момент останова* $m = m(\delta)$ $(m = 3p, \quad p = 1, 2, 3, \ldots)$ *в методе* (2.91) *выбран по правилу* (2.19). *Тогда* $x_{m,\delta} \to x$ *при* $\delta \to 0$.

Теорема 2.27. *Пусть выполняются условия теоремы* 2.26 *и пусть* $x = A^s z$, $s > 0$, *тогда справедливы оценки* $m \leq 3 + \dfrac{3(s+1)}{(\alpha+\beta+\gamma)e}\left[\dfrac{\| z \|}{(b-1)\delta}\right]^{1/(s+1)}$,

$$\|x_{m,\delta} - x\| \leq [(b+1)\delta]^{s/(s+1)} \ \|z\|^{1/(s+1)} +$$

$$+\frac{\alpha+\beta+\gamma}{3}\left\{3 + \frac{3(s+1)}{(\alpha+\beta+\gamma)e}\left[\frac{\| z \|}{(b-1)\delta}\right]^{1/(s+1)}\right\}\delta. \qquad (2.95)$$

Замечание 2.13. *Порядок оценки* (2.95) *есть* $O\left(\delta^{s/(s+1)}\right)$ *и, как следует из* [12], *он оптимален в классе решений* $x = A^s z$, $s > 0$.

Замечание 2.14. *В формулировке теоремы* 2.27 *предполагается, что точное решение истокопредставимо, но знание истокопредставимости не потребуется на практике, так как при останове по невязке автоматически делается число итераций, нужное для получения оптимального по порядку решения.*

2.4 Оценка погрешностей в двухшаговом методе решения операторных уравнений

2.4.1 Сходимость метода в случае априорного выбора параметра регуляризации

Решается задача из подраздела 2.1.1. Предлагается явный двухшаговый итерационный процесс

$$x_n = 2(E-\alpha A)x_{n-1} - (E-\alpha A)^2 x_{n-2} + \alpha^2 Ay, \quad x_0 = x_1 = 0. \qquad (2.96)$$

В случае, когда правая часть y уравнения (2.1) известна приближенно $\|y - y_\delta\| \le \delta$, метод (2.96) примет вид

$$x_{n,\delta} = 2(E-\alpha A)x_{n-1,\delta} - (E-\alpha A)^2 x_{n-2,\delta} + \alpha^2 Ay_\delta,\ x_{0,\delta} = x_{1,\delta} = 0. \quad (2.97)$$

Нетрудно доказать, что

$$x_n = A^{-1}\left[E - (E-\alpha A)^n - n\alpha A(E-\alpha A)^{n-1}\right]y,\ x_0 = x_1 = 0. \qquad (2.98)$$

Ввиду положительности самосопряжённого оператора A его интегральное представление имеет вид $A = \int_0^M \lambda\, dE_\lambda$, где E_λ – спектральная функция, $M = \|A\|$. Так как уравнение (2.1) имеет точное решение, то $A^{-1}y = x$, поэтому имеем

$$\|x - x_n\| = \left\|A^{-1}y - A^{-1}\left[E - (E-\alpha A)^n - n\alpha A(E-\alpha A)^{n-1}\right]y\right\| =$$

$$= \left\|\int_0^M \lambda^{-1} dE_\lambda y - \int_0^M \lambda^{-1}\left[1 - (1-\alpha\lambda)^n - n\alpha\lambda(1-\alpha\lambda)^{n-1}\right] dE_\lambda y\right\| \le$$

$$\le \left\|\int_0^M \lambda^{-1}(1-\alpha\lambda)^n\, dE_\lambda y\right\| + \left\|\int_0^M n\alpha(1-\alpha\lambda)^{n-1}\, dE_\lambda y\right\|.$$

Потребуем, чтобы при $0<\lambda\le M$ выполнялось $\|E-\alpha A\|<1$, т.е. $|1-\alpha\lambda|<1$ и, следовательно, $0<\alpha\lambda<2$. Отсюда $0<\alpha<2/M$. При этом условии каждый из двух интегралов по норме стремится к нулю при $n\to\infty$. Таким образом, доказано, что $\|x-x_n\|\to 0$, при $n\to\infty$, т.е. справедлива

Теорема 2.28. *Итерационный процесс* (2.96) *при условии* $0<\alpha<2/M$ *сходится.*

Пусть $x_{n,\delta}$ – решение уравнения (2.1), полученное по методу (2.97). Тогда $\|x-x_{n,\delta}\|\le\|x-x_n\|+\|x_n-x_{n,\delta}\|$. В силу ранее доказанного $\|x-x_n\|\to 0$ при $n\to\infty$. Рассмотрим $\|x_n-x_{n,\delta}\|$. Аналогично формуле (2.98) можно получить, что $x_{n,\delta}=A^{-1}\left[E-(E-\alpha A)^n-n\alpha A(E-\alpha A)^{n-1}\right]y_\delta$. Тогда

$$\|x_n-x_{n,\delta}\|=\left\|\int_0^M\lambda^{-1}\left[1-(1-\alpha\lambda)^n-n\alpha\lambda(1-\alpha\lambda)^{n-1}\right]dE_\lambda\left(y-y_\delta\right)\right\|.$$

Рассмотрим функцию $g_n(\lambda)=\lambda^{-1}\left[1-(1-\alpha\lambda)^n-n\alpha\lambda(1-\alpha\lambda)^{n-1}\right]$. Методом математической индукции докажем, что $\|g_n(\lambda)\|\le(5/4)(n-1)\alpha$ при $0<\alpha\lambda\le 5/4$, $n\ge 1$.

При $n=1$ $g_1(\lambda)=0\le 0$, а при $n=2$ $g_2(\lambda)=\alpha^2\lambda\le(5/4)\alpha$. Пусть доказываемое неравенство для $n=k$ верно, т.е. $g_k(\lambda)\le(5/4)(k-1)\alpha$. Докажем, что $g_{k+1}(\lambda)\le(5/4)k\alpha$. Имеем

$$g_{k+1}(\lambda)=g_k(\lambda)+g_{k+1}(\lambda)-g_k(\lambda)\le(5/4)(k-1)\alpha+g_{k+1}(\lambda)-g_k(\lambda)=$$

$$=(5/4)(k-1)\alpha+\lambda^{-1}\left[1-(1-\alpha\lambda)^{k+1}-(k+1)\alpha\lambda(1-\alpha\lambda)^k\right]-$$

$$-\lambda^{-1}\left[1-(1-\alpha\lambda)^k-k\alpha\lambda(1-\alpha\lambda)^{k-1}\right]=(5/4)(k-1)\alpha+\lambda^{-1}(1-\alpha\lambda)^k\left[1-(1-\alpha\lambda)\right]-$$

$$-k\alpha(1-\alpha\lambda)^k-\alpha(1-\alpha\lambda)^k+k\alpha(1-\alpha\lambda)^{k-1}=(5/4)(k-1)\alpha+\alpha(1-\alpha\lambda)^k-k\alpha(1-\alpha\lambda)^k-$$

$$-\alpha(1-\alpha\lambda)^k+k\alpha(1-\alpha\lambda)^{k-1}=(5/4)(k-1)\alpha+k\alpha(1-\alpha\lambda)^{k-1}-k\alpha(1-\alpha\lambda)^k=$$

$$=(5/4)(k-1)\alpha+k\alpha(1-\alpha\lambda)^{k-1}\left[1-(1-\alpha\lambda)\right]=(5/4)(k-1)\alpha+$$
$$k\alpha^2\lambda(1-\alpha\lambda)^{k-1}.$$

Покажем, что $\varphi(\lambda)=k\alpha^2\lambda(1-\alpha\lambda)^{k-1}<(5/4)\alpha$. Обозначим $\alpha\lambda=t$, получим $\varphi(t)=k\alpha t(1-t)^{k-1}$. Тогда

$$\varphi'(t)=k\alpha(1-t)^{k-1}+k\alpha t(k-1)$$
$$(-1)(1-t)^{k-2}=k\alpha(1-t)^{k-2}\left[1-t-t(k-1)\right]==k\alpha(1-t)^{k-2}(1-tk).$$

Приравняем $\varphi'(t)$ нулю: $k\alpha(1-t)^{k-2}(1-tk)=0,$ $k\alpha\neq 0$ и $(1-t)^{k-2}\neq 0,$ так как иначе $\varphi(t)=0,$ поэтому $1-tk=0,$ следовательно, $t_*=1/k$ – стационарная точка функции $\varphi(t)$. Покажем, что это точка максимума функции $\varphi(t)$. $\varphi''(t)=\left(k\alpha(1-t)^{k-2}\right)'(1-tk)+k\alpha(-k)(1-t)^{k-2},$ тогда $\varphi''(t_*)=-k^2\alpha(1-t_*)^{k-2}= \ =-k^2\alpha(1-1/k)^{k-2}<0,$ следовательно t_* – точка максимума $\varphi(t)$. Найдем этот максимум. Имеем $\varphi(t_*)=k\alpha t_*(1-t_*)^{k-1}=\alpha(1-1/k)^{k-1}<\alpha,$ так как при $k>1$ $(1-1/k)^{k-1}<1$, а значит $\varphi(t_*)<(5/4)\alpha$ и, следовательно, получим $\varphi(\lambda)=k\alpha^2\lambda(1-\alpha\lambda)^{k-1}<(5/4)\alpha$. Поэтому по индукции справедливость рассматриваемого неравенства доказана. Следовательно, $\|x_n-x_{n,\delta}\|\leq(5/4)(n-1)\alpha\delta$. Отсюда $\|x-x_{n,\delta}\|\leq\|x-x_n\|+(5/4)(n-1)\alpha\delta.$ Для сходимости $\|x-x_{n,\delta}\|\to 0$ при $n\to\infty$ потребуем, чтобы $(n-1)\delta\to 0,$ $n\to\infty,$ $\delta\to 0$, т.е. будем выбирать число итераций n в зависимости от δ так, чтобы $n\delta\to 0,$ $n\to\infty,$ $\delta\to 0$. Итак доказана

Теорема 2.29. *Итеративный процесс* (2.97) *сходится при условии* $0 < \alpha \le \frac{5}{4M}$, *если выбирать число итераций n в зависимости от* δ *так, чтобы* $n\delta \to 0,\ n \to \infty,\ \delta \to 0$.

Имеем

$$x - x_n = A^{-1}y - A^{-1}\left[E - (E - \alpha A)^n - n\alpha A(E - \alpha A)^{n-1}\right]y =$$

$$= A^{-1}\left[(E - \alpha A)^n + n\alpha A(E - \alpha A)^{n-1}\right]y = A^{-1}\left[(E - \alpha A)^{n-1}(E + (n-1)\alpha A)\right]y =$$

$$= A^{-1}\left[(E - \alpha A)^{n-1} + (n-1)\alpha A(E - \alpha A)^{n-1}\right]y =$$

$$= A^{-1}(E - \alpha A)^{n-1}y + (n-1)\alpha(E - \alpha A)^{n-1}y.$$

Скорость сходимости к нулю $\|x - x_n\|$ может быть сколь угодно малой, и ее нельзя оценить без дополнительных предположений. Потребуем, чтобы решение x было истокопредставимо, т.е. $x = A^s z,\ s > 0$. Тогда $y = A^{s+1}z$ и

$$x - x_n = \int_0^M \lambda^s (1 - \alpha\lambda)^{n-1} dE_\lambda z + (n-1)\alpha \int_0^M \lambda^{s+1}(1 - \alpha\lambda)^{n-1} dE_\lambda z.$$

Обозначим через $f_1(\lambda) = \lambda^s(1 - \alpha\lambda)^{n-1},\ f_2(\lambda) = \lambda^{s+1}(1 - \alpha\lambda)^{n-1}(n-1)\alpha$. В подразделе 2.1.1 показано, что $|f(\lambda)| = \left|\lambda^s(1 - \alpha\lambda)^n\right| \le s^s(n\alpha e)^{-s}$ при $0 < \alpha \le \frac{5}{4M}$. Поэтому $|f_1(\lambda)| \le s^s\left[(n-1)\alpha e\right]^{-s}$, $|f_2(\lambda)| \le (s+1)^{s+1}\left[(n-1)\alpha\right]^{-s} \times$ $\times e^{-(s+1)}$. Отсюда

$$\|x - x_n\| \le s^s\left[(n-1)\alpha e\right]^{-s}\|z\| + (s+1)^{s+1}\left[(n-1)\alpha\right]^{-s} e^{-(s+1)}\|z\| \le$$

$$\le s^s(s+2)\left[(n-1)\alpha e\right]^{-s}\|z\|.$$

Таким образом, $\left\|x - x_{n,\delta}\right\| \le s^s (s+2)\left[(n-1)\alpha e\right]^{-s}\|z\| + (5/4)(n-1)\delta\alpha.$ Доказана

Теорема 2.30. *При условии* $0 < \alpha \le \dfrac{5}{4M}$ *и* $x = A^s z,\ s > 0$ *оценка погрешности для метода* (2.97) *имеет вид*

$$\left\|x - x_{n,\delta}\right\| \le s^s (s+2)\left[(n-1)\alpha e\right]^{-s}\|z\| + (5/4)(n-1)\delta\alpha. \qquad (2.99)$$

Оптимизируем по n полученную оценку (2.99). Рассмотрим функцию $\varphi(n) = s^s (s+2)\left[(n-1)\alpha e\right]^{-s}\|z\| + (5/4)(n-1)\delta\alpha$. Приравняв $\varphi'(n) = -s^{s+1}(s+2)\times \times(\alpha e)^{-s}\|z\|(n-1)^{-s-1} + (5/4)\delta\alpha$ нулю, получим

$$n_{\text{опт}} = 1 + \left(\frac{5}{4}\delta\right)^{-1/(s+1)} e^{-s/(s+1)} s(s+2)^{1/(s+1)}\|z\|^{1/(s+1)}\alpha^{-1}. \qquad (2.100)$$

Подставив $n_{\text{опт}}$ в (2.99), получим

$$\left\|x - x_{n,\delta}\right\|_{\text{опт}} \le (5/4)^{s/(s+1)}\delta^{s/(s+1)} e^{-s/(s+1)}(s+1)(s+2)^{1/(s+1)}\|z\|^{1/(s+1)}. \qquad (2.101)$$

Следовательно, доказана

Теорема 2.31. *Оптимальная оценка погрешности для метода* (2.97) *имеет вид* (2.101) *и достигается при* $n_{опт}$ *из* (2.100).

Оптимальная оценка погрешности (2.101) не зависит от α, но от α зависит $n_{\text{опт}}$. Поэтому для уменьшения $n_{\text{опт}}$, т.е. объёма вычислительной работы, следует брать α возможно большим из условия $0 < \alpha \le \dfrac{5}{4M}$, и чтобы $n_{\text{опт}}$ было целым.

Полученная оценка погрешности (2.101) имеет оптимальный для класса задач с истокопредставимыми решениями порядок $O\left(\delta^{s/(s+1)}\right)$, такой же, как и для метода простой итерации [28]. Но для метода простой итерации оценка погрешности несколько лучше по константе.

Пусть $x_{n,\delta}$ – точное значение, полученное по методу (2.97), а z_n – приближенное решение уравнения (2.1) с учетом погрешности округлений, полученное по формуле

$$z_n = 2(E-\alpha A)z_{n-1} - (E-\alpha A)^2 z_{n-2} + \alpha^2 A y_\delta + \alpha\gamma_n,\ z_0 = z_1 = 0. \quad (2.102)$$

Здесь γ_n – погрешность при вычислении Az_n. Обозначим $\varepsilon_n = z_n - x_{n,\delta}$ и вычтем (2.97) из (2.102). Получим

$$\varepsilon_{n+1} = 2(E-\alpha A)\varepsilon_n - (E-\alpha A)^2\varepsilon_{n-1} + \alpha\gamma_{n+1},\ \varepsilon_0 = \varepsilon_1 = 0,\ \gamma_0 = \gamma_1 = 0. \quad (2.103)$$

Покажем по индукции, что

$$\varepsilon_n = \sum_{i=2}^{n}(n-i+1)(E-\alpha A)^{n-i}\alpha\gamma_i. \quad (2.104)$$

При $n=1$ из (2.103) и $n=2$ из (2.104) следует, что $\varepsilon_2 = \alpha\gamma_2$, следовательно при $n=2$ формула (2.104) верна. Пусть (2.104) верна при $n=p$, т.е. $\varepsilon_p = \sum_{i=2}^{p}(p-i+1)(E-\alpha A)^{p-i}\alpha\gamma_i$ и докажем ее справедливость при $n=p+1$. Итак, докажем, что $\varepsilon_{p+1} = \sum_{i=2}^{p+1}(p-i+2)(E-\alpha A)^{p-i+1}\alpha\gamma_i$. Подставим ε_p в (2.103), получим

$$\varepsilon_{p+1} = 2(E-\alpha A)\varepsilon_p - (E-\alpha A)^2\varepsilon_{p-1} + \alpha\gamma_{p+1} =$$
$$= 2(E-\alpha A)\sum_{i=2}^{p}(p-i+1)(E-\alpha A)^{p-i}\alpha\gamma_i - (E-\alpha A)^2\sum_{i=2}^{p-1}(p-i)(E-\alpha A)^{p-i-1}\alpha\gamma_i +$$
$$+\alpha\gamma_{p+1} = 2(E-\alpha A)\Big[(p-1)(E-\alpha A)^{p-2}\alpha\gamma_2 + (p-2)(E-\alpha A)^{p-3}\alpha\gamma_3 + \ldots +$$
$$+3(E-\alpha A)^2\alpha\gamma_{p-2} + 2(E-\alpha A)\alpha\gamma_{p-1} + \alpha\gamma_p\Big] - (E-\alpha A)^2\big[(p-2)\times$$

$$\times(E-\alpha A)^{p-3}\alpha\gamma_2+(p-3)(E-\alpha A)^{p-4}\alpha\gamma_3+\ldots+2(E-\alpha A)\alpha\gamma_{p-2}+\alpha\gamma_{p-1}\Big]+$$
$$+\alpha\gamma_{p+1}=2(p-1)(E-\alpha A)^{p-1}\alpha\gamma_2+2(p-2)(E-\alpha A)^{p-2}\alpha\gamma_3+\ldots+$$
$$+6(E-\alpha A)^3\alpha\gamma_{p-2}+4(E-\alpha A)^2\alpha\gamma_{p-1}+2(E-\alpha A)\alpha\gamma_p-\big[(p-2)\times$$
$$\times(E-\alpha A)^{p-1}\alpha\gamma_2+(p-3)(E-\alpha A)^{p-2}\alpha\gamma_3+\ldots+2(E-\alpha A)^3\alpha\gamma_{p-2}+$$
$$+(E-\alpha A)^2\alpha\gamma_{p-1}\Big]+\alpha\gamma_{p+1}=p(E-\alpha A)^{p-1}\alpha\gamma_2+(p-1)(E-\alpha A)^{p-2}\alpha\gamma_3+$$
$$+\ldots+4(E-\alpha A)^3\alpha\gamma_{p-2}+3(E-\alpha A)^2\alpha\gamma_{p-1}+2(E-\alpha A)\alpha\gamma_p+\alpha\gamma_{p+1}=$$
$$=\sum_{i=2}^{p+1}(p-i+2)(E-\alpha A)^{p-i+1}\alpha\gamma_i\,.$$

Итак, формула (2.104) доказана.

Обозначим $\gamma=\sup\limits_k|\gamma_k|$, тогда из (2.104) при условии $\|E-\alpha A\|\le 1$ имеем $\|\varepsilon_n\|\le\big(1+2+3+\ldots+(n-1)\big)\alpha\gamma=\dfrac{n(n-1)}{2}\alpha\gamma.$ Так как $\|x-z_n\|\le\|x-x_{n,\delta}\|+\ +\|x_{n,\delta}-z_n\|$, то с учётом вычислительной погрешности справедлива следующая оценка погрешности метода итераций (2.97)

$$\|x-z_n\|\le s^s(s+2)\big[(n-1)\alpha e\big]^{-s}\|z\|+\frac{5}{4}(n-1)\alpha\delta+\frac{n(n-1)}{2}\alpha\gamma.$$

2.4.2 Правило останова по невязке

Априорный выбор параметра регуляризации n в исходной норме гильбертова пространства (см. подраздел 2.4.1) получен в предположении, что имеется дополнительная информация на гладкость точного решения x уравнения (2.1) – его истокообразная представимость. Однако обычно сведения об истокообразности искомого решения неизвестны, и тем самым приведенные в подразделе 2.4.1 оценки погрешности оказываются неприменимыми. Тем не менее, метод (2.97) можно сделать вполне эффективным, если воспользоваться правилом останова по невязке: зададим $\varepsilon > 0$ и определим момент m останова итерационного процесса (2.97) условием (2.19).

Предполагаем, что при начальном приближении $x_{0,\delta}$ невязка достаточно велика, больше уровня останова ε, т.е. $\|Ax_{0,\delta} - y_\delta\| > \varepsilon$. Покажем возможность применения правила (2.19) к методу итераций (2.97). Рассмотрим следующие функции $g_n(\lambda) = \lambda^{-1}\left[1 - (1-\alpha\lambda)^n - n\alpha\lambda(1-\alpha\lambda)^{n-1}\right]$. Нетрудно показать, что для $g_n(\lambda)$ выполняются условия

$$\sup_{0\le\lambda\le M} |g_n(\lambda)| \le \frac{5}{4}(n-1)\alpha, \quad n \ge 1,\ M = \|A\|,\ 0 < \alpha \le \frac{5}{4M},$$

$$\sup_{0\le\lambda\le M} |1 - \lambda g_n(\lambda)| \le 2,\ 0 < \alpha \le \frac{5}{4M},$$

$$1 - \lambda g_n(\lambda) \to 0,\ n \to \infty,\ \forall\lambda \in (0, M],\ 0 < \alpha < 2/M,$$

$$\sup_{0\le\lambda\le M} \lambda^s |1 - \lambda g_n(\lambda)| \le (s+2)\left(\frac{s}{\alpha e}\right)^s (n-1)^{-s},\ n \ge 1,\ 0 \le s < \infty,\ 0 < \alpha \le \frac{5}{4M}.$$

Справедливы

Лемма 2.14. *Пусть* $A = A^* \ge 0,\ \|A\| \le M$. *Тогда для любого* $w \in H \quad (E - Ag_n(A))w \to 0,\ n \to \infty.$

Лемма 2.15. *Пусть* $A = A^* \ge 0,\ \|A\| \le M$. *Тогда для* $\forall v \in \overline{R(A)}$ *имеет место соотношение* $(n-1)^s \left\|A^s(E - Ag_n(A))v\right\| \to 0, n \to \infty, \quad 0 \le s < \infty.$

Лемма 2.16. *Пусть* $A = A^* \ge 0,\ \|A\| \le M$. *Если для некоторых* $n_k < \bar{n} = const$ *и* $v_0 \in \overline{R(A)}$ *при* $k \to \infty$ *имеем* $w_k = A\left(E - Ag_{n_k}(A)\right)v_0 \to 0$, *то* $v_k = \left(E - Ag_{n_k}(A)\right)v_0 \to 0.$

Теорема 2.32. *Пусть* $A = A^* \geq 0$, $\|A\| \leq M$ *и пусть момент останова* $m = m(\delta)$ *в методе* (2.97) *выбирается по правилу* (2.19). *Тогда* $x_{m,\delta} \to x$ *при* $\delta \to 0$.

Теорема 2.33. *Пусть выполнены условия теоремы* 2.32 *и пусть* $x = A^s z,\ s > 0$. *Тогда справедливы оценки*

$$m(\delta) \leq 2 + \frac{s+1}{\alpha e}\left[\frac{(s+3)\|z\|}{(b-2)\delta}\right]^{1/(s+1)},$$

$$\left\|x_{m(\delta),\delta} - x\right\| \leq 2^{1/(s+1)}\left[(b+2)\delta\right]^{s/(s+1)}\|z\|^{1/(s+1)} + \frac{5}{4}\alpha\left\{1 + \frac{s+1}{\alpha e}\left[\frac{(s+3)\|z\|}{(b-2)\delta}\right]^{1/(s+1)}\right\}\delta. \tag{2.105}$$

Замечание 2.15. *Порядок оценки* (2.105) *есть* $O\left(\delta^{s/(s+1)}\right)$, *и он оптимален в классе задач с истокопредставимыми решениями* $x = A^s z, s > 0$ [12]. *Хотя формулировка теоремы* 2.33 *дается с указаниями степени истокопредста-вимости s и истокопредставляющего элемента z, на практике их значение не потребуется, так как они не содержатся в правиле останова* (2.19).

ГЛАВА III

Неявные методы итераций решения некорректно поставленных задач

В данной главе изучаются неявные методы решения операторных уравнений I рода в гильбертовом пространстве. Доказаны соответствующие теоремы о сходимости этих методов, получены оценки погрешности в случае априорного выбора числа итераций. Изучены случаи неединственности решения и приближенно заданного оператора. Доказана сходимость некоторых методов в энергетической норме гильбертова пространства. Обоснована возможность использования правила останова по невязке и правила останова по соседним приближениям, что делает неявные методы эффективными и тогда, когда нет сведений об истокопредставимости точного решения. Дается сравнительная характеристика этих методов, показано их преимущество по сравнению с явными методами. В среде программирования DELPHI на ПЭВМ некоторыми из предложенных в книге методами решены численные модельные примеры.

3.1 Оценки погрешности в неявном методе итераций решения некорректных задач

3.1.1 Априорный выбор числа итераций

В разделе 3.1 предлагается неявный итерационный процесс решения операторных уравнений I рода, который дает возможность сократить число итераций для достижения оптимальной точности по сравнению с ранее известными явными методами решения уравнения (2.1).

Рассматривается задача из подраздела 2.1.1. Для ее решения используется метод итерации неявного типа

$$x_{n+1} = x_n - \alpha\left(Ax_{n+1} - y\right), \quad x_0 = 0. \tag{3.1}$$

В случае приближенной правой части y_δ, $\|y - y_\delta\| \le \delta$ метод (3.1) примет вид

$$x_{n+1,\delta} = x_{n,\delta} - \alpha\left(Ax_{n+1,\delta} - y_\delta\right), \quad x_{0,\delta} = 0. \tag{3.2}$$

Метод (3.1) впервые был предложен в работе [30]. Там показано, что метод (3.2) сходится при условии $\alpha > 0$, если число итераций n выбирать в зависимости от δ так, чтобы $n\delta \to 0$, $n \to \infty$, $\delta \to 0$. Там же получена оценка погрешности в предположении, что решение является истокообразно представимым с некоторым показателем $s > 0$.

Получим оценку погрешности метода (3.2) при приближенной правой части, отличную от оценки погрешности в [30], и более удобную для практического использования. Имеем [30]

$$x - x_n = \int\limits_0^M \lambda^{-1}(1+\alpha\lambda)^{-n}\, dE_\lambda y, \quad M = \|A\|,$$

где E_λ – спектральная функция. Для получения оценки погрешности предположим, что $x = A^s z, \quad s > 0$. Тогда $y = A^{s+1}z$ и, следовательно, $x - x_n = \int\limits_0^M \lambda^s (1+\alpha\lambda)^{-n}\, dE_\lambda z$. Найдем максимум подынтегральной функции $f(\lambda) = \lambda^s(1+\alpha\lambda)^{-n}$. Имеем $f'(\lambda) = 0$ при $\lambda_* = \dfrac{s}{(n-s)\alpha}$, $n > s$. Тогда при условии $n \ge 2s$

$$f(\lambda_*) = \left[\frac{s}{(n-s)\alpha}\right]^s \left[1 + \frac{s\alpha}{(n-s)\alpha}\right]^{-n} = s^s \alpha^{-s} n^{-s} \left(\frac{n-s}{n}\right)^{n-s} =$$

$$= \left(\frac{s}{n\alpha}\right)^s \left(1 + \frac{s}{n-s}\right)^{-(n-s)} \le \left(\frac{s}{n\alpha}\right)^s \cdot 2^{-s} = \left(\frac{s}{2n\alpha}\right)^s.$$

Но может оказаться, что локальный максимум внутри $[0, M]$ не будет являться глобальным, поэтому будем учитывать значение функции $f(\lambda)$ на правом конце отрезка, т.е. в точке $\lambda = M$ (на левом конце $f(0)=0$). Тогда получим $\|x - x_n\| \le \max\left\{s^s(2n\alpha)^{-s}, M^s(1+\alpha M)^{-n}\right\}\|z\|$. По индукции нетрудно показать, что $\|x_n - x_{n,\delta}\| \le n\alpha\delta$. Следовательно,

$$\|x - x_{n,\delta}\| \le \max\left\{s^s(2n\alpha)^{-s}, M^s(1+\alpha M)^{-n}\right\}\|z\| + n\alpha\delta. \tag{3.3}$$

Итак, доказана

Теорема 3.1. *Если решение* x *уравнения* (2.1) *истокопредставимо, то при условии* $\alpha > 0$ *для метода* (3.2) *справедлива оценка* (3.3).

Замечание 3.1. *Так как для достаточно больших* n $M^s(1+\alpha M)^{-n} \le \le s^s(2n\alpha)^{-s}$, *то для таких* n *справедлива оценка*

$$\|x - x_{n,\delta}\| \le s^s(2n\alpha)^{-s}\|z\| + n\alpha\delta. \tag{3.4}$$

Оптимизируем по n оценку (3.4), т.е. при заданном δ найдем такое значение числа итераций n, при котором оценка (3.4) становится минимальной. Для этого производную по n от правой части неравенства (3.4) приравняем нулю. Получим $s^{s+1}2^{-s}\alpha^{-(s+1)}\|z\|\delta^{-1} = n^{s+1}$. Отсюда

$$n_{\text{опт}} = s\alpha^{-1}2^{-s/(s+1)}\|z\|^{1/(s+1)}\delta^{-1/(s+1)}. \tag{3.5}$$

Подставив $n_{\text{опт}}$ в (3.4), получим оптимальную оценку погрешности для метода (3.2)

$$\|x - x_{n,\delta}\|_{\text{опт}} \le (1+s)2^{-s/(s+1)}\delta^{s/(s+1)}\|z\|^{1/(s+1)}. \tag{3.6}$$

Итак, доказана

Теорема 3.2. *Оптимальная оценка погрешности для метода* (3.2) *имеет вид* (3.6) *и получается при* $n_{опт}$ *из* (3.5).

Сравним метод (3.2) с неявным методом итераций [36]

$$(E+\alpha A)x_{n+1,\delta}=(E-\alpha A)x_{n,\delta}+2\alpha y_\delta, \quad x_{0,\delta}=0 \tag{3.7}$$

и явным методом итераций [28]

$$x_{n+1,\delta}=x_{n,\delta}+\alpha\left(y_\delta-Ax_{n,\delta}\right), \; x_{0,\delta}=0. \tag{3.8}$$

Сравнение методов (3.2) и (3.7) показывает, что порядки оценок их погрешностей совпадают (это естественно, поскольку они обе оптимальны по порядку). В методе (3.2) требуется только обращение оператора $E+\alpha A$ на каждом итерационном шаге, а в методе (3.7), кроме этого, нужно еще вычислять значение оператора A на предшествующем приближении. Таким образом, метод (3.2) имеет преимущество с вычислительной точки зрения. Так что в этом случае предпочтительным оказывается более простой метод. Следовательно, для решения уравнения (2.1) из двух методов (3.2) и (3.7) предпочтительнее использовать метод (3.2).

Сравнение метода (3.2) с явным методом простых итераций (3.8) показывает, что для явного метода оценки погрешности лучше по константе. Кроме того, явные методы не требуют обращения оператора, а требуют только вычисления значений оператора на последовательных приближениях. В этом смысле метод (3.8) предпочтительнее неявного метода (3.2).

Но неявные методы обладают следующим важным достоинством. В явных методах на параметр α накладывается ограничение сверху (для метода (3.8) $0<\alpha\le\frac{5}{4\|A\|}$), что может привести к необходимости большого числа итераций. В неявных методах никаких ограничений сверху на $\alpha > 0$ нет. Это позволяет брать его произвольно большим (независимо от $\|A\|$). В связи с чем оптимальную оценку погрешности для метода (3.2) можно получить уже на первых шагах итераций.

Рассмотрим погрешность метода (3.2) при счете с округлениями. Пусть $x_{n,\delta}$ – точное значение, полученное по формуле (3.2), а z_n – приближенное решение, полученное по той же формуле с учетом вычислительных погрешностей γ_n, т.е.

$$z_{n+1} = (E + \alpha A)^{-1}(z_n + \alpha\, y_\delta) + \alpha\gamma_n,\ z_0 = 0. \tag{3.9}$$

Обозначим $\varepsilon_n = z_n - x_{n,\delta}$ и вычтем из (3.9) равенство (3.2), получим $\varepsilon_{n+1} = (E + \alpha A)^{-1}\varepsilon_n + \alpha\gamma_n$. Так как нулевые приближения равны нулю, то $\gamma_0 = 0$. По индукции получим $\varepsilon_n = \sum\limits_{k=0}^{n-1}(E + \alpha A)^{-(n-1-k)}\alpha\gamma_k$. В силу $\alpha > 0$ и принадлежности нуля спектру оператора A имеем $\left\|(E + \alpha A)^{-1}\right\| \le 1$, поэтому $\|\varepsilon_n\| \le n\alpha\gamma$, где $\gamma = \sup\limits_k |\gamma_k|$. Таким образом, для достаточно больших n

$$\|x - z_n\| \le \left\|x - x_{n,\delta}\right\| + \left\|x_{n,\delta} - z_n\right\| \le s^s(2n\alpha)^{-s}\|z\| + n\alpha\delta + n\alpha\gamma.$$

Итак, с учетом вычислительной погрешности оценка погрешности для метода (3.2) имеет вид $\|x - z_n\| \le s^s(2n\alpha)^{-s}\|z\| + n\alpha(\delta + \gamma)$. Следовательно, для неявного метода (3.2) член, зависящий от погрешности в счете, получился точно такой же, как и для явного метода простой итерации (3.8).

3.1.2 Случай приближённо заданного оператора в неявном методе решения операторных уравнений

Рассмотрим случай, когда счет ведется по методу (3.1) не с оператором A, а с оператором A_h, $\|A - A_h\| \le h.$ Введем погрешность $\eta_n = u_n - x_n$, где

$$(E + \alpha A_h)u_{n+1} = u_n + \alpha y, \quad u_0 = 0. \tag{3.10}$$

Имеем $(E + \alpha A_h)u_{n+1} - (E + \alpha A_h)x_{n+1} = u_n + \alpha y - (E + \alpha A_h)x_{n+1}.$ Тогда

$$(E + \alpha A_h)\eta_{n+1} = u_n + \alpha y - (E + \alpha A_h)x_{n+1};$$

$$(E + \alpha A_h)\eta_{n+1} = (u_n - x_n) + (x_n + \alpha y) - (E + \alpha A_h)x_{n+1}.$$

Из (3.1) следует

$$(E + \alpha A_h)\eta_{n+1} = \eta_n + (E + \alpha A)x_{n+1} - x_{n+1} - \alpha A_h x_{n+1};$$

$$(E + \alpha A_h)\eta_{n+1} = \eta_n + \alpha(A - A_h)x_{n+1}.$$

Отсюда

$$(E + \alpha A_h)\eta_{n+1} = \eta_n + \alpha B x_{n+1}, \tag{3.11}$$

где $B = A - A_h$, $\|B\| \le h,$ $\eta_0 = 0.$ Покажем по индукции, что

$$\eta_n = \sum_{k=0}^{n-1} (E + \alpha A_h)^{-(k+1)} \alpha B x_{n-k}. \tag{3.12}$$

Из (3.11) и (3.12) $\eta_1 = (E + \alpha A_h)^{-1} \alpha B x_1$, следовательно, при $n = 1$ формула (3.12) верна. Предположим, что она справедлива при $n = p$, т.е. верно, что $\eta_p = \sum_{k=0}^{p-1} (E + \alpha A_h)^{-(k+1)} \alpha B x_{p-k}$ и покажем ее справедливость при $n = p + 1$. Имеем

$$\eta_{p+1}=(E+\alpha A_h)^{-1}(\eta_p+\alpha Bx_{p+1})=(E+\alpha A_h)^{-1}\left(\sum_{k=0}^{p-1}(E+\alpha A_h)^{-(k+1)}\alpha Bx_{p-k}+\alpha Bx_{p+1}\right)=$$

$$=(E+\alpha A_h)^{-1}\Big[(E+\alpha A_h)^{-1}\alpha Bx_p+(E+\alpha A_h)^{-2}\alpha Bx_{p-1}+\ldots+(E+\alpha A_h)^{-p}\alpha Bx_1+$$

$$+\alpha Bx_{p+1}\Big]=(E+\alpha A_h)^{-1}\alpha Bx_{p+1}+(E+\alpha A_h)^{-2}\alpha Bx_p+(E+\alpha A_h)^{-3}\alpha Bx_{p-1}+\ldots+$$

$$+(E+\alpha A_h)^{-(p+1)}\alpha Bx_1=\sum_{k=0}^{p}(E+\alpha A_h)^{-(k+1)}\alpha Bx_{p+1-k}.$$

Следовательно, формула (3.12) доказана.

Так как $\|x_n\|=\left\|A^{-1}\left[E-(E+\alpha A)^{-n}\right]y\right\|\le n\alpha\|y\|,$ то $\|x_{n-k}\|\le$ $\le(n-k)\alpha\|y\|.$ Для оценки $\left\|(E+\alpha A_h)^{-(k+1)}\right\|$ потребуем, чтобы пространство H было сепарабельным и оператор A_h сокоммутировал с A, тогда [43, с. 388] он является функцией оператора A, т.е. $A_h=\int_0^M\varphi(\lambda)dE_\lambda$ и спектральная функция у этих операторов одна и та же. Следовательно, $\|A-A_h\|=\max\limits_{[0,M]}|\lambda-\varphi(\lambda)|\le h,$ так что

$$\left\|(E+\alpha A_h)^{-(k+1)}\right\|=\max_{[0,M]}\frac{1}{|1+\alpha\varphi(\lambda)|^{k+1}}\le$$

$$\le\max_{[0,M]}\frac{1}{|1+\alpha(\lambda-h)|^{k+1}}\le\frac{1}{|1-\alpha h|^{k+1}}.$$

Таким образом, считая $\alpha h<1,$ имеем

$$\|\eta_n\|\le\alpha^2h\sum_{k=0}^{n-1}\frac{n-k}{(1-\alpha h)^{k+1}}\|y\|. \tag{3.13}$$

Покажем, по индукции, что

$$\alpha^2h\sum_{k=0}^{n-1}\frac{n-k}{(1-\alpha h)^{k+1}}\|y\|=h^{-1}\left[\frac{1}{(1-\alpha h)^n}-n\alpha h-1\right]\|y\|. \tag{3.14}$$

При $n=1$ равенство (3.14) справедливо. Предположим, что оно верно при $n=p$, т.е. $\alpha^2 h \sum\limits_{k=0}^{p-1} \frac{p-k}{(1-\alpha h)^{k+1}} \|y\| = h^{-1}\left[\frac{1}{(1-\alpha h)^p} - p\alpha h - 1\right]\|y\|$ и рассмотрим при $n=p+1$. Имеем

$$\alpha^2 h \sum_{k=0}^{p} \frac{p+1-k}{(1-\alpha h)^{k+1}}\|y\| = \alpha^2 h\left[\frac{p+1}{1-ah} + \frac{p}{(1-\alpha h)^2} + \frac{p-1}{(1-\alpha h)^3} + \ldots + \right.$$

$$\left. + \frac{2}{(1-\alpha h)^p} + \frac{1}{(1-\alpha h)^{p+1}}\right]\|y\| = \alpha^2 h\left[\frac{p+1}{1-\alpha h} + \frac{1}{1-\alpha h}\left(\frac{p}{1-\alpha h} + \right.\right.$$

$$\left.\left. + \frac{p-1}{(1-\alpha h)^2} + \ldots + \frac{1}{(1-\alpha h)^p}\right)\right]\|y\| = \alpha^2 h\left[\frac{p+1}{1-\alpha h} + \frac{1}{1-\alpha h}\sum_{k=0}^{p-1}\frac{p-k}{(1-\alpha h)^{k+1}}\right]\|y\| =$$

$$= \left[\frac{\alpha^2 h(p+1)}{1-\alpha h} + \frac{\alpha^2 h}{1-\alpha h}\sum_{k=0}^{p-1}\frac{p-k}{(1-\alpha h)^{k+1}}\right]\|y\| = \left[\frac{\alpha^2 h(p+1)}{1-\alpha h} + \frac{1}{h(1-\alpha h)} \times \right.$$

$$\left. \times\left(\frac{1}{(1-\alpha h)^p} - p\alpha h - 1\right)\right]\|y\| = \frac{h^{-1}}{1-\alpha h}\left[\alpha^2 h^2(p+1) + \frac{1}{(1-\alpha h)^p} - p\alpha h - 1\right]\|y\| =$$

$$= h^{-1}\left[\frac{1}{(1-\alpha h)^{p+1}} + \frac{\alpha^2 h^2 p + \alpha^2 h^2 - p\alpha h - 1}{1-\alpha h}\right]\|y\| = h^{-1}\left[\frac{1}{(1-\alpha h)^{p+1}} + \right.$$

$$\left. + \frac{(\alpha h - 1)(\alpha h(p+1)+1)}{1-\alpha h}\right]\|y\| = h^{-1}\left[\frac{1}{(1-\alpha h)^{p+1}} - (p+1)\alpha h - 1\right]\|y\|.$$

Итак, формула (3.14) доказана. Следовательно,

$$\|\eta_n\| \le h^{-1}\left[\frac{1}{(1-\alpha h)^n} - n\alpha h - 1\right]\|y\|. \qquad (3.15)$$

Покажем, что полученная оценка имеет порядок $O(h)$.

$$h^{-1}\left[\frac{1}{(1-\alpha h)^n} - n\alpha h - 1\right]\|y\| = h^{-1}\left[\frac{1 - n\alpha h(1-\alpha h)^n - (1-\alpha h)^n}{(1-\alpha h)^n}\right]\|y\| =$$

$$=\frac{h^{-1}\left[1-n\alpha h\left(1-n\alpha h+\frac{n(n-1)}{2!}\alpha^2h^2-\ldots\right)-1+n\alpha h-\frac{n(n-1)}{2!}\alpha^2h^2+\ldots\right]}{(1-\alpha h)^n}\|y\|=$$

$$=h^{-1}\frac{\left[n^2\alpha^2h^2-\frac{n^2(n-1)}{2!}\alpha^3h^3-\ldots-\frac{n(n-1)}{2!}\alpha^2h^2+\ldots\right]}{(1-\alpha h)^n}\|y\|.$$

Знаменатель имеет порядок $O(1)$, а числитель $O(h)$, поэтому правая часть в (3.15) имеет порядок $O(h)$. Сравним оценку (3.15) с аналогичной оценкой [28] для явного метода простой итерации (3.8). Покажем, что оценка (3.15) хуже, т.е. выполняется $h^{-1}\left[\frac{1}{(1-\alpha h)^n}-n\alpha h-1\right]\|y\|\geq h^{-1}\left[(1+\alpha h)^n-n\alpha h-1\right]\|y\|.$ Действительно, $(1-\alpha h)^{-n}\geq(1+\alpha h)^n$ или $1\geq\left(1-\alpha^2h^2\right)^n$, или $1\geq1-\alpha^2h^2$, или $\alpha^2h^2\geq0,$ что очевидно. Следовательно, оценка за счет погрешности в операторе для неявного метода (3.1) хуже, чем для явного метода простой итерации (3.8).

Запишем теперь общую оценку погрешности метода с учетом неточности в правой части уравнения (2.1) и погрешности в операторе

$$\|x-u_{n,\delta}\|\leq\|x-x_n\|+\|x_n-x_{n,\delta}\|+\|x_{n,\delta}-u_{n,\delta}\|\leq$$

$$\leq s^s(2n\alpha)^{-s}\|z\|+n\alpha\delta+h^{-1}\left[\frac{1}{(1-\alpha h)^n}-n\alpha h-1\right]\|y_\delta\|.$$

3.1.3 Случай неединственного решения

Покажем, что метод (3.1) пригоден и тогда, когда $\lambda=0$ является собственным значением оператора A (случай неединственного решения уравнения (2.1)). Обозначим через $N(A)=\{x\in H\mid Ax=0\}$, $M(A)$ – ортогональное дополнение ядра $N(A)$ до H. Пусть $P(A)x$ –

проекция $x \in H$ на $N(A)$, а $\Pi(A)x$ – проекция $x \in H$ на $M(A)$. Справедлива

Теорема 3.3. *Пусть* $A \geq 0$, $y \in H$, $\alpha > 0$. *Тогда для итеративного метода* (3.1) *верны следующие утверждения:*

а) $Ax_n \to \Pi(A)y$, $\|Ax_n - y\| \to I(A, y) = \inf_{x \in H} \|Ax - y\|$;

б) процесс (3.1) *сходится тогда и только тогда, когда уравнение* $Ax = \Pi(A)y$ *разрешимо. В последнем случае* $x_n \to P(A)x_0 + x^*$, *где* x^* *– минимальное решение.*

Доказательство. Применив оператор A к (3.1), получим $A(E+\alpha A)x_n = Ax_{n-1} + \alpha Ay$, где $y = P(A)y + \Pi(A)y$. Так как $AP(A)y = 0$, то получим $(E+\alpha A)(Ax_n - \Pi(A)y) = Ax_{n-1} - \Pi(A)y$. Обозначим $Ax_n - \Pi(A)y = v_n$, $v_n \in M(A)$, тогда $(E+\alpha A)v_n = v_{n-1}$. Отсюда $v_n = (E+\alpha A)^{-1} v_{n-1} = (E+\alpha A)^{-n} v_0$. Имеем $A \geq 0$ и A – положительно определен в $M(A)$, т.е. $(Ax, x) > 0$ для любого $x \in M(A)$. Так как $\alpha > 0$, то $\left\|(E+\alpha A)^{-1}\right\| < 1$, поэтому справедлива цепочка неравенств

$$\|v_n\| = \left\|(E+\alpha A)^{-n} v_0\right\| = \left\|\int_0^{\|A\|} \frac{dE_\lambda v_0}{(1+\alpha\lambda)^n}\right\| \leq \left\|\int_0^{\varepsilon_0} \frac{dE_\lambda v_0}{(1+\alpha\lambda)^n}\right\| + \left\|\int_{\varepsilon_0}^{\|A\|} \frac{dE_\lambda v_0}{(1+\alpha\lambda)^n}\right\| \leq$$

$$\leq \left\|\int_0^{\varepsilon_0} dE_\lambda v_0\right\| + q^n(\varepsilon_0)\left\|\int_{\varepsilon_0}^{\|A\|} dE_\lambda v_0\right\| = \left\|E_{\varepsilon_0} v_0\right\| + q^n(\varepsilon_0)\left\|v_0 - E_{\varepsilon_0} v_0\right\| < \varepsilon$$

при $\varepsilon_0 \to 0$, $n \to \infty$. Здесь $\frac{1}{1+\alpha\lambda} \leq q(\varepsilon_0) < 1$ при $\lambda \in [\varepsilon_0, \|A\|]$.

Следовательно, $v_n \to 0$, откуда $Ax_n \to \Pi(A)y$ и $\Pi(A)y \in A(H)$.

$\|Ax_n - y\| \to \|\Pi(A)y - y\| =$

$=\|P(A)y\| = I(A,y)$ (см. [124]). Итак, утверждение а) доказано.

Докажем б). Пусть процесс (3.1) сходится. Покажем, что уравнение $Ax = \Pi(A)y$ разрешимо. Из сходимости $\{x_n\} \in H$ к $z \in H$ и из а) следует, что $Ax_n \to Az = \Pi(A)y$, следовательно, $\Pi(A)y \in A(H)$ и уравнение $\Pi(A)y = Ax$ разрешимо.

Пусть теперь $\Pi(A)y \in A(H)$ (уравнение $\Pi(A)y = Ax$ разрешимо), следовательно $\Pi(A)y = Ax^*$, где x^*– минимальное решение уравнения $Ax = y$(оно единственно в $M(A)$). Тогда (3.1) примет вид

$$(E + \alpha A)x_n = x_{n-1} + \alpha\Pi(A)y =$$

$$=(E + \alpha A)x_{n-1} - \alpha Ax_{n-1} + \alpha Ax^* = (E + \alpha A)x_{n-1} + \alpha A\left(x^* - x_{n-1}\right).$$

Отсюда $x_n \ = x_{n-1} + \alpha A(E + \alpha A)^{-1}\left(x^* - x_{n-1}\right)$. Последнее равенство разобьем
на два:

$$P(A)x_n = P(A)x_{n-1} + \alpha(E + \alpha A)^{-1} AP(A)\left(x^* - x_{n-1}\right) = P(A)x_{n-1} = P(A)x_0;$$

$$\Pi(A)x_n = \Pi(A)x_{n-1} + \alpha A(E + \alpha A)^{-1}\Pi(A)\left(x^* - x_{n-1}\right) = \Pi(A)x_{n-1} +$$

$$+\alpha A(E + \alpha A)^{-1}\left(\Pi(A)x^* - \Pi(A)x_{n-1}\right) =$$

$$\Pi(A)x_{n-1} + \alpha A(E + \alpha A)^{-1}\left(x^* - \Pi(A)x_{n-1}\right),$$

так как $x^* \in M(A)$. Обозначим $w_n = \Pi(A)x_n - x^*$, тогда из равенства $\Pi(A)x_n - x^* = \Pi(A)x_{n-1} - x^* + \alpha A(E + \alpha A)^{-1}\left(x^* - \Pi(A)x_{n-1}\right)$ получим $w_n = w_{n-1} - \ -\alpha A(E + \alpha A)^{-1} w_{n-1}$. Следовательно, $w_n = (E + \alpha A)^{-1} w_{n-1}$ и, аналогично v_n, можно показать, что $w_n \to 0$, $n \to \infty$. Таким образом, $\Pi(A)x_n \to x^*$. Отсюда $x_n = P(A)x_n + \Pi(A)x_n \to P(A)x_0 + x^*$. Теорема 3.3 доказана.

Замечание 3.2. *Так как у нас* $x_0 = 0$*, то* $x_n \to x^*$*, т.е. процесс* (3.1) *сходится к нормальному решению, т.е. к решению с минимальной нормой.*

3.1.4 Правило останова по соседним приближениям для уравнений с несамосопряжённым оператором

Для решения уравнения (2.1) с несамосопряженным оператором A используем метод

$$z_{n+1} = \left(E + \alpha A^* A\right)^{-1} \left(z_n + \alpha A^* y_\delta\right) + \left(E + \alpha A^* A\right)^{-1} u_n, \quad z_0 \in H. \tag{3.16}$$

Здесь u_n – ошибки вычисления итераций, где $\|u_n\| \le \beta$. Обозначим $C = \left(E + \alpha A^* A\right)^{-1}$. Для простоты считаем, что $\|A\| = 1$. Определим момент m останова итерационной процедуры условием (2.34), где ε – заданное до начала вычислений положительное число (уровень останова). Справедливы

Лемма 3.1. *Пусть приближение* ω_n *определяется равенствами*

$$\omega_0 = z_0, \quad \omega_{n+1} = C\omega_n + \alpha C A^* y + C u_n, \quad n \ge 0, \tag{3.17}$$

тогда справедливо неравенство

$$\sum_{k=0}^{n} \left\|\omega_k - \omega_{k+1} + C u_k\right\|^2 \le \left\|\omega_0 - x\right\|^2 + \sum_{k=0}^{n-1} \left\|C u_k\right\|^2. \tag{3.18}$$

Лемма 3.2. *При любом* $\omega_0 \in H$ *и произвольной последовательности ошибок* $\{u_n\}$*, удовлетворяющих условию* $\|u_n\| \le \beta$*, выполнено неравенство*

$$\varliminf_{n\to\infty} \left\|\omega_n - \omega_{n+1}\right\| \le 2\|C\|\beta.$$

Леммы 3.1 и 3.2 доказываются аналогично подобным из раздела 2.1.

Теорема 3.4. *Пусть уровень останова* $\varepsilon = \varepsilon(\delta, \beta)$ *выбирается как функ-ция от уровней* δ *и* β *норм погрешностей* $y - y_\delta$ *и* u_n. *Тогда справедливы следующие утверждения:*

а) если $\varepsilon(\delta,\beta) > 2\|C\|\beta,$ *то момент останова m определен при любом начальном приближении* $z_0 \in H$ *и любых* y_δ *и* u_n, *удовлетворяющих условиям* $\|y - y_\delta\| \le \delta, \ \|u_n\| \le \beta;$

б) если $\varepsilon(\delta,\beta) > \left\|CA^*\right\|\alpha\delta + 2\|C\|\beta,$ *то справедлива оценка*

$$m \le \frac{\|z_0 - x\|^2}{\left(\varepsilon - \left\|CA^*\right\|\alpha\delta - 2\|C\|\beta\right)\left(\varepsilon - \left\|CA^*\right\|\alpha\delta\right)};$$

в) если, кроме того, $\varepsilon(\delta,\beta) \to 0, \ \delta,\beta \to 0,$ *и* $\varepsilon(\delta,\beta) \ge k\left(\left\|CA^*\right\|\alpha\delta + \|C\|\beta^p\right),$ *где* $k > 1$, $p \in (0,1)$, *то* $\lim\limits_{\delta,\beta\to 0}\|z_m - x\| = 0.$

Доказательство. а). По индукции нетрудно показать, что

$$z_n = C^n z_0 + C\sum_{k=0}^{n-1} C^k\left(\alpha A^* y_\delta + u_{n-k-1}\right). \tag{3.19}$$

Отсюда $\omega_n = C^n\omega_0 + A^{-1}\left(E - C^n\right)y + C\sum\limits_{k=0}^{n-1} C^k u_{n-k-1}$. Учитывая, что $z_0 = \omega_0$, получим $z_n - z_{n+1} = \omega_n - \omega_{n+1} + \alpha C^{n+1}A^*(y - y_\delta)$. Следовательно,

$$\|z_n - z_{n+1}\| \le \|\omega_n - \omega_{n+1}\| + \left\|\alpha C^{n+1}A^*(y - y_\delta)\right\|. \tag{3.20}$$

Обозначим $\sigma = \alpha CA^*(y - y_\delta)$, тогда при условии $\alpha > 0$, $\lambda \in [0,1]$ получим $\left\|\alpha C^{n+1}A^*(y - y_\delta)\right\| = \left\|C^n\sigma\right\| \to 0, \ n \to \infty.$ Поэтому $\varliminf\limits_{n\to\infty}\|z_n - z_{n+1}\| = \varliminf\limits_{n\to\infty}\|\omega_n - \omega_{n+1}\|$. Из леммы 3.2

$\varliminf\limits_{n\to\infty}\|z_n - z_{n+1}\| = \varliminf\limits_{n\to\infty}\|\omega_n - \omega_{n+1}\| \le 2\|C\|\beta$. Итак, условием $\varepsilon(\delta,\beta) > 2\|C\|\beta$ момент останова m определен при любом начальном при-ближении $z_0 \in H$ и любых y_δ, $\|y - y_\delta\| \le \delta$ и u_n, $\|u_n\| \le \beta$.

б). Рассмотрим последовательность (3.17) и определим момент останова m' условием

$$\|\omega_n - \omega_{n+1}\| > \varepsilon - \left\|CA^*\right\|\alpha\delta, (n < m'), \quad \|\omega_{m'} - \omega_{m'+1}\| \le \varepsilon - \left\|CA^*\right\|\alpha\delta. \quad (3.21)$$

Из (3.20) имеем $\|z_n - z_{n+1}\| \le \|\omega_n - \omega_{n+1}\| + \left\|CA^*\right\|\alpha\delta$. Отсюда следует, что $m \le m'$. Из (3.18) при $n = m'$ получим $\sum\limits_{k=0}^{m'}\|\omega_k - \omega_{k+1} + Cu_k\|^2 \le \|\omega_0 - x\|^2 + \sum\limits_{k=0}^{m'-1}\|Cu_k\|^2$. Поскольку выполняется $\sum\limits_{k=0}^{m'-1}\|\omega_k - \omega_{k+1} + Cu_k\|^2 \le \sum\limits_{k=0}^{m'}\|\omega_k - \omega_{k+1} + Cu_k\|^2$, то $\sum\limits_{k=0}^{m'-1}\|\omega_k - \omega_{k+1} + Cu_k\|^2 \le \|\omega_0 - x\|^2 + \sum\limits_{k=0}^{m'-1}\|Cu_k\|^2$. Отсюда справедливо неравенство $\sum\limits_{k=0}^{m'-1}\left(\|\omega_k - \omega_{k+1}\| - \|C\|\beta\right)^2 \le \|\omega_0 - x\|^2 + \sum\limits_{k=0}^{m'-1}\|Cu_k\|^2$. Так как по (3.21) при $n < m'$ имеем $\|\omega_n - \omega_{n+1}\| > \varepsilon - \left\|CA^*\right\|\alpha\delta$, то $m'\left(\varepsilon - \left\|CA^*\right\|\alpha\delta - \|C\|\beta\right)^2 \le \|\omega_0 - x\|^2 + m'\|C\|^2\beta^2$. Учитывая что $\omega_0 = z_0$ и $m \le m'$, из последнего неравенства получим

$$m \le m' \le \frac{\|z_0 - x\|^2}{\left(\varepsilon - \left\|CA^*\right\|\alpha\delta - 2\|C\|\beta\right)\left(\varepsilon - \left\|CA^*\right\|\alpha\delta\right)}.$$

в). Нетрудно показать, что

$$x = C^n x + C\sum_{k=0}^{n-1}\alpha C^k A^* y. \quad (3.22)$$

Из (3.19) вычтем (3.22), получим

$$z_n - x = C^n(z_0 - x) + C\sum_{k=0}^{n-1} C^k\left[\alpha A^*(y_\delta - y) + u_{n-k-1}\right]. \qquad (3.23)$$

Отсюда $\Delta_n = C^n\Delta_0 + C\sum_{k=0}^{n-1} C^k\left[\alpha A^*(y_\delta - y) + u_{n-k-1}\right]$, где $\Delta_n = z_n - x$ и $\Delta_0 = z_0 - x$. Следовательно,

$$\|\Delta_n\| \le \left\|C^n\Delta_0\right\| + \left(\left\|CA^*\right\|\alpha\,\delta + \|C\|\beta\right)n. \qquad (3.24)$$

В частности, (3.24) справедливо и при $n = m$. Если $m \to \infty$ при $\varepsilon, \delta, \beta \to 0$, тогда, как показано ранее, $\left\|C^m\Delta_0\right\| \to 0,\ m \to 0$. Поэтому для доказательства $\|z_m - x\| \to 0,\ \delta \to 0,\ \beta \to 0$, достаточно показать, что $m\left(\left\|CA^*\right\|\alpha\,\delta + \|C\|\beta\right) \to 0,\quad m \to \infty,\quad \delta \to 0,\quad \beta \to 0.$ Из (3.23) получим

$$\begin{gathered} z_n - z_{n+1} = C^n(E - C)(z_0 - x) - Cu_n - \\ - C^{n+1}\alpha A^*(y_\delta - y) + C\sum_{k=0}^{n-1} C^k(E - C)u_{n-1-k}. \end{gathered} \qquad (3.25)$$

Так как спектр оператора $C = \left(E + \alpha A^*A\right)^{-1}$ принадлежит $[0,1]$, то $\left\|C^n(E - C)\right\| \le \quad \le \dfrac{1}{n+1}$. Поэтому из (3.25) при $n = m - 1$ $\|z_{m-1} - z_m\| \le \dfrac{2}{m}\left\|C^{(m-1)/2}(z_0 - x)\right\| + \quad + \left\|CA^*\right\|\alpha\,\delta + \|C\|(2 + \ln m)\beta$, так как $\sum_{k=1}^{m-1}\dfrac{1}{k} \le 1 + \ln m$ [16, с. 16]. По условию $\varepsilon(\delta,\beta) \ge k\left(\left\|CA^*\right\|\alpha\,\delta + \|C\|\beta^p\right)$, $k > 1$, $p \in (0,1)$, то при всех достаточно малых δ, β выполняется неравенство $\varepsilon(\delta,\beta) > \left\|CA^*\right\|\alpha\,\delta + 2\|C\|\beta$, поэтому из б) получим $m \le \dfrac{\|z_0 - x\|^2}{\left(\varepsilon - \|CA^*\|\alpha\delta - 2\|C\|\beta\right)\left(\varepsilon - \|CA^*\|\alpha\delta\right)}$. Так как $\|z_{m-1} - z_m\| > \varepsilon,$ то выполняется $\varepsilon \le \dfrac{2}{m}\left\|C^{(m-1)/2}(z_0 - x)\right\| + \|CA^*\|\alpha\delta + \|C\|(2 + \ln m)\beta.$ Отсюда

$$m \le 2\left\|C^{(m-1)/2}(z_0 - x)\right\| \times$$

$$\times \left(\varepsilon - \|CA^*\|\alpha\delta - 2\|C\|\beta - \|C\|\beta \ln \frac{\|z_0 - x\|^2}{\left(\varepsilon - \|CA^*\|\alpha\delta - 2\|C\|\beta\right)\left(\varepsilon - \|CA^*\|\alpha\delta\right)}\right)^{-1}.$$

Умножив обе части последнего неравенства на $\|CA^*\|\alpha\delta + \|C\|\beta,$ получим $m\left(\|CA^*\|\alpha\delta + \|C\|\beta\right) \to 0$ при $m \to \infty,$ $\delta, \beta \to 0.$ Отсюда и из (3.24) при $m \to \infty$

$$\lim_{\substack{\delta \to 0 \\ \beta \to 0}} \|\Delta_m\| = \lim_{\substack{\delta \to 0 \\ \beta \to 0}} \|z_m - x\| \le \lim_{\substack{\delta \to 0 \\ \beta \to 0}} \left(\left\|C^m \Delta_0\right\| + m\left(\|CA^*\|\alpha\delta + \|C\|\beta\right)\right) = 0.$$

Если номера останова $m,$ зависящие от $\varepsilon, y - y_\delta \; \{u_n\},$ не стремятся к ∞ при $\varepsilon, \delta, \beta \to 0,$ а окажутся ограниченными, то и в этом случае $z_m \to x,$ при $\beta \to 0,$ $\delta \to 0,$ $\varepsilon \to 0.$ Действительно, из (3.25) получим

$$C^m(E - C)(z_0 - x) = z_m - z_{m+1} + C^{m+1}\alpha A^*(y_\delta - y) + Cu_m - C\sum_{k=0}^{m-1} C^k (E - C)u_{m-1-k}.$$

Отсюда

$$\left\|C^m(E - C)(z_0 - x)\right\| \le \|z_m - z_{m+1}\| + \left\|C^{m+1}\alpha A^*(y_\delta - y)\right\| + \left\|C\sum_{k=0}^{m-1} C^k (E - C)u_{m-1-k}\right\| +$$

$$+ \|Cu_m\| \le \varepsilon + \|CA^*\|\alpha\delta + \|C\|\beta(2 + \ln m) \to 0,$$

при $\varepsilon, \delta, \beta \to 0$. Следовательно, используя равенство $E - C = \alpha C A^* A$, получим $C^m(E-C)(z_0 - x) = \alpha C A^* A C^m(z_0 - x) \to 0$ при $\varepsilon, \delta, \beta \to 0$.

Обозначим $g_n(\lambda) = \lambda^{-1}\left[1 - (1+\alpha\lambda)^{-n}\right]$, тогда $g_n\left(A^* A\right) = \left(A^* A\right)^{-1}\left[E - \left(E + \alpha A^* A\right)^{-n}\right] = \left(A^* A\right)^{-1}\left(E - C^n\right)$. Следовательно, $C^n = E - A^* A g_n\left(A^* A\right)$. Это верно при $n = m+1$, т.е. $C^{m+1} = E - A^* A g_{m+1}\left(A^* A\right)$. Тогда

$$C^m(E-C)(z_0 - x) =$$
$$= \alpha A^* A C^{m+1}(z_0 - x) = \alpha A^* A\left[E - A^* A g_{m+1}\left(A^* A\right)\right](z_0 - x) \to 0,$$

при $\varepsilon, \delta, \beta \to 0$, поэтому по лемме 2.3 получаем $\left(E - A^* A g_{m+1}\left(A^* A\right)\right)(z_0 - x) \to 0$, $\varepsilon, \delta, \beta \to 0$, т.е. $C^{m+1}(z_0 - x) \to 0$, $C^{m+1}\Delta_0 \to 0$, $\varepsilon, \delta, \beta \to 0$. Следовательно, $C^m \Delta_0 \to 0$, $\varepsilon, \delta, \beta \to 0$. Отсюда $\|z_m - x\| \le \left\|C^m \Delta_0\right\| + m\left(\left\|C A^*\right\|\alpha\delta + \|C\|\beta\right) \to 0$, $\varepsilon, \delta, \beta \to 0$. Теорема 3.4 доказана.

Замечание 3.3. *Можно показать, что* $\|C\| = 1$, $\left\|C A^*\right\| = \dfrac{1}{2\sqrt{\alpha}}$. *Тогда формулировка доказанной теоремы примет более простой вид*.

3.2 Регуляризация некорректных уравнений с помощью неявного итерационного метода

3.2.1 Случай неединственного решения

Для решения задачи из подраздела 2.1.1 применяется регуляризатор в виде неявного итерационного процесса

$$\left(E + \alpha^2 A^2\right)x_n = (E - \alpha A)^2 x_{n-1} + 2\alpha y,\ x_0 = 0, \qquad (3.26)$$

который в случае приближенной правой части y_δ, $\|y - y_\delta\| \le \delta$ примет вид

$$\left(E + \alpha^2 A^2\right) x_{n,\delta} = (E - \alpha A)^2 x_{n-1,\delta} + 2\alpha y_\delta,\ x_{0,\delta} = 0. \qquad (3.27)$$

В работе [100] исследовалась сходимость предложенного метода при точной и приближенной правых частях уравнения (2.1). Доказано, что при условии $\alpha > 0$ метод (3.27) сходится, если число итераций n выбирается из условия $n\delta \to 0$, $n \to \infty$, $\delta \to 0$. Получена оценка погрешности для метода [100]

$$\left\|x - x_{n,\delta}\right\| \le \max\left\{ s^s (2n\alpha e)^{-s},\ M^s \left(\frac{(1-\alpha M)^2}{1+\alpha^2 M^2} \right)^n \right\} \|z\| + 2n\alpha\delta.$$

Так как для достаточно больших n $M^s \left(\frac{(1-\alpha M)^2}{1+\alpha^2 M^2} \right)^n \le s^s (2n\alpha e)^{-s}$, то для этих n справедлива оценка $\left\|x - x_{n,\delta}\right\| \le s^s (2n\alpha e)^{-s} \|z\| + 2n\alpha\delta.$ Ее оптимальная по n оценка имеет вид $\left\|x - x_{n,\delta}\right\|_{\text{опт}} \le (1+s) e^{-\frac{s}{s+1}} \delta^{\frac{s}{s+1}} \|z\|^{\frac{1}{s+1}}$ и получается при

$$n_{\text{опт}} = s\alpha^{-1} 2^{-1} e^{-\frac{s}{s+1}} \delta^{-\frac{1}{s+1}} \|z\|^{\frac{1}{s+1}}.$$

Но сходимость метода доказана и оценки получены для случая, когда уравнение (2.1) имеет единственное решение ($\lambda = 0$ не является собственным значением оператора A).

Покажем, что метод (3.26) пригоден и тогда, когда $\lambda = 0$ является собственным значением оператора A (случай неединственного решения уравнения (2.1)). Обозначим через $N(A) = \{x \in H \mid Ax = 0\}$, $M(A)$ – ортогональное дополнение ядра $N(A)$

до H. Пусть $P(A)x-$проекция $x\in H$ на $N(A)$, а $\Pi(A)x-$ проекция $x\in H$ на $M(A)$. Справедлива

Теорема 3.5. *Пусть* $A\geq 0$, $y\in H$, $\alpha>0$. *Тогда для итеративного процесса* (3.26) *верны следующие утверждения:*

а) $Ax_n\to\Pi(A)y$, $\|Ax_n-y\|\to I(A,y)=\inf\limits_{x\in H}\|Ax-y\|$;

б) (3.26) *сходится тогда и только тогда, когда уравнение* $Ax=\Pi(A)y$ *разрешимо. В последнем случае* $x_n\to P(A)x_0+x^*$, *где* x^* – *минимальное решение уравнения.*

Доказательство. Применим A к (3.26), получим $A\left(E+\alpha^2A^2\right)x_n= =A(E-\alpha A)^2x_{n-1}+2\alpha Ay$, где $y=P(A)y+\Pi(A)y.$ Так как $AP(A)y=0,$ то получим $\left(E+\alpha^2A^2\right)\left(Ax_n-\Pi(A)y\right)=(E-\alpha A)^2\left(Ax_{n-1}-\Pi(A)y\right).$ Последнее равенство запишется в виде $\left(E+\alpha^2A^2\right)v_n=(E-\alpha A)^2v_{n-1},$ где $v_n=Ax_n-\Pi(A)y$ и $v_n\in M(A).$ Отсюда $v_n=\left(E+\alpha^2A^2\right)^{-1}(E-\alpha A)^2v_{n-1},$ следовательно, $v_n=\left(E+\alpha^2A^2\right)^{-n}(E-\alpha A)^{2n}v_0.$ Имеем $A\geq 0$ и $A-$ положительно определен в $M(A)$, т.е. $(Ax,x)>0$ для любого $x\in M(A)$. Так как $\alpha>0$, то $\left\|\left(E+\alpha^2A^2\right)^{-1}(E-\alpha A)^2\right\|<1,$ поэтому справедлива цепочка неравенств

$$\|v_n\|=\left\|\left(E+\alpha^2A^2\right)^{-n}(E-\alpha A)^{2n}v_0\right\|=\left\|\int\limits_0^{\|A\|}\frac{(1-\alpha\lambda)^{2n}}{\left(1+\alpha^2\lambda^2\right)^n}dE_\lambda v_0\right\|\leq$$

$$\leq\left\|\int\limits_0^{\varepsilon_0}\frac{(1-\alpha\lambda)^{2n}}{\left(1+\alpha^2\lambda^2\right)^n}dE_\lambda v_0\right\|+\left\|\int\limits_{\varepsilon_0}^{\|A\|}\frac{(1-\alpha\lambda)^{2n}}{\left(1+\alpha^2\lambda^2\right)^n}dE_\lambda v_0\right\|\leq\left\|\int\limits_0^{\varepsilon_0}dE_\lambda v_0\right\|+$$

$$+q^n(\varepsilon_0)\left\|\int\limits_{\varepsilon_0}^{\|A\|}dE_\lambda v_0\right\|=\left\|E_{\varepsilon_0}v_0\right\|+q^n(\varepsilon_0)\left\|v_0-E_{\varepsilon_0}v_0\right\|<\varepsilon$$

при $\varepsilon_0 \to 0$, $n \to \infty$. (Здесь $\dfrac{(1-\alpha\lambda)^2}{1+\alpha^2\lambda^2} \le q(\varepsilon_0) < 1$ при $\lambda \in [\varepsilon_0, \|A\|]$).

Следовательно, $v_n \to 0$, откуда получим $Ax_n \to \Pi(A)y$ и $\Pi(A)y \in A(H)$. $\|Ax_n - y\| \to \|\Pi(A)y - y\| = \|P(A)y\| = I(A,y)$ (см. [124]). Итак, утверждение а) доказано.

Докажем б). Пусть процесс (3.26) сходится. Покажем, что уравнение $Ax = \Pi(A)y$ разрешимо. Из сходимости $\{x_n\} \in H$ к $z \in H$ и из а) следует, что $Ax_n \to Az = \Pi(A)y$, следовательно, $\Pi(A)y \in A(H)$, и уравнение $\Pi(A)y = Ax$ разрешимо.

Пусть теперь $\Pi(A)y \in A(H)$ (уравнение $Ax = \Pi(A)y$ разрешимо), следовательно, $\Pi(A)y = Ax^*$, где x^* – минимальное решение уравнения $Ax = y$ (оно единственно в $M(A)$). Тогда (3.26) примет вид

$$\left(E+\alpha^2A^2\right)x_n = (E-\alpha A)^2 x_{n-1} + 2\alpha\Pi(A)y = (E-\alpha A)^2 x_{n-1} + 2\alpha A x^* =$$
$$= \left(E+\alpha^2A^2\right)x_{n-1} - 2\alpha A x_{n-1} + 2\alpha A x^* = \left(E+\alpha^2A^2\right)x_{n-1} + 2\alpha A\left(x^* - x_{n-1}\right).$$

Отсюда $x_n = x_{n-1} + 2\alpha A\left(E+\alpha^2A^2\right)^{-1}(x^* - x_{n-1})$. Разобьем последнее равенство на два:

$$P(A)x_n = P(A)x_{n-1} + 2\alpha\left(E+\alpha^2A^2\right)^{-1} AP(A)\,(x^* - x_{n-1}) =$$
$$P(A)x_{n-1} = P(A)x_0;$$

$$\Pi(A)x_n = \Pi(A)x_{n-1} + 2\alpha A\left(E+\alpha^2A^2\right)^{-1}\Pi(A)\,(x^* - x_{n-1}) = \Pi(A)x_{n-1} +$$
$$+ 2\alpha A\left(E+\alpha^2A^2\right)^{-1}(\Pi(A)\,x^* - \Pi(A)x_{n-1}) = \Pi(A)x_{n-1} +$$
$$+ 2\alpha A(E+\alpha^2A^2)^{-1}(x^* - \Pi(A)x_{n-1}),$$

так как $x^* \in M(A)$. Обозначим $\omega_n = \Pi(A)x_n - x^*$, тогда $\Pi(A)x_n - x^* =$ $= \Pi(A)x_{n-1} - x^* + 2\alpha A\left(E+\alpha^2A^2\right)^{-1}(x^* - \Pi(A)x_{n-1})$. Отсюда

$$\omega_n = \omega_{n-1} - 2\alpha A\left(E + \alpha^2 A^2\right)^{-1} \omega_{n-1} = (E - \alpha A)^2 \left(E + \alpha^2 A^2\right)^{-1} \omega_{n-1}.$$

Следовательно, $\omega_n = (E - \alpha A)^2 \left(E + \alpha^2 A^2\right)^{-1} \omega_{n-1}$ и, аналогично v_n, можно показать, что $\omega_n \to 0, \quad n \to \infty$. Таким образом, $\Pi(A)x_n \to x^*$. Отсюда $x_n = P(A)x_n + \Pi(A)x_n \to P(A)x_0 + x^*$. Теорема 3.5 доказана.

Замечание 3.4. *Так как у нас* $x_0 = 0$, *то* $x_n \to x^*$, *т.е. процесс* (3.26) *сходится к нормальному решению, т.е. к решению с минимальной нормой*.

3.2.2 Правило останова по невязке

Решается задача из подраздела 2.1.1. Зададим уровень останова ε и определим момент m останова условием (2.19). Предполагаем, что при начальном приближении $x_{0,\delta}$ невязка достаточно велика, больше уровня останова ε, т.е. $\left\| Ax_{0,\delta} - y_\delta \right\| > \varepsilon$. Покажем, что правило останова по невязке (2.19) применимо к методу (2.27). Рассмотрим семейство функций $g_n(\lambda) = \lambda^{-1}\left[1 - (1 - \alpha\lambda)^{2n}\left(1 + \alpha^2\lambda^2\right)^{-n}\right]$ из [100]. Используя результаты [100], нетрудно показать, что для $g_n(\lambda)$ выполняются следующие условия

$$\sup_{0 \le \lambda \le M} \left| g_n(\lambda) \right| \le 2\alpha n,\ \alpha > 0,\ n > 0, \tag{3.28}$$

$$\sup_{0 \le \lambda \le M} \left| 1 - \lambda g_n(\lambda) \right| \le 1,\ \alpha > 0, \tag{3.29}$$

$$1 - \lambda g_n(\lambda) \to 0, \quad n \to \infty,\ \alpha > 0,\ \forall \lambda \in (0, M], \tag{3.30}$$

$$\sup_{0 \le \lambda \le M} \lambda^s \left| 1 - \lambda g_n(\lambda) \right| \le \left(\frac{s}{2\alpha e} \right)^s n^{-s},\ n > 0,\ \alpha > 0,\ 0 \le s < \infty. \tag{3.31}$$

Справедливы

Лемма 3.3. *Пусть* $A = A^* \geq 0,\ \|A\| \leq M$. *Тогда для любого* $\omega \in H \quad (E - Ag_n(A))\omega \to 0,\ n \to \infty.$

Лемма 3.4. *Пусть* $A = A^* \geq 0, \|A\| \leq M$. *Тогда для любого* $v \in \overline{R(A)}$ *имеет место соотношение* $n^s \left\| A^s (E - Ag_n(A)) v \right\| \to 0$ *при* $n \to \infty,\ 0 \leq s < \infty$.

Лемма 3.5. *Пусть* $A = A^* \geq 0,\ \|A\| \leq M$. *Если для некоторых* $n_k < \overline{n} = const$ *и* $v_0 \in \overline{R(A)}$ *при* $k \to \infty$ *имеем* $\omega_k = A\left(E - Ag_{n_k}(A)\right)v_0 \to 0,$ *то* $v_k = \left(E - Ag_{n_k}(A)\right)v_0 \to 0.$

Леммы 3.3, 3.4 и 3.5 доказываются аналогично подобным из раздела 2.1. Используем доказанные леммы при доказательстве следующей теоремы. Справедлива

Теорема 3.6. *Пусть* $A = A^* \geq 0,\ \|A\| \leq M$ *и пусть момент останова* $m = m(\delta)$ *в методе* (3.27) *выбирается по правилу* (2.19), *тогда* $x_{m,\delta} \to x$ при $\delta \to 0$.

Доказательство. В статье [100] показано, что

$$x_{n,\delta} = A^{-1}\left[E - (E - \alpha A)^{2n}\left(E + \alpha^2 A^2\right)^{-n}\right]y_\delta.$$

Поэтому

$$x_{n,\delta} - x = A^{-1}\left[E - (E - \alpha A)^{2n}\left(E + \alpha^2 A^2\right)^{-n}\right]y_\delta - A^{-1}y = A^{-1}[E - (E -$$

$$- \alpha A)^{2n}\left(E + \alpha^2 A^2\right)^{-n}\Big](y_\delta - y) +$$

$$+ A^{-1}\left[E - (E - \alpha A)^{2n}\left(E + \alpha^2 A^2\right)^{-n}\right]y - A^{-1}y =$$

$$= A^{-1}\left[E - (E-\alpha A)^{2n}\left(E+\alpha^2 A^2\right)^{-n}\right](y_\delta - y) -$$

$$- A^{-1}(E-\alpha A)^{2n}\left(E+\alpha^2 A^2\right)^{-n} y =$$

$$= A^{-1}\left[E - (E-\alpha A)^{2n}\left(E+\alpha^2 A^2\right)^{-n}\right](y_\delta - y) -$$

$$-(E-\alpha A)^{2n}\left(E+\alpha^2 A^2\right)^{-n} x = = g_n(A)(y_\delta - y) - (E - Ag_n(A))x.$$

Следовательно,

$$x_{n,\delta} - x = g_n(A)(y_\delta - y) - (E - Ag_n(A))x. \tag{3.32}$$

Отсюда $Ax_{n,\delta} - y = Ag_n(A)(y_\delta - y) - A(E - Ag_n(A))x.$ Тогда

$$Ax_{n,\delta} - y_\delta = Ag_n(A)(y_\delta - y) - A(E - Ag_n(A))x + (y - y_\delta) =$$

$$= -A(E - Ag_n(A))x - (E - Ag_n(A))(y_\delta - y).$$

Итак, доказано равенство

$$Ax_{n,\delta} - y_\delta = -A(E - Ag_n(A))x - (E - Ag_n(A))(y_\delta - y). \tag{3.33}$$

В силу лемм 3.3 и 3.4 имеем

$$\|(E - Ag_n(A))x\| \to 0, \quad n \to \infty, \tag{3.34}$$

$$\sigma_n = n\|A(E - Ag_n(A))x\| \to 0, \quad n \to \infty. \tag{3.35}$$

Кроме того, из (3.28) и (3.29) следует, что

$$\|g_n(A)(y_\delta - y)\| \le 2\alpha n\delta, \tag{3.36}$$

$$\|E - Ag_n(A)\| \le 1. \tag{3.37}$$

Применим правило останова (2.19). Тогда $\|Ax_{m,\delta} - y_\delta\| \le b\delta, \quad b > 1$ и из (3.33) и (3.37) получим

$$\left\| A\left(E - Ag_m(A)\right)x\right\| \le \left\| Ax_{m,\delta} - y_\delta\right\| +$$
$$+\left\|\left(E - Ag_m(A)\right)\left(y_\delta - y\right)\right\| \le b\delta + \delta = (b+1)\delta.$$

Следовательно,

$$\left\| A\left(E - Ag_m(A)\right)x\right\| \le (b+1)\delta. \tag{3.38}$$

Для любых $n < m$ $\left\| Ax_{n,\delta} - y_\delta\right\| > \varepsilon,$ поэтому

$$\left\| A\left(E - Ag_n(A)\right)x\right\| \ge \left\| Ax_{n,\delta} - y_\delta\right\| -$$
$$-\left\|\left(E - Ag_n(A)\right)\left(y - y_\delta\right)\right\| \ge b\delta - \delta = (b-1)\delta.$$

Итак, для любых $n < m$

$$\left\| A\left(E - Ag_n(A)\right)x\right\| \ge (b-1)\delta. \tag{3.39}$$

Из (3.35) и (3.39) получаем при $n = m-1$ $\dfrac{\sigma_{m-1}}{m-1} = \left\| A\left(E - Ag_{m-1}(A)\right)x\right\| \ge (b-1)\delta$ или, что то же, $(m-1)\delta \le \dfrac{\sigma_{m-1}}{b-1} \to 0, \quad \delta \to 0$ (так как из (3.35) $\sigma_m \to 0, \quad m \to \infty$). Если при этом $m \to \infty,$ то, используя (3.32), получим

$$\left\| x_{m,\delta} - x\right\| \le \left\|\left(E - Ag_m(A)\right)x\right\| + \left\| g_m(A)\left(y_\delta - y\right)\right\| \le$$
$$\le \left\|\left(E - Ag_m(A)\right)x\right\| + 2\alpha m\delta \to 0,\ m \to \infty,\ \delta \to 0,$$

так как из (3.34) $\left\|\left(E - Ag_m(A)\right)x\right\| \to 0, \quad m \to \infty.$

Если же для некоторых δ_n последовательность $m(\delta_n)$ окажется ограниченной, то и в этом случае $x_{m(\delta_n),\delta_n} \to x, \quad \delta_n \to 0.$ Действительно, из (3.38) имеем $\left\| A\left(E - Ag_{m(\delta_n)}(A)\right)x\right\| \le (b+1)\delta_n \to 0, \quad \delta_n \to 0,$ следовательно, выполняется $A\left(E - Ag_{m(\delta_n)}(A)\right)x \to 0,\ \ \delta_n \to 0,$ и по лемме 3.5 получаем, что $\left(E - Ag_{m(\delta_n)}(A)\right)x \to 0, \delta_n \to 0.$ Отсюда

$$\left\|x_{m(\delta_n),\delta_n} - x\right\| \le \left\|\left(E - Ag_{m(\delta_n)}(A)\right)x\right\| + 2\alpha m(\delta_n)\delta_n \to 0, \delta_n \to 0,$$

так как $\left\|\left(E - Ag_{m(\delta_n)}(A)\right)x\right\| \to 0$ и $2\alpha m(\delta_n)\delta_n \to 0,\ \delta_n \to 0$. Теорема 3.6 доказана. Имеет место

Теорема 3.7. *Пусть выполнены условия теоремы* 3.6 *и пусть* $x = A^s z,\ s > 0,$ *тогда справедливы оценки* $m \le 1 + \frac{s+1}{2\alpha e}\left[\frac{\|z\|}{(b-1)\delta}\right]^{\frac{1}{s+1}},$

$$\left\|x_{m,\delta} - x\right\| \le \left[(b+1)\delta\right]^{\frac{s}{s+1}}\|z\|^{\frac{1}{s+1}} + 2\alpha\left\{1 + \frac{s+1}{2\alpha e}\left[\frac{\|z\|}{(b-1)\delta}\right]^{\frac{1}{s+1}}\right\}\delta. \qquad (3.40)$$

Доказательство. Используя результаты [100], имеем

$$\left\|A\left(E - Ag_{m-1}(A)\right)x\right\| = \left\|A^{s+1}\left(E - Ag_{m-1}(A)\right)z\right\| =$$

$$= \left\|\int_0^M \lambda^{s+1}(1-\alpha\lambda)^{2(m-1)}\left(1+\alpha^2\lambda^2\right)^{-(m-1)} dE_\lambda z\right\| \le$$

$$\le (s+1)^{s+1}\left[2(m-1)\alpha e\right]^{-(s+1)}\|z\|.$$

Воспользуемся (3.39), получим $(b-1)\delta \le (s+1)^{s+1}\left[2(m-1)\alpha e\right]^{-(s+1)}\|z\|,$

откуда $m \le 1 + \frac{s+1}{2\alpha e}\left[\frac{\|z\|}{(b-1)\delta}\right]^{\frac{1}{s+1}}$. При помощи неравенства моментов оценим

$$\|(E-Ag_m(A))x\| = \left\|A^s(E-Ag_m(A))z\right\| \le \left\|A^{s+1}(E-Ag_m(A))z\right\|^{\frac{s}{s+1}} \times$$

$$\times \|(E-Ag_m(A))z\|^{\frac{1}{s+1}} \le \|A(E-Ag_m(A))x\|^{\frac{s}{s+1}} \|z\|^{\frac{1}{s+1}} \le [(b+1)\delta]^{\frac{s}{s+1}} \|z\|^{\frac{1}{s+1}}$$

(см. (3.38)). Тогда

$$\left\|x_{m,\delta}-x\right\| \le \|(E-Ag_m(A))x\| + \|g_m(A)(y_\delta - y)\| \le [(b+1)\delta]^{\frac{s}{s+1}} \|z\|^{\frac{1}{s+1}} +$$

$$+2m\alpha\delta \le [(b+1)\delta]^{\frac{s}{s+1}} \|z\|^{\frac{1}{s+1}} + 2\alpha\left\{1+\frac{s+1}{2\alpha e}\left[\frac{\|z\|}{(b-1)\delta}\right]^{\frac{1}{s+1}}\right\}\delta.$$

Теорема 3.7 доказана.

Замечание 3.5. *Порядок оценки* (3.40) *есть* $O\left(\delta^{s/s+1}\right)$ *и, как следует из* [12], *он является оптимальным в классе решений* $x = A^s z,\ s > 0.$

Замечание 3.6. *Используемое в формулировке теоремы* 3.7 *предположение порядка* $s > 0$ *истокопредставимости точного решения не потребуется на практике, так как при останове по невязке автоматически делается число итераций, нужное для получения оптимального по порядку приближенного решения. Но даже если истокопредставимость точного решения отсутствует, останов по невязке* (2.19), *как показывает теорема* 3.6, *обеспечивает сходимость метода, т.е. его регуляризующие свойства*.

3.2.3 Правило останова по соседним приближениям для уравнений с несамосопряжённым оператором

В гильбертовом пространстве H решается задача из подраздела 2.1.5. Используем неявную схему метода итераций

$$x_{n+1}=\left(E+\alpha^2\left(A^*A\right)^2\right)^{-1}\left[\left(E-\alpha A^*A\right)^2 x_n+2\alpha A^* y\right],\quad x_0\in H. \qquad (3.41)$$

В случае, когда правая часть y уравнения (2.1) известна приближённо $\|y-y_\delta\|\le\delta$, метод (3.41) примет вид

$$z_{n+1}=\left(E+\alpha^2\left(A^*A\right)^2\right)^{-1}\left[\left(E-\alpha A^*A\right)^2 z_n+2\alpha A^* y_\delta\right]+$$

$$+\left(E+\alpha^2\left(A^*A\right)^2\right)^{-1}\left(E-\alpha A^*A\right)^2 u_n,\quad z_0\in H, \qquad (3.42)$$

где u_n – ошибки в вычислении итераций, причем $\|u_n\|\le\beta$. Обозначим

$C=\left(E+\alpha^2\left(A^*A\right)^2\right)^{-1}\left(E-\alpha A^*A\right)^2,\qquad B=\left(E+\alpha^2\left(A^*A\right)^2\right)^{-1}2\alpha A^*.$ Для простоты считаем, что $\|A\|=1$. Тогда метод (3.42) примет вид

$$z_{n+1}=Cz_n+By_\delta+Cu_n. \qquad (3.43)$$

Воспользуемся правилом останова по соседним приближениям (2.34). Покажем, что метод (3.42) с правилом останова (2.34) сходится. Справедлива

Лемма 3.6. *Пусть приближение w_n определяется равенствами*

$$w_0=z_0,\quad w_{n+1}=Cw_n+By+Cu_n,\quad n\ge 0. \qquad (3.44)$$

Тогда верно неравенство

$$\sum_{k=0}^{n}\|w_k-w_{k+1}+Cu_k\|^2\le\|w_0-x\|^2+\sum_{k=0}^{n-1}\|Cu_k\|^2.$$

Лемма 3.7. *При любом* $w_0 \in H$ *и любой последовательности ошибок* $\{u_n\}$, *удовлетворяющих условию* $\|u_n\| \le \beta$, *выполняется неравенство* $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}} \|w_n - w_{n+1}\| \le 2\|C\|\beta$.

Леммы 3.6 и 3.7 доказываются аналогично подобным из раздела 2.1.

Теорема 3.8. *Пусть уровень останова* $\varepsilon = \varepsilon(\delta,\beta)$ *выбирается как функция от уровней* δ *и* β *норм погрешностей* $y - y_\delta$ *и* u_n. *Тогда выполняются следующие утверждения:*

а) если $\varepsilon(\delta,\beta) > 2\|C\|\beta$, *то момент останова* m *определен при любом начальном приближении* $z_0 \in H$ *и любых* y_δ *и* u_n, *удовлетворяющих условиям* $\|y - y_\delta\| \le \delta$, $\|u_n\| \le \beta$;

б) если $\varepsilon(\delta,\beta) > \|B\|\delta + 2\|C\|\beta$, *то справедлива оценка*

$$m \le \frac{\|z_0 - x\|^2}{\left(\varepsilon - \|B\|\delta\right)\left(\varepsilon - \|B\|\delta - 2\|C\|\beta\right)};$$

в) если, кроме того, $\varepsilon(\delta,\beta) \to 0$, $\delta,\beta \to 0$, *и* $\varepsilon(\delta,\beta) \ge d\left(\|B\|\delta + \|C\|\beta^p\right)$, $d > 1$, $p \in (0,1)$, *тогда* $\lim\limits_{\delta,\beta\to 0} \| z_m - x \| = 0$.

Доказательство. а). По индукции нетрудно показать, что

$$z_n = C^n z_0 + C\sum_{k=0}^{n-1} C^k \left(C^{-1} B y_\delta + u_{n-k-1}\right). \tag{3.45}$$

Отсюда $w_n = C^n w_0 + A^{-1}\left(E - C^n\right)y + C\sum\limits_{k=0}^{n-1} C^k u_{n-k-1}$. Учитывая, что $z_0 = w_0$, получим $z_n - z_{n+1} = w_n - w_{n+1} + C^n B(y - y_\delta)$. Обозначим $\sigma = B(y - y_\delta)$, тогда

$$\left\|C^n B(y - y_\delta)\right\| = \left\|C^n \sigma\right\| = \left\|\int_0^1 \frac{(1-\alpha\lambda)^{2n}}{\left(1+\alpha^2\lambda^2\right)^n} dE_\lambda \sigma\right\| \le \left\|\int_0^{\varepsilon_0} \frac{(1-\alpha\lambda)^{2n}}{\left(1+\alpha^2\lambda^2\right)^n} dE_\lambda \sigma\right\| +$$

$$+\left\| \int\limits_{\varepsilon_0}^{1} \frac{(1-\alpha\lambda)^{2n}}{\left(1+\alpha^2\lambda^2\right)^n} dE_\lambda \sigma \right\| \le \left\| E_{\varepsilon_0}\sigma \right\| + q^n(\varepsilon_0)\left\|\sigma - E_{\varepsilon_0}\sigma\right\| \to 0,\ n\to 0,\ \varepsilon_0 \to 0,$$

так как при $\alpha > 0$ и $\lambda \in [\varepsilon_0, 1]$ имеем $\left|(1-\alpha\lambda)^2\left(1+\alpha^2\lambda^2\right)^{-1}\right| \le q(\varepsilon_0) < 1.$ Поэтому из леммы 3.7 $\varliminf\limits_{n\to\infty} \|z_n - z_{n+1}\| = \varliminf\limits_{n\to\infty} \|w_n - w_{n+1}\| \le 2\|C\|\beta.$ Следовательно, уровень останова ε надо выбирать из условия $\varepsilon(\delta,\beta) > 2\|C\|\beta,$ и тогда момент останова m определен при $\forall z_0 \in H$ и $\forall y_\delta,\ \|y - y_\delta\| \le \delta$ и $\forall u_n,\ \|u_n\| \le \beta.$

б). Рассмотрим последовательность (3.44) и момент останова m' будем определять неравенствами

$$\left.\begin{aligned} &\|w_n - w_{n+1}\| > \varepsilon - \|B\|\delta, \quad (n < m'), \\ &\|w_{m'} - w_{m'+1}\| \le \varepsilon - \|B\|\delta. \end{aligned}\right\} \tag{3.46}$$

Имеем $\|z_n - z_{n+1}\| \le \|w_n - w_{n+1}\| + \left\|BC^n(y - y_\delta)\right\|.$ Отсюда следует, что $m \le m'$, где $m-$ момент останова для метода (3.43). Из леммы 3.6 при $n = m'$ получим $\sum\limits_{k=0}^{m'} \|w_k - w_{k+1} + Cu_k\|^2 \le \|w_0 - x\|^2 + \sum\limits_{k=0}^{m'-1} \|Cu_k\|^2.$ Поскольку выполняется неравенство $\sum\limits_{k=0}^{m'-1} \|w_k - w_{k+1} + Cu_k\|^2 \le \sum\limits_{k=0}^{m'} \|w_k - w_{k+1} + Cu_k\|^2,$ то справедливо $\sum\limits_{k=0}^{m'-1} \left(\|w_k - w_{k+1}\| - \|C\|\beta\right)^2 \le \|w_0 - x\|^2 + \sum\limits_{k=0}^{m'-1} \|Cu_k\|^2.$ Так как при $n < m'$ имеем $\|w_n - w_{n+1}\| > \varepsilon - \|B\|\delta,$ то $m'\left(\varepsilon - \|B\|\delta - \|C\|\beta\right)^2 \le \|w_0 - x\|^2 + m'\|C\|^2\beta^2.$ Учитывая, что $w_0 = z_0,$ получим $m \le m' \le \dfrac{\|z_0 - x\|^2}{\left(\varepsilon - \|B\|\delta\right)\left(\varepsilon - \|B\|\delta - 2\|C\|\beta\right)}.$

в). Нетрудно показать, что

$$x = C^n x + \sum_{k=0}^{n-1} C^k By. \tag{3.47}$$

Из $z_n = C^n z_0 + C\sum_{k=0}^{n-1} C^k \left(C^{-1}By_\delta + u_{n-k-1}\right)$ вычтем (3.47), получим $z_n - x = C^n(z_0 - x) + C\sum_{k=0}^{n-1} C^k \left[C^{-1}B(y_\delta - y) + u_{n-k-1}\right]$. Тогда $\|\Delta_n\| \le \left\|C^n\Delta_0\right\| + $ $+ n\left(\|C\|\beta + \|B\|\delta\right)$, где $\Delta_n = z_n - x,\ \Delta_0 = z_0 - x.$ В частности это неравенство верно при $n = m$: $\|\Delta_m\| \le \left\|C^m\Delta_0\right\| + m\left(\|C\|\beta + \|B\|\delta\right)$, где $\Delta_m = z_m - x.$ Как показано ранее $\left\|C^m\Delta_0\right\| \to 0,\quad m \to 0$ при $\varepsilon, \delta, \beta \to 0.$ Поэтому для доказательства $\|\Delta_m\| = \|z_m - x\| \to 0,\ m \to \infty,\ \delta \to 0,\ \beta \to 0$ достаточно показать, что $m\left(\|C\|\beta + \|B\|\delta\right) \to 0,\quad m \to \infty,\ \delta \to 0,\ \beta \to 0$. Из (3.45) и (3.47)

$$z_n - z_{n+1} = C^n(E - C)(z_0 - x) - Cu_n -$$

$$-C^n B\left(y_\delta - y\right) + C\sum_{k=0}^{n-1} C^k (E - C)u_{n-k-1}. \tag{3.48}$$

Так как спектр оператора $C = \left(E + \alpha^2\left(A^*A\right)^2\right)^{-1}\left(E - \alpha A^*A\right)^2$ принадлежит $[0,1]$, то $\left\|C^n(E - C)\right\| \le \dfrac{1}{n+1}$. Поэтому при $n = m - 1$

$$\|z_{m-1} - z_m\| \le \frac{2}{m}\left\|C^{(m-1)/2}(z_0 - x)\right\| + \|B\|\delta + \|C\|\beta(2 + \ln m),$$

так как $\sum_{k=1}^{m-1}\dfrac{1}{k} \le 1 + \ln m$ [16, с. 16].

По условию в) $\varepsilon \ge d\left(\|B\|\delta + \|C\|\beta^p\right),\ d > 1,\ p \in (0,1)$, то для достаточно малых δ, β будет выполняться условие $\varepsilon > \|B\|\delta + 2\|C\|\beta$, поэтому из пункта б) получим $m \le \|z_0 - x\|^2 \left[(\varepsilon - \|B\|\delta)(\varepsilon - \|B\|\delta - 2\|C\|\beta) \right]^{-1}$. Так как $\|z_{m-1} - z_m\| > \varepsilon$, то $\varepsilon \le \frac{2}{m}\left\|C^{(m-1)/2}(z_0 - x)\right\| + \|B\|\delta + \|C\|\beta(2 + \ln m)$. Отсюда

$$m \le 2\left\|C^{(m-1)/2}(z_0 - x)\right\| \left(\varepsilon - \|B\|\delta - 2\|C\|\beta \left[2 + \ln \frac{\|z_0 - x\|^2}{(\varepsilon - \|B\|\delta - 2\|C\|\beta)(\varepsilon - \|B\|\delta)} \right] \right)^{-1}.$$

Домножим обе части последнего неравенства на $\|B\|\delta + \|C\|\beta$, получим $m(\|B\|\delta + \|C\|\beta) \to 0,\ m \to \infty,\ \delta, \beta \to 0,$ поэтому при $m \to \infty$

$$\lim_{\substack{\delta\to 0\\ \beta\to 0}} \|z_m - x\| \le \lim_{\substack{\delta\to 0\\ \beta\to 0}} \left\|C^m \Delta_0\right\| + \lim_{\substack{\delta\to 0\\ \beta\to 0}} \left(m(\|B\|\delta + \|C\|\beta) \right) = 0.$$

Если номера останова m, зависящие от ε, $y - y_\delta$, $\{u_n\}$, не стремятся к ∞ при $\varepsilon, \delta, \beta \to 0$, а окажутся ограниченными, то и в этом случае $z_m \to x,\ \ \beta \to 0,\ \delta \to 0,\ \varepsilon \to 0$. Теорема 3.8 доказана.

3.2.4 Сходимость метода в энергетической норме

Изучим сходимость метода (3.27) в энергетической норме гильбертова пространства $\|x\|_A = \sqrt{(Ax, x)}$, где $x \in H$. При этом, как обычно, число итераций n нужно выбирать в зависимости от уровня погрешности δ.

Полагаем $x_{0,\delta} = 0$ и рассмотрим разность $x - x_{n,\delta} = (x - x_n) + (x_n - x_{n,\delta})$. По индукции нетрудно показать, что $x_n = A^{-1}\left[E - (E - \alpha A)^{2n}\left(E + \alpha^2 A^2\right)^{-n} \right] y.$ Тогда первое слагаемое из разности $x - x_{n,\delta}$ запишется в виде $x - x_n = A^{-1}(E - \alpha A)^{2n}\left(E + \alpha^2 A^2\right)^{-n} y$. Как показано в [100], $x - x_n$

бесконечно мало в норме пространства H при $n\to\infty$, но скорость сходимости при этом может быть сколь угодно малой и для ее оценки делалось предположение об истокопредставимости точного решения. При использовании энергетической нормы нам это дополнительное предположение не потребуется.

Действительно, с помощью интегрального представления самосопряженного оператора имеем $\|x-x_n\|_A^2=\int\limits_0^M \lambda\left[\frac{(1-\alpha\lambda)^2}{1+\alpha^2\lambda^2}\right]^{2n} d(E_\lambda x,x)$, $(M=\|A\|)$. Для оценки интересующей нас нормы найдем максимум подынтегральной функции при $\lambda\in[0,M]$.

Функция $f(\lambda)=\lambda\left[\frac{(1-\alpha\lambda)^2}{1+\alpha^2\lambda^2}\right]^{2n}$ – частный случай при $s=1$ функции, оцененной в [100]. Там показано, что при $\alpha>0$ $\max\limits_{\lambda\in[0,M]}|f(\lambda)|\le(4n\alpha e)^{-1}$, $n\ge1$. Следовательно, справедлива оценка $\|x-x_n\|_A\le(4n\alpha e)^{-1/2}\|x\|$, $n\ge1$. Таким образом, переход к энергетической норме как бы заменяет предположение об истокопредставимости порядка $s=1/2$ для точного решения.

Оценим второе слагаемое разности $x-x_{n,\delta}$. Как показано в [100], справедливо равенство $x_n-x_{n,\delta}=A^{-1}\left[E-(E-\alpha A)^{2n}\left(E+\alpha^2A^2\right)^{-n}\right](y-y_\delta)$. Тогда

$\|x_n-x_{n,\delta}\|_A^2=\int\limits_0^M \lambda^{-1}\left[1-\left(\frac{(1-\alpha\lambda)^2}{1+\alpha^2\lambda^2}\right)^n\right]^2 d\left(E_\lambda(y-y_\delta),y-y_\delta\right)$, где $x_{n,\delta}$ – приближение, получаемое по методу (3.27).

Оценим подынтегральную функцию $g_n(\lambda)=\lambda^{-1}\left[1-\frac{(1-\alpha\lambda)^{2n}}{\left(1+\alpha^2\lambda^2\right)^n}\right]^2$.

Имеем $g_n(\lambda)=\lambda^{-1}\left[1-\frac{(1-\alpha\lambda)^{2n}}{\left(1+\alpha^2\lambda^2\right)^n}\right]\left[1-\frac{(1-\alpha\lambda)^{2n}}{\left(1+\alpha^2\lambda^2\right)^n}\right]$. В [100] показано, что при условии $\alpha>0$ $\lambda^{-1}\left[1-\frac{(1-\alpha\lambda)^{2n}}{\left(1+\alpha^2\lambda^2\right)^n}\right]\le 2n\alpha$ и $\left[1-\frac{(1-\alpha\lambda)^{2n}}{\left(1+\alpha^2\lambda^2\right)^n}\right]\le 1$, поэтому $g_n(\lambda)\le 2n\alpha$. Следовательно, $\left\|x_n-x_{n,\delta}\right\|^2_A\le 2n\alpha\delta^2$, поэтому для любых $n\ge 1$ $\left\|x_n-x_{n,\delta}\right\|_A\le(2n\alpha)^{1/2}\delta$. Поскольку $\left\|x-x_{n,\delta}\right\|_A\le\left\|x-x_n\right\|_A+\left\|x_n-x_{n,\delta}\right\|_A\le\ \le\left\|x-x_n\right\|_A+(2n\alpha)^{1/2}\delta$, $n\ge 1$ и $\left\|x-x_n\right\|_A\to 0$, $n\to\infty$, то для сходимости $\left\|x-x_{n,\delta}\right\|_A\to 0$, $n\to\infty$ достаточно потребовать, чтобы выполнялось $n^{1/2}\delta\to 0$, $n\to\infty$, $\delta\to 0$. Таким образом, если в процессе (3.27) выбрать число итераций $n=n(\delta)$, зависящим от δ так, чтобы $n^{1/2}\delta\to 0$, $n\to\infty$, $\delta\to 0$, то получим регуляризованный метод, обеспечивающий сходимость к точному решению в энергетической норме. Итак, доказана

Теорема 3.9. *При условии* $\alpha>0$ *метод* (3.27) *сходится в энергетической норме гильбертова пространства, если число итераций* n *выбирать из условия* $n^{1/2}\delta\to 0$, $n\to\infty$, $\delta\to 0$.

Запишем теперь общую оценку погрешности метода (3.27)

$$\left\|x-x_{n,\delta}\right\|_A\le(4n\alpha e)^{-1/2}\|x\|+(2n\alpha)^{1/2}\delta,\quad n\ge 1.$$

Оптимизируем последнюю оценку по n, т.е. при заданном δ найдем такое значение числа итераций n, при котором оценка погрешности становится минимальной. Приравняв нулю производную по n от правой части неравенства, получим

$$n_{\text{опт}} = 2^{-3/2}\alpha^{-1}e^{-1/2}\delta^{-1}\|x\|.$$

Подставив $n_{\text{опт}}$ в общую оценку, найдем ее оптимальное значение

$$\left\|x - x_{n,\delta}\right\|_A^{\text{опт}} \le 2^{3/4}e^{-1/4}\delta^{1/2}\|x\|^{1/2}.$$

Таким образом, использование энергетической нормы позволило получить оценку погрешности для метода (3.27) без дополнительного требования истокопредставимости точного решения. В этом состоит преимущество энергетической нормы.

3.2.5 Сравнение неявного метода с ранее известными методами решения некорректных уравнений

Сравним предложенный неявный метод (3.27) с наиболее часто упот-ребляемым методом простой итерации решения некорректных задач (3.8). По мажорантным оценкам неявный метод не лучше метода (3.8). Но неявный ме-тод дает выигрыш в следующем. За счет того, что на α нет ограничений сверху ($\alpha > 0$) для неявного метода можно добиться, что оптимальная оценка погрешности будет достигаться уже на первых шагах итерации. Этого нельзя добиться для явного метода простой итерации (3.8), потому что для метода (3.8) параметр α ограничен ($0 < \alpha \le \frac{5}{4\|A\|}$) (см. [28]).

По мажорантным оценкам погрешности метод (3.27) такого же порядка, что и метод (3.7) (см. [36]). Но метод (3.27) дает более высокую сходимость чем (3.7) (см. [36]), так как $\left\|(E-\alpha A)^2\left(E+\alpha^2A^2\right)^{-1}\right\| \le \left\|(E-\alpha A)(E+\alpha A)^{-1}\right\|$.

Сравним предложенный метод с методом регуляризации. Метод регуля-ризации для уравнения (2.1) эквивалентен решению уравнения

$$A^2 x_{\tau,\delta} + \tau x_{\tau,\delta} = A y_\delta.$$

Для истокообразного точного решения оценка погрешности этого метода получена в [86] при $s=1;\ 2$ и имеет вид $\|x_{\tau,\delta} - x\| \le \delta\tau^{-\frac{1}{2}} + \tau^{\frac{s}{2}}\|z\|$, $s = 1;\ 2$. При $\tau_{\text{опт}} = s^{-\frac{2}{s+1}}\delta^{\frac{2}{s+1}}\|z\|^{-\frac{2}{s+1}}$ получаем оптимальную оценку

$$\|x_{\tau,\delta} - x\|_{\text{опт}} \le (1+s)s^{-\frac{s}{s+1}}\delta^{\frac{s}{s+1}}\|z\|^{\frac{1}{s+1}}. \tag{3.49}$$

Для неявного метода (3.27) при больших n оптимальная оценка имеет вид

$$\|x - x_{n,\delta}\|_{\text{опт}} \le (1+s)e^{-\frac{s}{s+1}}\delta^{\frac{s}{s+1}}\|z\|^{\frac{1}{s+1}} \tag{3.50}$$

и получается при $\alpha_{\text{опт}} = 2^{-1} s\, n_{\text{опт}}^{-1}\, e^{-\frac{s}{s+1}}\delta^{-\frac{1}{s+1}}\|z\|^{\frac{1}{s+1}}$. Сравнение $\|x_{\tau,\delta} - x\|_{\text{опт}}$ с $\|x - x_{n,\delta}\|_{\text{опт}}$ показывает, что при $s=1;2$ оценки отличаются только константами, причем при $s = 1$ оценка (3.50) меньше оценки (3.49) в 1,65 раза, а при $s=2$ – в 1,2 раза.

Используя метод регуляризации, приходится обращать оператор $A^2 + \tau_{\text{опт}}E$, а используя метод (3.27) – $\left(A^2 + \frac{1}{\alpha_{\text{опт}}^2}E\right)\alpha_{\text{опт}}^2$. Очевидно, обращение тем легче, чем больше коэффициент при E. Расчеты показывают, что при $s=1$ величина $\frac{1}{\alpha_{\text{опт}}^2}$ больше

$\tau_{опт}$ примерно в 11 раз, а при $s = 2$ – примерно в 6 раз, следовательно, обратить оператор в методе (3.27) легче.

3.3 Численные примеры

Для иллюстрации некоторых свойств описанных методов проанализируем модельные численные примеры. В первых двух задачах задаются точные решения $x(s)$ и ядра $K(t,s)$, а с помощью методов численного интегрирования [32] находятся правые части $y(t)$, в которые вносятся ошибки. В *задаче 2.3* задаются ядро $A(t,s)$, точные решения $x(s)$ и правые части $y(t)$. Примеры решались на ПЭВМ методом простых итераций (3.8) и методами, предложенными в разделах 2.1, 2.2 и 2.3, при этом использовались правила останова по невязке и по соседним приближениям.

Программы для решения всех трех предложенных задач были написаны в среде программирования DELPHI.

Задача 3.1. Рассмотрим в пространстве $L_2(0,1)$ задачу в виде уравнения

$$\int_0^1 K(t,s)x(s)ds = y(t), \qquad 0 \le t \le 1 \tag{3.51}$$

с симметричным положительным ядром

$$K(t,s) = \frac{1}{1+100(t-s)^2}. \tag{3.52}$$

В качестве точного решения сформулированной задачи выберем функцию $x(s) = \begin{cases} s, & 0 \le s < \dfrac{1}{2}, \\ 1-s, & \dfrac{1}{2} \le s \le 1. \end{cases}$ С использованием метода правых прямоугольников при $m = 32$, $h = 1/m$ была вычислена в точках $t_i = ih$, $i = \overline{1,m}$ правая часть $y(t)$ уравнения (3.51), результаты указаны в *таблице 3.1* (ввиду симметрии приведена лишь половина таблицы).

Сформулированная задача относится к классу обратных задач теории потенциала. Обычно на практике мы не знаем точной функции $y(t)$, а вместо нее известны значения приближенной функции $\tilde{y}(t)$ в некотором числе точек с определенной, часто известной погрешностью δ, и по этим приближенным данным требуется приближенно найти решение. Чтобы имитировать эту ситуацию, будем считать заданными значения $\tilde{y}_i$, $i = \overline{1,m}$, полученные следующим образом $\tilde{y}_i = [\, y(t_i) \cdot 10^k + 0{,}5] \,/\, 10^k$, где $y(t_i)$ взяты из *таблицы 3.1*, квадратные скобки означают целую часть числа и $k = 3; 4$. При $k = 3$ величина погрешности $\delta = 10^{-3}$. При $k = 4$ величина погрешности $\delta = 10^{-4}$. Действительно, $\int\limits_0^1 [y(t) - \tilde{y}(t)]^2 dt \approx \sum\limits_{i=1}^m [y(t_i) - \tilde{y}_i]^2 h \le mh\left(10^{-k}\right)^2 = 10^{-2k}$. Заменим интеграл в (3.51) квадратурной суммой, например, по формуле правых прямоугольников с узлами $s_j = jh$, $j = \overline{1,m}$, $h = 1/m$, т.е. $\int\limits_0^1 K(t,s)x(s)ds \approx$ $\approx \sum\limits_{j=1}^m K(t,s_j)hx_j$. Тогда получим равенство $\sum\limits_{j=1}^m K(t,s_j)hx_j +$ $+\rho_m(t) = y(t)$, где $\rho_m(t) -$ остаток квадратурной замены. Записав последнее равенство в точках t_i, $i = \overline{1,m}$, получим уравнения $\sum\limits_{j=1}^m K(t_i,s_j)hx_j + \rho_m(t_i) = y(t_i)$, $i = \overline{1,m}.$ Точные значения $y(t_i)$ мы не знаем, а знаем лишь приближения $\tilde{y}_i$ и, отбросив теперь остаточный член, получим линейную алгебраическую систему уравнений относительно приближенного решения

$$\sum_{j=1}^{m} K(t_i, s_j) h x_j = \widetilde{y}_i \ , \ \ i = \overline{1,m}. \tag{3.53}$$

Выберем для определенности $m = 32$ и будем решать систему (3.53) методом итераций (2.49), который в дискретной форме запишется

$$x_i^{(n+1)} = x_i^{(n)} - 2\alpha \sum_{j=1}^{m} K(t_i, s_j) h x_j^{(n)} - \alpha^2 \sum_{j=1}^{m} K(t_i, s_j) h \widetilde{y}_j + 2\alpha \widetilde{y}_i +$$

$$+ \alpha^2 \sum_{j=1}^{m} K(t_i, s_j) h \left(\sum_{k=1}^{m} K(t_j, s_k) h x_k^{(n)} \right), \quad x_i^{(0)} = 0 \,, \quad i = \overline{1,m}. \tag{3.54}$$

При счете используется $\alpha = 0{,}8$. Задача была решена при $\delta = 10^{-3}$ и $\delta = 10^{-4}$. Результаты счета приведены в *таблице 3.1*.

Затем система (3.53) решалась методом простой итерации (3.8), который в данном случае запишется

$$x_i^{(n+1)} = x_i^{(n)} + \alpha \left[\widetilde{y}_i - \sum_{j=1}^{m} K(t_i, s_j) h x_j^{(n)} \right], \ x_i^{(0)} = 0 \,, \quad i = \overline{1,m}. \tag{3.55}$$

Здесь $\alpha = 0{,}8$ выбиралось из условия $0 < \alpha \le \dfrac{5}{4\|K\|}$ при $\|K\| \le 0{,}32$. Для получения оценки $\|K\|$ использовалась теорема 1 из [25, с. 324] при $p = q = 2, \quad \sigma = r = 1$. Результаты счета приведены в *таблице 3.1*.

При решении задачи методами (3.54) и (3.55) на каждом шаге итерации вычислялись: $\left\| Kx^{(n)} - \widetilde{y} \right\|_m = \left\{ \sum_{i=1}^{m} \left[\sum_{j=1}^{m} K(t_i, s_j) h x_j^{(n)} - \widetilde{y}_i \right]^2 h \right\}^{1/2}$ – дискретная норма невязки, $\left\|x^{(n)}\right\|_m = \left\{\sum_{i=1}^{m}\left[x_i^{(n)}\right]^2 h\right\}^{1/2}$ – норма приближенного решения и дискретная норма разности между точным и приближенным решениями $\left\|x - x^{(n)}\right\|_m = \left\{\sum_{i=1}^{m}\left[x(t_i) - x_i^{(n)}\right]^2 h\right\}^{1/2}$. В обоих случаях для решения задачи сведений об истокопредставимости точного решения не потребовалось, так как здесь воспользовались правилом останова по невязке (2.19), выбрав уровень останова $\varepsilon = 1{,}5\delta$. Итак, при $\delta = 10^{-3}$, $\varepsilon = 1{,}5 \cdot 10^{-3}$ для достижения оптимальной точности при счете методом итераций (2.49) потребовалось 10 итераций, при счете методом простой итерации (3.8) – 21 итерация. При $\delta = 10^{-4}$, $\varepsilon = 1{,}5 \cdot 10^{-4}$ соответственно потребовалось 17 и 48 итераций. Пример счета показал, что для достижения оптимальной точности метод итераций (2.49) требует примерно в 2,5 раза меньше итераций, чем метод простой итерации (3.8), что соответствует результатам раздела 2.2. Графики точного решения и приближенного решения, полученного методом (2.49) при $\delta = 10^{-4}$ приведены на *рисунке 3.1*.

Задача 3.2. Будем решать в пространстве $L_2(0,1)$ уравнение (3.51) с симметричным положительным ядром (2.52). В качестве точного решения задачи возьмем функцию $x(s) = \begin{cases} 2s, & 0 \le s < 0{,}25, \\ -s + 0{,}75, & 0{,}25 \le s < 0{,}5, \\ s - 0{,}25, & 0{,}5 \le s < 0{,}75, \\ -2s + 2, & 0{,}75 \le s \le 1. \end{cases}$ Путем интегрирования по методу правых прямоугольников вычислена при $m = 32$ правая часть уравнения (3.51), полученные значения указаны в *таблице 3.2* (ввиду симметрии приведена лишь половина таблицы). Сформулированная задача тоже относится к обратным задачам теории потенциала. Ее будем решать аналогично *задаче 3.1* методом итераций (2.49) ($\alpha = 0{,}8$) и методом простой итерации (3.8) ($\alpha = 0{,}8$), взяв $m = 32$. Погрешность в правую часть уравнения была внесена по тем же формулам, что и в *задаче 3.1*. Пользуемся правилом останова по невязке (2.19), выбрав уровень останова $\varepsilon = 1{,}5\delta$. При $\delta = 10^{-3}$, $\varepsilon = 1{,}5 \cdot 10^{-3}$ и счете методом (2.49) потребовалось 11 итераций, методом (3.8) – 26 итераций. При $\delta = 10^{-4}$, $\varepsilon = 1{,}5 \cdot 10^{-4}$ соответственно потребовалось 17 и 62 итераций. Таким образом, нашли подтверждение результаты раздела 2.2, т.е. для достижения оптимальной точности методом итераций (2.49) требуется примерно в 2,5 раза меньше итераций, чем методом простой итерации (3.8). Здесь также не потребовалось сведений об истокопредставимости точного решения. Использование правила останова по невязке сделало методы (2.49) и (3.8) вполне эффективными. Результаты счета приведены в *таблице 3.2*. Графики точного решения и приближенного решения, полученного методом (2.49) при $\delta = 10^{-4}$ приведены на *рисунке 3.2.*

Данная задача была решена также методом (2.3), который в дискретной форме запишется

$$x_i^{(n+1)} = x_i^{(n)} - \alpha \sum_{j=1}^{m} K(t_i, s_j) h \left(\sum_{k=1}^{m} K(t_j, s_k) h x_k^{(n)} \right) +$$
$$+ \alpha \sum_{j=1}^{m} K(t_i, s_j) h \tilde{y}_j, \; i = \overline{1, m}.$$

Применялось правило останова по соседним приближениям (2.34). На каждом шаге итерации вычислялась дискретная норма разности соседних приближений $\left\| x^{(n+1)} - x^{(n)} \right\|_m = \left\{ \sum_{i=1}^{m} \left[x_i^{(n+1)} - x_i^{(n)} \right]^2 h \right\}^{1/2}$.

Выбиралось $\alpha = 0{,}8$. Для достижения оптимальной точности при $\delta = 10^{-3}$ потребовалось 11 итераций, а при $\delta = 10^{-4}$ – 22 итерации.

Задача 3.3. Решаем методами (2.49) и (3.8) в пространстве $L_2(0,1)$ модельную задачу в виде уравнения $\int_0^1 A(t,s)\, x(s)\, ds = y(t), \quad 0 \le t \le 1$ с симметричным положительным ядром $A(t,s) = \begin{cases} t(1-s), 0 \le t \le s \le 1, \\ s(1-t), 0 \le s \le t \le 1, \end{cases}$ точной правой частью $y(t) = \dfrac{t(t-1)(t^2-t-1)}{12}$ и точным решением $x(t) = t(1-t)$.

Оператор, описанный выше интегральным уравнением, непрерывен, взаимнооднозначен и аддитивен. Для метода (2.49) возьмем $\alpha = 0{,}8$. В задаче использовано правило останова по невязке (2.19). Задача была решена методами (2.49) и (3.8) при $\delta = 10^{-3}$ и $\delta = 10^{-4}$. Результаты счета приведены в *таблице 3.3* (ввиду симметрии приведена лишь половина таблицы).

В обоих случаях для решения предложенной задачи сведений об истокопредставимости точного решения не потребовалось, так как здесь воспользовались правилом останова по невязке (2.19), выбрав уровень останова $\varepsilon = 1{,}5\delta$. Итак, при $\delta = 10^{-3}, \varepsilon = 1{,}5 \cdot 10^{-3}$ для достижения оптимальной точности при счете методом итераций (2.49) потребовалось 6 итераций, при счете методом простой итерации (3.8) – 14 итераций. При $\delta = 10^{-4}, \varepsilon = 1{,}5 \cdot 10^{-4}$ соответственно потребовалось 7 и 26 итераций. Пример счета показал, что для достижения оптимальной точности метод итераций (2.49) требует примерно в 2,5 раза меньше итераций, чем метод простой итерации (3.8), что соответствует результатам раздела 2.2. На *рисунке 3.3* изображены графики точного решения и приближенного решения, полученного методом (2.49) при $\delta = 10^{-4}$.

Кроме этого, предложенная задача была решена методом (2.91), который в дискретной форме запишется

$$x_i^{(n+1)} = x_i^{(n)} + \alpha_{n+1}\left[\tilde{y}_i - \sum_{j=1}^{m} K\left(t_i, s_j\right) h x_j^{(n)}\right],\ x_i^{(0)} = 0,$$
$$\alpha_{3n+1} = \alpha,\ \alpha_{3n+2} = \beta,\ \alpha_{3n+3} = \gamma, \quad i = \overline{1,m}.$$

При счете выбирались: $\alpha = 0{,}8,\ \beta = 4{,}4,\ \gamma = 2{,}1$. Применялось правило останова по соседним приближениям (2.34). Для достижения оптимальной точности при $\delta = 10^{-3}$ потребовалось 6 итераций, а при $\delta = 10^{-4} -$ 10 итераций, что соответствует результатам раздела 2.3.

Таблица 3.1

Узлы t_i	Правые части $y(t_i)$	Точное решение $x(t_i)$	Приближённые решения			
			Метод (3.8) $\delta=10^{-3}$	Метод (2.49) $\delta=10^{-3}$	Метод (3.8) $\delta=10^{-4}$	Метод (2.49) $\delta=10^{-4}$
0,00000	0,01928	0,00000	0,02545	0,02747	0,01743	0,01792
0,03125	0,02731	0,03125	0,04720	0,05036	0,03168	0,03218
0,06250	0,02895	0,06250	0,06434	0,06746	0,05962	0,06012
0,09375	0,03481	0,09375	0,09336	0,09657	0,08898	0,08925
0,12500	0,04109	0,12500	0,11916	0,12165	0,12293	0,12303
0,15625	0,04763	0,15625	0,15809	0,16048	0,15407	0,15397
0,18750	0,05433	0,18750	0,17986	0,18059	0,18629	0,18614
0,21875	0,06107	0,21875	0,21664	0,21667	0,21965	0,21959
0,25000	0,06778	0,25000	0,25403	0,25327	0,25037	0,25039
0,28125	0,07437	0,28125	0,27776	0,27508	0,28194	0,28211
0,31250	0,08075	0,31250	0,32050	0,31732	0,31061	0,31077
0,34375	0,08680	0,34375	0,35277	0,34834	0,34454	0,34471
0,37500	0,09239	0,37500	0,37633	0,37013	0,37835	0,37840
0,40625	0,09729	0,40625	0,40855	0,40152	0,41187	0,41171
0,43750	0,10123	0,43750	0,43586	0,42815	0,44206	0,44168
0,46875	0,10384	0,46875	0,46042	0,45265	0,46570	0,46520
0,50000	0,10476	0,50000	0,46830	0,46053	0,47776	0,47732

$\left\Vert Kx^{(n)}-\tilde{y}\right\Vert_m$	0,00140	0,00137	0,00013	0,00012
$\left\Vert x^{(n)}\right\Vert_m$	0,28343	0,28332	0,28843	0,28834
$\left\Vert x-x^{(n)}\right\Vert_m$	0,01465	0,01331	0,00656	0,00647

Количество итераций: 21 10 48 17

Таблица 3.2

Узлы t_i	Правые части $y(t_i)$	Точное решение $x(t_i)$	Приближённые решения			
			Метод (3.8) $\delta = 10^{-3}$	Метод (2.49) $\delta = 10^{-3}$	Метод (3.8) $\delta = 10^{-4}$	Метод (2.49) $\delta = 10^{-4}$
0,00000	0,03038	0,00000	0,04025	0,04669	0,02731	0,02795
0,03125	0,03801	0,06250	0,07789	0,08404	0,06017	0,06099
0,06250	0,04695	0,12500	0,12639	0,13130	0,11313	0,11391
0,09375	0,05669	0,18750	0,19125	0,19389	0,18107	0,18168
0,12500	0,06669	0,25000	0,25682	0,25691	0,24990	0,25001
0,15625	0,07639	0,31250	0,30803	0,30600	0,31914	0,31879
0,18750	0,08519	0,37500	0,37318	0,36851	0,38502	0,38444
0,21875	0,09244	0,43750	0,41555	0,40922	0,43699	0,43621
0,25000	0,09753	0,50000	0,46200	0,45415	0,46778	0,46717
0,28125	0,10021	0,46875	0,45018	0,44334	0,46967	0,46910
0,31250	0,10071	0,43750	0,44362	0,43792	0,44699	0,44646
0,34375	0,09961	0,40625	0,41646	0,41287	0,41290	0,41256
0,37500	0,09755	0,37500	0,38401	0,38280	0,37434	0,37428
0,40625	0,09508	0,34375	0,33873	0,34033	0,34103	0,34144
0,43750	0,09274	0,31250	0,31626	0,31964	0,30473	0,30520
0,46875	0,09103	0,28125	0,28839	0,29362	0,27946	0,27998
0,50000	0,09040	0,25000	0,27274	0,27859	0,27103	0,27159

$\left\| Kx^{(n)} - \tilde{y} \right\|_m$	0,00102	0,00091	0,00011	0,00009
$\left\| x^{(n)} \right\|_m$	0,33540	0,33322	0,33792	0,33777
$\left\| x - x^{(n)} \right\|_m$	0,01794	0,01611	0,01267	0,01252

Количество итераций: 26 11 62 17

Таблица 3.3

Узлы t_i	Правые части $y(t_i)$	Точное решение $x(t_i)$	Приближённые решения			
			Метод (3.8) $\delta=10^{-3}$	Метод (2.49) $\delta=10^{-3}$	Метод (3.8) $\delta=10^{-4}$	Метод (2.49) $\delta=10^{-4}$
0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000
0,03125	0,00260	0,03027	0,03442	0,03452	0,02652	0,02700
0,06250	0,00517	0,05859	0,04415	0,04781	0,05399	0,05437
0,09375	0,00768	0,08496	0,07984	0,08325	0,07869	0,07999
0,12500	0,01011	0,10938	0,09159	0,09803	0,10152	0,10421
0,15625	0,01243	0,13184	0,10488	0,11393	0,12330	0,12737
0,18750	0,01463	0,15234	0,14515	0,15275	0,14487	0,14982
0,21875	0,01668	0,17090	0,16257	0,17169	0,16698	0,17186
0,25000	0,01855	0,18750	0,18264	0,19257	0,18575	0,19128
0,28125	0,02025	0,20215	0,18848	0,19403	0,20184	0,20836
0,31250	0,02175	0,21484	0,20654	0,21932	0,21586	0,22335
0,34375	0,02304	0,22559	0,21080	0,22551	0,22364	0,23392
0,37500	0,02411	0,23438	0,21857	0,23427	0,23490	0,24530
0,40625	0,02495	0,24121	0,22998	0,24573	0,24067	0,25258
0,43750	0,02555	0,24609	0,24521	0,26000	0,25057	0,26093
0,46875	0,02592	0,24902	0,23926	0,25562	0,25886	0,26289
0,50000	0,02604	0,25000	0,23728	0,25416	0,26012	0,26354

$\left\|Ax^{(n)}-\tilde{y}\right\|_m$	0,00138	0,00091	0,00013	0,00009
$\left\|x^{(n)}\right\|_m$	0,16996	0,16477	0,18116	0,18076
$\left\|x-x^{(n)}\right\|_m$	0,01492	0,01057	0,00454	0,00442

Количество итераций: 14 6 26 7

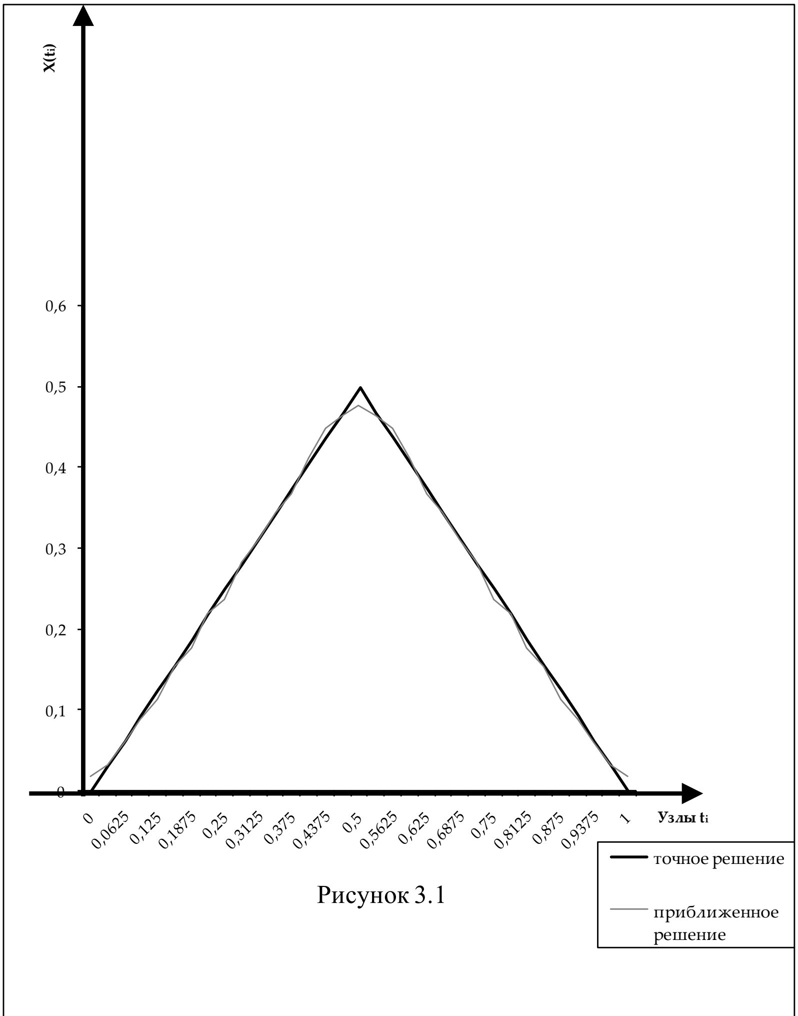
X(ti)
0,6
0,5
0,4
0,3
0,2
0,1
0
0
0,0625
0,125
0,1875
0,25
0,3125
0,375
0,4375
0,5
0,5625
0,625
0,6875
0,75
0,8125
0,875
0,9375
1
Узлы ti
точное решение
приближенное решение

Рисунок 3.1

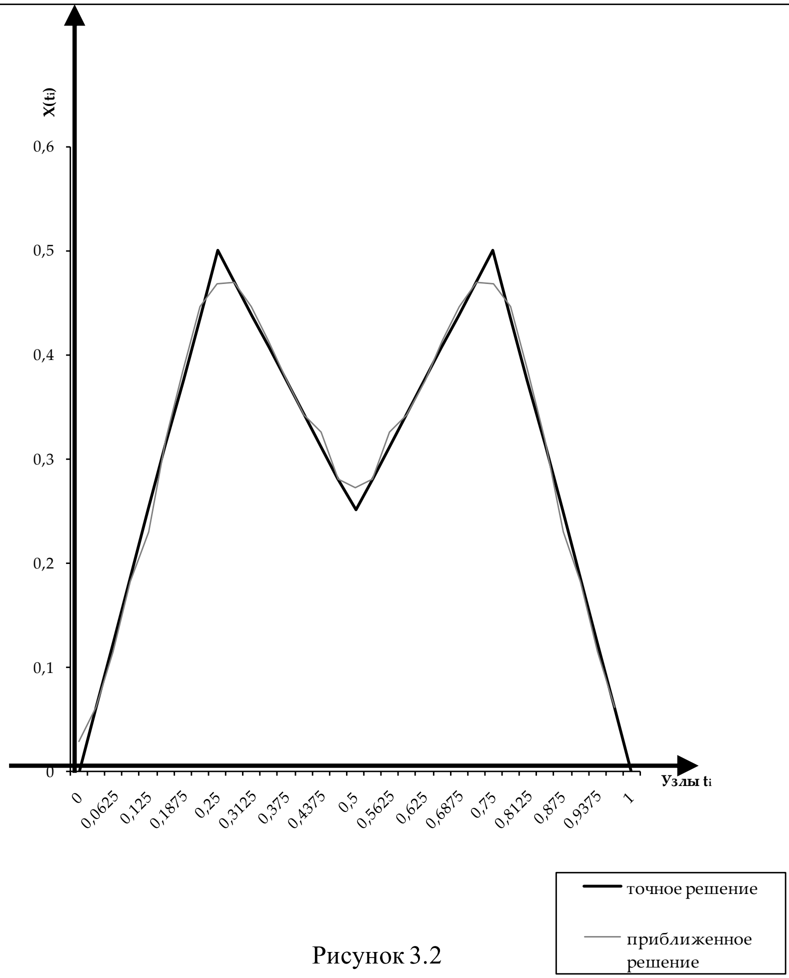
X(ti)
0,6
0,5
0,4
0,3
0,2
0,1
0
0
0,0625
0,125
0,1875
0,25
0,3125
0,375
0,4375
0,5
0,5625
0,625
0,6875
0,75
0,8125
0,875
0,9375
1
Узлы ti
точное решение
приближенное решение

Рисунок 3.2

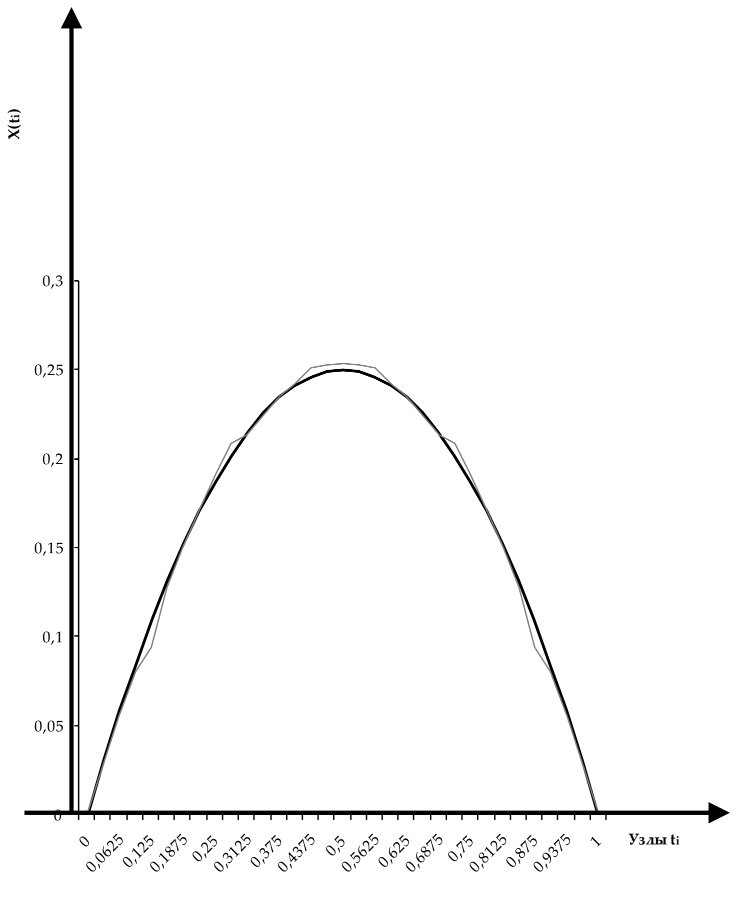
X(ti)
0,3
0,25
0,2
0,15
0,1
0,05
0
0
0,0625
0,125
0,1875
0,25
0,3125
0,375
0,4375
0,5
0,5625
0,625
0,6875
0,75
0,8125
0,875
0,9375
1
Узлы ti
точное решение
приближенное решение

Рисунок 3.3

Заключение

В монографии в гильбертовом пространстве решается операторное уравнение I рода с положительным ограниченным самосопряженным и несамосопряженным оператором.

1. Предложены и изучены новые итерационные методы решения некорректных задач, описываемых операторными уравнениями I рода (в частности, явный двухшаговый метод итерации, метод итерации с переменным шагом и др.)[47–48, 55, 60].

2. Доказана их сходимость с априорным выбором числа итераций в исходной норме гильбертова пространства, получены априорные оценки погрешности в случае истокообразного решения при приближенной правой части уравнения и погрешностях в счете (а иногда и при неточном операторе), проведена их оптимизация, проведено сравнение предложенных методов с ранее известными, изучена сходимость методов в случае неединственности решения [46, 50-51, 69, 107].

3. Исследована сходимость некоторых методов в энергетической норме гильбертова пространства, при этом показано, что в этом случае для получения оценок погрешности не требуется знания истокопредставимости точного решения [49, 58,69].

4. Обосновано применение апостериорного выбора числа итераций для предложенных методов, получены оценки погрешности и оценки для момента останова; показано, что использование правил останова по невязке и по соседним приближениям делает полученные методы вполне эффективными и в случае, когда нет сведений об истокопредставимости точного решения [53, 61, 63, 69, 73, 107].

5. Предложенными методами с использованием правил останова по невязке и по соседним приближениям решены численные модельные примеры [65, 69, 108].

Список литературы

1. Андреев, Б.А. Расчёты пространственного распределения потенциальных полей и их использование в разведочной геофизике / Б.А. Андреев // Изв. АН СССР. Сер. географ. и геофиз. наук. – 1947. – № 1. – С. 79–92.

2. Антохин, Ю.Т. О некоторых задачах аналитической теории уравнений I-го рода / Ю.Т. Антохин // Дифференц. уравнения. – 1966. – Т. 2, № 2. – С. 226–240.

3. Антохин, Ю.Т. О некоторых некорректных задачах теории уравнений с частными производными / Ю.Т. Антохин // Дифференц. уравнения. – 1966. – Т. 2, № 2. – С. 241–250.

4. Апарцин, А.С. К построению сходящихся итерационных процессов в гильбертовом пространстве / А.С. Апарцин // Тр. по приклад. математике и кибернетике / Сиб. энергет. ин-т, СО АН СССР. – Иркутск, 1972. – С. 7–14.

5. Бакушинский, А.Б. Один общий приём построения регуляризующих алгоритмов для линейного некорректного уравнения в гильбертовом пространстве / А.Б. Бакушинский // Журн. вычисл. математики и мат. физики. – 1967. – Т. 7, № 3. – С. 672–677.

6. Бакушинский, А.Б. О решении некоторых интегральных уравнений I рода методом последовательных приближений / А.Б. Бакушинский, В.Н. Страхов // Журн. вычисл. математики и мат. физики. – 1968. – Т. 8, № 1. – С. 181–185.

7. Бакушинский, А.Б. Оптимальные и квазиоптимальные методы решения линейных задач, порождённые регуляризующими алгоритмами / А.Б. Бакушинский // Изв. вузов. Математика. – 1978. – № 11. – С. 6–10.

8. Бакушинский, А.Б. Итеративные методы решения некорректных задач / А.Б. Бакушинский, А.В. Гончарский. – М. : Наука, 1989. – 127 с.

9. Вайникко, Г.М. Оценки погрешности метода последовательных приближений для некорректных задач / Г.М. Вайникко // Автоматика и телемеханика. – 1980. – № 3. – С. 84–92.

10. Вайникко, Г.М. Принцип невязки для класса регуляризационных методов для самосопряжённых задач / Г.М. Вайникко // Численное решение краевых задач и интегральных уравнений : тез. докл. науч. конф., Тарту, 21–23 окт. 1981 г. / Тартус. ун-т. – Тарту, 1981. – С. 73–75.

11. Вайникко, Г.М. Методы решения линейных некорректно поставленных задач в гильбертовых пространствах / Г.М. Вайникко. – Тарту : Изд-во Тартус. ун-та, 1982. – 110 с.

12. Вайникко, Г.М. Итерационные процедуры в некорректных задачах / Г.М. Вайникко, А.Ю. Веретенников. – М. : Наука, 1986. – 178 с.

13. Васин, В.В. Итерационные методы решения некорректных задач с априорной информацией в гильбертовых пространствах / В.В. Васин // Журн. вычисл. математики и мат. физики. – 1988. – Т. 28, № 7. – С. 971–980.

14. Верлань, А.Ф. Интегральные уравнения: методы, алгоритмы, программы / А.Ф. Верлань, В.С. Сизиков. – Киев : Навук. думка, 1986. – 543 с.

15. Голузин, Г.М. Обобщение формулы Карлемана и приложение её к аналитическому приложению функций / Г.М. Голузин, В.И. Крылов // Мат. сб. – 1933. – № 40. – С. 144–149.

16. Градштейн, И.С. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений / И.С. Градштейн, И.М. Рыжик. – М. : Наука, 1971. – 1108 с.

17. Денисов, А.М. Введение в теорию обратных задач / А.М. Денисов. – М. : Изд-во МГУ, 1994. – 207 с.

18. Емелин, И.В. Спурт-метод построения последовательных приближений / И.В. Емелин, М.А. Красносельский, Н.П. Панских // Докл. АН СССР. – 1974. – Т. 219, № 3. – С. 535–538.

19. Емелин, И.В. Правило останова в итерационных процедурах решения некорректных задач / И.В. Емелин, М.А. Красносельский // Автоматика и телемеханика. – 1978. – № 12. – С. 59–63.

20. Емелин, И.В. К теории некорректных задач / И.В. Емелин, М.А. Красносельский // Докл. АН СССР. – 1979. – Т. 244, № 4. – С. 805–808.

21. Иванов, В.К. О некорректно поставленных задачах / В.К. Ива-нов // Мат. сб. – 1963. – Т. 61 (103), № 2. – С. 211–223.

22. Иванов, В.К. О приближённом решении операторных уравнений первого рода / В.К. Иванов // Журн. вычисл. математики и мат. физики. – 1966. – Т. 6, № 6. – С. 1089–1094.

23. Иванов, В.К. Теория приближённых методов и её применение к численному решению сингулярных интегральных уравнений / В.К. Иванов. – Киев: Навук. думка, 1968. – 287 с.

24. Иванов, В.К. Теория линейных некорректных задач и её приложения / В.К. Иванов, В.В. Васин, В.П. Танана. – М. : Наука, 1978. – 206 с.

25. Канторович, Л.В. Функциональный анализ в нормированных пространствах / Л.В. Канторович, Г.П. Акилов. – М. : Физматгиз, 1959. – 680 с.

26. Кожух, И.Г. Сходимость в гильбертовом пространстве неявного метода итераций решения уравнений I рода / И.Г. Кожух, В.Ф. Савчук // Весн. Брэсц. ун-та. Сер. прыродазн. навук. – 1999. – № 6. – С. 22–26.

27. Кожух, И.Г. К вопросу о регуляризации некорректно поставленных задач / И.Г. Кожух, В.Ф. Савчук // Mathematica system in teaching and research : тр. междунар. семинара, Седльце, 28–30 янв. 1999 г. / University of Sedlce, Poland. – Брест, 1999. – С. 20–23.

28. Константинова, Я. В. Оценки погрешности в методе итераций для уравнений I-го рода / Я.В. Константинова, О.А. Лисковец // Вестн. Белорус. ун-та. Сер. I. – 1973. – № 1. – С. 9–15.

29. Константинова, Я.В. Градиентный метод с переменным шагом для уравнений I-го рода / Я.В. Константинова, О.А. Лисковец // Изв. АН БССР. Сер. физ.-мат. наук. – 1974. – № 2. – С. 45–49.

30. Константинова, Я.В. Метод итераций неявного типа для уравнений I-ого рода и его сравнение с явным методом / Я.В. Константинова // Вестн. Белорус. ун-та. Сер. I. – 1979. – № 1. – С. 63–65.

31. Красносельский, М.А. Приближённое решение операторных уравнений / М.А. Красносельский [и др.]. – М. : Наука, 1969. – 456 с.

32. Крылов, В.И. Вычислительные методы высшей математики : учеб. пособие : в 2 т. / В.И. Крылов, В.В. Бобков, П.И. Монастырный. – Минск : Выш. шк., 1972. – Т. 1. – 584 с.

33. Крылов, В.И. Вычислительные методы высшей математики : учеб. пособие : в 2 т. / В.И. Крылов, В.В. Бобков, П.И. Монастырный. – Минск : Выш. шк., 1975. – Т. 2. – 672 с.

34. Крянев, А.С. Итерационный метод решения некорректных задач / А.С. Крянев // Журн. вычисл. математики и мат. физики. – 1974. – Т. 14, № 1. – С. 25–35.

35. Лаврентьев, М.М. О некоторых некорректных задачах математической физики / М.М. Лаврентьев. – Новосибирск : Изд-во СО АН СССР, 1962. – 92 с.

36. Лисковец, О.А. Об одном итеративном методе решения уравнений I-го рода / О.А. Лисковец, В.Ф. Савчук // Вопр. приклад. математики : сб. науч. ст. / СО АН СССР. – Иркутск, 1975. – С. 159–166.

37. Лисковец, О.А. Сходимость в энергетической норме итеративного метода для уравнений I-го рода / О.А. Лисковец, В.Ф. Савчук // IV респ. конф. математиков Белоруссии : тез. докл. науч. конф., Минск, 3–4 июня 1975 г. / Белорус. гос. ун-т. – Минск, 1975. – С. 14.

38. Лисковец, О.А. Сходимость в энергетической норме итеративного метода для уравнений I-го рода / О.А. Лисковец, В.Ф. Савчук // Изв. АН БССР. Сер. физ.-мат. наук. – 1976. – № 2. – С. 19–23.

39. Лисковец, О.А. Метод простых итераций с попеременно чередующимся шагом для уравнений I-го рода / О.А. Лисковец, В.Ф. Савчук // Докл. АН БССР. – 1977. – Т. 21, № 1. – С. 9–12.

40. Лисковец, О.А. Вариационные методы решения неустойчивых задач / О.А. Лисковец. – Минск : Наука и техника, 1981. – 342 с.

41. Лисковец, О.А. Теория и методы решений некорректных задач / О.А. Лисковец // Итоги науки и техники. Мат. анализ. – 1982. – Т. 20. – С. 116–178.

42. Лисковец, О.А. Правило останова итераций в неявных итеративных методах для уравнений I рода / О.А. Лисковец, В.Ф. Савчук // Изв. АН БССР. Сер. физ.-мат. наук. – 1991. – № 2. – С. 3–8.

43. Люстерник, Л.А. Элементы функционального анализа / Л.А. Люстерник, В.И. Соболев. – М. : Наука, 1965. – 520 с.

44. Малкин, И.Г. Определение толщины однородного притягивающего слоя / И.Г. Малкин // Тр. Ин-та им. Стеклова. – М., 1932. – Т. 2, вып. 4. – С. 17–26.

45. Маловичко, А.К. Методы аналитического продолжения аномалий силы тяжести и их приложения к задачам гравиразведки / А.К. Маловичко. – М. : Гостоптехиздат, 1956. – 160 с.

46. Матысик, О.В. Априорные оценки погрешности в итерационном методе решения операторных уравнений / О.В. Матысик, В.Ф. Савчук, И.А. Голубцов // Весн. Брэсц. ун-та. Сер. прыродазн. навук. – 2006. – № 2 (26). – С. 20–26.

47. Матысик, О.В. Двухшаговая итерационная процедура решения операторных уравнений в гильбертовом пространстве / О.В. Матысик // Еругинские чтения – XI : тез. докл. Междунар. мат. конф., Гомель, 23–25 мая 2006 г. / Гомел. гос. ун-т. – Гомель, 2006. – С. 32–33.

48. Матысик, О.В. Об одной двухшаговой итерационной процедуре решения операторных уравнений в гильбертовом пространстве / О.В. Матысик // Весн. Гродз. ун-та. Сер. прыродазн. навук. – 2006. – № 2 (41). – С. 16–21.

49. Матысик, О.В. Априорные оценки погрешностей итерационной процедуры решения некорректных задач в энергетической норме гильбертова пространства / О.В. Матысик // Весн. Брэсц. ун-та. Сер. прыродазн. навук. – 2007. – № 1 (28). – С. 7–13.

50. Матысик, О.В. Априорный выбор числа итераций в неявном итерационном методе решения линейных операторных уравнений / О.В. Матысик, В.Ф. Савчук // Вучоныя зап. Брэсц. дзярж. ун-та імя А.С. Пушкіна : зб. навук. пр. / Брэсц. дзярж. ун-т. – Брэст, 2007. – Т. 3, ч. 2. – С. 16–23.

51. Матысик, О.В. Об априорном выборе момента останова в итерационном методе решения линейных уравнений / О.В. Матысик, В.Ф. Сав-чук // Весн. Брэсц. ун-та. Сер. прыродазн. навук. – 2007. – № 2 (29). – С. 8–14.

52. Матысик, О.В. Об одной неявной итерационной процедуре решения некорректных задач в гильбертовом пространстве / О.В. Матысик, В.Ф. Савчук // Весн. Гродз. ун-та. Сер. прыродазн. навук. – 2007. – № 3 (57). – С. 44–51.

53. Матысик, О.В. Об апостериорном выборе числа итераций в неявной итерационной процедуре для решения уравнений I рода / О.В. Матысик, В.Ф. Савчук // Весн. Брэсц. ун-та. Сер. прыродазн. навук. – 2008. – № 2 (31). – С. 11–18.

54. Матысик, О.В. Об одной итерационной процедуре для решения некорректных задач / О.В. Матысик, В.Ф. Савчук // Вучоныя зап. Брэсц. дзярж. ун-та імя А.С. Пушкіна : зб. навук. пр. / Брэсц. дзярж. ун-т. – Брэст, 2008. – Т. 4, ч. 2. – С. 5–12.

55. Матысик, О.В. Об одном двухшаговом итерационном методе решения операторных уравнений в гильбертовом пространстве / О.В. Матысик, В.Ф. Савчук // Докл. НАН Беларуси. – 2008. – Т. 52, № 5. – С. 5–10.

56. Матысик, О.В. Сходимость в гильбертовом пространстве метода простой итерации с попеременно чередующимся шагом решения операторных уравнений / О.В. Матысик, В.Ф. Савчук // Докл. НАН Беларуси. – 2008. – Т. 52, № 1. – С. 33–37.

57. Матысик, О.В. Сходимость в гильбертовом пространстве неявной итерационной процедуры решения линейных уравнений / О.В. Матысик, В.Ф. Савчук // Весн. Брэсц. ун-та. Сер. прыродазн. навук. – 2008. – № 1 (30). – С. 15–21.

58. Матысик, О.В. Сходимость итерационного метода с переменным шагом решения некорректных задач в энергетической

норме гильбертова пространства / О.В. Матысик // Весн. Брэсц. ун-та. Сер. прыродазн. навук. – 2008. – № 1 (30). – С. 8–14.

59. Матысик, О.В. Итерационная процедура неявного типа решения операторных уравнений в гильбертовом пространстве / О.В. Матысик,В.Ф. Савчук // Докл. НАН Беларуси. – 2009. – Т. 53, № 6. – С. 39–44.

60. Матысик, О.В. Об одном методе итераций с переменным шагом решения некорректных задач в гильбертовом пространстве / О.В. Матысик, В.Ф. Савчук // Вучоныя зап. Брэсц. дзярж. ун-та імя А.С. Пушкіна : зб. навук. пр. / Брэсц. дзярж. ун-т. – Брэст, 2009. – Т. 5, ч. 2. – С. 15–26.

61. Матысик, О.В. Правило останова по невязке в неявной итерационной процедуре для линейных операторных уравнений I рода / О.В. Матысик // Весн. Брэсц. ун-та. Сер. прыродазн. навук. – 2009. – № 2 (33). – С. 19–25.

62. Матысик, О.В. Сходимость в банаховом пространстве метода итераций решения некорректных задач / О.В. Матысик, В.Ф. Савчук // Весн. Гродз. ун-та. Сер. прыродазн. навук. – 2009. – № 2 (82). – С. 40–44.

63. Матысик, О.В. О сходимости неявного итерационного метода решения некорректных задач с правилом останова по соседним приближениям / О.В. Матысик, В.Ф. Савчук // Весн. Брэсц. ун-та. Сер. 4. Фізіка. Матэматыка. – 2010. – № 1. – С. 112–117.

64. Матысик, О.В. Итерационный метод неявного типа решения некорректных задач в гильбертовом пространстве / О.В. Матысик, В.Ф. Савчук // Весн. Гродз. ун-та. Сер. 2. Матэматыка. Фізіка. Інфарматыка, вылічальная тэхніка і кіраванне. – 2011. – № 1 (107). – С. 36–42.

65. Матысик, О.В. Неявная итерационная процедура и её применение для решения модельной некорректной задачи в

гильбертовом пространстве / О.В. Матысик, В.И. Басин // Весн. Брэсц. ун-та. Сер. 4. Фізіка. Матэматыка. – 2011. – № 2. – С. 83–92.

66. Матысик, О.В. О приближенном решении операторных уравнений I рода / О.В. Матысик, В.Ф. Савчук // Весн. Брэсц. ун-та. Сер. 4. Фізіка. Матэматыка. – 2011. – № 1. – С. 93–101.

67. Матысик, О.В. Априорный выбор параметра регуляризации в итерационном методе явного типа решения линейных уравнений с приближенным оператором / О.В. Матысик, В.Ф. Савчук // Весн. Гродз. ун-та. Сер. 2. Матэматыка. Фізіка. Інфарматыка, вылічальная тэхніка і кіраванне. – 2012. – № 1 (126). – С. 24–31.

68. Матысик, О.В. Априорный выбор параметра регуляризации в явном методе итераций решения некорректных задач с приближенным оператором / О.В. Матысик, В.Ф. Савчук // Докл. НАН Беларуси. – 2012. – Т. 56, № 1. – С. 10–15.

69. Матысик, О.В. Итерационный метод неявного типа решения операторных уравнений первого рода в гильбертовом пространстве / О.В. Матысик // Докл. НАН Беларуси. – 2012. – Т. 56, № 6. – С. 28–33.

70. Матысик, О.В. Метод итераций неявного типа решения некорректных задач с апостериорным выбором параметра регуляризации / О.В. Матысик // Перспективные направления развития региональной экономики : материалы III межвуз. науч.-практ. конф. студентов, магистрантов, аспирантов, преподавателей, Брест, 24 мая 2012 г. / Брест. гос. ун-т. – Брест, 2012. – С. 164–165.

71. Матысик, О.В. О регуляризации некорректных задач с приближенным оператором явным методом итераций / О.В. Матысик, В.Ф. Савчук // Вучоныя зап. Брэсц. дзярж. ун-та імя А.С. Пушкіна : зб. навук. пр. / Брэсц. дзярж. ун-т. – Брэст, 2012. – Вып. 8, ч. 2. – С. 7–13.

72. Матысик, О.В. О решении методом последовательных приближений линейных уравнений с несамосопряженными

операторами / О.В. Матысик, В.Ф. Савчук // Весн. Брэсц. ун-та. Сер. 4. Фізіка. Матэматыка. – 2012. – № 2. – С. 96–103.

73. Матысик, О.В. Правило останова в итерационных процедурах решения операторных уравнений / О.В. Матысик, В.Ф. Савчук // Весн. Брэсц. ун-та. Сер. 4. Фізіка. Матэматыка. – 2012. – № 1. – С. 89–94.

74. Матысик, О.В. Апостериорный выбор параметра регуляризации в методе итераций решения линейных уравнений с приближенным оператором / О.В. Матысик // Весн. Гродз. ун-та. Сер. 2. Матэматыка. Фізіка. Інфарматыка, вылічальная тэхніка і кіраванне. – 2013. – № 1 (148). – С. 44–53.

75. Матысик, О.В. Апостериорный выбор параметра регуляризации в методе итераций явного типа решения линейных уравнений с приближенным оператором / О.В. Матысик // Докл. НАН Беларуси. – 2013. – Т. 57, № 1. – С. 11–16.

76. Матысик, О.В. Апостериорный выбор числа итераций в неявном методе решения линейных уравнений с приближенно заданным оператором / О.В. Матысик // Весн. Гродз. ун-та. Сер. 2. Матэматыка. Фізіка. Інфарматыка, вылічальная тэхніка і кіраванне. – 2013. – № 3 (159). – С. 12–22.

77. Матысик, О.В. О регуляризации некорректных задач с несамосопряженным приближенно заданным оператором / О.В. Матысик // Научният потенциал на света – 2013 : материали за IX междунар. науч.-практ. конф., София (Болгария), 17–25 септемеври 2013 / Бял ГРАД-БГ. – София, 2013. – Т. 18. – С. 45–48.

78. Матысик, О.В. Регуляризация некорректных задач с приближенным оператором при помощи неявного метода с априорным выбором числа итераций / О.В. Матысик // Весн. Гродз. ун-та. Сер. 2. Матэматыка. Фізіка. Інфарматыка, вылічальная тэхніка і кіраванне. – 2013. – № 2 (151). – С. 25–29.

79. Матысик, О.В. Итеративная регуляризация некорректных задач в гильбертовом пространстве / О.В. Матысик // Aktualne problemy nowoczesnych nauk : Materiały IX międzynarodowej naukowi-praktycznej konferencji, Przemyśl (Polska), 7–15 czerwca 2013 r. / Nauka i studia. – Przemyśl, 2013. – Vol. 29. – S. 14–16.

80. Матысик, О.В. Итерационный метод неявного типа решения некорректных задач с неограниченным оператором в гильбертовом пространстве / О.В. Матысик // Еругинские чтения – XV : тез. докл. Междунар. мат. конф., Гродно, 23–25 мая 2013 г. / Гродн. гос. ун-т. – Гродно, 2013. – Ч. 2. – С. 40–41.

81. Матысик, О.В. Метод итераций неявного типа для решения линейных уравнений с неограниченным оператором / О.В. Матысик // Весн. Брэсц. ун-та. Сер. 4. Фізіка. Матэматыка. – 2013. – № 1. – С. 77–83.

82. Матысик, О.В. Об апостериорном выборе параметра регуляризации в явном методе итераций решения некорректных задач с приближенным оператором / О.В. Матысик, В.Ф. Савчук // Вучоныя зап. Брэсц. дзярж. ун-та імя А.С. Пушкіна : зб. навук. пр. / Брэсц. дзярж. ун-т. – Брэст, 2013. – Вып. 9, Ч. 2. – С. 7–15.

83. Матысик, О.В. О приближенном решении линейных уравнений с неограниченным оператором в гильбертовом пространстве / О.В. Матысик // Весн. Брэсц. ун-та. Сер. 4. Фізіка. Матэматыка. – 2013. – № 2. – С. 87–92.

84. Матысик, О.В. Регуляризация некорректных задач в банаховом пространстве при помощи итерационного процесса / О.В. Матысик // Молодая наука Волыни: приоритеты и перспективы исследований : материалы VII Междунар. науч.-практ. конф., Луцк (Украина), 14–15 мая 2013 г. / Восточноевроп. нац. ун-т им. Л. Украинки. – Луцк, 2013. – Т. 1. – С. 161–162.

85. Матысик, О.В. Случай несамосопряжённой задачи с апостериорным выбором параметра регуляризации для неявного метода итераций решения линейных уравнений с приближённым оператором / О.В. Матысик // Труды ИМ НАН Беларуси. – 2014. – Т. 22, № 1. – С. 115–121.

86. Морозов, В.А. О выборе параметра при решении функциональных уравнений методом регуляризации / В.А. Морозов // Докл. АН СССР. – 1967. – Т. 176, № 6. – С. 1225–1228.

87. Морозов, В.А. О регуляризующих семействах операторов / В.А. Морозов // Вычисл. методы и программирование : сб. работ / Вычисл. центр Моск. ун-та. – М., 1967. – Вып. 3. – С. 63–95.

88. Морозов, В.А. Линейные и нелинейные некорректные задачи / В.А. Морозов // Итоги науки и техники. Мат. анализ. – 1973. – Т. 11. – С. 129–178.

89. Морозов, В.А. Регулярные методы решения некорректно постав-ленных задач / В.А. Морозов. – М. : Изд-во МГУ, 1974. – 320 с.

90. Оганесян, С.М. Регуляризующий итерационный процесс, основанный на параметрическом функционале А.Н. Тихонова / С.М. Оганесян, В.Ч. Старостенко // Докл. АН СССР. – 1978. – Т. 238, № 2. – С. 277–280.

91. Савчук, В.Ф. Некоторые итеративные методы решения уравнений I рода / В.Ф. Савчук // Изв. АН БССР. Сер. физ.-мат. наук. – 1976. – № 5. – С. 23–27.

92. Савчук, В.Ф. Сходимость в энергетической норме неявного метода решения уравнений I рода / В.Ф. Савчук // II респ. конф. молодых ученых ИФМ Лит. ССР : тез. докл. науч. конф., Вильнюс, 15–17 апр. 1976 г. / ИФМ Лит. ССР. – Вильнюс, 1976. – С. 53–54.

93. Савчук, В.Ф. Сходимость одного метода решений линейных уравнений в гильбертовом пространстве / В.Ф. Савчук // Изв. АН БССР. Сер. физ.-мат. наук. – 1981. – № 4. – С. 53–58.

94. Савчук, В.Ф. Правило останова по невязке для метода простых итераций с попеременно чередующимся шагом / В.Ф. Савчук // Изв. АН БССР. Сер. физ.-мат. наук. – 1986. – № 6. – С. 109–111.

95. Савчук, В.Ф. Оценки погрешностей в неявном итеративном методе решения уравнений I рода / В.Ф. Савчук ; Брест. педин-т. – Брест, 1986. – 11 с. – Деп. в ВИНИТИ № 5960-В87 // Изв. вузов. Математика. – 1988. – № 1. – С. 89.

96. Савчук, В.Ф. Правило останова по соседним приближениям в итеративных методах решения линейных уравнений / В.Ф. Савчук ; Брест. педин-т. – Брест, 1990. – 16 с. – Деп. в ВИНИТИ № 2430-В90 // Изв. вузов. Математика. – 1990. – № 10. – С. 87.

97. Савчук, В.Ф. Регуляризация линейных уравнений в гильбертовом пространстве / В.Ф. Савчук // Изв. АН БССР. Сер. физ.-мат. наук. – 1993. – № 3. – С. 110–112.

98. Савчук, В.Ф. Выбор правила останова в неявной итерационной схеме решения линейного уравнения I рода / В.Ф. Савчук ; Брест. педин-т. – Брест, 1994. – 6 с. – Деп. в ВИНИТИ № 199442-Д94 // Изв. вузов. Математика. – 1994. – № 5. – С. 87.

99. Савчук, В.Ф. Апостериорный выбор числа итераций в неявном итеративном методе решения линейных уравнений / В.Ф. Савчук / Брест. педин-т. – Брест, 1997. – 14 с. – Деп. в ВИНИТИ № 358–В97 // Изв. вузов. Математика. – 1997. – № 4. – С. 87.

100. Савчук, В.Ф. Сходимость в гильбертовом пространстве неявного метода итераций решения уравнений I рода / В.Ф. Савчук. И.Г. Кожух // Весн. Брэсц. ун-та. Сер. прыродазн. навук. – 1998. – № 6. – С. 22–26.

101. Савчук, В.Ф. О применении итеративных методов к решению обратных задач теории потенциала / В.Ф. Савчук // Весн. Брэсц. ун-та. Сер. прыродазн. навук. – 1999. – № 2. – С. 30–36.

102. Савчук, В.Ф. Неявный метод решения некорректных задач в случае приближённо заданного оператора / В.Ф. Савчук // Дифференц. уравнения и системы компьютерной алгебры : тр. междунар. мат. конф., Брест, 19–22 сент. 2000 г. / Брест. гос. ун-т ; редкол.: Н.И. Юрчук [и др.]. – Брест, 2001. – С. 116–120.

103. Савчук, В.Ф. Регуляризация операторных уравнений при помощи градиентного метода с переменным шагом / В.Ф. Савчук // Вучоныя зап. Брэсц. дзярж. ун-та імя А.С. Пушкіна : зб. навук. пр. / Брэсц. дзярж. ун-т. – Брэст, 2005. – Т. 1, ч. 2. – С. 19–29.

104. Савчук, В.Ф. Неявная итерационная процедура решения опера-торных уравнений в гильбертовом пространстве / В.Ф. Савчук, О.В. Матысик // Докл. НАН Беларуси. – 2006. – Т. 50, № 5. – С. 37–42.

105. Савчук, В.Ф. Об итерационных процедурах решения некорректных задач / В.Ф. Савчук, О.В. Матысик // Вучоныя зап. Брэсц. дзярж. ун-та імя А.С. Пушкіна : зб. навук. пр. / Брэсц. дзярж. ун-т. – Брэст, 2006. – Т. 2, ч. 2. – С. 5–19.

106. Савчук, В.Ф. Априорные оценки погрешности в неявном методе итераций решения некорректных задач / В.Ф. Савчук // Весн. Брэсц. ун-та. Сер. прыродазн. навук. – 2007. – № 1 (28). – С. 22–26.

107. Савчук, В.Ф. Сходимость в гильбертовом пространстве неявного итерационного метода решения операторных уравнений / В.Ф. Савчук, О.В. Матысик // Докл. НАН Беларуси. – 2007. – Т. 51, № 4. – С. 7–12.

108. Савчук, В.Ф. Регуляризация операторных уравнений в гильбертовом пространстве / В.Ф. Савчук, О.В. Матысик. – Брест : БрГУ им. А.С. Пушкина, 2008. – 196 с.

109. Савчук, В.Ф. Итерационный метод явного типа решения операторных уравнений в гильбертовом пространстве / В.Ф. Савчук, О.В. Матысик // Докл. НАН Беларуси. – 2010. –Т. 54, № 5. – С. 24–29.

110. Савчук, В.Ф. Об одном итерационном методе решения некорректных задач с самосопряженными операторами / В.Ф. Савчук, О.В. Матысик // Весн. Брэсц. ун-та. Сер. 4. Фізіка. Матэматыка. – 2011. – № 2. – С. 93–98.

111. Савчук, В.Ф. Правило останова по невязке в итерационной процедуре решения операторных уравнений / В.Ф. Савчук, О.В. Матысик // Еругинские чтения – XV : тез. докл. Междунар. мат. конф., Гродно, 23–25 мая 2013 г. / Гродн. гос. ун-т. – Гродно, 2013. – Ч. 2. – С. 46.

112. Самарский, А.А. Численные методы решения обратных задач математической физики / А.А. Самарский, П.Н. Вабищевич. – М. : Едиториал УРСС, 2004. – 480 с.

113. Сарв, Л.Э. О решении нелинейных некорректных задач α-методами / Л.Э. Сарв // Численное решение краевых задач и интегральных уравнений : тез. докл. науч. конф., Тарту, 21–23 окт. 1981 г. / Тартус. ун-т. – Тарту, 1981. – С. 73–75.

114. Соловьёв, О.А. Об аналитическом продолжении потенциальных полей с помощью итерационных процессов / О.А. Соловьёв // Изв. АН СССР. Физика Земли. – 1967. – № 4. – С. 92–93.

115. Страхов, В.Н. О решении некорректных задач магнито- и гравиметрии, представляемых интегральными уравнениями типа свёртки / В.Н. Страхов // Изв. АН СССР. Физика Земли. – 1967. – № 4. – С. 36–54.

116. Страхов, В.Н. Некоторые применения функционально-аналитических методов в математической теории интерпретации гравитационных и магнитных аномалий : автореф. дис. ... д-ра физ.-мат. наук : 01.01.07 / В.Н. Страхов. – М., 1972. – 78 с.

117. Страхов, В.Н. К вопросу о скорости сходимости в методе простой итерации / В.Н. Страхов // Журн. вычисл. математики и мат. физики. – 1973. – Т. 13, № 6. – С. 1602–1606.

118. Тихонов, А.Н. Об устойчивости обратных задач / А.Н. Тихонов // Докл. АН СССР. – 1943. – Т. 39, № 5. – С. 195–198.

119. Тихонов, А.Н. О решении некорректно поставленных задач и методе регуляризации / А.Н. Тихонов // Докл. АН СССР. – 1963. – Т. 151, № 3. – С. 501–504.

120. Тихонов, А.Н. Методы решения некорректных задач / А.Н. Тихонов, В.Я. Арсенин. – М. : Наука, 1979. – 288 с.

121. Фихтенгольц, Г.М. Основы математического анализа : в 2 т. / Г.М. Фихтенгольц. – М. : Наука, 1968. – Т. 1. – 440 с.

122. Фридман, В.М. О сходимости методов типа наискорейшего спуска / В.М. Фридман // Успехи мат. наук. – 1962. – Т. 17, вып. 3. – С. 201–204.

123. Хромова, Г.В. К вопросу о приближённом решении интегральных уравнений I рода / Г.М. Хромова // Дифференц. уравнения и вычисл. математика / Сарат. ун-т. – 1975. – Вып. 2. – С. 93–103.

124. Bialy, H. Iterative Behandlung Linearer Funktionsgleichungen / H. Bialy // Arch. Ration. Mech. and Anal. – 1959. – Vol. 4, № 2. – P. 166–176.

125. Carleman, T. Les fonctions quasi analitiques / T. Carleman. – Paris, 1926.

126. Gilyazov, S.F. Regularization of ill-posed problems by iteration methods / S.F. Gilyazov, N.L. Gol’dman. – Dordrecht ets. : Kluwer Acad. Publ., 2000. – 340 p.

127. Groetsch, G.W. Sequential regularisation of ill-posed problems involving unbounded operations / G.W. Groetsch // Commentationes

mathematicae universitatis Carolinae. Cincinnati. – 1977. – Vol. 18, № 3. – P. 489–498.

128. Hadamard, J. Sur les problemes aux derivees partielies et leur signification physique / J. Hadamard // Bull. Univ. Princeton. – 1902. – Vol. 13. – P. 49–52.

129. Hadamard, J. Le probleme de Cauchy et les equations aux derivees partielles lineaires hyperboliques / J. Hadamard. – Hermann. Paris, 1932.

130. Lipfert, W. Iterative Losung der linearen Gleichung $Ax = y$ unter Verwendung einer Noherung fur inversen Operator von A / W. Lipfert // Viss. Z. techn. Univ. Dresden. – 1970. – Vol. 19. – P. 399–404.

131. Matysik, O.V. Implicit iteration method of solving linear equations with approximating right-hand member and approximately specified operator / O.V. Matysik // J. Numer. Appl. Math. – 2014. – № 2 (116). – P. 89–95.

132. Phillips, D.L. A technique for the numerical solution of certain integral equations of the first kind / D.L. Phillips // J. Accoc. Comput. Mach. – 1962. – Vol. 9, № 1. – P. 84–97.

133.Vogel, C.R. Computational methods for inverse problems / C.R. Vogel. – Philadelphia : SIAM, 2002. – 183 p.