МАТЭМАТЫКА

УДК 512.542

Д.В. Грицук[1], А.А. Трофимук[2]
[1]*канд. физ.-мат. наук, доц., зав. каф. прикладной математики и информатики Брестского государственного университета имени А.С. Пушкина*
[2]*канд. физ.-мат. наук, доц., докторант каф. алгебры и геометрии Гомельского государственного университета имени Франциска Скорины*
e-mail: dmitry.gritsuk@gmail.com

ИНВАРИАНТЫ ЧАСТИЧНО РАЗРЕШИМЫХ ГРУПП С ОГРАНИЧЕНИЯМИ НА КЛАССИЧЕСКИЕ ПОДГРУППЫ*

К инвариантам конечной разрешимой группы относят производную и нильпотентную длины, p-длину, π-длину, нильпотентную π-длину и произвоную π-длину. В разделе 1 собраны результаты, уставливающие оценки производной π-длины π-разрешимой группы G, порядок π-холловой подгруппы которой свободен n-ых степеней как в слу-чае произвольного n, так и в случае малых его значений. В разделе 2 перечислены оценки производной π-длины и нильпотентной π-длины π-разрешимой груп-пы G, у которой 2-максимальная подгруппа в π-холловой подгруппе группы G абелева (нильпотентна). В разделе 3 содержится информация о вли-янии нормального ранга силовской p-подгруппы p-разрешимой группы на ее производную p-длину.

Введение

Все рассматриваемые группы предполагаются конечными. Используются обозначения, принятые в [1; 2].

Пусть P – множество всех простых чисел, а π – некоторое множество простых чисел. Дополнение к π во множестве P обозначается через π'. Группа называется π-группой, если все простые делители порядка группы принадлежат множеству π, и π'-группой – в противном случае.

Ряд подгрупп

$$1 = G_0 \subseteq G_1 \subseteq G_2 \subseteq \ldots \subseteq G_m = G, \qquad (1)$$

называется субнормальным, если для любого i подгруппа G_i нормальна в G_{i+1}. Фактор-группы G_{i+1}/G_i называются факторами этого ряда. Если в (1) нет совпадающих подгрупп, то число m называется длиной ряда.

Производная (нильпотентная) длина группы G определяется как длина самого короткого нормального ряда (1) с абелевыми (нильпотентными) факторами. Эти длины обозначаются через $d(G)$ и $n(G)$ соответственно. Ясно, что нильпотентная длина не превышает производную длину для любой разрешимой группы. В [3] были установлены оценки производной длины разрешимой группы, порядок которой не делится на $(n+1)$-е степени простых чисел.

Пусть p – простое число. Пусть G – p-разрешимая группа. Тогда она обладает субнормальным рядом (1), каждый фактор которого является либо p-фактором, либо p'-фактором. Наименьшее число p-факторов среди всех таких субнормальных рядов

**Работа выполнена при финансовой поддержке Белорусского республиканского фонда фундаментальных исследований (проект № Ф17М-063).*

называется p-длиной p-разрешимой группы и обозначается через $l_p(G)$. Данное понятие предложили Ф. Холл и Г. Хигмэн [4] в 1956 г. и установили зависимость p-длины p-разрешимой группы от некоторых инвариантов ее силовской p-подгруппы.

В 1967 г. Л.А. Шеметков [5] распространил понятие p-длины на произвольные группы и доказал, что p-длина любой группы не превышает минимального числа образующих ее силовской p-подгруппы. Оценкам p-длины посвящены работы А.Х. Журтова и С.А. Сыскина [6], В.С. Монахова и О.А. Шпырко [7; 8], А.А. Трофимука [9–11]. В частности, в работе [12] была исследована p-длина p-разрешимой группы с силовской p-подгруппой нормального ранга не выше 3.

Аналогом p-длины для π-разрешимой группы является понятие π-длины. Пусть G – π-разрешимая группа. Тогда она обладает субнормальным рядом (1), каждый фактор которого является либо π-фактором, либо π'-фактором. Наименьшее число π-факторов среди всех таких субнормальных рядов группы G называется π-длиной π-разрешимой группы G и обозначается через $l_\pi(G)$.

В 1968 г. Картер, Фишер и Хоукс [13] ввели понятие нильпотентной π-длины разрешимой группы как обобщение нильпотентной длины и p-длины одновременно. Они доказали, что класс всех разрешимых групп ограниченной нильпотентной π-длины является наследственной насыщенной формацией и описали ее локальный экран.

Для π-разрешимой группы аналогом нильпотентной длины является понятие нильпотентной π-длины. Пусть G – π-разрешимая группа. Тогда она обладает субнормальным рядом (1), каждый фактор которого является либо нильпотентным π-фактором, либо π'-фактором. Наименьшее число нильпотентных π-факторов среди всех таких субнормальных рядов группы G называется нильпотентной π-длиной π-разрешимой группы G и обозначается через $l_\pi^n(G)$. Ясно, что в случае когда $\pi=\pi(G)$, значение $l_\pi^n(G)$ совпадает со значением нильпотентной длины группы G.

Одной из первых работ по нильпотентной π-длине π-разрешимой группы была статья М. Нумата [14], в которой она ограничена числом классов сопряженных ненормальных максимальных подгрупп, чьи индексы принадлежат π. Оценкам нильпотентной длины посвящены работы В.С. Монахова и О.А. Шпырко [7; 8].

Многими авторами исследовались инварианты частично разрешимых групп в зависимости от максимальных или 2-максимальных подгрупп. В частности, связь между 2-максимальными подгруппами группы и структурой группы G исследовалась в работах Редеи [15], Хупперта [16], Судзуки [17], Янко [18] и В.А. Белоногова [19].

В 2006 г. В.С. Монахов [20] предложил аналог производной длины для π-разрешимой группы – понятие производной π-длины π-разрешимой группы. Пусть G – π-разрешимая группа. Тогда она обладает субнормальным рядом (1), каждый фактор которого является либо абелевым π-фактором, либо π'-фактором. Наименьшее число абелевых π-факторов среди всех таких субнормальных рядов группы G называется абелевой π-длиной π-разрешимой группы G и обозначается через $l_\pi^a(G)$. Ясно, что в случае когда $\pi=\pi(G)$, значение $l_\pi^a(G)$ совпадает со значением нильпотентной длины группы G. Оценкам производной π-длины π-разрешимой группы посвящены работы [21–25].

Вполне естественно развить отмеченные выше результаты на производную π-длину π-разрешимой группы.

1. Оценки инвариантов π-разрешимых групп с малыми порядками силовских подгрупп

Напомним, что число n свободно от m-х степеней, если p^m не делит n для всех простых p. При $m=2$ говорят, что n свободно от квадратов, при $m=3$ – от кубов.

В.С. Монахов [3] установил, что если порядок разрешимой группы G не делится на $(n+1)$-е степени простых чисел, то производная длина группы $G/\Phi(G)$ не превышает $3+n$.

Вполне естественно развить эти результаты на случай π-разрешимой группы. Так, в работе [22, теорема 1] показано, что производная π-длина π-разрешимой группы, силовские p-подгруппы которой являются абелевыми для всех $p\in\pi$, не превышает $|\pi(G_\pi)|$, где G_π – π-холлова подгруппа. Таким образом, если у π-разрешимой группы порядок π-холловой подгруппы G_π свободен от кубов, то ее производная π-длина не превышает $|\pi(G_\pi)|$. В работе [26] получен ряд теорем, устанавливающих оценки производной π-длины π-разрешимой группы G, порядок π-холловой подгруппы которой свободен n-ых степеней как в случае произвольного n, так и в случае малых его значений.

Теорема 1.1. Если порядок π-холловой подгруппы π-разрешимой группы G свободен от квадратов, то $l_\pi^a(G)\le 2$.

Теорема 1.2. Пусть G – π-разрешимая группа. Если порядок π-холловой подгруппы свободен от кубов, то $l_\pi^a(G)\le 4$. В частноси, если $2\notin\pi$, то $l_\pi^a(G)\le 3$.

Теорема 1.3. Пусть G – π-разрешимая группа. Если небициклические силовские p-подгруппы π-холловой подгруппы группы G, $p\in\pi$ имеют порядки $2^3, 3^3, 2^4, 2^5$, то $l_\pi^a(G)\le 6$. В частности, если $2\notin\pi$, то $l_\pi^a(G)\le 3$.

Теорема 1.4. Пусть G – π-разрешимая группа такая, что порядок любой силовской p-подгруппы P, $p\in\pi$ свободен от n-ых степеней. Тогда если $\{2,3\}\notin\pi$, то $l_\pi^a(G)\le|\pi(G_\pi)|\dfrac{n+1}{2}$, и если $\{2,3\}\in\pi$, то $l_\pi^a(G)\le|\pi(G_\pi)|\left(\dfrac{n}{2}+1\right)$.

2. Оценки инвариантов π-разрешимых групп с ограниченными n-максимальными подгруппами холловых π-групп

Напомним, что подгруппа H группы G называется 2-максимальной подгруппой группы G, если H является максимальной подгруппой в некоторой максимальной подгруппе M группы G.

Связь между 2-максимальными подгруппами группы π и структурой группы G исследовалась многими авторами. Наиболее ранние результаты в данном направлении получили Редеи [15], описавший неразрешимые группы с абелевыми 2-максимальными подгруппами, и Хупперт [16], установивший сверхразрешимость группы, в которой все 2-максимальные подгруппы нормальны. Эти результаты породили многие другие исследования в данном направлении. Например, в работах Судзуки [17] и Янко [18] содержится описание конечных неразрешимых групп, в которых все 2-максимальные подгруппы нильпотентны. Описание разрешимых групп, в которых все 2-максимальные подгруппы являются нильпотентными, было получено В.А. Белоноговым в работе [19].

В работе [25] были установлены оценки инвариантов π-разрешимых групп с ограниченной максимальной подгруппой π-холловой подгруппы, а в работе [27] получены оценки производной π-длины и нильпотентной π-длины π-разрешимой группы G, у которой 2-максимальная подгруппа в π-холловой подгруппе группы G абелева (нильпотентна).

Группой Миллера – Морено называют неабелеву группу, все собственные подгруппы которой абелевы.

Теорема 2.1. Пусть G – π-разрешимая группа, G_π – π-холлова подгруппа и M – максимальная подгруппа в G_π. Если подгруппа M абелева или является группой Миллера – Морено, то $l_\pi^n(G) \le 3$ и $l_\pi^a(G) \le 4$.

Группой Шмидта называют ненильпотентную группу, все собственные подгруппы которой нильпотентны.

Теорема 2.2. Пусть G – π-разрешимая группа, G_π – π-холлова подгруппа и M – максимальная подгруппа в G_π. Если подгруппа M нильпотентна или является группой Шмидта, то $l_\pi^n(G) \le 1 + \max_{r\in\pi} l_r(G)$ и $l_\pi^a(G) \le \max_{r\in\pi} d(G_r)\left(1 + \max_{r\in\pi} l_r(G)\right)$.

Теорема 2.3. Пусть G – π-разрешимая группа, G_π – π-холлова подгруппа и M – 2-максимальная подгруппа в G_π. Если подгруппа M абелева, то $l_\pi^n(G) \le 3$ и $l_\pi^a(G) \le 4$.

Теорема 2.4. Пусть G – π-разрешимая группа, G_π – π-холлова подгруппа и M – 2-максимальная подгруппа в G_π. Если подгруппа M нильпотентна, то

$$l_\pi^n(G) \le 1 + \max_{r\in\pi} l_r(G) \text{ и } l_\pi^a(G) \le \max_{r\in\pi} d(G_r)\left(1 + \max_{r\in\pi} l_r(G)\right).$$

3. Строение частично разрешимых групп с ограниченным нормальным рангом силовских подгрупп

Напомним, что нормальный ранг $r_n(P)$ конечной p-группы P определяется следующим образом:

$$r_n(P) = \max_{X \triangleleft P} \log_p |X/\Phi(X)|,$$

где X пробегает все нормальные подгруппы группы P, в том числе и P.

Здесь $\Phi(X)$ – подгруппа Фраттини группы X. Из теоремы Бернсайда о базисе [2, теорема III.3.15] следует, что нормальный ранг $r_n(P)$ есть наименьшее натуральное число k такое, что любая нормальная подгруппа p-группы P порождается не более, чем k элементами.

В.С. Монаховым в [12] было установлено, что если G – p-разрешимая группа с силовской p-подгруппой нормального ранга не выше 3, то p-длина не превышает 2. В частности, если p является нечетным, то p-длина не превышает 1. В работе [24] была исследована производная p-длина p-разрешимой группы в зависимости от строения силовской p-подгруппы. В частности, установлено, что производная p-длина p-разрешимой группы, у которой силовская p-подгруппа абелева, не превышает 1. Если же силовская p-подгруппа является метабелевой и $p > 2$, то производная p-длина не превышает 3. В работе [23] доказано, что если силовская p-подгруппа p-разрешимой группы бициклическая, то $l_p^a(G) \le 3$. В частности, $l_p^a(G) \le 2$ для $p > 2$. Возникает вопрос о влиянии нормального ранга силовской p-подгруппы p-разрешимой группы на ее производную p-длину. Ответ на данный вопрос был получен в работе [28].

Теорема 3.1. Если нормальный ранг силовской p-подгруппы p-разрешимой группы G не превышает некоторого натурального числа k, то $l_p^a(G/\Phi(G)) \le \frac{k^2+k+2}{4}$ для $p \notin \{2,3\}$ и $l_p^a(G/\Phi(G)) \le \frac{k^2+k+4}{4}$ для $p \in \{2,3\}$.

Очевидно, что p-группа P имеет нормальный ранг 1 тогда и только тогда, когда P циклическая. Из теоремы III.11.5 [2] следует, что нормальный ранг примарной бициклической группы нечетного порядка не превышает 2. Однако обратное неверно. Так, $r_n(S)=2$ для экстраспециальной группы S порядка 27, но S не является бициклической. Кроме того, можно показать, что всякая 2-группа нормального ранга ≤ 2 является бициклической.

Из теоремы 3.1. вытекает ряд следствий.

Следствие 3.2. Если G – p-разрешимая группа с силовской p-подгруппой нормального ранга ≤ 2, то производная p-длина фактор-группы $G/\Phi(G)$ не превышает 2.

Следствие 3.3. Если G – p-разрешимая группа с силовской p-подгруппой нормального ранга ≤ 3, то производная p-длина фактор-группы $G/\Phi(G)$ не превышает 4.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Монахов, В. С. Введение в теорию конечных групп и их классов / В. С. Монахов. – Минск : Выш. шк., 2006. – 207 с.
2. Huppert, B. Endliche Gruppen I / B. Huppert. – Berlin ; Heidelberg ; New York, 1967. – 792 s.
3. Монахов, В. С. Об индексах максимальных подгрупп конечных разрешимых групп / В. С. Монахов // Алгебра и логика. – 2004. – Т. 43, № 4. – С. 411–424.
4. Hall, P. The p-lengh of a p-soluble groups and reduction theorems for Burnside's problem / P. Hall, G. Higman // Proc. London Math. Soc. – 1956. – Vol. 3, № 7. – P. 1–42.
5. Шеметков, Л. А. О частично разрешимых конечных группах / Л. А. Шеметков // Мат. сб. – 1967. – Т. 72 (114), № 1. – С. 97–107.
6. Журтов, А. Х. О группах Шмидта / А. Х. Журтов, С. А. Сыскин // Сиб. мат. журн. – 1987. – Т. 28, № 2. – С. 74–78.
7. Монахов, В. С. О нильпотентной π-длине конечных π-разрешимых групп / В. С. Монахов, О. А. Шпырко // Дискрет. математика. – 2001. – Т. 13, вып. 3. – С. 145–152.
8. Монахов, В. С. О нильпотентной π-длине максимальных подгрупп конечных π-разрешимых групп / В. С. Монахов, О. А. Шпырко // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1, Математика. Механика. – 2009. – № 6. – С. 3–8.
9. Монахов, В. С. Конечные разрешимые группы, силовские p-подгруппы которых либо бициклические, либо имеют порядок p^3 / В. С. Монахов, А. А. Трофимук // Фундам. и приклад. математика. – 2009. – Т. 15, № 2. – С. 121–131.
10. Монахов, В. С. О конечных разрешимых группах фиксированного ранга / В. С. Монахов, А. А. Трофимук // Сиб. мат. журн. – 2011. – Т. 52, № 5. – С. 1123–1137.
11. Monakhov, V. S. On a Finite Group Having a Normal Series Whose Factors Have Bicyclic Sylow Subgroups / V. S. Monakhov, A. A. Trofimuk // Communications in Algebra. – 2011. –Vol. 39, № 9. – P. 3178–3186.
12. Монахов, В. С. О разрешимых конечных группах с силовскими подгруппами малого ранга / В. С. Монахов // Докл. НАН Беларуси. – 2002. – Т. 46, № 2. – С. 25–28.
13. Carter, R. Extreme Classes of finite soluble groups / R. Carter, B. Fischer, T. Hawkes // J. Algebra. – 1968. – Vol. 9, № 3. – P. 285–313.

14. Numata, M. On the π-nilpotent length of π-solvable groups / M. Numata // Osaka J. Math. – 1971. – V. 8. – P. 447–451.
15. Rédei, L. Ein Satz uber die endlichen einfachen Gruppen / L. Rédei // Acta Math. – 1950. – T. 84. – S. 129–153.
16. Huppert, B. Normalteiler and maximal Untergruppen endlicher gruppen / B. Huppert // Math. Z. – 1954. – Vol. 60. – P. 409–434.
17. Suzuki, M. The nonexistence of a certain type of simple groups of odd order / M. Suzuki // Proc. Amer. Math. Soc. – 1957. – Vol. 8, № 4. – P. 686–695.
18. Janko, Z. Endliche Gruppen mit lauter nilpotent zweitmaximalen Untergruppen / Z. Janko // Math. Z. – 1962. – Vol. 79. – P. 422–424.
19. Белоногов, В. А. Конечные разрешимые группы с нильпотентными 2-максимальными подгруппами / В. А. Белоногов // Мат. заметки. – 1968. – Т. 3, № 1. – С. 21–32.
20. Монахов, В. С. Конечные группы с полунормальной холловой подгруппой / В. С. Монахов. // Мат. заметки. – 2006. – Т. 80, № 4. – Р. 573–581.
21. Грицук, Д. В. О производной π-длине π-разрешимой группы / Д. В. Грицук, В. С. Монахов, О. А. Шпырко // Вестн. БГУ. Сер. 1, Физика. Математика и информатика. – 2012. – № 3. – С. 90–95.
22. Monakhov, V. S. On derived π-length of a finite π-solvable group with supersolvable π-Hall subgroup / V. S. Monakhov, D. V. Gritsuk // Algebra and Discrete Mathematics. – 2013. – Vol. 16, № 2. – P. 233–241.
23. Грицук, Д. В. О конечных π-разрешимых группах с бициклическими силовскими подгруппами / Д. В. Грицук, В. С. Монахов, О. А. Шпырко // Проблемы физики, математики и техники. – 2013. – № 1 (15). – С. 61–66.
24. Грицук, Д. В. Зависимость производной p-длины p-разрешимой группы от порядка ее силовской p-подгруппы / Д. В. Грицук // Проблемы физики, математики и техники. – 2014. – № 3 (20). – С. 58–60.
25. Монахов, В. С. О производной π-длине конечной π-разрешимой группы с заданной π-холловой подгруппой / В. С. Монахов, Д. В. Грицук // Тр. ин-та математики и механики УрО РАН. – 2013. – Т. 19, № 3. – С. 215–223.
26. Грицук, Д. В. Оценки производной π-длины π-разрешимой группы, у которой π-холловы подгруппы свободны от n-ых степеней / Д. В. Грицук, А. А. Трофимук, Т. А. Артюшеня / Вестн. Витеб. гос. ун-та. – 2018. – № 1 (98). – С. 11–15.
27. Грицук, Д. В. Конечные π-разрешимые группы с заданными свойствами 2-максимальных π-подгрупп / Д. В. Грицук, А. А. Трофимук // Вестн. Брест. гос. техн. ун-та. Физика, математика, информатика. – 2017. – № 5 (107). – С. 69–72.
28. Грицук, Д. В. Производная p-длина p-разрешимой группы, у которой нормальный ранг силовской p-подгруппы ограничен / Д. В. Грицук, А. А. Трофимук, Т. В. Бондарук // Весн. Брэсц. ун-та. Сер. 4, Фізіка. Матэматыка. – 2018. – № 1. – С. 59–65.

Рукапіс паступіў у рэдакцыю 22.02.2019

Gritsuk D.V., Trofimuk A.A. **Invariants of Partially Soluble Groups with Restrictions on Classical Subgroups**

The invariants of a finite soluble group include the derived and the nilpotent length, p-length, π-length, nilpotent π-length, and derived π-length. In Section 1 results that establish the estimates of the derived π-length of a π-soluble group in which the order of a Hall π-subgroup is n-th degree free for arbitrary n and also for small values of n are compiled. Section 2 lists the estimates of the derived π-length and the nilpotent π-length of a π-solvable group in which 2-maximal subgroup of Hall π-subgroup is abelian (nilpotent). Section 3 contains information about the influence of the normal rank of a Sylow p-subgroup of a p-solvable group on its derived p-length.