УДК 530.12,524.6,531

Ю.А. Курочкин
д-р физ.-мат. наук, доц., зав. центром «Фундаментальные взаимодействия и астрофизика» Института физики имени Б.И. Степанова НАН Беларуси
e-mail: yukuroch@dragon.bas-net.by

СИСТЕМЫ КОГЕРЕНТНЫХ СОСТОЯНИЙ, СВЯЗАННЫХ С УРАВНЕНИЕМ КЛЕЙНА – ФОКА*

Показано, что, совершая преобразования типа Леви-Чивита в уравнении Клейна – Фока и разделяя переменные на «поперечные» и «продольные», возможно определение когерентных состояний стандартным образом. Найдены решения преобразованного четырехмерного уравнения в виде координатных и импульсных представлений данных когерентных состояний. «Поперечные» переменные интерпретируются как партонные степени свободы адрона, описываемого скалярным уравнением Клейна – Фока.

Введение

В работе [1] построена феноменологическая модель адрона как когерентного состояния поперечных возбуждений на орисфере релятивистского импульсного пространства Лобачевского, интерпретируемых как партоны. В работе [2] продемонстрирована принципиальная возможность возникновения величин, характеризующих размеры адрона, которые были введены в модели «руками» в рамках теоретико-полевого подхода, – описание движения цветного кварка в постоянном глюонном поле.

Задачи данной работы:

1) развитие теоретико-полевых моделей для описания адронов как когерентных состояний поперечных возбуждений, рассматриваемых как партоны;

2) установление ограничений, которые накладывает теоретико-полевая модель на исходную феноменологическую модель.

В работе рассмотрим случай уравнения Клейна – Фока, которое используется для описания скалярных релятивистских частиц-мезонов. Как известно, существуют проблемы с введением обычных (не обобщенных в [3]) когерентных состояний в релятивистском случае [4]. Покажем ниже, что применение квадратичных конформных преобразований в комплексной области и их аналога для функций двойного переменного (в литературе такие преобразования часто называют преобразованиями Леви-Чивита [5]) к уравнению Клейна – Фока позволяет ввести когерентные состояния свободной релятивистской частицы и интерпретировать поперечные возбуждения как партоны.

Разделение переменных в уравнении Клейна – Фока на продольные и поперечные и преобразования Леви-Чивита

Будем рассматривать адрон как скалярную частицу, описываемую уравнением Клейна – Фока – Гордона:

$$\partial_\mu{}^2\varphi(\underline{x}, x_0) = \frac{m^2c^2}{\hbar^2}\varphi(\underline{x}, x_0)\,. \qquad (1)$$

Здесь $\mu = 1, 2, 3, 0$; $x_0 = ct$. В дальнейшем в уравнении (1) полагаем $\hbar = c = 1$, тогда оператор Даламбера

$$\partial_\mu{}^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} - \frac{\partial^2}{\partial t^2}\,. \qquad (2)$$

*Работа выполнена при поддержке гранта БРФФИ № Ф16Д-003.

Будем искать решение уравнения (1), разделив в нем переменные на «поперечные» x, y и «продольные» z, t. Очевидно, что до введения взаимодействия, выделяющего направление в пространстве, разделение переменных x, y, z на «поперечные» и «продольные» части условно. Тогда решение уравнения (1) представим в виде

$$\varphi(\underline{x}, x_0) = \varphi_1(x, y)\varphi_2(z, t). \tag{3}$$

Подставив выражение (3) в (1) и разделив переменные, получим для «поперечной» части

$$\frac{\partial^2\varphi_1(x, y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi_1(x, y)}{\partial y^2} = k_\perp^2\varphi_1(x, y) \tag{4}$$

и, соответственно, для «продольной» части

$$\frac{\partial^2\varphi_2(z, t)}{\partial z^2} - \frac{\partial^2\varphi_2(z, t)}{\partial t^2} = k_\parallel^2\varphi_2(z, t) = (m^2 - k_\perp^2)\varphi_2(z, t). \tag{5}$$

Осуществим следующие замены переменных в (4): $\varphi_1(x, y) \to \Phi_1(\eta, \xi)$ – и проведем комплексификацию $x + iy = (\eta + i\xi)^2 = \eta^2 - \xi^2 + 2i\eta\xi$. Тогда это уравнение примет вид:

$$\frac{\partial^2\Phi_1(\eta, \xi)}{\partial\eta^2} + \frac{\partial^2\Phi_1(\eta, \xi)}{\partial\xi^2} = 4k_\perp^2(\eta^2 + \xi^2)\Phi_1(\eta, \xi). \tag{6}$$

В уравнении (5) сделаем замены: $(jz + t) = (\chi + j\zeta)^2 = j(\chi^2 + \zeta^2) + 2\chi\zeta$ и $\varphi_2(z, t) \to \Phi_2(\chi, \zeta)$.

Здесь нами использовались аналитические функции, определенные над двойными числами, для которых $j^2 = 1$. При этом вместо (6) получим:

$$\frac{\partial^2\Phi_2(\chi, \zeta)}{\partial\chi^2} - \frac{\partial^2\Phi_2(\chi, \zeta)}{\partial\zeta^2} = 4(m^2 - k_\perp{}^2)(\chi^2 - \zeta^2)\Phi_2(\chi, \zeta). \tag{7}$$

Отметим, что в случае комплексных чисел и замены переменных $(x, y) \rightleftarrows (\eta, \xi)$ якобиан преобразования не имеет особенностей и следовательно взаимно однозначное соответствие переменных обеспечено. Условием взаимно однозначности переменных при преобразовании $(z, t) \rightleftarrows (\chi, \zeta)$ является условие неравенства нулю якобиана преобразования, т.е. $\chi^2 - \zeta^2$.

Данное условие не тривиально из-за отсутствия делимости в системе двойных чисел. Однако оно выполняется на плоскости переменных (χ, ζ), за исключением биссектрис.

Так отображаются особенности светового конуса, которые, очевидно, проявляются и у исходных переменных. Условие $\chi^2 - \zeta^2 \neq 0$ необходимое, но недостаточное. Требуется, чтобы данное условие удовлетворяло требованию времениподобности, накладываемому на исходные координаты, т.е. $x^2 + y^2 + z^2 \prec t^2$. В новых переменных η, ξ, χ, ζ данное условие выглядит так $(\chi^2 - \zeta^2)^2 \succ (\eta^2 + \xi^2)^2$, или $\zeta^2 + \eta^2 + \xi^2 \prec \chi^2$. Оно непротиворечиво и всегда может быть реализовано.

Определение когерентных состояний

Теперь обратимся к уравнению (6), учитывая, что именно поперечные возбуждения интерпретировались в [1] как партоны (составляющие адронов) и именно для таких состояний во внешнем поле в релятивистском случае еще возможно введение когерентных состояний. Данное уравнение является уравнением осцилляторного типа. Сформулируем его в терминах когерентных состояний. Для этого перепишем как

$$L_1\Phi_1(\eta',\xi')=\frac{\partial^2\Phi_1(\eta',\xi')}{\partial\eta'^2}+\frac{\partial^2\Phi_1(\eta',\xi')}{\partial\xi'^2}-(\eta'^2+\xi'^2)\Phi_1(\eta',\xi')=0 \ , \qquad (8)$$

где $\eta'=2\sqrt{k_\perp}\eta$, $\xi'=2\sqrt{k_\perp}\xi$, и введем операторы рождения и уничтожения

$$a_1^{\pm}=\frac{1}{\sqrt{2}}(\xi'\mp\frac{\partial}{\partial\xi'}),\ \ a_2^{\pm}=\frac{1}{\sqrt{2}}(\eta'\mp\frac{\partial}{\partial\eta'})\,. \qquad (9)$$

При этом оператор уравнения (8) может быть выражен через операторы (9) как

$$L_1=-2(a_1^+a_1^-+a_2^+a_2^-+2)\,. \qquad (10)$$

В уравнении (6) введем новые переменные $\chi'=2\sqrt[4]{m^2-k_\perp{}^2}\chi$, $\zeta'=2\sqrt[4]{m^2-k_\perp{}^2}\zeta$. Тогда оно примет вид:

$$L_2\Phi_2(\chi',\zeta')=\frac{\partial^2\Phi_2(\chi',\zeta')}{\partial\chi'^2}-\frac{\partial^2\Phi_2(\chi',\zeta')}{\partial\zeta'^2}-(\chi'^2-\zeta'^2)\Phi_2(\chi',\zeta')=0. \qquad (11)$$

Введем операторы рождения и уничтожения связанные с уравнением (11):

$$b_1^{\pm}=\frac{1}{\sqrt{2}}(\chi'\mp\frac{\partial}{\partial\chi'}),\ \ b_2^{\pm}=\frac{1}{\sqrt{2}}(\zeta'\mp\frac{\partial}{\partial\zeta'}). \qquad (12)$$

Оператор L_3 выражается через операторы (12) следующим образом:

$$L_1=-2(b_1^+b_1^- - b_2^+b_2^-). \qquad (13)$$

Для каждой пары операторов рождения и уничтожения (9), (13) справедливы соотношения:

$$\left[a_k^-,a_l^+\right]=\delta_{kl}I,\left[a_k^+,a_l^+\right]=\left[a_k^-,a_l^-\right]=\left[a_k^-,I\right]=\left[a_k^+,I\right]=0, \qquad (14)$$

где k,l=1,2 соответствуют η' или ξ',

$$\left[b_k^-,b_l^+\right]=\delta_{kl}I,\left[b_k^+,b_l^+\right]=\left[b_k^-,b_l^-\right]=\left[b_k^-,I\right]=\left[b_k^+,I\right]=0. \qquad (15)$$

Когерентные состояния, как известно, определяются как собственные состояния операторов уничтожения с комплексными собственными значениями:

$$a^-{}_1\left|\alpha_1\right\rangle=\alpha_1\left|\alpha_1\right\rangle,\ a^-{}_2\left|\alpha_2\right\rangle=\alpha_2\left|\alpha_2\right\rangle. \qquad (16)$$

Соответственно, для $b^{\mp}{}_k$:

$$b^-{}_1\left|\beta_1\right\rangle=\beta_1\left|\beta_1\right\rangle,\ b^-{}_2\left|\beta_2\right\rangle=\beta_2\left|\beta_2\right\rangle. \qquad (17)$$

В модели адрона, предложенной в работе [1], партоны, составляющие адрона, рассматривались как поперечные возбуждения (когерентные возбуждения на орисфере релятивистского импульсного пространства).

Орисфера выбиралась ортогональной оси z, которая совпадала с направлением распространения налетающей частицы и осью пучка параллельных прямых в импульсном пространстве Лобачевского, т.е. перпендикулярной орисфере.

Модель носила фе-номенологический характер и не была подчинена каким-либо уравнениям типа (1), (8) и (11). Квадрат модуля собственных значений операторов уничтожения на орисфере, определяемый выражениями типа (16) и (17), отождествлялся с числом партонов.

Проанализируем, могут ли поперечные возбуждения как когерентные состояния, определяемые формулами (8), (9), (14), (16), возникать у скалярной частицы, описываемой релятивистским волновым уравнением (1).

Диагональный матричный элемент от оператора (10) в обкладках когерентных состояний (16) дает

$$-2(n_1 + n_2 + 2) = 0\,, \tag{18}$$

т.е. ведет к противоречию, выражение (18) нереализуемо.

Для выражений (11), (12) и (17) соответствующий матричный элемент равен

$$-2(n_3 - n_4) = 0\,, \tag{19}$$

не противоречив. Выражение (19) способствует разрешению противоречия, возникающего в связи с (18).

Умножим уравнение (8) на $\Phi_2(\chi',\zeta')$, а уравнение (11) на $\Phi_1(\eta',\xi')$ и сложим. В результате получим уравнение:

$$\begin{gathered}(L_1 + L_2)\Phi_1(\eta',\xi')\Phi_2(\chi',\zeta') = \frac{\partial^2\Phi_1}{\partial\eta'^2}\Phi_2 + \frac{\partial^2\Phi_1}{\partial\xi'^2}\Phi_2 + \frac{\partial^2\Phi_2}{\partial\chi'^2}\Phi_1 - \frac{\partial^2\Phi_2}{\partial\zeta'^2}\Phi_1 - \\ -(\eta'^2 + \xi'^2 + \chi'^2 - \zeta'^2)\Phi_1\Phi_2 = 0.\end{gathered} \tag{20}$$

или

$$(L_1 + L_2)\Phi = \frac{\partial^2\Phi}{\partial\eta'^2} + \frac{\partial^2\Phi}{\partial\xi'^2} + \frac{\partial^2\Phi}{\partial\chi'^2} - \frac{\partial^2\Phi}{\partial\zeta'^2} - (\eta'^2 + \xi'^2 + \chi'^2 - \zeta'^2)\Phi = 0, \tag{21}$$

где $\Phi = \Phi_1\Phi_2$.

В результате мы получили инвариантное относительно преобразований SO(3.1) группы уравнение, очевидным образом связанное с уравнением (1).

Для него, записанного в терминах операторов рождения и уничтожения и чисел заполнения, справедливо

$$a_1^+a_1^- + a_2^+a_2^- + b_1^+b_1^- - b_2^+b_2^- + 2 = n_1 + n_2 + n_3 - n_4 + 2 = 0\,. \tag{22}$$

Указанное условие аналогично условию того, что частица, описываемая уравнением (1), лежит на массовой оболочке, и очевидно, что данное выражение не противоречиво.

Координатные и импульсные представления когерентных состояний в новых переменных

Решение уравнения (21) в координатном $(\eta',\xi',\chi',\zeta')$ представлении при условии (22) дается выражением:

$$\left\langle \eta',\xi',\chi',\zeta' \| \alpha_1,\alpha_2,\beta_1,\beta_2 \right\rangle = \Phi(\eta',\xi',\chi',\zeta') = \frac{1}{\pi} e^{i(\alpha'_1\alpha''_1+\alpha'_2\alpha''_2+\beta'_1\beta''_1-\beta'_2\beta''_2)} \times$$
$$\times e^{i\sqrt{2}(\alpha''_1\eta'+\alpha''_2\xi'+\beta''_1\chi'-\beta''_2\zeta')} \times e^{-\frac{1}{2}[(\eta'-\sqrt{2}\alpha'_1)^2+(\xi'-\sqrt{2}\alpha'_2)^2+(\chi'-\sqrt{2}\beta'_1)^2-(\zeta'-\sqrt{2}\beta'_2)^2}. \tag{23}$$

Здесь $\alpha_1 = \alpha'_1 + i\alpha''_1, \alpha_2 = \alpha'_2 + i\alpha''_2, \beta_1 = \beta'_1 + i\beta''_1, \beta_2 = \beta'_2 + i\beta''_2$.

Импульсное представление в смысле операторов $i\partial/\partial\eta', i\partial/\partial\xi', i\partial/\partial\chi', i\partial/\partial\zeta'$ с собственными значениями $p_{\eta'}, p_{\xi'}, p_{\chi'}, p_{\zeta'}$ имеет вид:

$$\left\langle p_{\eta'}, p_{\xi'}, p_{\chi'}, p_{\zeta'} \| \alpha_1,\alpha_2,\beta_1,\beta_2 \right\rangle = \Phi(p_{\eta'}, p_{\xi'}, p_{\chi'}, p_{\zeta'}) = \frac{1}{\pi} e^{-i(\alpha'_1\alpha''_1+\alpha'_2\alpha''_2+\beta'_1\beta''_1-\beta'_2\beta''_2)} \times$$
$$\times e^{-i\sqrt{2}(\alpha'_1 p_{\eta'}+\alpha'_2 p_{\xi'}+\beta'_1 p_{\chi'}-\beta'_2 p_{\zeta'})} \times e^{-\frac{1}{2}[(p_{\eta'}-\sqrt{2}\alpha''_1)^2+(p_{\xi'}-\sqrt{2}\alpha''_2)^2+(p_{\chi'}-\sqrt{2}\beta''_1)^2-(p_{\zeta'}-\sqrt{2}\beta''_2)^2}. \tag{24}$$

Следует отметить, что большими поперечные возбуждения (большие n_1, n_2) могут быть только при большом n_4. Такая картина находится в соответствии с тем, что значительное количество поперечных возбуждений, отождествляемых с партонами, может возникнуть только при больших энергиях.

Заключение

В работе показано, что, совершая преобразования типа Леви-Чивита в уравнении Клейна – Фока и разделяя переменные на «поперечные» и «продольные», как это диктуется новыми введенными переменными, возможно определение когерентных состояний стандартным образом.

Найдены решения уравнения Клейна – Фока в виде координатных и импульсных представлений данных когерентных состояний во введенных переменных. «Поперечные» переменные интерпретируются как партонные степени свободы адрона, описываемого скалярным уравнением Клейна – Фока.

Установлено, что в данном подходе число партонов зависит от энергии и продольных степеней свободы.

Важно отметить, что уравнение (21) взаимноинвариантно, или, как следует из выражения (22), система инвариантна относительно преобразований группы SU(3.1) [6].

Автор благодарит участников семинара лаборатории теоретической физики за полезное обсуждение работы.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. On describing quark in external gluon field of magnetic type / Y. A. Kurochkin [et al.] // Proceeding of the National Academy of Sciences of Belarus. Physics and Mathematics Series. – 2017. – № 4. – P. 39–43.

2. Hadron as Coherent State on the Horosphere of the Lobachevsky Momentum Space / Y. Kurochkin [et al.] // Письма в ЭЧАЯ. – 2016. – Т. 13, № 3 (201). – С. 454–460.

3. Переломов, А. М. Обобщенные когерентные состояния и их применения / А. М. Переломов. – М. : Наука, 1987. – 268 с.

4. Точные решения релятивистских волновых уравнений / В. Г. Богров [и др.]. – Новосибирск : Наука, 1982. – 143 с.

5. Coulomb-Oscillator duality in space of constant curvature / E. G. Kalnins [et al.] // J. Math. Phys. – 2000. – Vol. 41, № 5. – P. 2629–2657.

6. Курочкин, Ю. А. О параметризации преобразований комплексной группы Лоренца для пространств с вещественной метрикой / Ю. А. Курочкин, Л. М. Томильчик // Докл. Нац. акад наук Беларуси. – 2018. – Т. 62, № 2. – С. 159–163.

Рукапіс паступіў у рэдакцыю 28.02.2019

Kurochkin Yu.A. **The Coherent States which Connected with Klein – Fock Equation**

In this paper it is shown that by performing Lévy-Civita transformations in the Klein – Fock equation and dividing the variables into «transverse» and «longitudinal» variables, it is possible to define coherent states in a standard way. Solutions of the transformed four-dimensional equation are found in the form of coordinate and momentum representations of these coherent states. The «transverse» variables are interpreted as the parton degrees of freedom of the hadron described by the scalar Klein – Fock equation. It is established that in this approach the number of partons depends on the energy and longitudinal degrees of freedom.