УДК 517.925.7

Е.В. Грицук[1], И.И. Семенцов[2]

[1]канд. физ.-мат. наук, доц. каф. математического анализа,
дифференциальных уравнений и их приложений
Брестского государственного университета имени А.С. Пушкина
[2]магистрант физико-математического факультета
Брестского государственного университета имени А.С. Пушкина
e-mail: sementsovivan@yandex.by[2]

О ЛОКАЛЬНЫХ СВОЙСТВАХ РЕШЕНИЙ АНАЛОГА ПЕРВОГО УРАВНЕНИЯ ПЕНЛЕВЕ ДЕСЯТОГО ПОРЯДКА

Исследуется решение уравнения десятого порядка иерархии уравнений K_1 в окрестности подвижного полюса. Методом резонансов найдены номера произвольных коэффициентов рядов Лорана, и с помощью системы компьютерной алгебры Maple подтверждено их соответствие числу положительных резонансов.

Введение

Уравнения Пенлеве получены в результате исследования обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка на отсутствие подвижных критических точек (свойство Пенлеве) [1–7]. Для обыкновенных дифференциальных уравнений порядков 3 и выше такое исследование не завершено. В работе [8] для уравнения восьмого порядка из иерархии K_1 рассмотрены свойства решения в окрестности подвижного полюса.

В настоящей работе исследуются локальные свойства решений уравнений иерархии K_1 для $n = 4$ в окрестности подвижного полюса.

1. Уравнения иерархии K_1

Иерархия уравнений K_1 представляется [9] в виде

$$h_n(w) = z, \tag{K_1}$$

где последовательность $h_n(w)$ удовлетворяет рекурсивному соотношению

$$h_{n+2}(w) = \mathrm{J}(w)\Omega(w)h_n(w), \tag{1}$$

$$h_0(w) = 1,\ h_1(w) = w'' + 4w^2,\ n = 0, 1, 2, ...,$$
$$\Omega(w) = D^3 + 2wD + w_z,$$
$$\mathrm{J}(w) = D^3 + 3(wD + Dw) + 2(D^2wD^{-1} + D^{-1}wD^2) + 8(w^2D^{-1} + D^{-1}w^2),$$
$$D = \frac{d}{dz},\ D^{-1} = \int(\cdot)dz.$$

Рекуррентную формулу из (1) можно представить в виде:

$$h_n(w) = \left(\mathrm{J}(w)\Omega(w)\right)^{\frac{n-s}{2}} h_s(w),\ n = 2, 3, 4, ...,$$

где $s = 0$ при n – четном, $s = 1$ при n – нечетном.

Для $n = 2$, $n = 3$ и $n = 4$ соответственно получаем:

$$w^{(4)} + \frac{32}{3}w^3 + 12ww'' + 6(w')^2 - z = 0, \tag{${}_4K_1$}$$

$$\begin{gathered} w^{(8)} + \frac{256}{3}w^5 + \frac{1120}{3}w^3w'' + 560w^2(w')^2 + 136w^2w^{(4)} + 554ww'w^{(3)} + 84\left(w^{(3)}\right)^2 + \\ + 134w''w^{(4)} + 60w'w^{(5)} + 20ww^{(6)} + 396w''(w')^2 + 408w(w'')^2 - z = 0, \end{gathered} \tag{${}_8K_1$}$$

$$\begin{gathered} w^{(10)} + \frac{2240}{9}w^6 + 1680w^4w'' + \frac{2576}{3}w^3w^{(4)} + 3360w^3(w')^2 + 5152w^2w^{(3)}w' + \\ +3864w^2(w'')^2 + 212w^2w^{(6)} + 8596ww''(w')^2 + 1686w\left(w^{(3)}\right)^2 + 2746ww^{(4)}w'' + \\ +1272ww^{(5)}w' + 24ww^{(8)} + +861(w')^4 + \frac{3821}{3}(w'')^3 + 302\left(w^{(4)}\right)^2 + 5384w^{(3)}w''w' + \\ +1563w^{(4)}(w')^2 + 495w^{(5)}w^{(3)} + 277w^{(6)}w'' + 96w^{(7)}w' - z = 0. \end{gathered} \tag{${}_{10}K_1$}$$

$$\begin{gathered} w^{(14)} + 19712/9\,w^8 + 256256/9\,w^6w'' + 256256/3\,w^5(w')^2 + 68992/3\,w^5w^{(4)} + \\ +172480w^4(w'')^2 + 689920/3\,w^4w^{(3)}w' + 31328/3\,w^4w^{(6)} + 810656w^3(w')^2w'' + \\ +125312w^3w'w^{(5)} + 800624/3\,w^3w''w^{(4)} + 162448w^3(w^{(3)})^2 + 8272/3\,w^3w^{(8)} + \\ +263032w^2(w')^4 + 498696w^2(w')^2w^{(4)} + 1716352w^2w'w''w^{(3)} + \\ +1217656/3\,w^2(w'')^3 + 92488w^2w''w^{(6)} + 33088w^2w'w^{(7)} + 161656w^2w^{(3)}w^{(5)} + \\ +412w^2w^{(10)} + 98120w^2(w^{(4)})^2 + 1529528w(w')^2(w'')^2 + 117348w(w')^2w^{(6)} + \\ +741664w(w')^3w^{(3)} + 847000ww'w^{(3)}w^{(4)} + 564168ww'w''w^{(5)} + \\ +4120ww'w^{(9)} + 583748w(w'')^2w^{(4)} + 720676ww''(w''')^2 + 31122w(w^{(5)})^2 + \\ +14382ww''w^{(8)} + 32808ww^{(3)}w^{(7)} + 53256ww^{(4)}w^{(6)} + 32ww^{(12)} + \\ +322014(w')^4w'' + 120428(w')^3w^{(5)} + 748374(w')^2w''w^{(4)} + 470624(w')^2(w''')^2 + \\ +9201(w')^2w^{(8)} + 1293952w'(w'')^2w''' + 56976w'w''w^{(7)} + 114310w'w'''w^{(6)} + \\ +160146w'w^{(4)}w^{(5)} + 192w'w^{(11)} + 452023/3\,(w'')^4 + 77774(w'')^2w^{(6)} + \\ +269538w''w'''w^{(5)} + 161765w''(w^{(4)})^2 + 807w''w^{(10)} + 199920(w''')^2w^{(4)} + \\ +2275w'''w^{(9)} + 4655w^{(4)}w^{(8)} + 7082w^{(5)}w^{(7)} + 4071(w^{(6)})^2 - z = 0. \end{gathered} \tag{${}_{14}K_1$}$$

2. Порядок подвижного полюса решения уравнения (${}_{10}K_1$)

Лемма. *Если решение уравнения* (${}_{10}K_1$) *имеет подвижный полюс, то только второго порядка*.

Доказательство. Для определения порядка q подвижного полюса в уравнении (${}_{10}K_1$) произведем замену $w \sim c_0(z - z_0)^{-q}$. Ведущими членами уравнения (${}_{10}K_1$) являются w^6, а также все остальные слагаемые, кроме z.

В первом случае имеем условие $-q - 10 = -6q$ или $-5q = -10$, т.е. $q = 2$.

Во втором случае $-q - 10 = -5q - 2$ или $-q - 10 = -4q - 4$, или $-q - 10 = -3q - 6$ или $-q - 10 = -2q - 8$, т.е. $q = 2$.

С помощью подстановки $w \sim c_0(z - z_0)^{-2}$ в уравнение (${}_{10}K_1$) получим условие на коэффициент c_0

$$\prod_{j=0}^{1}\left(c_0 + (9j^2 + 12j + 3)/2\right)\left(c_0 + (36j^2 + 48j + 15)/2\right)\left(c_0 + 18j^2 + 6j\right) = 0. \tag{2}$$

Очевидно, что в (2) есть $c_0 \neq 0$. Лемма доказана.

3. Исследование решения уравнения ($_{10}K_1$) в окрестности подвижного полюса

Применим метод резонансов [10; 11] для определения номеров коэффициентов c_j, которые, возможно, являются произвольными параметрами в разложении

$$w=\sum_{j=0}^{\infty}c_j t^{j-2},$$

где $t = z - z_0$, решения, в окрестности подвижного полюса z_0, $z_0 \in \mathbb{C}$.

Произведем в уравнении ($_{10}K_1$) замену $w \sim c_0 t^{-2} + \beta t^{r-2}$, тогда при βt^{r-12} выделяем резонансный многочлен $R_{10}(c_0, r)$. Для первого типа корней из (2) $c_0 = -3/2$, получаем резонансный многочлен

$$R_{10}(r, c_0) = (r+1)(r-3)(r-4)(r-5)(r-6)(r-7)(r-8)(r-9)(r-10)(r-14). \tag{3}$$

Для второго типа $c_0 = -15/2$, получаем резонансный многочлен

$$R_{10}(r, c_0) = (r+1)(r+5)(r-2)(r-3)(r-6)(r-7)(r-10)(r-11)(r-14)(r-18). \tag{4}$$

Для $c_0 = -12$, получаем резонансный многочлен

$$R_{10}(r, c_0) = (r+1)(r+2)(r+7)(r-3)(r-4)(r-9)(r-10)(r-14)(r-15)(r-20). \tag{5}$$

Для $c_0 = -24$, получаем резонансный многочлен

$$R_{10}(r, c_0) = (r+1)(r+4)(r+5)(r+11)(r-3)(r-10)(r-14)(r-17)(r-18)(r-24). \tag{6}$$

Для $c_0 = -99/2$, получаем резонансный многочлен

$$R_{10}(r, c_0) = (r+1)(r+5)(r+7)(r+11)(r+17)(r-14)(r-18)(r-20)(r-24)\,(r-30). \tag{7}$$

Можно убедиться, что корни каждого из многочленов (3) – (7) целые и однократные.

4. Исследование решения уравнения иерархии K_1, при $n = 4$, в окрестности подвижного полюса

В окрестности точки z_0 уравнение иерархии K_1, при $n = 4$, имеет вид

$$\begin{gathered}
w^{(10)}+\frac{2240}{9}w^6+1680w^4w''+\frac{2576}{3}w^3w^{(4)}+3360w^3\left(w'\right)^2+5152w^2w^{(3)}w'+\\
+3864w^2\left(w''\right)^2+212w^2w^{(6)}+8596ww''\left(w'\right)^2+1686w\left(w^{(3)}\right)^2+2746ww^{(4)}w''+\\
+1272ww^{(5)}w'+24ww^{(8)}++861\left(w'\right)^4+\frac{3821}{3}\left(w''\right)^3+302\left(w^{(4)}\right)^2+5384w^{(3)}w''w'+\\
+1563w^{(4)}\left(w'\right)^2+495w^{(5)}w^{(3)}+277w^{(6)}w''+96w^{(7)}w'-t-z_0=0,\ \text{где}\ t=z-z_0.
\end{gathered} \tag{8}$$

Рассмотрим первый случай $c_0 = -3/2$. Из формулы (3) имеем один отрицательный резонанс $r_1 = -1$ и девять положительных резонансов $r_2 = 3$, $r_3 = 4$, $r_4 = 5$, $r_5 = 6$, $r_6 = 7$, $r_7 = 8$, $r_8 = 9$, $r_9 = 10$, $r_{10} = 14$. Формальный ряд, удовлетворяющий уравнению (8), имеет вид:

$$w=-\frac{3}{2}t^{-2}+h_1t^1+h_2t^2+h_3t^3+h_4t^4+h_5t^5+h_6t^6+h_7t^7+h_8t^8+c_{11}t^9+c_{12}t^{10}+$$
$$+c_{13}t^{11}+h_9t^{12}+c_{15}t^{13}+\sum_{j=16}^{\infty}c_jt^{j-2}, \tag{9}$$

где $h_1, h_2, \dots, h_9$, – произвольные параметры, $c_1=0$, $c_2=0$,

$$c_{11}=-\frac{13}{1152}h_1^2h_3-\frac{5}{36}h_2h_5-\frac{53}{336}h_1h_6-\frac{41}{320}h_3h_4-\frac{11}{864}h_1h_2^2,$$

$$c_{12}=-\frac{137}{54432}h_2^3-\frac{1}{7}h_1h_7-\frac{11}{105}h_3h_5-\frac{29}{576}h_4^2-\frac{223}{20160}h_1^2h_4-\frac{1}{9434880}z_0-$$
$$-\frac{47}{2520}h_1h_2h_3-\frac{19}{168}h_2h_6-\frac{1}{11520}h_1^4,$$

$$c_{13}=-\frac{1}{25401600}-\frac{173}{12600}h_1h_2h_4-\frac{1}{8}h_8h_1-\frac{167}{30240}h_2^2h_3-\frac{523}{6300}h_4h_5-\frac{11}{1260}h_1^2h_5-$$
$$-\frac{11}{1680}h_1h_3^2-\frac{171}{1960}h_6h_3-\frac{23}{45360}h_1^3h_2-\frac{7}{72}h_2h_7,$$

$$c_{15}=-\frac{1531}{25344}h_7h_4+\frac{1}{87859200}h_1z_0+\frac{2911}{1382400}h_1^2h_3h_2+\frac{39437}{45619200}h_1^3h_4-\frac{431}{7392}h_6h_5-$$
$$-\frac{251}{3840}h_8h_3+\frac{1313}{88704}h_1h_6h_2+\frac{2825}{2737152}h_1h_2^3+\frac{1933}{633600}h_1h_3h_5-\frac{227}{253440}h_3^3+$$
$$+\frac{445}{50688}h_1^2h_7+\frac{13}{1782}h_2^2h_5+\frac{1061}{182476800}h_1^5+\frac{5969}{1520640}h_3h_4h_2+\frac{7373}{5068800}h_1h_4^2.$$

Коэффициенты $c_j, j>15$ однозначно определяются через произвольные параметры z_0, h_i, $i=1, 2, \dots, 9$. В силу теоремы 2 [12] ряд (9) является сходящимся в области $0<|z-z_0|<\rho$, $\rho>0$.

Рассмотрим второй случай: $c_0=-15/2$. Из формулы (4) имеем два отрицательных резонанса $r_1=-1$, $r_2=-5$ и восемь положительных: $r_3=2$, $r_4=3$, $r_5=6$, $r_6=7$, $r_7=10$, $r_8=11$, $r_9=14$, $r_{10}=18$. Формальный ряд, удовлетворяющий уравнению (8), имеет вид:

$$w=-\frac{15}{2}t^{-2}+h_1+h_2t^1+c_4t^2+c_5t^3+h_3t^4+h_4t^5+c_8t^6+c_9t^7+h_5t^8+h_6t^9+c_{12}t^{10}+$$
$$+c_{13}t^{11}+h_7t^{12}+c_{15}t^{13}+c_{16}t^{14}+c_{17}t^{15}+h_8t^{16}+c_{19}t^{17}+\sum_{j=20}^{\infty}c_jt^{j-2}, \tag{10}$$

где $h_1, h_2, \dots, h_8$ – произвольные параметры, $c_1=0$,

$$c_4=-\frac{1}{8}h_1^2,\ c_5=\frac{1}{3}h_1h_2,\qquad c_8=\frac{7}{24}h_2^2h_1-\frac{259}{180}h_1h_3-\frac{1603}{10368}h_1^4,$$

$$c_9=\frac{19}{63}h_2^3-\frac{86}{105}h_2h_3-\frac{8}{21}h_1h_4-\frac{59}{378}h_1^3h_2,$$

$$c_{12}=\frac{48301}{550800}h_1^3h_3+\frac{1}{14320800}z_0-\frac{849}{47600}h_2^2h_1^3+\frac{671}{4200}h_2^2h_3-\frac{821}{16800}h_2^4-\frac{5489}{30600}h_3^2-$$
$$-\frac{451}{1020}h_1h_5+\frac{7631053}{634521600}h_1^6-\frac{219}{2380}h_2h_1h_4,$$

$$c_{13} = -\frac{8693}{232848} h_1^2 h_2^3 + \frac{305}{43659} h_1^3 h_4 + \frac{55603}{3048192} h_1^5 h_2 - \frac{46}{315} h_4 h_3 - \frac{2}{693} h_2^2 h_4 + \frac{1}{34927200} -$$
$$-\frac{1}{7} h_5 h_2 - \frac{109}{385} h_1 h_6 + \frac{6751}{52920} h_1^2 h_2 h_3,$$
$$c_{15} = \frac{113}{2640} h_6 h_1^2 + \frac{11519}{146880} h_2 h_3^2 - \frac{859}{199264665600} h_1 + \frac{480943}{47900160} h_1^4 h_4 -$$
$$-\frac{378684497}{106599628800} h_2 h_1^6 - \frac{317}{8640} h_3 h_2^3 - \frac{2066191}{185068800} h_1^3 h_2 h_3 - \frac{7}{916531200} h_2 z_0 -$$
$$-\frac{21169}{1615680} h_1 h_2^2 h_4 + \frac{29789987}{4071513600} h_2^3 h_1^3 + \frac{643}{172800} h_2^5 + + \frac{629}{4320} h_1 h_4 h_3 + \frac{107}{4080} h_1 h_2 h_5,$$
$$c_{16} = -\frac{211}{81048567600} h_2 - \frac{1361}{21420} h_3 h_5 - \frac{42851}{26218080} h_1^3 h_5 + \frac{47}{122700614400} h_1^2 z_0 +$$
$$+\frac{3611}{179928} h_4^2 h_1 - \frac{14077759}{262180800} h_1^2 h_3^2 + \frac{11}{1176} h_2^2 h_5 + \frac{2843}{49980} h_2 h_3 h_4 -$$
$$-\frac{6985652593}{10873162137600} h_1^8 + \frac{16591535377}{11099686348800} h_1^5 h_2^2 - \frac{151}{1428} h_1 h_7 +$$
$$+\frac{37629241}{2267092800} h_1^2 h_3 h_2^2 - \frac{8153}{1649340} h_2 h_1 h_6 - \frac{701}{38808} h_2^3 h_4 -$$
$$-\frac{21237809}{1797811200} h_1^5 h_3 + \frac{128808301}{14131545120} h_2 h_1^3 h_4 - \frac{50039291}{99752083200} h_1^2 h_2^4,$$
$$c_{17} = \frac{32429}{5301450} h_1^2 h_5 h_2 + \frac{12472013}{392931000} h_2^3 h_1 h_3 - \frac{8070283}{148440600} h_3^2 h_1 h_2 - \frac{247131659}{14574168000} h_1^4 h_2 h_3 -$$
$$-\frac{66786493}{17288964000} h_2^5 h_1 - \frac{932}{17325} h_6 h_3 + \frac{44797}{86306508288000} h_1^2 - \frac{12479}{13100095008000} z_0 h_1 h_2 +$$
$$+\frac{6568359029}{1511549424000} h_2^3 h_1^4 - -\frac{16081}{485100} h_1^2 h_4 h_3 - \frac{698}{571725} h_6 h_2^2 + \frac{38209051}{4898539800} h_2^2 h_1^2 h_4 -$$
$$-\frac{76}{1485} h_5 h_4 - \frac{3229}{686070} h_1^3 h_6 - \frac{72683}{23051952} h_1^5 h_4 - \frac{232}{3465} h_7 h_2 - \frac{104}{68607} h_4^2 h_2 -$$
$$-\frac{554498186773}{507880606464000} h_1^7 h_2,$$
$$c_{19} = -\frac{285319}{237124952064000} h_3 + \frac{17191}{7451136} h_2^4 h_4 - \frac{809}{70560} h_2^3 h_5 + \frac{4809585109543}{736765466443776000} h_1^8 h_2 -$$
$$-\frac{766826922511}{107444963856384000} h_1^5 h_2^3 + \frac{124819}{10281600} h_3^2 h_4 - \frac{1}{366612480} h_4 z_0 - \frac{13506542359}{36115954237440} h_1^6 h_4 +$$
$$+\frac{3950153591}{175563666432000} h_1^2 h_2^5 + \frac{30281}{4878720} h_1^4 h_6 - \frac{180401}{4127537627136000} h_1^3 + \frac{5603}{51073066598400} h_2^2 -$$
$$-\frac{1403626717}{7047419904000} h_1^5 h_2 h_3 + \frac{60596839829}{149229116467200} h_1^3 h_2^2 h_4 + \frac{1621876409}{3990083328000} h_1^2 h_2^3 h_3 +$$
$$+\frac{139594153}{23071910400} h_1^3 h_2 h_5 - \frac{140767783}{57001190400} h_1^3 h_3 h_4 - \frac{5410709543}{3230067456000} h_1^2 h_2 h_3^2 +$$
$$+\frac{2500889}{870851520} h_1 h_2 h_4^2 - \frac{5934493}{791683200} h_2^2 h_3 h_4 - \frac{893}{89760} h_1 h_2 h_7 + \frac{2061}{30800} h_1 h_3 h_6 +$$

$$+\frac{3391}{104720}h_1h_4h_5+\frac{16073}{428400}h_2h_3h_5-\frac{94847}{1461836242944000}h_1^2h_2z_0-\frac{1029521}{90713700}h_1h_2^2h_6.$$

Коэффициенты c_j, $j > 19$ однозначно определяются через произвольные параметры z_0, h_i, $i = 1, 2, \ldots, 8$. В силу теоремы 2 [12] ряд (10) является сходящимся в области $0 < |z - z_0| < \rho$, $\rho > 0$.

Рассмотрим третий случай: $c_0 = -12$. Из формулы (5) имеем три отрицательных резонанса $r_1 = -1$, $r_2 = -2$, $r_3 = -7$ и семь положительных: $r_4 = 3$, $r_5 = 4$, $r_6 = 9$, $r_7 = 10$, $r_8 = 14$, $r_9 = 15$, $r_{10} = 20$. Формальный ряд, удовлетворяющий уравнению (8), имеет вид:

$$\begin{aligned}w=&-12t^{-2}+h_1t^1+h_2t^2+c_6t^4+c_7t^5+c_8t^6+h_3t^7+h_4t^8+c_{11}t^9+c_{12}t^{10}+c_{13}t^{11}+\\&+h_5t^{12}+h_6t^{13}+c_{16}t^{14}+c_{17}t^{15}+c_{18}t^{16}+c_{19}t^{17}+h_7t^{18}+c_{21}t^{19}+\sum_{j=22}^{\infty}c_jt^{j-2},\end{aligned}\tag{11}$$

где $h_1, h_2, \ldots, h_7$ – произвольные параметры, $c_1 = c_2 = c_5 = 0$,

$$c_6=\frac{5}{32}h_1^2,\qquad c_7=\frac{2}{3}h_1h_2,\qquad c_8=\frac{469}{540}h_2^2,\qquad c_{11}=-\frac{11}{54}h_1h_2^2,$$

$$c_{12}=-\frac{311}{28672}h_1^4-\frac{1067}{34020}h_2^3-\frac{11}{56}h_1h_3-\frac{1}{71705088}z_0,$$

$$c_{13}=-\frac{233}{6480}h_1^3h_2-\frac{4}{25}h_1h_4-\frac{7}{180}h_2h_3-\frac{1}{63504000},$$

$$c_{16}=\frac{4261}{1161216}h_1^4h_2-\frac{47963}{1632960}h_2^4-\frac{1}{1440}h_1^2h_4-\frac{19}{504}h_1h_2h_3+\frac{5}{3504586176}h_2z_0+\frac{701}{387348998400}h_1,$$

$$c_{17}=\frac{1913}{738720}h_1^3h_2^2-\frac{448}{12825}h_1h_2h_4-\frac{499}{9720}h_2^2h_3-\frac{16}{171}h_1h_5+\frac{2101}{1694032704000}h_2,$$

$$\begin{aligned}c_{18}=&\frac{710382541}{6354173952000}h_1^6+\frac{171208651}{37231488000}h_1^2h_2^3+\frac{203309}{137894400}h_1^3h_3+\frac{9493}{65395040256000}h_1^2z_0-\\&-\frac{228533}{5130000}h_2^2h_4--\frac{29801}{399000}h_1h_6-\frac{1129}{17100}h_2h_5-\frac{3313}{136800}h_3^2,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}c_{19}=&\frac{15457}{38707200}h_1^5h_2+\frac{33781}{4082400}h_1h_2^4+\frac{11}{10800}h_1^3h_4+\frac{277}{40320}h_1^2h_2h_3+\frac{1457}{4205503411200}h_1h_2z_0+\\&+\frac{5507}{247903358976000}h_1^2-\frac{113}{2100}h_2h_6-\frac{43}{1050}h_3h_4,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}c_{21}=&-\frac{19746809}{8186882457600}h_1^7+\frac{7767377}{10704052800}h_1^3h_2^3+\frac{463557917}{1562950287360}h_1^4h_3+\frac{203521}{30834720}h_1h_3^2-\\&-\frac{513421}{174032142162278400}h_1^3z_0+\frac{218603}{17698500}h_1h_2^2h_4+\frac{12013}{3810240}h_2^3h_3-\frac{140383}{44049600}h_1^2h_6-\\&-\frac{1001}{58995}h_1h_2h_5+\frac{790379}{1987100361792000}h_2^2+\frac{11255}{25905901012992}h_3z_0.\end{aligned}$$

Коэффициенты c_j, $j > 21$ однозначно определяются через произвольные параметры z_0, h_i, $i = 1, 2, \ldots, 7$. В силу теоремы 2 [12] ряд (11) является сходящимся в области $0 < |z - z_0| < \rho$, $\rho > 0$.

Рассмотрим четвертый случай: $c_0 = -24$. Из формулы (6) имеем четыре отрицательных резонанса $r_1 = -1$, $r_2 = -4$, $r_3 = -5$, $r_4 = -11$ и шесть положительных: $r_5 = 3$,

$r_6 = 10$, $r_7 = 14$, $r_8 = 17$, $r_9 = 18$, $r_{10} = 24$. Формальный ряд, удовлетворяющий уравнению (8), имеет вид:

$$w = -24t^{-2} + h_1t^1 + c_6t^4 + c_9t^7 + h_2t^8 + c_{12}t^{10} + c_{13}t^{11} + h_3t^{12} + c_{15}t^{13} + c_{16}t^{14} + \\ + h_4t^{15} + h_5t^{16} + c_{19}t^{17} + c_{20}t^{18} + c_{21}t^{19} + c_{22}t^{20} + c_{23}t^{21} + h_6t^{22} + c_{25}t^{23} + \sum_{j=26}^{\infty} c_jt^{j-2}, \tag{12}$$

где $h_1, h_2, \ldots, h_6$ – произвольные параметры, $c_1 = \ldots = c_5 = c_7 = c_8 = c_{11} = 0$,

$$c_6 = \frac{265}{1496}h_1^2, \qquad c_9 = \frac{241}{1683}h_1^3, \qquad c_{12} = -\frac{1936091}{36622080}h_1^4 + \frac{1}{1054010880}z_0,$$

$$c_{13} = -\frac{4}{17}h_1h_2 + \frac{1}{678585600}, \; c_{15} = \frac{25762079}{3021321600}h_1^5 - \frac{7}{50065516800}h_1z_0,$$

$$c_{16} = \frac{4135}{80784}h_1^2h_2 - \frac{1}{7561382400}h_1, \qquad c_{19} = -\frac{8161}{686664}h_1^3h_2 - \frac{1117231}{72848172773376000}h_1^2,$$

$$c_{20} = -\frac{601057}{41738400}h_1^2h_3 - \frac{7673}{79050}h_1h_4 - \frac{2876}{118575}h_2^2,$$

$$c_{21} = \frac{60929439359}{279668633904000}h_1^7 - \frac{22147}{4634314562592000}h_1^3z_0 - \frac{4}{55}h_1h_5,$$

$$c_{22} = \frac{60682013}{19775923200}h_1^4h_2 - \frac{351889}{58828984860672000}h_1^3 - \frac{7}{212042188800}h_2z_0,$$

$$c_{23} = -\frac{126781}{32252400}h_1^3h_3 - \frac{1057499}{387028800}h_1^2h_4 + \frac{413248}{54425925}h_1h_2^2 - \frac{1}{22722336000}h_2,$$

$$c_{25} = -\frac{4603413313}{6933933072000}h_1^5h_2 + \frac{19244474137583}{8106541752294370344960000}h_1^4 + \\ + \frac{9847}{1110703490208000}h_1h_2z_0 - \frac{5647}{177965172158446632960000}z_0.$$

Коэффициенты c_j, $j > 25$ однозначно определяются через произвольные параметры z_0, h_i, $i = 1, 2, \ldots, 6$. В силу теоремы 2 [12] ряд (12) является сходящимся в области $0 < |z - z_0| < \rho$, $\rho > 0$.

Рассмотрим случай $c_0 = -99/2$. Из формулы (7) имеем пять отрицательных резонансов ($r_1 = -1$, $r_2 = -5$, $r_3 = -7$, $r_4 = -11$, $r_5 = -17$) и пять положительных ($r_6 = 14$, $r_7 = 18$, $r_8 = 20$, $r_9 = 24$, $r_{10} = 30$). Формальный ряд, удовлетворяющий уравнению (8), имеет вид:

$$w = -\frac{99}{2}t^{-2} + c_{12}t^{10} + c_{13}t^{11} + h_1t^{12} + h_2t^{16} + h_3t^{18} + h_4t^{22} + c_{25}t^{23} + c_{26}t^{24} + \\ + c_{27}t^{25} + c_{28}t^{26} + h_5t^{28} + c_{31}t^{29} + \sum_{j=32}^{\infty} c_jt^{j-2}, \tag{13}$$

где $h_1, h_2, \ldots, h_5$ – произвольные параметры, $c_1 = \ldots = c_{11} = c_{15} = c_{16} = c_{17} = c_{19} = c_{21} = c_{22} = c_{23} = c_{29} = 0$,

$$c_{12} = -\frac{1}{58075999488}z_0, \; c_{13} = -\frac{1}{23750496000}, \; c_{25} = -\frac{313}{94677471588293608734720000}z_0,$$

$$c_{26} = \frac{775}{1283858610997248}h_1z_0 - \frac{467}{15023495831792627773440000},$$

$$c_{27} = \frac{37657}{31537618624512000} h_1, \qquad c_{28} = -\frac{771}{64960} h_1^2, \qquad c_{31} = \frac{4691}{6880934972620800} h_2.$$

Коэффициенты c_j, $j > 31$ однозначно определяются через произвольные параметры z_0, h_i, $i = 1, 2, \ldots, 5$. В силу теоремы 2 [12] ряд (13) является сходящимся в области $0 < |z - z_0| < \rho$, $\rho > 0$.

Теорема 2. *Уравнению* (8) *иерархии* K_1, *при* $n = 4$, *удовлетворяют сходящиеся в области* $0 < |z - z_0| < \rho$, $\rho > 0$ *ряды вида* (9), (10), (11), (12) и (13).

Таким образом, для уравнения $({}_{10}K_1)$ выполняются необходимые условия наличия свойства Пенлеве.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Painlevé, P. Mémoire sur les équations différentielles dont l'intégrale générale est uniforme / P. Painlevé // Bull. Soc. Math. France. – 1900. – Vol. 28. – P. 201–261.

2. Painlevé, P. Sur les équations différentielles du second ordre et d'ordre superieur dont l'intégrale générale est uniforme / P. Painlevé // Acta Math. – 1902. – Vol. 25. – P. 1–85.

3. Gambier, B. Sur les équations différentielles du second ordre et du premier degre don't l'intégrale générale est a points critiques fixes / B. Gambier // Acta Math. – 1909. – Vol. 33. – P. 1–55.

4. Ince, E. L. Ordinary Differential Equations / E. L. Ince. – New York : Dover, 1956. – 719 p.

5. Голубев, В. В. Лекции по аналитической теории дифференциальных уравнений / В. В. Голубев. – М. ; Л. : ГИТТЛ, 1950. – 436 с.

6. Громак, В. И. Аналитические свойства решений уравнений Пенлеве / В. И. Громак, Н. А. Лукашевич. – Минск : Университетское, 1990. – 157 с.

7. Кудряшов, Н. А. Аналитическая теория нелинейных дифференциальных уравнений / Н. А. Кудряшов. – М. : Ин-т комплекс. исслед., 2004. – 360 с.

8. Грицук, Е. В. О локальных свойствах решений высших аналогов первого уравнения Пенлеве / Е. В. Грицук // Изв. НАН Беларуси. Сер. физ.-мат. наук. – 2011. – № 4. – С. 33−41.

9. Громак, В. И. О свойствах решений уравнений иерархии K2 / В. И. Громак // Дифференц. уравнения. – 2008. – Т. 44, № 2. – С. 172–180.

10. Ablowitz, M. J. A connection between nonlinear evolution equations and ordinary differential equations of P-type / M. J. Ablowitz, A. Ramani, H. Segur // J. Math. Phys. – 1980. – Vol. 21. – P. 715–721.

11. Абловиц, М. Солитоны и метод обратной задачи рассеяния / М. Абловиц, Х. Сигур. – М. : Мир, 1987. – 478 с.

12. Грицук, Е. В. К теории нелинейных дифференциальных уравнений со свойством Пенлеве / Е. В. Грицук, В. И. Громак // Дифференц. уравнения. – 2010. – № 10. – С. 1371–1380.

Рукапіс паступіў у рэдакцыю 27.03.2018

Gricuk E.V., Sementsov I.I. **On Local Properties of Solutions of the Analogue of the First Painlevé Equation of the Tenth Order**

In the article the solution of the tenth-order equation of the hierarchy of the equations K_1 in the vicinity of the mobile pole has been studied. By the method of resonances, the numbers of arbitrary coefficients of the Laurent series have been found and using the computer algebra system Maple their correspondence to number of positive resonances is confirmed.