УДК 519.65 + 517.548.5

А.П. Худяков[1], О.В. Матысик[2]

[1]канд. физ.-мат. наук, доц. каф. прикладной математики и информатики
Брестского государственного университета имени А.С. Пушкина
[2]канд. физ.-мат. наук, доц., зав. каф. прикладной математики и информатики
Брестского государственного университета имени А.С. Пушкина
e-mail: priclmath@brsu.brest.by

ФОРМУЛЫ ОБОБЩЕННОГО ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКОГО ИНТЕРПОЛИРОВАНИЯ ЭРМИТА – БИРКГОФА ДЛЯ ФУНКЦИЙ МАТРИЧНОГО АРГУМЕНТА*

Для функций матричного аргумента построены обобщенные тригонометрические интерполяционные многочлены Эрмита – Биркгофа. Одна из интерполяционных формул получена для целых функций матричной переменной. Во второй формуле дифференциальный оператор, значение которого входит в ее структуру, задан посредством дифференциалов Гато. Доказаны теоремы о выполнении интерполяционных условий. Построен иллюстрационный пример, в котором сравнивается точность приближения конкретной функции матричного аргумента интерполяционными многочленами Эрмита – Биркгофа разных степеней.

Введение

В теории интерполирования функций скалярных аргументов строятся интерполяционные многочлены различных видов относительно произвольных чебышевских систем функций и их многих частных случаев. Такого вида интерполяционные формулы также находят применение в ряде областей математики и ее приложениях.

В данной работе построены интерполяционные тригонометрические матричные многочлены эрмитова типа. Такого вида формулы содержат кроме значений интерполируемой функции, также и значения ее производных во всех или только в отдельных узлах интерполирования. При построении обобщенных вариантов этих формул требуется совпадение заданных в узлах значений дифференциальных операторов интерполяционного полинома и интерполируемой функции. Ряд таких формул для функций скалярного аргумента получен и исследован в [1; 2].

1. Интерполяционная формула для целых функций

В [1] для 2π-периодической функции $f(t)$, $t \in \mathbb{R}$ построен обобщенный тригонометрический интерполяционный многочлен Эрмита – Биркгофа

$$T_{n+1}(t) = H_n(t) + \frac{2^{2n+1}}{(2n+1)!} \frac{\Omega_{n+1}(t) L_{2n+1}(f; t_j)}{\cos \frac{1}{2}\left((2n+1)t_j - \sum_{k=0}^{2n} t_k \right)}, \tag{1}$$

где $H_n(t) = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{2n} \frac{l_n(t)}{\sin \frac{1}{2}(t - t_k) l_n'(t_k)} f(t_k)$, $l_n(t) = \sin \frac{1}{2}(t - t_0) \sin \frac{1}{2}(t - t_1) \cdots \sin \frac{1}{2}(t - t_{2n})$,

Работа выполнена в рамках темы «Приближённые методы интерполяционного и других типов для функций скалярного аргумента, функций матричного аргумента, а также операторов, заданных в функциональных пространствах, и их приложения» (зарегистрирована в БелИСА 25.04.2015 № ГР 20150517).

$$\Omega_{n+1}(t)=\cos\frac{1}{2}(t-t_j)l_n(t),\quad \cos\frac{1}{2}\left((2n+1)t_j-\sum_{k=0}^{2n}t_k\right)\neq 0,\quad 0=t_0<t_1<\cdots<t_{2n-1}<t_{2n}<2\pi,$$

а дифференциальный оператор $L_{2n+1}f(t)$ имеет вид

$$L_{2n+1}f(t)=(D^2+n^2)\cdots(D^2+1^2)Df(t),\quad D=\frac{d}{dt}.$$

Формула (1) удовлетворяет интерполяционным условиям

$$T_{n+1}(t_i)=f(t_i)\quad (i=\overline{0,2n});\ L_{2n+1}(T_{n+1};t_j)=L_{2n+1}(f;t_j).$$

Построим матричный вариант формулы (1). Пусть X – множество квадратных матриц, $F(z)$ – целая 2π-периодическая функция, $z\in\mathbb{C}$, также задана совокупность различных матричных узлов $A_k\in X$ $(k=0,1,...,2n)$. В этих точках известны значения $F(A_k)$ функции $F(A)$, $A\in X$. Кроме этого, в одном из узлов A_j известно значение $L_{2n+1}(F;A_j)\equiv L_{2n+1}F(A_j)$ дифференциального матричного оператора вида

$$L_{2n+1}F(A)=(D^2+n^2)\cdots(D^2+1^2)DF(z)\Big|_{z=A},\ D=\frac{d}{dz}.$$

Причем значение данного оператора, примененного к функции вида $B_1F(A)B_2$, где B_1 и B_2 – некоторые фиксированные матрицы из множества X, вычисляется по правилу

$$L_{2n+1}(B_1F(A)B_2;A)=B_1L_{2n+1}F(A)B_2.$$

Далее указан тригонометрический полином $T_{n+1}(A)$ степени $n+1$, для которого выполняются условия

$$T_{n+1}(A_i)=F(A_i)\quad (i=\overline{0,2n});\quad L_{2n+1}(T_{n+1};A_j)=L_{2n+1}(F;A_j).\tag{2}$$

Теорема 1. *Тригонометрический многочлен*

$$T_{n+1}(F;A)=H_n(A)+\frac{2^{2n+1}}{(2n+1)!}\Omega_{n+1}(A)\cos^{-1}\frac{1}{2}\left((2n+1)A_j-\sum_{k=0}^{2n}A_k\right)L_{2n+1}(F;A_j),\tag{3}$$

где

$$H_n(A)=\sum_{k=0}^{2n}\Psi_k(A)\Psi_k^{-1}(A_k)F(A_k),\tag{4}$$

$$\Psi_k(A)=\sin\frac{A-A_0}{2}\cdots\sin\frac{A-A_{k-1}}{2}\sin\frac{A-A_{k+1}}{2}\cdots\sin\frac{A-A_{2n}}{2},$$

$$\Omega_{n+1}(A) = \cos\frac{A-A_j}{2}\prod_{k=0}^{2n}\sin\frac{A-A_k}{2},$$

матрицы $\sin\frac{A_k - A_\nu}{2}$ $(k \neq \nu)$ *и* $\cos\frac{1}{2}\left((2n+1)A_j - \sum_{k=0}^{2n} A_k\right)$ *обратимы, удовлетворяет первой группе условий* (2). *Если матрицы* $A_0, A_1, \ldots, A_{2n}$ *попарно перестановочны, то многочлен* (3) *удовлетворяет также второму условию* (2).

Доказательство. Очевидно, что $H_n(A_i) = F(A_i)$ при $i = 0,1,\ldots,2n.$ Так как в произведение $\Omega_{n+1}(A)$ входят множители вида $\sin\frac{A-A_i}{2}$ $(i = \overline{0,2n}),$ то $\Omega_{n+1}(A_i) = 0$ для данных значений *i*. Таким образом, первая группа условий (2) выполняется.

В силу попарной перестановочности матриц $A_0, A_1, \ldots, A_{2n},$ матричные многочлены $\Psi_k(A)$ $(k = 0,1,\ldots,2n),$ а следовательно и многочлен $H_n(A)$ при $A = A_j$ будут представимы в виде

$$H_n(A) = B_0 + \sum_{k=1}^{n}\left((\cos kA)B_{2k-1} + (\sin kA)B_{2k}\right), \tag{5}$$

где $B_0, B_1, \ldots, B_{2n}$ – соответствующие фиксированные матрицы из множества *X*.

Поскольку

$$L_{2n+1}\cos kA = L_{2n+1}\sin kA = 0 \quad (k = \overline{0,n}),$$

то и $L_{2n+1}H_n(A) = 0$ при $A = A_j.$

При этих же условиях попарной коммутативности матриц $A_0, A_1, \ldots, A_{2n}$ методом математической индукции можно показать, что при $A = A_j$ выполняется равенство

$$\Omega_{n+1}(A) = \tilde{T}_n(A) +$$

$$+\frac{(-1)^n}{2^{2n+1}}\left(-\sin\frac{1}{2}\left(A_j + \sum_{k=0}^{2n} A_k\right)\cos(n+1)A + \cos\frac{1}{2}\left(A_j + \sum_{k=0}^{2n} A_k\right)\sin(n+1)A\right), \tag{6}$$

где $\tilde{T}_n(A)$ – тригонометрический матричный многочлен степени не выше *n* вида (5).

Далее, так как

$$L_{2n+1}(\cos(n+1)A;\ A_j) = (-1)^{n+1}(2n+1)!\sin(n+1)A_j,$$

$$L_{2n+1}(\sin(n+1)A;\ A_j) = (-1)^{n}(2n+1)!\cos(n+1)A_j$$

и, кроме того, $L_{2n+1}\tilde{T}_n(A) = 0,$ то

$$L_{2n+1}(\Omega_{n+1}; A_j) = \frac{(2n+1)!}{2^{2n+1}} \left(\sin\frac{1}{2}\left(A_j + \sum_{k=0}^{2n} A_k \right) \sin(n+1)A_j + \right.$$

$$\left. + \cos\frac{1}{2}\left(A_j + \sum_{k=0}^{2n} A_k \right) \cos(n+1)A_j \right) = \frac{(2n+1)!}{2^{2n+1}} \cos\frac{1}{2}\left((2n+1)A_j - \sum_{k=0}^{2n} A_k \right).$$

Таким образом, получили, что второе равенство в (2) справедливо.

Теорема 1 доказана.

Замечание. *В данной теореме условие попарной перестановочности узлов можно заменить более слабым условием перестановочности матрицы* A_j *с каждым из узлов* $A_0, A_1, \ldots, A_{2n}$, *но тогда матрица* $\cos\frac{1}{2}\left((2n+1)A_j - \sum_{k=0}^{2n} A_k \right)$ *в формуле* (3) *заменится более громоздким выражением и доказательство теоремы значительно усложнится.*

2. Интерполяционная формула, в которой дифференциальный оператор задается посредством дифференциалов Гато

Пусть, как и ранее, X и Y – множества квадратных матриц, $F: X \to Y$ – матричная функция, дифференцируемая по Гато $2n+1$ раз в точке $A_j \in X$. Далее построим формулу, аналогичную (3), в которой оператор $L_{2n+1}F(A)$ будет задаваться посредством дифференциалов Гато от функции $F(A)$, $A \in X$.

Введем следующие обозначения:

$$\tilde{L}_1 F(A) \equiv \tilde{L}_1 F(A; H_1) \equiv \tilde{D}_{H_1} F(A) = \delta F[A; H_1], \quad \tilde{L}_3 F(A) \equiv \tilde{L}_3 F(A; H_3 H_2 H_1) =$$

$$= (\tilde{D}^2_{H_3 H_2} + H_3 H_2) \tilde{D}_{H_1} F(A) = \delta^3 F[A; H_3 H_2 H_1] + H_3 H_2 \delta F[A; H_1],$$

где $\delta F[A; H_1]$ – первый дифференциал Гато от $F(A)$ в точке A по направлению $H_1 \in X$, а $\delta^3 F[A; H_3 H_2 H_1]$ – дифференциал Гато третьего порядка от $F(A)$ в той же точке по направлениям $H_1, H_2, H_3 \in X$. Обозначим $\psi_0(A) = I$, где I – единичная матрица, $\varphi_n(A) = \sin nA$, $\psi_n(A) = \cos nA$, $n \geq 1$. Тогда если матрицы A и H из множества X перестановочны, то для дифференциалов Гато функций $\phi_n(A)$ и $\psi_n(A)$ по направлению H справедливы равенства $\delta\varphi_n[A; H] = n\psi_n(A)H$; $\delta\psi_n[A; H] = -n\varphi_n(A)H$. Легко убедиться, что если матрицы A, H_1, H_2, H_3 попарно перестановочны, то решением уравнения $\tilde{L}_3 F(A) = 0$ являются функции $F(A) = \phi_1(A)$ и $F(A) = \psi_1(A)$, а также любая матричная функция, не зависящая от A.

Аналогично рассмотрим дифференциально-матричный оператор общего вида

$$\tilde{L}_{2n+1} F(A) = \tilde{L}_{2n+1} F(A; H_{2n+1} H_{2n} \cdots H_1) =$$

$$= (\tilde{D}^2_{H_{2n+1} H_{2n}} + n^2 H_{2n+1} H_{2n}) \cdots (\tilde{D}^2_{H_5 H_4} + 2^2 H_5 H_4)(\tilde{D}^2_{H_3 H_2} + 1^2 H_3 H_2) \tilde{D}_{H_1} F(A), \qquad (7)$$

где $(\tilde{D}^2_{H_{2k+1}H_{2k}} + k^2 H_{2k+1}H_{2k})F_k(A) = \delta^2 F_k[A; H_{2k+1}H_{2k}] + k^2 H_{2k+1}H_{2k}F_k(A)$, $(k = 1, 2, \ldots, n)$, а функции $F_k(A)$ являются результатом применения оператора $\tilde{D}_{H_1}F(A)$ и $(k-1)$-кратного последовательного применения операторов, указанных в скобках выражения (7). Как и ранее, уравнение $\tilde{L}_{2n+1}F(A) = 0$ имеет решения $\psi_0(A) = I$, $\phi_k(A) = \sin kA$ и $\psi_k(A) = \cos kA$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$, при условии попарной перестановочности матриц $A, H_1, H_2, \ldots, H_{2n+1} \in X$.

Построим далее тригонометрический полином $\tilde{T}_{n+1}(A)$ степени $n+1$, для которого выполнялись бы условия

$$\tilde{T}_{n+1}(A_i) = F(A_i) \quad (i = \overline{0, 2n}); \ \tilde{L}_{2n+1}(\tilde{T}_{n+1}; A_j) = \tilde{L}_{2n+1}(F; A_j). \tag{8}$$

Теорема 2. *Тригонометрический многочлен*

$$\tilde{T}_{n+1}(F; A) = H_n(A) + \frac{2^{2n+1}}{(2n+1)!}\Omega_{n+1}(A)(H_{2n+1}H_{2n}\cdots H_1)^{-1} \times$$
$$\times \cos^{-1}\frac{1}{2}\left((2n+1)A_j - \sum_{k=0}^{2n} A_k\right)\tilde{L}_{2n+1}(F; A_j), \tag{9}$$

где $H_n(A)$ *– матричный многочлен* (4)*, а матрицы* $\cos\frac{1}{2}\left((2n+1)A_j - \sum_{k=0}^{2n} A_k\right)$ *и* $H_{2n+1}H_{2n}\cdots H_1$ *обратимы, удовлетворяет первой группе условий* (8)*. Если узлы* $A_0, A_1, \ldots, A_{2n}$ *и направления* $H_1, H_2, \ldots, H_{2n+1}$ *попарно перестановочны, то многочлен* (9) *удовлетворяет также второму условию* (8).

Доказательство. Из доказательства теоремы 1 и структуры многочлена (9) следует, что он удовлетворяет первой группе условий (8).

При условии попарной перестановочности матриц $A, A_0, A_1, \ldots, A_{2n}$ многочлены $H_n(A)$ и $\Omega_{n+1}(A)$ можно представить в виде (5) и (6) соответственно. Далее, так как матрица A_j перестановочна с направлениями $H_1, H_2, \ldots, H_{n+1}$, то при $\nu = 0, 1, \ldots, n+1$ и $k = 1, 2, \ldots, n$

$$\tilde{D}_{H_1}\psi_\nu(A)\Big|_{A=A_j} = \delta\psi_\nu[A_j; H_1] = -\nu\varphi_\nu(A_j)H_1,$$

$$\tilde{D}^2_{H_{2k+1}H_{2k}}\psi_\nu(A)\Big|_{A=A_j} = \delta^2\psi_\nu[A_j; H_{2k+1}H_{2k}] = -\nu^2\psi_\nu(A_j)H_{2k+1}H_{2k},$$

а при $\nu = 1, 2, \ldots, n+1$ и тех же значениях k

$$\tilde{D}_{H_1}\varphi_\nu(A)\Big|_{A=A_j} = \delta\varphi_\nu[A_j; H_1] = \nu\psi_\nu(A_j)H_1,$$

$$\tilde{D}^2_{H_{2k+1}H_{2k}}\varphi_\nu(A)\Big|_{A=A_j}=\delta^2\varphi_\nu[A_j;H_{2k+1}H_{2k}]=-\nu^2\varphi_\nu(A_j)H_{2k+1}H_{2k}.$$

Из данных равенств, с учетом попарной перестановочности матриц $A_j, H_1, H_2, \ldots, H_{n+1}$, следует, что $\tilde{L}_{2n+1}(\psi_0;A_j)=\tilde{L}_{2n+1}(\psi_k;A_j)=\tilde{L}_{2n+1}(\varphi_k;A_j)=0$ $(k=1,2,\ldots,n)$. Таким образом, в силу попарной перестановочности интерполяционных узлов и направлений $H_1, H_2, \ldots, H_{2n+1}$, и ввиду представления (5) будем иметь $\tilde{L}_{2n+1}(H_n;A_j)=0$.

Так как при $k=1,2,\ldots,n$ имеют место равенства

$$(\tilde{D}^2_{H_{2k+1}H_{2k}}+k^2H_{2k+1}H_{2k})\psi_{n+1}(A)\Big|_{A=A_j}=\delta^2\psi_{n+1}\left[A_j;H_{2k+1}H_{2k}\right]+$$

$$+k^2\psi_{n+1}(A_j)H_{2k+1}H_{2k}=-\left[(n+1)^2-k^2\right]\ \psi_{n+1}(A_j)H_{2k+1}H_{2k},$$

$$(\tilde{D}^2_{H_{2k+1}H_{2k}}+k^2H_{2k+1}H_{2k})\psi_{n+1}(A)\Big|_{A=A_j}=\delta^2\phi_{n+1}\left[A_j;H_{2k+1}H_{2k}\right]+$$

$$+k^2\phi_{n+1}(A_j)H_{2k+1}H_{2k}=-\left[(n+1)^2-k^2\right]\ \phi_{n+1}(A_j)H_{2k+1}H_{2k},$$

то будем соответственно иметь

$$\tilde{L}_{2n+1}(\psi_{n+1};A_j)=(-1)^{n+1}(2n+1)!\phi_{n+1}(A_j)H_{2n+1}\cdots H_2H_1,$$

$$\tilde{L}_{2n+1}(\phi_{n+1};A_j)=(-1)^{n}(2n+1)!\psi_{n+1}(A_j)H_{2n+1}\cdots H_2H_1.$$

Тогда, учитывая соотношение (6), получим

$$\tilde{L}_{2n+1}(\Omega_{n+1};A_j)=\frac{(2n+1)!}{2^{2n+1}}\left[\sin\frac{1}{2}\left(A_j+\sum_{k=0}^{2n}A_k\right)\sin(n+1)A_j+\cos\frac{1}{2}\left(A_j+\sum_{k=0}^{2n}A_k\right)\times\right.$$

$$\left.\times\cos(n+1)A_j\right]H_{2n+1}\cdots H_2H_1=\frac{(2n+1)!}{2^{2n+1}}\cos\frac{1}{2}\left((2n+1)A_j-\sum_{k=0}^{2n}A_k\right)H_{2n+1}\cdots H_2H_1.$$

Таким образом, очевидно, что второе равенство в (8) справедливо.

Теорема 2 доказана.

Следует отметить, что формула (3) является частным случаем многочлена (9), когда $F(z)$ является целой функцией и $H_1=H_2=\cdots=H_{2n+1}=I$.

Интерполяционные формулы аналогичного типа для функций матричного аргумента построены также в [3–7].

3. Пример. Для функции $F(A)=e^{\sin A}$ построим многочлен $T_2(A)=T_2(F;A)$ второй степени вида (3) в случае узлов

$$A_0 = \frac{\pi}{12}\begin{bmatrix} 4 & 5 \\ 6 & 3 \end{bmatrix}, \ A_1 = \frac{\pi}{72}\begin{bmatrix} 65 & 85 \\ 102 & 48 \end{bmatrix}, \ A_2 = \frac{\pi}{72}\begin{bmatrix} 131 & 115 \\ 138 & 108 \end{bmatrix}.$$

Данная функция в узлах интерполирования принимает значения

$$F(A_0) = \begin{bmatrix} 1{,}382 & 0{,}6462 \\ 0{,}775 & 1{,}253 \end{bmatrix}, \ F(A_1) = \begin{bmatrix} 0{,}8740 & 0{,}4214 \\ 0{,}5057 & 0{,}790 \end{bmatrix}, \ F(A_2) = \begin{bmatrix} 0{,}5441 & -0{,}1635 \\ -0{,}1962 & 0{,}5768 \end{bmatrix},$$

а значение дифференциального оператора $L_3F(A)$ в точке A_1 равно

$$L_3(F; A_1) = \begin{bmatrix} 0{,}08495 & 0{,}1109 \\ 0{,}1331 & 0{,}06277 \end{bmatrix}.$$

Здесь приводятся приближенные значения интерполируемой функции и соответствующих дифференциальных операторов с округлением их точных значений до последних указанных разрядов.

В этом случае интерполяционный многочлен $T_2(F; A)$ имеет вид

$$T_2(F; A) = H_1(A) + \Omega_2(A)B_3,$$

где

$$H_1(A) = \Psi_0(A)B_0 + \Psi_1(A)B_1 + \Psi_2(A)B_2,$$

$$\Psi_0(A) = \sin\frac{A - A_1}{2}\sin\frac{A - A_2}{2}, \ \Psi_1(A) = \sin\frac{A - A_0}{2}\sin\frac{A - A_2}{2},$$

$$\Psi_2(A) = \sin\frac{A - A_0}{2}\sin\frac{A - A_1}{2}, \ \Omega_2(A) = \cos\frac{A - A_1}{2}\prod_{k=0}^{2}\sin\frac{A - A_k}{2}.$$

Матрицы B_0, B_1, B_2, B_3 для данного конкретного случая будут такими

$$B_0 = \begin{bmatrix} -6{,}357 & 3{,}652 \\ 4{,}383 & -7{,}087 \end{bmatrix}, \ B_1 = -\begin{bmatrix} 0{,}4121 & 1{,}315 \\ 1{,}578 & 0{,}1491 \end{bmatrix},$$

$$B_2 = \begin{bmatrix} 4{,}801 & -5{,}308 \\ -6{,}370 & 5{,}862 \end{bmatrix}, \ B_3 = \begin{bmatrix} 0{,}06192 & 0{,}1993 \\ 0{,}2391 & 0{,}02206 \end{bmatrix}.$$

Фробениусовы нормы матриц погрешности приближения в средних точках $A_{01} = (A_0 + A_1)/2$ и $A_{12} = (A_1 + A_2)/2$ здесь принимают значения

$$\| F(A_{01}) - T_2(A_{01}) \|_2 = 0{,}03652, \ \| F(A_{12}) - T_2(A_{12}) \|_2 = 0{,}03107.$$

Для той же функции построим многочлен $T_3(A) = T_3(F; A)$ третьей степени в случае узлов

$$A_0=\frac{\pi}{15}\begin{bmatrix}5 & 2\\ 3 & 5\end{bmatrix},\ A_1=\frac{\pi}{45}\begin{bmatrix}24 & 4\\ 6 & 24\end{bmatrix},\ A_2=\frac{\pi}{45}\begin{bmatrix}45 & 26\\ 39 & 45\end{bmatrix},$$

$$A_3=\frac{\pi}{45}\begin{bmatrix}54 & 28\\ 42 & 54\end{bmatrix},\ A_4=\frac{\pi}{45}\begin{bmatrix}81 & 50\\ 75 & 81\end{bmatrix}.$$

Интерполируемая функция в узлах принимает значения

$$F(A_0)=\begin{bmatrix}2{,}191 & 0{,}4304\\ 0{,}6456 & 2{,}191\end{bmatrix},\ F(A_1)=\begin{bmatrix}2{,}554 & -0{,}07307\\ -0{,}1096 & 2{,}554\end{bmatrix},$$

$$F(A_2)=\begin{bmatrix}1{,}333 & -0{,}7194\\ -1{,}079 & 1{,}333\end{bmatrix},\ F(A_3)=\begin{bmatrix}1{,}778 & -0{,}7264\\ -1{,}090 & 1{,}778\end{bmatrix},\ F(A_4)=\begin{bmatrix}1{,}643 & -0{,}8381\\ -1{,}257 & 1{,}643\end{bmatrix},$$

а значение дифференциального оператора $L_5F(A)$ в точке A_2 равно

$$L_5(F;A_2)=\begin{bmatrix}4{,}717 & -1{,}457\\ -2{,}186 & 4{,}717\end{bmatrix}.$$

Интерполяционный многочлен $T_3(F;A)$ задается равенством

$$T_3(F;A)=H_2(A)+\Omega_3(A)B_5,$$

где $H_2(A)=\sum_{k=0}^{4}\Psi_k(A)B_k$, $\Omega_3(A)=\cos\frac{A-A_2}{2}\prod_{k=0}^{4}\sin\frac{A-A_k}{2}$,

$$\Psi_k(A)=\sin\frac{A-A_0}{2}\cdots\sin\frac{A-A_{k-1}}{2}\sin\frac{A-A_{k+1}}{2}\cdots\sin\frac{A-A_4}{2},\quad (k=0,1,\ldots,4).$$

Матрицы $B_0,B_1,\ldots,B_5$ в данном случае равны

$$B_0=\begin{bmatrix}56{,}94 & -62{,}59\\ -93{,}88 & 56{,}94\end{bmatrix},\ B_1=10\begin{bmatrix}3375 & -2754\\ -4131 & 3375\end{bmatrix},\ B_2=\begin{bmatrix}-542{,}2 & 444{,}1\\ 666{,}1 & -542{,}2\end{bmatrix},$$

$$B_3=100\begin{bmatrix}-3507 & 2863\\ 4295 & -3507\end{bmatrix},\ B_4=100\begin{bmatrix}3174 & -2592\\ -3888 & 3174\end{bmatrix},\ B_5=\begin{bmatrix}1{,}599 & -0{,}2864\\ -0{,}4296 & 1{,}599\end{bmatrix}.$$

Нормы матричных погрешностей приближения в средних точках $A_{k\,k+1}=(A_k+A_{k+1})/2$ $(k=0,1,2,3)$ для рассматриваемого случая равны

$$\| F(A_{01})-T_3(A_{01}) \|_2 = 0{,}007354,\quad \| F(A_{12})-T_3(A_{12}) \|_2 = 0{,}004345,$$

$$\| F(A_{23})-T_3(A_{23}) \|_2 = 0{,}001873,\quad \| F(A_{34})-T_3(A_{34}) \|_2 = 0{,}007293.$$

Погрешность приближения функции $F(A) = e^{\sin A}$ многочленом $T_3(A)$ в этих средних точках выше в сравнении с приближением многочленом $T_2(A)$.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Худяков, А. П. Интерполяционные многочлены типа Эрмита – Биркгофа относительно отдельных чебышевских систем функций / А. П. Худяков // Вес. НАНБ. Сер. фіз.-мат. навук. – 2010. – № 4. – С. 29–36.
2. Худяков, А. П. Явные формулы погрешностей для одного случая эрмитова интерполирования / А. П. Худяков // Вес. НАНБ. Сер. фіз.-мат. навук. – 2012. – № 1. – С. 13–21.
3. Yanovich, L. A. On one class of interpolating formulas for functions of matrix variables / L. A. Yanovich, A. P. Hudyakov // J. Numer. Appl. Math. – 2011. – № 2 (105). – P. 136–147.
4. Худяков, А. П. Обобщенные интерполяционные эрмитова типа многочлены для функций матричной переменной / А. П. Худяков, Л. А. Янович // Тр. Ин-та математики НАН Беларуси. – 2011. – Т. 19, № 2. – С. 103–114.
5. Худяков, А. П. Некоторые задачи теории интерполирования / А. П. Худяков. – Saarbrücken : LAP LAMBERT Academic Publishing, 2014. – 132 с.
6. Худяков, А. П. Обобщенные экспоненциальные интерполяционные многочлены Эрмита – Биркгофа для функций скалярного и матричного аргумента / А. П. Худяков // Весн. Брэсц. ун-та. Сер. 4, Фізіка. Матэматыка. – 2014. – № 1. – С. 98–109.
7. Янович, Л. А. Основы теории интерполирования функций матричных переменных / Л. А. Янович. – Минск : Беларус. навука, 2016. – 281 с.

Рукапіс паступіў у рэдакцыю 15.03.2017

Khudyakov A.P., Matysik O.V. **Formulas of the Generalized Trigonometric Interpolation of the Hermite – Birkhoff Type for the Functions of a Matrix Argument**

For the functions of the matrix argument, generalized trigonometric interpolation polynomials of Hermite –Birkhoff type are constructed. One of the interpolation formulas is obtained for entire functions of the matrix variable. In the second formula, the differential operator whose value is included in its structure is given by means of the Gateaux differentials. Theorems on the fulfillment of interpolation conditions are proved. An illustrative example in which the accuracy of the approximation of a specific function of the matrix argument by the Hermite – Birkhoff interpolation polynomials of different degrees compares is constructed.