УДК 512.542

***Д.Д. Даудов*[1]*, А.А. Трофимук*[2]**

[1]*магистрант специальности «Математика»*
Брестского государственного университета имени А.С. Пушкина
[2]*канд. физ.-мат. наук, доц. каф. алгебры, геометрии и математического моделирования*
Брестского государственного университета имени А.С. Пушкина

РАЗРЕШИМЫЕ ГРУППЫ, У КОТОРЫХ СИЛОВСКИЕ ПОДГРУППЫ КОФАКТОРОВ ИМЕЮТ МАЛЫЙ НОРМАЛЬНЫЙ РАНГ

Получены оценки производной длины и нильпотентной длины разрешимой группы G, у которой нормальный ранг силовских подгрупп кофакторов подгрупп ограничен. В частности, производная длина такой группы G не превышает 6, а нильпотентная длина группы G не превышает 4.

Введение

Все рассматриваемые группы в данной работе предполагаются конечными. Кофактором подгруппы H группы G называется фактор-группа $\overline{H^G} = H / core_G H$, где $core_G H$ – ядро подгруппы H в группе G, т.е. наибольшая нормальная подгруппа в G, содержащаяся в H.

Важным направлением теории групп является изучение групп, у которых определённая система подгрупп обладает заданными свойствами. В данной работе в качестве определяющей системы подгрупп мы выбрали силовские подгруппы кофакторов подгрупп группы, а в качестве определяющего свойства – цикличность, бицикличность, ограничение на нормальный ранг.

Напомним, что группу $G = AB$ называют бициклической, когда она является произведением двух циклических групп A и B.

В.С. Монахов [1] ввел понятие нормального ранга *p*-группы P следующим образом:

$$r_n(P) = \max_{X \lhd P} \log_p |X/\Phi(X)|.$$

Здесь $\Phi(X)$ – подгруппа Фраттини группы X, а запись $X \lhd P$ означает, что X – нормальная подгруппа группы P.

Очевидно, что для нечетного простого числа p класс *p*-групп, у которых нормальный ранг ≤ 2 шире, чем класс всех бициклических *p*-групп. Так, экстраспециальная группа S порядка 27 имеет нормальный ранг равный 2, но S не является бициклической. Кроме того, существуют бициклические 2-группы, которые имеют нормальный ранг 3. Так, группа

$$G = \langle a,b,c \mid a^2 = b^8 = c^2 = 1, [a,b] = c, [b,c] = b^4, [a,c] = 1 \rangle$$

является бициклической и $r_n(G) = 3$. При этом класс 2-групп, у которых нормальный ранг ≤ 3 шире, чем класс всех бициклических 2-групп.

Исследованию строения групп, у которых кофакторы подгрупп имеют малые порядки или порядки кофакторов подгрупп имеют известные канонические разложения, посвящены работы С.М. Евтуховой и В.С. Монахова [2; 3].

В работе [4] Говеньбинь изучил строение группы с циклическими кофакторами примарных подгрупп. Из основного результата этой работы вытекают оценки инвариантов групп (производной и нильпотентной длины), у которых порядки кофакторов подгрупп свободны от квадратов.

Естественным является развитие результатов, предложенных выше, за счёт исследования разрешимых групп с силовскими подгруппами кофакторов фиксированного нормального ранга. Доказана следующая теорема.

Теорема. Пусть G – разрешимая группа и $\left(\overline{H^G}\right)_p$ имеет нормальный ранг ≤ 2 для нечётного p и нормальный ранг ≤ 3 для $p = 2$, где H – произвольная подгруппа группы G. Тогда производная длина фактор-группы $G/\Phi(G)$ не превышает 6, а нильпотентная длина группы G не превышает 4. Здесь $(\overline{H^G})_p$ – силовская р-подгруппа кофактора $\overline{H^G}$.

Основные определения и вспомогательные результаты

В настоящей работе применяют термины с соответствующими обозначениями, принятые в монографиях [5; 6].

Прописными готическими буквами обозначаются классы групп, т.е. всякое множество групп, содержащее вместе с каждой своей группой и все группы, изоморфные ей.

Пусть $\mathfrak{F}$ – некоторая формация групп и G – группа. Тогда $G^{\mathfrak{F}}$ – $\mathfrak{F}$-корадикал группы G, т.е. пересечение всех тех нормальных подгрупп N из G, для которых $G/N \in \mathfrak{F}$. Произведение $\mathfrak{F}\mathfrak{H} = \left\{G \in \mathfrak{B} \,\middle|\, G^{\mathfrak{H}} \in \mathfrak{F}\right\}$ формаций $\mathfrak{F}$ и $\mathfrak{H}$ состоит из всех групп G, для которых $\mathfrak{H}$-корадикал принадлежит формации $\mathfrak{F}$. Как обычно, $\mathfrak{F}^2 = \mathfrak{F}\mathfrak{F}$. Формация $\mathfrak{F}$ называется насыщенной, если из условия $G/\Phi(G) \in \mathfrak{F}$ следует, что $G \in \mathfrak{F}$. Формации всех нильпотентных и абелевых групп обозначаются через $\mathfrak{N}$ и $\mathfrak{A}$ соответственно.

Лемма 1.1. Пусть $\mathfrak{F}$ – формация. Тогда $\mathfrak{N}\mathfrak{F}$ – насыщенная формация.

Доказательство. Согласно ([6], с. 36), произведение $\mathfrak{N}\mathfrak{F}$ является локальной формацией. Поскольку насыщенная формация и локальная формация – эквивалентные понятия, то $\mathfrak{N}\mathfrak{F}$ – насыщенная формация.

Лемма 1.2 (*[7], лемма 7*). Пусть G – разрешимая группа и k – натуральное число. Тогда и только тогда $G/\Phi(G) \in \mathfrak{A}^k$, когда $G \in \mathfrak{N}\mathfrak{A}^{k-1}$.

Лемма 1.3. (*[5], теорема 2.8*). Пусть G – группа и H – ее подгруппа. Тогда фактор-группа $N_G(H)/C_G(H)$ изоморфна подгруппе группы автоморфизмов $\mathrm{Aut}\, H$.

Лемма 1.4. (*[5], теорема 1.65*). Для каждой группы G и её силовской подгруппы P справедливы следующие утверждения:

1) если $K \triangleleft G$, то $P \cap K$ – силовская p-подгруппа в K;

2) если $K \triangleleft G$, то PK/K – силовская p-подгруппа в G/K.

Лемма 1.5. (*[7], лемма 13*).

1) Если H – разрешимая A_4-свободная подгруппа группы $GL(2, p)$, то H метабелева.

2) Если H – разрешимая A_4-свободная неприводимая подгруппа группы $GL(3, p)$, то $H \in \mathfrak{A}^4$.

Лемма 1.6. Пусть $\mathfrak{F}$ – насыщенная формация и G – разрешимая группа. Предположим, что G не принадлежит $\mathfrak{F}$, но $G/N \in \mathfrak{F}$ для всех неединичных нормальных подгрупп N группы G. Тогда G – примитивная группа.

Лемма 1.7. (*[5], теорема 4.42*). Пусть G – примитивная разрешимая группа с примитиватором M. Тогда справедливы следующие утверждения:

1) $\Phi(G) = 1$;

2) $F(G) = C_G(F(G)) = O_p(G)$ и $F(G)$ является элементарной абелевой группой порядка p^n для некоторого простого p;

3) в группе G существует единственная минимальная нормальная подгруппа, совпадающая с $F(G)$;

4) $G = [F(G)]M$ и $O_p(M) = 1$;

5) M изоморфна неприводимой подгруппе группы $GL(n, p)$.

Лемма 1.8. Пусть H – разрешимая неприводимая подгруппа группы $GL(4,2)$. Тогда производная длина подгруппы не превышает 5, а нильпотентная длина не превышает 3.

Доказательство. Заключение леммы проверяется элементарными вычислениями в компьютерной системе GAP.

Лемма 1.9. (*[5], следствие из теоремы 4.24*). В разрешимой группе с единичной подгруппой Фраттини подгруппа Фиттинга есть прямое произведение минимальных нормальных подгрупп.

Лемма 1.10. (*[7], лемма 12*). Пусть H – неприводимая разрешимая подгруппа группы $GL(n, p)$. Тогда:

1) если $n = 2$, то $H \in \mathfrak{N}^3 \cap \mathfrak{A}^4$;

2) если $n = 3$, то $H \in \mathfrak{N}^3 \cap \mathfrak{A}^5$.

Лемма 1.11. (*[5], лемма 2.33*). Если N_1 и N_2 нормальные погруппы группы G, то фактор-группа $G/(N_1 \cap N_2)$ изоморфна подгруппе, являющейся подпрямым произведением прямого произведения $(G/N_1) \times (G/N_2)$.

Лемма 1.12. (*[5], следствие, стр. 86*). Минимальная нормальная подгруппа группы либо элементарная абелева p-группа для некоторого простого p, либо является прямым произведением изоморфных простых неабелевых групп.

Лемма 1.13. (*[2], леммы 1, 2*).

1. Если H и K подгруппы группы G и $K \subseteq H$, то $\mathrm{core}_G K \le \mathrm{core}_G H$.

2. Пусть N – нормальная подгруппа группы G, H – подгруппа из G и $N \subseteq H$. Тогда $N \le \mathrm{core}_G H$ и $(\mathrm{core}_G H)/N \le \mathrm{core}_{G/N}(H/N)$.

Лемма 1.14. (*[1], лемма 8*). Если N – нормальная подгруппа p-группы P, то $r_n(P/N) \le r_n(P)$.

Доказательство теоремы

Выделим два вспомогательных результата.

Лемма 2.1. Пусть G – группа и H – произвольная подгруппа в G. Если все силовские подгруппы из $\overline{H^G}$ имеют нормальный ранг $\le k$, то для любой собственной подгруппы X группы G все силовские подгруппы из $\overline{H_1^X}$ имеют нормальный ранг $\le k$, где H_1 – произвольная подгруппа в X.

Доказательство. Так как $X < G$ и $H_1 \le X$, то $H_1 < G$. Из леммы 1.13 следует, что $\mathrm{core}_G H_1 \le \mathrm{core}_X H_1$. Тогда $\overline{H_1^X} = H_1/\mathrm{core}_X H_1 \cong (H_1/\mathrm{core}_G H_1)/(\mathrm{core}_X H_1/\mathrm{core}_G H_1)$. Пусть $\overline{S} = \mathrm{core}_X H_1/\mathrm{core}_G H_1$. Поэтому $\overline{H_1^X} \cong \overline{H_1^G}/\overline{S}$ и $(\overline{H_1^X})_p \cong (\overline{H_1^G})_p \overline{S}/\overline{S}$ по лемме 1.4. Так как по условию нормальный ранг $(\overline{H_1^G})_p$ не превышает k, то по лемме 1.14 нормальный ранг $(\overline{H_1^X})_p$ также не превышает k.

Лемма 2.2. Пусть G – разрешимая группа, H – произвольная подгруппа в G и $N \triangleleft G$. Если все силовские подгруппы в $\overline{H^G}$ имеют нормальный ранг $\leq k$, то в фактор-группе $\overline{G} = G/N$ группы G все силовские подгруппы из $\overline{\overline{H_1}^{\overline{G}}}$ имеют нормальный ранг $\leq k$, где $\overline{H_1}$ – произвольная подгруппа из $\overline{G}$.

Доказательство. Так как $\overline{H_1} = H_1/N \leq \overline{G} = G/N$, то $N \leq H_1 \leq G$. Тогда $N \leq \mathrm{core}_G H_1$ и $\mathrm{core}_G H_1 / N \leq \mathrm{core}_{\overline{G}} \overline{H_1}$ по лемме 1.13. Таким образом, получаем

$$\overline{\overline{H_1}^{\overline{G}}} = \overline{H_1} / \mathrm{core}_{\overline{G}} \overline{H_1} \cong (H_1/N)/(\mathrm{core}_G H_1/N) \cong H_1 / \mathrm{core}_G H_1 = \overline{H_1^G}.$$

Очевидно, что $\left(\overline{\overline{H_1}^{\overline{G}}}\right)_p \cong \left(\overline{H_1^G}\right)_p$. Так как по условию $\left(\overline{H_1^G}\right)_p$ имеет нормальный ранг $\leq k$, то $\left(\overline{\overline{H_1}^{\overline{G}}}\right)_p$ имеет нормальный ранг $\leq k$. Лемма доказана.

Доказательство теоремы. Пусть $\mathfrak{F} = \mathfrak{N}\mathfrak{A}^5 \cap \mathfrak{N}^4$. Покажем, что $G \in \mathfrak{F}$. Пусть $\Phi(G) \neq 1$, то по лемме 2.2 $G/\Phi(G) \in \mathfrak{F}$. Тогда, ввиду насыщенности формации $\mathfrak{F}$, получим, что $G \in \mathfrak{F}$. Поэтому в дальнейшем считаем, что $\Phi(G) = 1$.

По лемме 1.9 подгруппа Фиттинга $F(G) = N_1 \times N_2 \times ... \times N_k$, где N_i – минимальная нормальная подгруппа в группе G. Предположим, что $k \geq 2$. Тогда из леммы 2.2 следует $G/N_1 \in \mathfrak{F}$ и $G/N_2 \in \mathfrak{F}$. Поэтому $G \in \mathfrak{F}$ по лемме 1.11. Таким образом, в группе G существует единственная минимальная нормальная подгруппа G и $F(G) = N$. Тогда N – элементарная абелева группа порядка p^n по лемме 1.12.

Пусть X – максимальная подгруппа в $F = F(G)$, тогда $|F(G) : X| = p$. Очевидно, что $\overline{X^G} = X / \mathrm{core}_G X \cong X$, так как $core_G X = 1\,(core_G X \leq X \leq F(G) = N)$. Так как X имеет нормальный ранг ≤ 2 для нечётного p и нормальный ранг ≤ 3 для $p = 2$ и является элементарной абелевой p-группой, то $|X| \leq p^2$ или равен 8. Значит, $|F(G)| \leq p^3$ или равен 16. Таким образом, из леммы 1.3 G/F изоморфна циклической группе порядка $p-1$ либо неприводимой подгруппе группы $GL(2,p) = AutF$, либо неприводимой подгруппе группы $GL(3,p)$, либо неприводимой подгруппе группы $GL(4,2)$. Из лемм 1.8, 1.10 следует, что $G/F(G) \in \mathfrak{N}^3 \cap \mathfrak{A}^5$ и $G \in \mathfrak{F}$. Поэтому $G \in \mathfrak{N}\mathfrak{A}^5$ и по лемме 1.2 $G/\Phi(G) \in \mathfrak{A}^6$. Значит, производная длина фактор-группы $G/\Phi(G)$ не превышает ^{6}. Так как $G \in \mathfrak{N}^4$, то нильпотентная длина группы G не превышает ^{4}.

Следствие 2.1. Пусть G – разрешимая группа и $\left(\overline{H^G}\right)_p$ – бициклическая для любого $p \in \pi\left(\overline{H^G}\right)$. Тогда производная длина фактор-группы $G/\Phi(G)$ не превышает ^{6}, а нильпотентная длина группы G не превышает 4.

Следствие 2.2. Пусть G – A_4-свободная разрешимая группа, $\left(\overline{H^G}\right)_p$ бициклическая для любого $p \in \pi\left(\overline{H^G}\right)$. Тогда производная длина фактор-группы $G/\Phi(G)$ не превышает 5.

Доказательство. Учитывая все этапы доказательства теоремы и лемму 1.5, получим заключение следствия.

Следствие 2.3. Если G – разрешимая группа, $\left(\overline{H^G}\right)_p$ – циклическая для любого $p \in \pi\left(\overline{H^G}\right)$. Тогда производная длина группы $G/\Phi(G)$ не превышает ^{5}.

Доказательство. Пусть $\mathfrak{F} = \mathfrak{N}\mathfrak{A}^4$. По лемме 1.1 $\mathfrak{F}$ – насыщенная формация. Предположим, что G – группа наименьшего порядка, не принадлежащая $\mathfrak{F}$. Из леммы 2.2 следует, что $G/N \in \mathfrak{F}$ для любой неединичной нормальной подгруппы N группы G. По лемме 1.6 G – примитивная группа. Тогда согласно лемме 1.7 в группе существует единственная минимальная подгруппа $F = F(G)$, F – элементарная абелевая порядка p^n и $G = [F]M$, где M – примитиватор группы G. Так как $F \le G$ и X – максимальная подгруппа в F, то $|F:X| = p$. Очевидно, что $\overline{X^G} = X/\mathrm{core}_G X \cong X$. Так как X – циклическая и элементарная абелева, то $|X| = p$. Значит, $|F| = p^2$. Поэтому из леммы 1.3 $G/F \cong\le \mathrm{Aut}F$. Так как $\mathrm{Aut}F = GL(2,p)$, то из леммы 1.10 $G/F \in \mathfrak{A}^4$. Поэтому $G \in \mathfrak{F}$. Противоречие. Значит $G \in \mathfrak{N}\mathfrak{A}^4$ и производная длина фактор-группы $G/\Phi(G)$ не превышает 5.

Следствие 2.4. Пусть G – разрешимая A_4-свободная группа, $\left(\overline{H^G}\right)_p$ циклическая для любого $p \in \pi\left(\overline{H^G}\right)$. Тогда производная длина фактор-группы $G/\Phi(G)$ и нильпотентная длина группы G не превышает 3.

Доказательство. Повторяя доказательство следствия 2.3 и учитывая лемму 1.5, получим заключение следствия.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Монахов, В. С. О разрешимых конечных группах с силовскими подгруппами малого ранга / В. С. Монахов // Докл. НАН Беларуси. – 2002. – Т. 46, № 2. – С. 25–28.
2. Евтухова, С. М. Конечные группы с порядками кофакторов подгрупп, свободными от квадратов / С. М. Евтухова, В. С. Монахов // Докл. НАН Беларуси. – 2005. – Т.49, № 2. – С. 26–29.
3. Евтухова, С. М. О порядках кофакторов подгрупп конечной разрешимой группы / С. М. Евтухова, В. С. Монахов // Весці НАН Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. – 2005. – № 4. – С. 15–18.
4. Wenbin, Guo. Finite groups in which primary subgroups have cyclic cofactors / Guo Wenbin, Yi Xiaolan, Huang Jianhong // Bull. Malays. Math. Sci. Soc. – 2011. – 34, № 2. – P. 337–344.
5. Монахов, В. С. Введение в теорию конечных групп и их классов / В. С. Монахов. – Минск : Вышэйшая школа, 2006.
6. Шеметков, Л. А. Формации конечных групп / Л. А. Шеметков. – М. : Наука, 1978.
7. Монахов, В. С. О конечных разрешимых группах фиксированного ранга / В. С. Монахов, А. А. Трофимук // Сиб. матем. журн. – Т. 52, № 5. – 2011. – С. 1123–1137.

Рукапіс паступіў у рэдакцыю 19.10.2015

Daudov D.D., Trofimuk A.A. **On Solvable Groups with Small Normal Rank of Sylow Subgroups of the Cofactors Subgroup**

We obtain estimates of the derived length and the nilpotent length of a solvable group G whose normal rank of Sylow subgroups of the cofactors subgroup is fixed. In particular, the derived length of such group does not exceed 6 and the nilpotent length of such group does not exceed 4.