УДК 513.82

А.В. Беть[1], А.А. Юдов[2]

[1]магистрант физ.-мат. факультета
Брестского государственного университета имени А.С. Пушкина
[2]канд. физ.-мат. наук, доц. каф. алгебры, геометрии и математического моделирования
Брестского государственного университета имени А.С. Пушкина

ИНВАРИАНТНЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ПОДГРУПП ЛИ ДВИЖЕНИЙ ПЯТИМЕРНОГО ЕВКЛИДОВА ПРОСТРАНСТВА

Работа посвящена исследованию свойств подгрупп Ли группы Ли движений пятимерного евклидова пространства R_5. Для всех подгрупп Ли группы Ли вращений пространства R_5 находятся все инвариантные подпространства и все инвариантные прямые и k-плоскости.

Одной из важных задач геометрии является задача исследования подгрупп преобразований различных пространств. Особое место в ряду этих исследований занимает задача изучения подгрупп Ли групп Ли движений различных (псевдо)евклидовых пространств. Значимость этой задачи вытекает из того, что геометрия (псевдо)евклидовых пространств находит широкое применение в различных разделах математики и теоретической физики. Исследованиями в этом направлении занимались А.С. Феденко, И.В. Белько, В.Г. Копп, Р.Ф. Билялов, А.А. Юдов и другие. В данной работе исследуется группа Ли движений пятимерного евклидова пространства.

Рассмотрим пространство R_5 -пятимерное евклидово пространство.

Выберем в пространстве R_5 репер $\varepsilon = (0, e_1, e_2, e_3, e_4, e_5)$, причем $e_1^2 = e_2^2 = e_3^2 = e_4^2 = e_5^2 = 1, (e_i, e_j) = 0, i \neq j$.

Произвольную точку *M* пространства R_5, в репере ε зададим координатами $M(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$, которые будем записывать в виде $M(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)^T \equiv (X)_\varepsilon$.

На множестве реперов пространства R_5 действует группа Ли *G* движений, которая при заданном репере ε изоморфна группе матриц вида:

$$\overline{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ t_1 & & & & & \\ t_2 & & & & & \\ t_3 & & & & & \\ t_4 & & & & A & \\ t_5 & & & & & \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ t & A \end{pmatrix}. \tag{1}$$

Причем $A^T E_5 A = E_5$, где знак T означает транспонирование, а матрица E_5 является единичной матрицей.

При движении, заданном матрицей (1), репер ε переходит в репер $\varepsilon' = (0, e_1', e_2', e_3', e_4', e_5') = (0', e')$, где $e' = eA, 0'(t_1, t_2, t_3, t_4, t_5) = (T)_\varepsilon$, а точка *M* переходит в точку M', имеющую в репере ε' такие же координаты, какие точка *M* имеет в репере ε.

Пусть $M'(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)^T = (X)_{\varepsilon'}, M(x'_1, x'_2, x'_3, x'_4, x'_5)^T = (X')_{\varepsilon}$. Тогда получим: $\overline{OM'} = \overline{OO'} + \overline{O'M'} = e(T) + e'(X) = e(T) = eA(X) = e((T) + A(X))$. С другой стороны, $\overline{OM'} = e(X')$. Отсюда $(X') = (T) + A(X)$, т.е.

$$(x'_1, x'_2, x'_3, x'_4, x'_5)^T = (t_1, t_2, t_3, t_4, t_5)^T + A(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)^T$$

или

$$(1, x'_1, x'_2, x'_3, x'_4, x'_5)^T = \overline{A}(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)^T. \tag{2}$$

Таким образом, в пространстве R_5 действует слева группа Ли G, которая изоморфна группе матриц вида (1), действующих на точки пространства R_5 по формуле (2). Алгебру Ли $\overline{G}$ этой группы можно отожествить с алгеброй Ли матриц вида:

$$\left\{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \tau_1 & & & & & \\ \tau_2 & & & & & \\ \tau_3 & & & & & \\ \tau_4 & & & & B & \\ \tau_5 & & & & & \end{pmatrix}\right\} \equiv \left\{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \tau & B \end{pmatrix}\right\}, \tag{3}$$

где B удовлетворяет условию: $B^T E_5 + E_5 B = 0$

Группа Ли H стационарности точки О и алгебра Ли $\overline{H}$ этой группы будут задаваться матрицами вида:

$$H = \left\{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & & & & & \\ 0 & & & & & \\ 0 & & & & & \\ 0 & & & & A & \\ 0 & & & & & \end{pmatrix}\right\} \equiv \left\{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & A \end{pmatrix}\right\}, \tag{4}$$

$$\overline{H} = \left\{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & & & & & \\ 0 & & & & & \\ 0 & & & & & \\ 0 & & & & B & \\ 0 & & & & & \end{pmatrix}\right\} \equiv \left\{\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}\right\}. \tag{5}$$

Группа Ли G является полупрямым произведением группы Ли H стационарности точки и абелевой группы T_5 параллельных переносов: $G = H \otimes T_5$.

Алгебра Ли $\overline{G}$ является полупрямой суммой алгебры Ли $\overline{H}$ группы Ли H и коммутативной алгебры Ли τ_5 группы Ли: $\overline{G} = \overline{H} \oplus \tau_5$.

Операция коммутирования в алгебре Ли $\overline{G}$ имеет вид:

$$[A, B] = AB - BA, \tag{6}$$

где $A, B \in \overline{G}.$

Рассмотрим в алгебре Ли $\overline{G}$ базис, где

$$i_1 = E_{21}, i_2 = E_{31}, i_3 = E_{41}, i_4 = E_{51}, i_5 = E_{61},$$

$$i_6 = E_{23} - E_{32}, i_7 = E_{24} - E_{42}, i_8 = E_{25} - E_{452}, i_9 = E_{34} - E_{43}, i_{10} = E_{35} - E_{53},$$

$$i_{11} = E_{45} - E_{54}, i_{12} = E_{36} - E_{63}, i_{13} = E_{45} - E_{54}, i_{14} = E_{46} - E_{64}, i_{15} = E_{56} - E_{65}.$$

Где $E_{\alpha\beta}$ – (6×6) матрица, у которой в $\alpha -$ой строке, $\beta -$м столбце 1, а остальные элементы нули.

Получаем формулы для коммутаторов базисных векторов: $i_1, i_2, i_3, i_4, i_5, i_6, i_7, i_8, i_9, i_{10}, i_{11}, i_{12}, i_{13}, i_{14}, i_{15}$. Согласно формуле (6) получим $[i_1, i_2] = i_1 i_2 - i_2 i_1 = 0$. Аналогично, проводя вычисления, получим:

$[i_1, i_3] = 0,$
$[i_1, i_4] = 0,$
$[i_1, i_5] = 0,$
$[i_1, i_6] = i_2,$
$[i_1, i_7] = i_3,$
$[i_1, i_8] = i_4,$
$[i_1, i_9] = i_5,$
$[i_1, i_{10}] = 0,$
$[i_1, i_{11}] = 0,$
$[i_1, i_{12}] = 0,$
$[i_1, i_{13}] = 0,$
$[i_1, i_{14}] = 0,$
$[i_1, i_{15}] = 0,$
$[i_2, i_3] = 0,$
$[i_2, i_4] = 0,$
$[i_2, i_5] = 0,$
$[i_2, i_6] = -i_1,$
$[i_2, i_7] = 0,$
$[i_2, i_8] = 0,$
$[i_2, i_9] = 0,$
$[i_2, i_{10}] = i_3,$
$[i_2, i_{11}] = i_4,$
$[i_2, i_{12}] = i_5,$
$[i_2, i_{13}] = 0,$
$[i_2, i_{14}] = 0,$
$[i_2, i_{15}] = 0,$
$[i_3, i_4] = 0,$
$[i_3, i_5] = 0,$
$[i_3, i_6] = 0,$
$[i_3, i_7] = -i_1,$
$[i_3, i_8] = 0,$
$[i_3, i_9] = 0,$
$[i_3, i_{10}] = -i_2,$
$[i_3, i_{11}] = 0,$
$[i_3, i_{12}] = 0,$
$[i_3, i_{13}] = i_4,$
$[i_3, i_{14}] = i_5,$
$[i_3, i_{15}] = 0,$
$[i_4, i_5] = 0,$
$[i_4, i_6] = 0,$
$[i_4, i_7] = 0,$
$[i_4, i_8] = -i_1,$
$[i_4, i_9] = 0,$
$[i_4, i_{10}] = 0,$
$[i_4, i_{11}] = -i_2,$
$[i_4, i_{12}] = 0,$
$[i_4, i_{13}] = -i_3,$
$[i_4, i_{14}] = 0,$
$[i_4, i_{15}] = i_5,$
$[i_5, i_6] = 0,$
$[i_5, i_7] = 0,$
$[i_5, i_8] = 0,$
$[i_5, i_9] = -i_1,$
$[i_5, i_{10}] = 0,$
$[i_5, i_{11}] = 0,$
$[i_5, i_{12}] = -i_2,$
$[i_5, i_{13}] = 0,$
$[i_5, i_{14}] = -i_3,$
$[i_5, i_{15}] = -i_4,$
$[i_6, i_7] = -i_{10},$
$[i_6, i_8] = -i_{11},$
$[i_6, i_9] = -i_{12},$
$[i_6, i_{10}] = i_7,$
$[i_6, i_{11}] = i_8,$
$[i_6, i_{12}] = i_9,$
$[i_6, i_{13}] = 0,$
$[i_6, i_{14}] = 0,$
$[i_6, i_{15}] = 0,$
$[i_7, i_8] = -i_{13},$
$[i_7, i_9] = -i_{14},$
$[i_7, i_{10}] = -i_6,$
$[i_7, i_{11}] = 0,$
$[i_7, i_{12}] = 0,$
$[i_7, i_{13}] = i_8,$
$[i_7, i_{14}] = i_9,$
$[i_7, i_{15}] = 0,$
$[i_8, i_9] = -i_{15},$
$[i_8, i_{10}] = 0,$
$[i_8, i_{11}] = -i_6,$
$[i_8, i_{12}] = 0,$
$[i_8, i_{13}] = -i_7,$
$[i_8, i_{14}] = 0,$
$[i_8, i_{15}] = i_9,$
$[i_9, i_{10}] = 0,$
$[i_9, i_{11}] = 0,$
$[i_9, i_{12}] = -i_6,$
$[i_9, i_{13}] = 0,$
$[i_9, i_{14}] = -i_7,$
$[i_9, i_{15}] = -i_8,$
$[i_{10}, i_{11}] = -i_{13},$
$[i_{10}, i_{12}] = -i_{14},$
$[i_{10}, i_{13}] = i_{11},$
$[i_{10}, i_{14}] = i_{12},$
$[i_{10}, i_{15}] = 0,$
$[i_{11}, i_{12}] = -i_{15},$
$[i_{11}, i_{13}] = -i_{10},$
$[i_{11}, i_{14}] = 0,$
$[i_{11}, i_{15}] = i_{12},$
$[i_{12}, i_{13}] = 0,$
$[i_{12}, i_{14}] = -i_{10},$
$[i_{12}, i_{15}] = -i_{11},$
$[i_{13}, i_{14}] = -i_{15},$
$[i_{13}, i_{15}] = i_{14},$
$[i_{14}, i_{15}] = -i_{13}.$

Подгруппы Ли группы Ли вращений пространства R_5 классифицируются в работе [1].

Всего получено 11 подгрупп Ли $G_1 ... G_{11}$ группы Ли вращений, которые задаются своими алгебрами Ли $\overline{G}_1 ... \overline{G}_{11}$ в виде:

$$\overline{G_1} = \{i_6\},$$
$$\overline{G_2} = \{i_6 + \varphi i_{13}\},$$
$$\overline{G_3} = \{i_6, i_{13}\},$$
$$\overline{G_4} = \{i_6, i_7, i_{10}\},$$
$$\overline{G_5} = \{i_6 + i_{13}, i_7 - i_{11}, i_8 + i_{10}\},$$
$$\overline{G_6} = \{i_6 + 2i_{13}, \sqrt{3}i_{12} + i_7 + i_{11}, \sqrt{3}i_9 - i_8 + i_{10}\},$$
$$\overline{G_7} = \{i_6, i_7, i_{10}, i_{15}\},$$
$$\overline{G_8} = \{i_6, i_{13}, i_7 - i_{11}, i_8 + i_{10}\},$$
$$\overline{G_9} = \{i_6, i_7, i_{10}, i_8 + i_9, i_{11} + i_{12}, i_{13} + i_{14}\},$$
$$\overline{G_{10}} = \{i_6, i_7, i_{10}, i_{15}\},$$
$$\overline{G_7} = \{i_6, i_7, i_8, i_9, i_{10}, i_{11}, i_{12}, i_{13}, i_{14}, i_{15}\}.$$

Причем группа Ли G_{11} совпадает с группой Ли всех вращений H .

Рассматривается однопараметрическая подгруппа Ли G группы Ли вращений пятимерного евклидова пространства R_5, соответствующая алгебре Ли с оператором

$$i_6 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (7)$$

Ставится задача найти все инвариантные относительно G одномерные, двумерные, трёхмерные и четырехмерные векторные подпространства пространства R_5, а также инвариантные прямые и K-плоскости.

Рассмотрим оператор i_6.

Найдём одномерные подпространства пространства R_5, инвариантные относительно этого оператора. Условие инвариантности подпространства с направляющим вектором $\alpha(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5.)$ имеет вид:

$$\alpha i_6 = \lambda\alpha \quad (8)$$

или в координатном виде:

$$-\alpha_2 = \lambda\alpha_1, \alpha_1 = \lambda\alpha_2, 0 = \lambda\alpha_3, 0 = \lambda\alpha_4, 0 = \lambda\alpha_5 \quad (9)$$

Из системы (9) получим: $-\alpha_2 = \lambda\alpha_2$. Отсюда $\alpha_2 = 0, \alpha_1 = 0$. При $\lambda \neq 0$ ненулевых решений нет. При $\lambda = 0$ получим инвариантные подпространства в виде:

$$\{pe_3 + qe_4 + re_5\}, \forall p, q, r.$$

Найдём двумерные подпространства, инвариантные относительно оператора. Условие инвариантности подпространства с базисом $\{\alpha, b\}, \alpha(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5.)$, $(b_1, b_2, b_3, b_4, b_5.)$ имеет вид:

$$\alpha i_6 = \lambda\alpha + \mu b,\ bi_6 = \nu\alpha + \delta b. \tag{10}$$

Или в координатном виде:

$$\begin{aligned} -\alpha_2 &= \lambda\alpha_1 + \mu b_1 & -b_2 &= \nu\alpha_1 + \delta b_1, \\ -\alpha_1 &= \lambda\alpha_2 + \mu b_2 & -b_1 &= \nu\alpha_2 + \delta b_2, \\ 0 &= \lambda\alpha_3 + \mu b_3 & 0 &= \nu\alpha_3 + \delta b_3, \\ 0 &= \lambda\alpha_4 + \mu b_4 & 0 &= \nu\alpha_4 + \delta b_4, \\ 0 &= \lambda\alpha_5 + \mu b_5 & 0 &= \nu\alpha_5 + \delta b_5. \end{aligned} \tag{11}$$

С помощью замены базиса получаем, что решение системы (11) можно свести к рассмотрению 10 частных случаев $1^\circ - 10^\circ$:

$1^\circ . \alpha(1,0,p,q,r), b(0,1,\xi,t,\omega)$.

В этом случае система (11) имеет вид:

$$\begin{cases} 0 = \lambda, 1 = \mu, 0 = \lambda q + \mu\xi, 0 = \lambda q + \mu t, 0 = \lambda r + \mu\omega, \\ 1 = \nu, 0 = \delta, 0 = \nu p + \delta\xi, 0 = \nu q + \delta t, 0 = \nu r + \delta\omega. \end{cases} \tag{12}$$

Отсюда следует: $\xi = 0, t = 0, \omega = 0, p = 0, q = 0, r = 0$.

Получаем инвариантное подпространство в виде: $\{e_1, e_2\}$.

$2^\circ . \alpha(1,p,0,q,r), b(0,0,1,\xi,t)$.

Из системы (11) получим: $-p = \lambda, 1 = \lambda p.$. Отсюда следует противоречие: $1 = -p^2$. Система инвариантности противоречива.

$3^\circ . \alpha(1,p,q,0,r), b(0,0,0,1,\xi)$.

$4^\circ . \alpha(1,p,q,r,0), b(0,0,0,0,1)$.

Система инвариантности (4) противоречива, т.к. из неё следует: $p^2 = -1$.

$5^\circ . \alpha(0,1,0,p,q), b(0,0,1,r,\xi)$.

В этих случаях $5^\circ, 6^\circ, 7^\circ$ система инвариантности (11) противоречива, т.к. из неё следует: $1 = 0$.

$6^\circ . \alpha(0,1,p,0,q), b(0,0,0,1,r)$.

$7^\circ . \alpha(0,1,p,q,0), b(0,0,0,0,1)$.

$8^\circ . \alpha(0,0,1,0,p), b(0,0,0,1,q)$.

Система инвариантности (11) принимает вид:

$\lambda = 0, \mu = 0, \lambda p + \mu q = 0, \nu = 0, \delta = 0, \nu p + \delta\mu = 0.$

Инвариантные пространства принимают вид: $\{e_3 + pe_5, e_4 + qe_5\}$.

$9^\circ . \alpha(0,0,1,p,0), b(0,0,0,0,1)$.

Система инвариантности (11) принимает вид:

$\lambda = 0, \mu = 0, \lambda p = 0, \nu = 0, \delta = 0, \nu p = 0.$.

Получаем инвариантные подпространства в виде:

$\{e_3 + pe_4, e_5\}$.

$10^{\circ}. a(0,0,0,1,0), b(0,0,0,0,1)$.

Система инвариантности (11) не противоречива. Получаем инвариантное подпространство: $\{e_4, e_5\}$.

Результаты исследования инвариантных подпространств относительно оператора i_6 сформулируем в виде следующей теоремы.

Теорема 1. Относительно оператора i_6 инвариантны только следующие одномерные подпространства пространства $R_5 : \{pe_3 + qe_4 + re_5\}, \forall p, q, r.$ и только следующие двумерные подпространства: $\{e_1, e_2\}, \{e_3 + pe_5, e_4 + qe_5\}, \{e_3 + pe_4, e_5\}, \{e_4, e_5\}$.

Рассматривая аналогично инвариантные подпространства для оператора $i_6 + \lambda i_{13}, \lambda \neq 0$, получаем теорему:

Теорема 2. Относительно оператора $i_6 + \lambda i_{13}, \lambda \neq 0$ инвариантно только следующее одномерное подпространство пространства $R_5 : \{e_5\}$ и только следующие двумерные подпространства: $\{e_1, e_2\}, \{e_3, e_4\}$.

Относительно оператора $i_6 + i_{13}$ инвариантно только следующее одномерное подпространство: $\{e_5\}$ и только следующие двумерные подпространства: $\{e_1 + pe_3 + qe_4, e_2 - qe_3 + pe_4\}, \{e_1, e_2\}, \{e_3, e_4\}$.

Относительно оператора $i_6 + i_{13}$ инвариантно только следующее одномерное подпространство: $\{e_5\}$ и только следующие двумерные подпространства: $\{e_1 + pe_3 + qe_4, e_2 + qe_3 - pe_4\}, \{e_1, e_2\}, \{e_3, e_4\}$.

Непосредственным вычислением доказываются следующие теоремы.

Теорема 3. Из подпространств, перечисленных в теореме 1, относительно оператора i_7 инвариантно только одномерное подпространство: $\{qe_4 + re_5\} \; \forall q, r$ и только следующее двумерное подпространство: $\{e_4, e_5\}$.

Теорема 4. Из подпространств, перечисленных в теореме 1, относительно оператора i_{13} инвариантны только следующее одномерное подпространство: $\{e_5\}$ и только следующие двумерные подпространства: $\{e_1, e_2\}, \{e_3, e_4\}$, из которых только $\{e_5\}$ инвариантно относительно $i_7 - i_{11}$ и $i_8 - i_{10}$.

Теорема 5. Из 1- и 2-мерных подпространств, инвариантных относительно оператора $i_6 + i_{13}$, относительно оператора $i_7 - i_{11}$ инвариантно только следующее одномерное подпространство: $\{e_5\}$, которое инвариантно и относительно оператора $i_8 + i_{10}$.

Теорема 6. Из подпространств, перечисленных в теореме 3, относительно оператора i_{10} инвариантны только следующие одномерные подпространства: $\{qe_4 + re_5\} \; \forall q, r$ и только следующее двумерное подпространство: $\{e_4, e_5\}$, из которых только $\{e_4, e_5\}$ инвариантно относительно оператора i_{15} и только $\{e_4, e_5\}$ инвариантно относительно операторов $i_8 + i_9, i_{11} + i_{12}, i_{13} + i_{14}$.

Теорема7. Из подпространств, инвариантных относительно оператора $i_6 + \lambda i_{13}, \lambda \neq 0, \pm 1$ (теорема 2), относительно оператора $i_7 + i_{11} + \sqrt{3} i_{12}$ не инвариантны никакие пространства.

На основании доказанных теорем получаем следующую теорему, в которой перечисляются все инвариантные одно- и двумерные подпространства для подгрупп Ли $G_1 ... G_{10}$.

Теорема 8. Относительно подгрупп Ли $G_1 ... G_{10}$ инвариантны только следующие одно- и двумерные подпространства пространства R_5:

1°. Для $G_1 : \{pe_3 + qe_4 + re_4\}, \forall p, q, r, \{e_1, e_2\} \{e_3 + pe_5, e_4 + qe_5\} \{e_3 + pe_4, e_5\} \{e_4, e_5\}$. Доказательство следует по теореме 1.

2°. Для $G_2 : \{e_5\}, \{e_1, e_2\}, \{e_3, e_4\}$, при $\lambda \neq 0, \pm 1$.

$\{e_5\}, \{e_1 + pe_3 qe_4, e_2 - qe_3 + pe_4\} \{e_1, e_2\} \{e_3, e_4\}$, при $\lambda = 1$,

$\{e_5\}, \{e_1 + pe_3 qe_4, e_2 + qe_3 + pe_4\} \{e_1, e_2\} \{e_3, e_4\}$, при $\lambda = -1$. Доказательство следует по теореме 2.

3°. Для $G_3 : \{e_5\}, \{e_1, e_2\}, \{e_3, e_4\}$. Доказательство следует по теореме 1.

4°. Для $G_4 : \{qe_4 + re_5\}, \forall q, r, \{e_4, e_5\}$. Доказательство следует по теореме 6.

5°. Для $G_5 : \{e_5\}$. Доказательство следует по теореме 2.

6°. Для G_6 :, нет инвариантных подпространств.

7°. Для $G_7 : \{e_4, e_5\}$. Доказательство следует по теореме 6.

8°. Для $G_8 : \{e_5\}$. Доказательство следует по теореме 4.

9°. Для $G_9 : \{e_4, e_5\}$. Доказательство следует по теореме 6.

10°. Для $G_{10} : \{e_5\}$. Доказательство следует по теореме 6.

Используя найденные инвариантные подпространства относительно подгрупп Ли $G_1 ... G_{10}$, находим далее образы стационарности для этих подгрупп. В результате получаем теорему.

Теорема 9. Среди подгрупп $G_1 ... G_{10}$ флаговые образы стационарности имеют только следующие подгруппы:

1° Для G_1 образом стационарности является флаг $[O, R_3^\circ]$, где $\circ$ означает точечную неподвижность соответствующей плоскости.

2° Для G_3 образом стационарности является прямая и две ортогональные ей попарно ортогональные 2-плоскости.

3° Для G_4 образом стационарности является флаг $[O, R_2^\circ]$.

4° Для G_7 образом стационарности является флаг $[O, R_2]$.

5° Для G_{10} образом стационарности является флаг $[O, R_1]$.

Подгруппы Ли G_1, G_5, G_6, G_8, G_9 не имеют флаговых образов стационарности.

Замечание 1. Все инвариантные четырёхмерные подпространства пространства R_5 относительно группы Ли G_i получаются как ортогональные дополнения к найденным инвариантным одномерным подпространствам, а инвариантные трёхмерные подпространства находятся как ортогональные дополнения к инвариантным двумерным. Таким образом, теорема 8 классифицирует все инвариантные подпространства пространства R_5 относительно всех подгрупп Ли вращений группы Ли движений пространства R_5.

Замечание 2. Каждому инвариантному подпространству $\{\alpha_1,...,\alpha_k\}$ соответствует инвариантная k-плоскость: $[0,\alpha_1,...,\alpha_k]$ и обратно. Таким образом, теорема 8 даёт классификацию всех инвариантных прямых и k-плоскостей пространства R_5 относительно подгрупп Ли группы Ли вращений пространства R_5.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Копп, В. Г. О подгруппах вращений пятимерных и шестимерных евклидовых и лоренцовых пространств / В. Г. Копп // Учёные записки Казан. гос. ун-та. – 1966. – Т. 126, кн. 1. – С. 13–22.
2. Копп, В. Г. Классификация бесконечно малых движений и их пучков в четырехмерном пространстве Лоренца / В. Г. Копп // Учёные записки Казан. гос. ун-та. – 1963. – Т. 123, кн. 1. – С. 59–77.
3. Белько, И. В. Подгруппы группы Ли / И. В. Белько, А. С. Феденко // Доклады АН БССР. – 1970. – Т. XIV, № 6. – С. 393–395.
4. Белько, И. В. Подгруппы группы Ли – Пуанкаре / И. В. Белько // Изв. АН БССР. Сер. физ.-мат. – 1971. – № 1. – С. 5–13.
5. Юдов, А. А. Подгруппы группы движений четырехмерного псевдоевклидового пространства нулевой сигнатуры / А. А. Юдов // Вестн. БГУ имени В.И. Ленина. – 1977. – № 1. – С. 16–21.

Рукапіс паступіў у рэдакцыю 15.04.2015

Bet A.V., Judov A.A. **Invariant Characteristics of Subgroups Li Movements of Five-Dimensional Euclidean Space**

The work is devoted to the study of the properties of a subgroup of the Lie group of motions of three-dimensional Euclidean space R_5 *For all subgroups of the Lie group of rotations of* R_5 *are all invariant subspaces invariant and all direct and k-plane.*