УДК 539.12:530.145

В.А. Плетюхов
д-р физ.-мат. наук, проф. каф. теоретической физики
Брестского государственного университета имени А.С. Пушкина

ТЕОРИЯ РЕЛЯТИВИСТСКИХ ВОЛНОВЫХ УРАВНЕНИЙ И ЭЛЕКТРОСЛАБОЕ ПОЛЕ

Построено релятивистское волновое уравнение, описывающее векторное поле с четырьмя типами квантов: одним безмассовым и тремя массивными. При этом в теории неизбежно возникает скалярная частица с ненулевой массой. Скалярное и векторное поля описываются совместно в рамках одной не распадающейся по группе Лоренца системы уравнений и, следовательно, представляют собой единый физический объект. Его векторная составляющая может интерпретироваться как «электрослабое» поле, а скалярная – как аналог бозона Хиггса. В предлагаемой модели масса скалярного бозона совпадает с массой одного из промежуточных векторных бозонов (Z^0). Ненулевые массы всех частиц выступают в качестве произвольных параметров теории.

Введение

Теория релятивистских волновых уравнений (РВУ) в своей исходной формулировке предполагает возможность описания только одной, спиновой, внутренней степени свободы элементарных микрообъектов. Математическим отражением этого обстоятельства является использование минимального набора неприводимых представлений группы Лоренца, который необходим для описания микрообъекта с заданным значением спина (спиральности). Однако в 1955–1957 гг. Петрашем и Улеглой [1; 2] было построено уравнение для частицы со спином $\frac{1}{2}$ и аномальным магнитным моментом, которое возникает за счёт привлечения дополнительных по отношению к биспинору неприводимых компонент в пространстве представления волновой функции. Ещё ранее, в 1928 г., английским физиком Дарвином [3] было предложено РВУ, впоследствии получившее название уравнения Дирака – Кэлера, которое содержит двукратно вырожденные состояния скалярной и векторной компонент. Данное уравнение допускает трактовку как РВУ для спина $\frac{1}{2}$ и дополнительной внутренней степенью свободы (см. [4] и цитированную там литературу). Уравнения Петраша – Улеглы и Дирака – Кэлера продемонстрировали, что в подходе теории РВУ при отказе от условия минимальности используемого набора представлений группы Лоренца существенно расширяются возможности пространственно-временного описания как внутренней структуры, так и изоспиновых степеней свободы микрообъектов.

С конца 1960-х – начала 1970-х гг. данное направление начинает активно развиваться в нашей республике с работ академика Ф.И. Фёдорова и его учеников [5; 6]. За прошедшие десятилетия был накоплен большой материал по развитию теории РВУ с расширенными наборами представлений группы Лоренца [7].

В частности, было показано, что теория РВУ позволяет описывать микрообъекты (поля), кванты которых имеют различные значения массы, а также поля с массивными и безмассовыми квантами на основе не распадающихся в релятивистски-инвариантном смысле уравнений [8; 9]. Такая возможность актуализируется в современных калибровочных теориях фундаментальных частиц и их взаимодействий, например, в модели электрослабых взаимодействий.

Рассмотрим этот вопрос подробно. Возьмём, например, схему зацеплений

$$\begin{array}{ccc} & (0,1) & \\ \diagup & & \diagdown \\ \left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right) & & \left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)' \\ \diagdown & & \diagup \\ & (1,0) & \end{array}, \tag{1}$$

где представления $\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$, $\left[(0,1)\oplus(1,0)\right]$, $\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)'$ сопоставляются вектору ψ_μ, антисимметричным тензорам второго $\left(\psi_{[\mu\nu]}\right)$ и третьего $\left(\psi_{[\mu\nu\alpha]}\right)$ рангов соответственно. Рассмотрим систему линейных однородных тензорных уравнений первого порядка

$$\partial_\nu \psi_{[\mu\nu]} = 0, \tag{2}$$

$$\partial_\mu \psi_{[\nu\alpha]} + \partial_\alpha \psi_{[\mu\nu]} + \partial_\nu \psi_{[\alpha\mu]} + m\psi_{[\mu\nu\alpha]} = 0, \tag{3}$$

$$-\partial_\mu \psi_\nu + \partial_\nu \psi_\mu + \partial_\alpha \psi_{[\mu\nu\alpha]} + m\psi_{[\mu\nu]} \quad 0, \tag{4}$$

базирующуюся на наборе представлений (1). Путём несложных преобразований из уравнений (2)–(4) можно получить уравнения второго порядка

$$\Box \psi_\mu - \partial_\mu \partial_\nu \psi_\nu = 0, \tag{5}$$

$$\left(\Box - m^2\right)\psi_{[\mu\nu\alpha]} \quad 0, \quad \varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta}\, \psi_{[\mu\nu\alpha]} \quad 0, \tag{6}$$

означающие, что система (2) – (4) описывает свободное векторное поле, квантами которого являются безмассовая частица $\left(\psi_\mu\right)$ и частица с ненулевой массой $m \left(\psi_{[\mu\nu\alpha]}\right)$. При этом, поскольку система (2) – (4) не распадается по группе Лоренца, указанное поле с точки зрения теории РВУ представляет собой единый физический объект.

Целесообразно рассмотреть также основанную на схеме зацеплений (1) систему первого порядка

$$\alpha\, \partial_\nu\, \psi_{[\mu\nu]} + m\psi_\mu = 0, \tag{7}$$

$$\beta\left(\partial_\mu \psi_{[\nu\alpha]} + \partial_\alpha \psi_{[\mu\nu]} + \partial_\nu \psi_{[\alpha\mu]}\right) + m\psi_{[\mu\nu\alpha]} \quad 0, \tag{8}$$

$$\alpha^*\left(-\partial_\mu \psi_\nu + \partial_\nu \psi_\mu\right) + \beta^* \partial_\alpha \psi_{[\mu\nu\alpha]} + m\psi_{[\mu\nu]} = 0, \tag{9}$$

где α, β – произвольные комплексные параметры. Переходя опять от системы (7) – (9) к эквивалентным ей уравнениям второго порядка, будем иметь

$$\left(\Box - \frac{m^2}{|\alpha|^2}\right)\psi_\mu = 0, \qquad \partial_\mu \psi_\mu = 0; \tag{10}$$

$$\left(\Box - \frac{m^2}{|\beta|^2}\right)\psi_{[\mu\nu\alpha]} = 0, \qquad \varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta}\, \partial_\beta \psi_{[\mu\nu\alpha]} = 0. \tag{11}$$

Уравнения (10), (11) показывают, что система (7) – (9) даёт совместное описание частиц (полей) со спином 1 и ненулевыми массами

$$m_1 = \frac{m}{|\alpha|}, \qquad m_2 = \frac{m}{|\beta|}. \tag{12}$$

Тензорная формулировка массивно-безмассового векторного поля

Как известно, в Стандартной модели три типа квантов «электрослабого» поля – промежуточные векторные бозоны – обладают ненулевыми массами и один (фотон) –

нулевой. Очевидно, что при совместном рассмотрении уравнений (2) – (4) и (7) – (9) мы как раз получим систему первого порядка, описывающую массивно-безмассовое векторное поле с тремя массивными и одним безмассовым квантами. Однако при таком механическом объединении это поле не будет представлять единый физический объект, каковым является «электрослабое» поле, поскольку соответствующая ему схема зацеплений

$$\begin{array}{ccccc} & & (0,1) & & \\ & \diagup & & \diagdown & \\ \left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right) & & & & \left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)' \\ & \diagdown & & \diagup & \\ & & (1,0) & & \end{array} \oplus \begin{array}{ccccc} & & (0,1) & & \\ & \diagup & & \diagdown & \\ \left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right) & & & & \left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)' \\ & \diagdown & & \diagup & \\ & & (1,0) & & \end{array} \qquad (13)$$

является распадающейся на два самостоятельных фрагмента вида (1).

Самый естественный и простой способ получения нераспадающейся схемы зацеплений, приводящей к описанию того же набора векторных частиц, заключается во введении в рассмотрение дополнительного скалярного представления $(0,0)$, обеспечивающего зацепление указанных фрагментов. В результате получается схема зацеплений

$$\begin{array}{ccccc} & & (0,1) & & \\ & \diagup & & \diagdown & \\ \left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right) & & & & \left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)' \\ & \diagdown & & \diagup & \\ & & (1,0) & & \end{array} - (0,0) - \begin{array}{ccccc} & & (0,1) & & \\ & \diagup & & \diagdown & \\ \left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right) & & & & \left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)' \\ & \diagdown & & \diagup & \\ & & (1,0) & & \end{array}. \qquad (14)$$

Соответствующая (14) система уравнений первого порядка имеет общий вид:

$$\partial_\nu \psi_{[\mu\nu]} = 0, \qquad (15)$$

$$\alpha\left(\partial_\mu\psi_{[\nu\alpha]} + \partial_\alpha\psi_{[\mu\nu]} + \partial_\nu\psi_{[\alpha\mu]}\right) + \beta\,\varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta}\,\partial_\beta\psi_0 + m\psi_{[\mu\nu\alpha]} = 0, \qquad (16)$$

$$-\partial_\mu\psi_\nu + \partial_\nu\psi_\mu + \alpha^*\partial_\alpha\psi_{[\mu\nu\alpha]} + m\psi_{[\mu\nu]} = 0, \qquad (17)$$

$$\beta^*\varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta}\,\partial_\beta\psi_{[\mu\nu\alpha]} + \gamma\,\partial_\mu\varphi_\mu + m\psi_0 = 0, \qquad (18)$$

$$\rho\,\partial_\nu\varphi_{[\mu\nu]} + \gamma^*\partial_\mu\psi_0 + m\varphi_\mu = 0, \qquad (19)$$

$$\delta\left(\partial_\mu\varphi_{[\nu\alpha]} + \partial_\alpha\varphi_{[\mu\nu]} + \partial_\nu\varphi_{[\alpha\mu]}\right) + m\varphi_{[\mu\nu\alpha]} = 0, \qquad (20)$$

$$\rho^*\left(-\partial_\mu\varphi_\nu + \partial_\nu\varphi_\mu\right) + \delta^*\partial_\alpha\varphi_{[\mu\nu\alpha]} + m\varphi_{[\mu\nu]} = 0, \qquad (21)$$

где скаляр ψ_0 сопоставляется представлению $(0,0)$.

Найдём уравнения второго порядка, к которым приводит система (15) – (21). Подействуем на уравнение (17) оператором ∂_ν. Учитывая (1), получим

$$\Box\psi_\mu - \partial_\mu\partial_\nu\psi_\nu = 0. \qquad (22)$$

Применяя к уравнению (16) оператор $\varepsilon_{\mu\nu\alpha\gamma}\,\partial_\gamma$, имеем

$$\beta\,\varepsilon_{\mu\nu\alpha\gamma}\,\varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta}\,\partial_\gamma\,\partial_\beta\,\psi_0 + m\,\varepsilon_{\mu\nu\alpha\gamma}\,\partial_\gamma\,\psi_{[\mu\nu\alpha]} = 0,$$

$$-6\beta\,\delta_{\gamma\beta}\,\partial_\gamma\,\partial_\beta\,\psi_0 + m\,\varepsilon_{\mu\nu\alpha\gamma}\,\partial_\gamma\,\psi_{[\mu\nu\alpha]} = 0$$

$$\varepsilon_{\mu\nu\alpha\gamma}\,\partial_\gamma\,\psi_{[\mu\nu\alpha]}=\frac{6\beta}{m}\square\psi_0\,. \qquad (23)$$

Подставляем (23) в (18):

$$\frac{6|\beta|^2}{m}\square\psi_0+\gamma\,\partial_\mu\,\varphi_\mu+m\psi_0=0. \qquad (24)$$

Действуя на уравнение (19) оператором ∂_μ, находим:

$$\gamma^*\square\psi_0+m\;\partial_\mu\;\varphi_\mu=0 \qquad (25)$$

Сравнивая (24) и (25), получаем уравнение

$$\left(|\gamma|^2-6|\beta|^2\right)\square\psi_0-m^2\,\psi_0=0\,,$$

или

$$\square\psi_0-\frac{m^2}{|\gamma|^2-6|\beta|^2}\psi_0=0\,. \qquad (26)$$

На параметры γ и β накладывается условие

$$|\gamma|^2-6|\beta|^2>0\,. \qquad (27)$$

Комбинируя уравнения (20) и (21), нетрудно получить уравнение

$$|\delta|^2\left(\partial_\mu\,\partial_\gamma\,\varphi_{[\nu\alpha\gamma]}+\partial_\alpha\,\partial_\gamma\varphi_{[\mu\nu\gamma]}+\partial_\nu\,\partial_\gamma\,\varphi_{[\alpha\mu\gamma]}\right)-m^2\,\varphi_{[\mu\nu\alpha]}=0\,. \qquad (28)$$

Кроме того, из уравнения (20) вытекает соотношение

$$\partial_\mu\,\partial_\gamma\,\varphi_{[\nu\alpha\gamma]}+\partial_\alpha\,\partial_\gamma\,\varphi_{[\mu\nu\gamma]}+\partial_\nu\,\partial_\gamma\,\varphi_{[\alpha\mu\gamma]}=\square\,\varphi_{[\mu\nu\alpha]}\,, \qquad (29)$$

с учётом которого уравнение (28) примет вид:

$$\square\varphi_{[\mu\nu\alpha]}-\frac{m^2}{|\delta|^2}\,\varphi_{[\mu\nu\alpha]}=0\,. \qquad (30)$$

Теперь применим оператор ∂_ν к уравнению (21). Это даёт

$$\rho^*\left(-\partial_\mu\,\partial_\nu\,\varphi_\nu+\square\varphi_\mu\right)+m\,\partial_\nu\,\varphi_{[\mu\nu]}=0\,. \qquad (31)$$

Выразим из (19) член $\partial_\nu\varphi_{[\mu\nu]}$ и подставим в (31):

$$\square\varphi_\mu-\frac{m^2}{|\rho|^2}\varphi_\mu=\frac{\gamma^* m}{|\rho|^2}\,\partial_\mu\left(\psi_0+\frac{m}{\gamma^*|\rho|^2}\varphi_\mu\right). \qquad (32)$$

В свою очередь, из уравнения (19) можно получить соотношение

$$\partial_\nu\varphi_\nu=-\frac{\gamma^*}{m}\square\psi_0\,. \qquad (33)$$

Подставляя (33) в (32), находим

$$\square\varphi_\mu-\frac{m^2}{|\rho|^2}\varphi_\mu=\frac{\gamma^*}{m|\rho|^2}\partial_\mu\left(-\square\psi_0+m^2\,\psi_0\right). \qquad (34)$$

Конкретизируем условие (27), положив, например,

$$|\gamma|^2-6|\beta|^2=1\,. \qquad (35)$$

В результате уравнения (26), (34) принимают соответственно вид

$$\square\psi_0-m^2\,\psi_0=0\,, \qquad (36)$$

$$\square\varphi_\mu-\frac{m^2}{|\rho|^2}\varphi_\mu=0\,. \qquad (37)$$

С целью получения уравнения второго порядка для тензора $\psi_{[\mu\nu\alpha]}$ возьмём производную ∂_α от уравнения (16):

$$\alpha\left(\partial_\alpha\,\partial_\mu\,\psi_{[\nu\alpha]} + \Box\psi_{[\mu\nu]} + \partial_\alpha\,\partial_\nu\,\psi_{[\alpha\mu]}\right) + m\,\partial_\alpha\,\psi_{[\mu\nu\alpha]} = 0. \qquad (38)$$

Отсюда с учётом (15) находим

$$\partial_\alpha\psi_{[\mu\nu\alpha]} = -\frac{\alpha}{m}\Box\psi_{[\mu\nu]}. \qquad (39)$$

Подставляя (39) в (17), будем иметь

$$-\partial_\mu\,\psi_\nu + \partial_\nu\,\psi_\mu - \frac{|\alpha|^2}{m}\Box\psi_{[\mu\nu]} + m\psi_{[\mu\nu]} = 0, \qquad (40)$$

откуда

$$\Box\psi_{[\mu\nu]} - \frac{m^2}{|\alpha|^2}\,\psi_{[\mu\nu]} + \frac{m}{|\alpha|^2}\left(\partial_\mu\,\psi_\nu - \partial_\nu\,\psi_\mu\right) = 0. \qquad (41)$$

Из (16) вытекает соотношение

$$\alpha\left(\partial_\mu\Box\psi_{[\nu\alpha]} + \partial_\alpha\Box\psi_{[\mu\nu]} + \partial_\nu\Box\psi_{[\alpha\mu]}\right) + \beta\,\varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta}\,\partial_\beta\,\Box\psi_0 + m\Box\psi_{[\mu\nu\alpha]} = 0. \qquad (42)$$

Выражая из (41) член $\Box\psi_{[\mu\nu]}\left(\Box\psi_{[\nu\alpha]},\,\Box\psi_{[\alpha\mu]}\right)$ и подставляя в (42), придём к уравнению

$$\Box\psi_{[\mu\nu\alpha]} - \frac{m^2}{|\alpha|^2}\psi_{[\mu\nu\alpha]} + \beta m\left(1 - \frac{1}{|\alpha|^2}\right)\varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta}\partial_\beta\,\psi_0 = 0. \qquad (43)$$

Выбирая в (43)

$$|\alpha|^2 = 1, \qquad (44)$$

получаем окончательно

$$\Box\psi_{[\mu\nu\alpha]} - m^2\,\psi_{[\mu\nu\alpha]} = 0. \qquad (45)$$

Уравнение (36) описывает скалярный бозон с массой m. Уравнения (22), (30), (37) и (45) показывают, что в системе (15) – (21) содержится также описание четырёх векторных частиц, одна из которых имеет нулевую массу, а три других – массы $\frac{m}{|\delta|}$, $\frac{m}{|\rho|}$ и m соответственно.

Матричная интерпретация теории

Тензорная система (15)–(21) может быть записана в стандартной матричной форме

$$\left(\Gamma_\mu\,\partial_\mu + \Gamma_0\right)\psi = 0, \qquad (46)$$

где проективная матрица Γ_0 в базисе $\psi = \left(\psi_\mu,\,\psi_{[\mu\nu\alpha]},\,\psi_{[\mu\nu]},\,\psi_0,\,\varphi_\mu,\,\varphi_{[\mu\nu\alpha]},\,\varphi_{[\mu\nu]}\right)$ имеет вид

$$\Gamma_0 = \begin{pmatrix} 0_4 & \\ & m\,\mathrm{I}_{25} \end{pmatrix}, \qquad (47)$$

где 0_4 – нулевой блок размерности 4×4, I_{25} – единичная матрица 25×25.

Как известно (см., например, [10]), основную роль в РВУ (46) наряду с матрицей Γ_0 играет матрица Γ_4; напомним, что матрицы $\Gamma_i\left(i = 1,2,3\right)$ выражаются через Γ_4

и «бусты» I^{i4} лоренцевских преобразований в пространстве представления волновой функции ψ.

Для установления спектра возможных значений массы и спиновых характеристик микрообъекта, описываемого уравнением (46) со схемой зацеплений (14), удобно использовать так называемый канонический базис (базис Гельфанда – Яглома [10]). В этом базисе компоненты волновой функции $\psi = \psi^{\tau}_{s\,j}$ описывают состояния с определённым значением спина s и проекции спина j; индекс τ указывает на принадлежность данного состояния к неприводимому представлению τ. Матрица Γ_4 имеет вид прямой суммы

$$\Gamma_4 = \oplus\sum_s C^s \otimes \mathrm{I}_{2s+1}\ , \tag{48}$$

где C^s – спиновый блок, соответствующий спину s в том смысле, что если у матрицы C^s имеются ненулевые корни (собственные значения), то частица обладает спином s. Спиновый блок $C^s = c^s_{\tau\tau'}$ формируется неприводимыми представлениями $\tau \sim (l_1, l_2)$, $\tau' \sim (l'_1, l'_2)$, удовлетворяющими условию

$$|l_1 - l_2| \le s \le l_1 + l_2\,, \quad |l'_1 - l'_2| \le s \le l'_1 + l'_2\ . \tag{49}$$

Ненулевые значения массы $m_k^{(s)}$ микрообъекта, описываемого РВУ (46), вычисляются по формуле

$$m_k^{(s)} = \frac{m}{\left|\lambda_k^{(s)}\right|}\ , \tag{50}$$

где $\lambda_k^{(s)}$ – ненулевые корни матрицы Γ_4 (блока C^s), отвечающие единичной клетке в структуре (47) матрицы Γ_0. Корни матрицы Γ_4, которые «обрезаются» проективной матрицей Γ_0, соответствуют нулевой массе (как, например, в десятимерной формулировке уравнений Максвелла).

Введём для упрощения дальнейших обозначений следующую нумерацию представлений, содержащихся в схеме (14):

$$\begin{gathered}(0,0) \sim 1\,(\psi_0); \quad \left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)' \sim 2\,\left(\psi_{[\mu\nu\alpha]}\right); \quad \left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right) \sim 3\,\left(\psi_\mu\right);\\ (0,1),(1,0) \sim 4,5\,\left(\psi_{[\mu\nu]}\right); \quad \left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right) \sim 6\,\left(\varphi_{[\mu\nu\alpha]}\right);\\ \left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right) \sim 7\,\left(\varphi_\mu\right); \quad (0,1),(1,0) \sim 8,9\,\left(\varphi_{[\mu\nu]}\right).\end{gathered} \tag{51}$$

Представления (51) участвуют в формировании только спинов $s = 0,1$. Поэтому матрица Γ_4 РВУ (46), эквивалентного тензорной системе (15) – (21), в базисе Гельфанда – Яглома будет иметь вид:

$$\Gamma_4 = C^0 \oplus \left(C^1 \otimes \mathrm{I}_3\right). \tag{52}$$

Для блоков C^0, C^1 с учётом условия (49), схемы зацеплений (14) и нумерации (51) получаем выражения

$$C^0 = \begin{pmatrix} 0 & c_{12}^0 & 0 & 0 & c_{17}^0 \\ c_{21}^0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ c_{71}^0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad C^1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & c_{24}^1 & c_{25}^1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c_{34}^1 & c_{35}^1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ c_{42}^1 & c_{43}^1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ c_{52}^1 & c_{53}^1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c_{68}^1 & c_{69}^1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c_{78}^1 & c_{79}^1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c_{86}^1 & c_{87}^1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c_{96}^1 & c_{97}^1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad (53)$$

где ненулевые элементы $c_{\tau\tau'}^s$ соответствуют зацепляющимся представлениям в (14).

Инвариантность рассматриваемого РВУ относительно преобразований группы Лоренца никаких дополнительных ограничений на числа $c_{\tau\tau'}^s$ не накладывает.

При построении лагранжиана

$$L = -\bar{\psi}\left(\Gamma_\mu \partial_\mu + \Gamma_0\right)\psi , \qquad (54)$$

из которого может быть получено уравнение (46), используется лоренц-инвариантная вещественная билинейная форма $\bar{\psi}\psi = \psi^+ \eta \psi$. В базисе Гельфанда – Яглома матрица η имеет структуру, аналогичную (48):

$$\eta = \oplus \sum_S \eta^S \otimes I_{2S+1} . \qquad (55)$$

В блоках η^S отличными от нуля являются лишь элементы $\eta_{\tau\dot{\tau}}^S$ $\left(\tau \sim (l_1, l_2),\ \dot{\tau} \sim (l_2, l_1)\right)$, причём

$$\eta_{\tau\dot{\tau}}^S = \eta_{\dot{\tau}\tau}^S \quad -\eta_{\tau\dot{\tau}}^{S+1} . \qquad (56)$$

Не уменьшая общности, матрицу η можно нормировать так, что в блоках η^S будут встречаться только числа ± 1.

Требование возможности лагранжевой формулировки РВУ (46) приводит к условию [3]:

$$c_{\tau\tau'}^S \eta_{\tau'\dot{\tau}'}^S = \left(c_{\dot{\tau}'\dot{\tau}}^S\right)^* \eta_{\tau\dot{\tau}}^S . \qquad (57)$$

Применяя условие (57) к элементам матриц C^0, C^1 (53), получаем соотношения

$$c_{21}^0 = f\left(c_{12}^0\right)^*,\ c_{71}^0 = g\left(c_{17}^0\right)^*,\ c_{42}^1 = h\left(c_{25}^1\right)^*,\ c_{52}^1 = h\left(c_{24}^1\right)^*,$$
$$c_{43}^1 = p\left(c_{35}^1\right)^*,\ c_{53}^1 = p\left(c_{34}^1\right)^*,\ c_{86}^1 = g\left(c_{69}^1\right)^*,\ c_{96}^1 = q\left(c_{68}^1\right)^*,$$
$$c_{87}^1 = r\left(c_{79}^1\right)^*,\ c_{97}^1 = r\left(c_{78}^1\right)^*, \qquad (58)$$

где для краткости записи введены обозначения

$$f = \eta_{22}^0 / \eta_{11}^0, \qquad g = \eta_{77}^0 / \eta_{11}^0, \qquad h = \eta_{45}^1 / \eta_{22}^1,$$
$$p = \eta_{45}^1 / \eta_{33}^1, \qquad q = \eta_{89}^1 / \eta_{66}^1, \qquad r = \eta_{89}^1 / \eta_{77}^1 . \qquad (59)$$

Чтобы получить матричное РВУ, эквивалентное тензорной системе (15) – (21), можно выбрать, например:

$$c_{12}^0 = c_{17}^0 = \frac{1}{\sqrt{2}}; \quad c_{24}^1 \quad c_{25}^1 \quad c_{34}^1 \quad -c_{35}^1 = \frac{1}{\sqrt{2}} ;$$
$$c_{68}^1 = c_{69}^1 = \sqrt{\frac{\delta}{2}}, \qquad c_{78}^1 \quad -c_{79}^1 = \sqrt{\frac{\rho}{2}} ; \qquad (60)$$

$$\eta^0_{11} = -\eta^0_{22} = \eta^0_{77} = -\eta^1_{22} = -\eta^1_{33} = \eta^1_{66} = -\eta^1_{77} = -\eta^1_{45} = \eta^1_{89} = 1 . \tag{61}$$

Заметим, что существуют и другие возможности, но все они приводят к унитарно-эквивалентным теориям.

В результате для спиновых блоков C^0, C^1 (53) получаются выражения

$$C^0 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad C^1 = \begin{pmatrix} \left(C^1\right)' & \\ & \left(C^1\right)'' \end{pmatrix}, \tag{62}$$

$$\left(C^1\right)' = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \left(C^1\right)'' = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 & 0 & \delta & \delta \\ 0 & 0 & \rho & -\rho \\ \delta^* & \rho^* & 0 & 0 \\ \delta^* & -\rho^* & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Вид блоков η^0, η^1 матрицы билинейной формы η (53) вытекает из (61).

Блок C^0 имеет корни $0, \pm 1$. Ненулевой корень ± 1 соответствует массе m скалярной частицы. Блок $\left(C^1\right)'$ имеет двукратно вырожденные корни ± 1, ± 1, один из которых в силу проективности матрицы Γ_0 описывает безмассовое векторное поле, второй – массивное векторное поле с массой m. Корни $\pm\delta$, $\pm\rho$ блока $\left(C^1\right)''$ соответствуют векторным полям с массами $\dfrac{m}{|\delta|}$ и $\dfrac{m}{|\rho|}$.

Обсуждение и выводы

Таким образом, схема зацеплений (14) позволяет построить релятивистское волновое уравнение, описывающее векторное поле с четырьмя типами квантов: одним безмассовым и тремя массивными. При этом в теории неизбежно возникает скалярная частица с ненулевой массой, которая собственно и обеспечивает единство компонент указанного векторного поля.

Скалярное и векторное поля описываются совместно в рам ках одной не распадающейся по группе Лоренца системы уравнений и, следовательно, с точки зрения положений теории РВУ представляют собой единый физический объект – массивно-безмассовое скалярно-векторное поле. Очевидно, что его векторная составляющая может интерпретироваться как «электрослабое» поле, а скалярная – как аналог бозона Хиггса. Линейный характер уравнения (36), описывающего скалярный бозон, связан в тем, что вопрос о происхождении массы находится вне компетенции стандартной теории РВУ, рамками которой мы ограничиваемся, а наличие или отсутствие массы является заданным фактом.

Отметим также, что в предлагаемой модели масса скалярного бозона совпадает с массой одного из промежуточных векторных бозонов (очевидно, Z^0). Массы всех частиц выступают в качестве произвольных параметров теории.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Petraš, M. A note to Bhabha's equation for a particle with maximum spin $\frac{3}{2}$ / M. Petraš // Chech. J. Phys. – 1955. – Vol. 5, № 3. – P. 418–419.
2. Улегла, И. Аномальные уравнения для частиц со спином $\frac{1}{2}$ / И. Улегла // ЖЭТФ. – 1957. – Т. 33. – С. 473–477.
3. Darwin, C. G. The wave equation of the electron / C. G. Darwin // Proc. Roy. Soc. A. – 1928. – Vol. 118. – P. 654–680.
4. Стражев, В. И. Уравнение Дирака – Кэлера. Классическое поле / В. И. Стражев, И. А. Сатиков, В. А. Ционенко. – Минск : БГУ, 2007. – 195 с.
5. Плетюхов, В. А. Волновое уравнение с кратными представлениями для частицы со спином 0 / В. А. Плетюхов, Ф. И. Фёдоров // Вес. АН БССР. Сер. фіз.-мат. навук. – 1970. – № 2. – С. 79–85.
6. Плетюхов, В. А. Волновое уравнение с кратными представлениями для частицы со спином 1 / В. А. Плетюхов, Ф. И. Фёдоров // Вес. АН БССР. Сер. фіз.-мат. навук. – 1970. – № 3. – С. 84–92.
7. Плетюхов, В. А. Релятивистские волновые уравнения и внутренние степени свободы / В. А. Плетюхов, В. М. Редьков, В. И. Стражев. – Минск : Беларус. навука, 2015. – 328 с.
8. Плетюхов, В. А. Описание массивных и безмассовых полей в теории обобщённых релятивистских волновых уравнений / В. А. Плетюхов, В. И. Стражев // Вучоныя запіскі БрДУ ім. А. С. Пушкіна. – 2007. – Т. 3, ч. 2. – С. 50–66.
9. Pletyukhov, V. A. Massless and massive gauge-invariant fields in the theory of relativistic wave equations [Electronic resourse] / V. A. Pletyukhov, V. I. Strazhev. – Mode of access: arXiv:1002.0720v1[hep-th]. – Date of access: 03.02.2010.
10. Гельфанд, И. М. Представления группы вращений и группы Лоренца / И. М. Гельфанд, Р. А. Минлос, З. Я. Шапиро. – М. : Наука, 1958. – 368 с.

Рукапіс паступіў у рэдакцыю 07.04.2016

Pletyukhov V.A. **The Theory of Relativistic Wave Equations and the Electroweak Field**

We construct a relativistic wave equation describing a vector field with four types of quanta – one massless and three massive ones. In this construction inevitably appears a scalar particle with nonzero mass. The scalar and vector fields are simultaneously described by the same system of equations which are not being disintegrated under the Lorentz group transformations; for this reason these fields represent a single physical object. Its vector component can be interpreted as an «electroweak» filed, while the scaler component is an analogue of the Higgs boson. In the suggested model, mass of the scalar boson coincides with mass of the intermediate – Z^0 *– vector boson. Nonzero masses of all particles appear to be free parameters of the theory.*