УДК 513.82

Е.В. Зубей, А.А. Юдов

О СВОЙСТВАХ РЕДУКТИВНЫХ ПРОСТРАНСТВ, ПОРОЖДЕННЫХ ГРУППОЙ ДВИЖЕНИЙ ПРОСТРАНСТВА ${}^1R_4$ С ОДНОПАРАМЕТРИЧЕСКИМИ ГРУППАМИ СТАЦИОНАРНОСТИ

Работа посвящена изучению однородных пространств с фундаментальной группой G – группой движений четырехмерного псевдоевклидова пространства нулевой сигнатуры (пространства ${}^1R_4$). Исследуются однородные пространства вида G/G_i, где G_i – однопараметрические подгруппы Ли группы Ли вращений пространства ${}^1R_4$. Среди всех таких однородных пространств находятся редуктивные однородные пространства.

1. Введение

Работа посвящена изучению однородных пространств с фундаментальной группой – группой движений четырехмерного псевдоевклидова пространства нулевой сигнатуры (пространства ${}^1R_4$).

Изучением однородных пространств занимались многие ученые: Лумисте Ю. [1], Феденко А.С. [2] , Белько И.В.[3], Ведерников В.И. [4], а так же их ученики: Кононов С.Г., Юдов А.А. [5–7] и др.

В их работах исследуются свойства подмногообразий однородных пространств, связности на однородных пространствах, проводится классификация однородных пространств. Особенно много исследований посвящено изучению богатых дифференциально-геометрическими свойствами редуктивных однородных пространств. Редуктивные однородные пространства активно исследовались зарубежными геометрами: Номидзу К. [8], Кобаяси Ш. [9] и др. Много работ по редуктивным однородным пространствам выполнено Лумисте Ю. и его учениками. В данной работе продолжены исследования в этом направлении.

Проведена классификация редуктивных однородных пространств с фундаментальной группой движений пространства ${}^1R_4$, причем для таких редуктивных пространств найдены все редуктивные дополнения. Показано приложение этих исследований для изучения дифференциально-геометрических свойств исследуемых редуктивных однородных пространств.

Результаты исследований могут быть применены в дифференциальной геометрии при исследовании связностей и их расширений в главных расслоениях, а также при изучении инвариантных аффинных связностей в главных расслоениях.

2. Постановка задачи

Классификация всех связных подгрупп Ли группы Ли G с точностью до сопряженности имеется [3]. Тем самым классифицированы с точностью до изоморфизма все однородные пространства со структурной группой G. Ставится задача среди всех таких однородных пространств выделить редуктивные однородные пространства. В данной работе найдены все редуктивные однородные пространства вида G/G_i, где G_i – связная однопараметрическая подгруппа Ли группы Ли H вращений пространства ${}^1R_4$. Метод решения задачи состоит в том, что для исследуемого однородного пространства G/G_i рассматриваются соответствующие алгебры Ли $\overline{G}$ и $\overline{G_i}$, затем находятся все пятимерные подпространства алгебры Ли $\overline{H}$, инвариантные относительно $ad\,\overline{G_i}$. Среди таких пространств находятся дополнительные к $\overline{G_i}$. Эти пространства будут редуктивными дополнениями для однородного пространства H/G_i. Поскольку пространства G/H редуктивно, отсюда будет следовать редуктивность однородного пространства G/G_i.

3. Редуктивные однородные пространства с однопараметрической группой стационарности

3.1 Рассмотрим однородное пространство H/G_1 $\overline{G_1} = \{i_9\}$. Будем находить пятимерные подпространства в $\overline{H}$, инвариантные относительно $ad\overline{G_1}$.

Система векторов $\{\overline{x_1}, \overline{x_2}, \overline{x_3}, \overline{x_4}, \overline{x_5}\}$ в случае 1° может быть выбрана в виде: $\{i_5 + \lambda\, i_9, i_{10} + \mu\, i_9, i_7 + \nu\, i_9, i_8 + \sigma\, i_9, i_6 + s\, i_9\}$. Из условия инвариантности подпространства $\{\overline{x_1}, \overline{x_2}, \overline{x_3}, \overline{x_4}, \overline{x_5}\}$ относительно $ad\overline{G_1}$ следует $\mu = 0, \nu = 0, \sigma = 0, \lambda = 0$. Таким образом, инвариантны подпространства: $\{i_5, i_{10},\ i_7, i_8, i_6 + si_9\}$.

В случае 2° ищем инвариантные подпространства в виде: $\{i_5 + \lambda\, i_6, i_{10} + \mu\, i_6, i_7 + \nu\, i_6, i_8 + \sigma\, i_6, i_9\}$. Система инвариантности в этом случае приводится к виду $\mu = 0, \nu = 0, \sigma = 0, \lambda = 0$. Получаем инвариантное подпространство $\{i_5, i_{10},\ i_7, i_8, i_9\}$.

В случаях $3^\circ, 4^\circ, 5^\circ, 6^\circ$ системы инвариантности противоречивы.

3.2 Для однородного пространства H/G_2, $\overline{G_2} = \{i_6\}$.

Система векторов $\{\overline{x_1}, \overline{x_2}, \overline{x_3}, \overline{x_4}, \overline{x_5}\}$ в случае 1° может быть выбрана в виде:

$$\{i_5 + \lambda\, i_9, i_{10} + \mu\, i_9, i_7 + \nu\, i_9, i_8 + \sigma\, i_9, i_6 + s\, i_9\}.$$

Из условия инвариантности подпространства $\{\overline{x_1}, \overline{x_2}, \overline{x_3}, \overline{x_4}, \overline{x_5}\}$ относительно $ad\overline{G_2}$ следует $\mu = 0, \nu = 0, \sigma = 0, \lambda = 0$. Таким образом, инвариантны подпространства: $\{i_5, i_{10},\ i_7, i_8, i_6 + si_9\}$.

В случае 2° ищем инвариантные подпространства в виде:

$$\{i_5 + \lambda\, i_6, i_{10} + \mu\, i_6, i_7 + \nu\, i_6, i_8 + \sigma\, i_6, i_9\}.$$

Система инвариантности в этом случае приводится к виду $\mu = 0, \nu = 0, \sigma = 0, \lambda = 0$. Получаем инвариантное подпространство $\{i_5, i_{10},\ i_7, i_8, i_9\}$.

В случае 3° ищем инвариантные подпространства в виде:

$$\{i_5 + \lambda\, i_8, i_{10} + \mu\, i_8, i_7 + \nu\, i_8, i_6, i_9\}.$$

Система инвариантности в этом случае приводится к виду $\lambda = \pm 1, -\lambda\mu + \nu = 0, -\lambda\nu + \mu = 0.$ Из которой получаем, что $\lambda = 1, \mu = \nu$ или $\lambda = -1, \mu = -\nu$. Получаем инвариантное подпространство $\{i_5 \pm i_8, i_{10} + \mu\, i_8,\ i_7 \pm \mu\, i_8, i_6,\ i_9\}$.

В случае $4°$ ищем инвариантные подпространства в виде:

$$\{i_5 + \lambda\, i_7, i_{10} + \mu\, i_7, i_8, i_6, i_9\}.$$

Система инвариантности в этом случае приводится к виду $\lambda\mu = 0, \mu^2 = 1, \lambda = 0.$ Решая эту систему, находим, что $\lambda = 0, \mu = \pm 1.$ Получаем инвариантное подпространство $\{i_5, i_{10} \pm i_7, i_8, i_6,\ i_9\}$.

В случаях $5°, 6°$ системы инвариантности противоречивы.

3.3 Рассмотрим однородное пространство H / G_3, $\overline{G_3} = \{i_5 - i_8\}$.

В случае $1°$ ищем инвариантные подпространства в виде: $\{i_5 + \lambda\, i_{10}, i_6 + \mu\, i_{10}, i_7 + \nu\, i_{10}, i_8 + \sigma\, i_{10}, i_9 + s\, i_{10}\}$. Система инвариантности в этом случае приводится к виду:

$$s + \lambda\nu + \lambda\mu = 0,\ \mu^2 + \mu\nu = -1, \nu^2 + \mu\nu = 1, \sigma\mu + \sigma\nu + s = 0, \lambda + \nu s + s\mu + \sigma = 0.$$

Складывая второе и третье уравнение этой системы, получаем: $\mu = -\nu$. Подставляя найденные значения во второе уравнение системы, получаем $0 = 1$, т.е. противоречие. Следовательно, система инвариантности в случае $1°$ противоречива.

В случае $2°$ ищем инвариантные подпространства в виде $\{i_5 + \lambda\, i_6, i_{10} + \mu\, i_6, i_7 + \nu\, i_6, i_8 + \sigma\, i_6, i_9\}$. Система инвариантности в этом случае приводится к виду:

$$\begin{cases} -\lambda^2 + \lambda\sigma = 1, \\ -\lambda\mu + \mu\sigma = 0, \\ -\lambda\nu + \nu\sigma = 0, \\ -\lambda\sigma + \sigma^2 = 1, \\ \quad \mu + \nu = 0. \end{cases}$$

Решая эту систему получаем, что $0 = 1$, т.е. противоречие. Следовательно, система инвариантности в случае $2°$ противоречива.

В случае $3°$ ищем инвариантные подпространства в виде: $\{i_5 + \lambda\, i_8, i_{10} + \mu\, i_8, i_7 + \nu\, i_8, i_6, i_9\}$. Из системы инвариантности следует $\mu = -\nu, \lambda = 1.$ Получили инвариантные подпространства в виде: $\{i_5 - i_8, i_{10} + \mu\, i_8, i_7 - \mu\, i_8, i_6, i_9\}$.

В случае $4°$ ищем инвариантные подпространства в виде: $\{i_5 + \lambda\, i_7, i_{10} + \mu\, i_7, i_8, i_6, i_9\}$. Из системы инвариантности следует $\mu = 1, \lambda = 0.$ Получили инвариантное подпространство в виде: $\{i_5, i_7 + i_{10}, i_8, i_6, i_9\}$.

В случаях $5°, 6°$ системы инвариантности противоречивы.

3.4 Рассмотрим однородное пространство H / G_4, $\overline{G_4} = \{i_6 + \theta\, i_9\}$.

В случае $1°$ ищем инвариантные подпространства в виде:

$$\{i_5 + \lambda\, i_{10}, i_6, + \mu\, i_{10}, i_7 + \nu\, i_{10}, i_8 + \sigma\, i_{10}, i_9 + s\, i_{10}\}.$$

Система инвариантности приводится к виду

$$-\nu - \theta\,\sigma = 0, \theta\,\nu - \sigma = 0,\ \lambda\,\mu + \lambda = 0,\ -\lambda\,\theta + \mu = 0.$$

Отсюда следует, что $\nu = 0,\ \sigma = 0,\ \mu = 0,\ \lambda = 0.$

Получили инвариантные подпространства в виде: $\{i_5, i_{10}, i_7, i_8, i_6 + s\, i_9\}$.

В случае 2° ищем инвариантные подпространства в виде $\{i_5+\lambda\, i_6, i_{10}+\mu\, i_6, i_7+\nu\, i_6, i_8+\sigma\, i_6, i_9\}$. Система инвариантности в этом случае приводится к виду $-\nu-\sigma\theta=0,\ \theta\nu-\sigma=0,\ \lambda+\theta\mu=0,\ -\theta\lambda+\mu=0.$ Отсюда следует, что $\nu=0,\ \sigma=0,\ \mu=0,\ \lambda=0.$ Получили инвариантные подпространства в виде: $\{i_5, i_{10}, i_7, i_8, i_9\}$.

В случае 3° ищем инвариантные подпространства в виде; $\{i_5+\lambda\, i_8, i_{10}+\mu\, i_8, i_7+\nu\, i_8, i_6, i_9\}$. Из системы инвариантности следует $\lambda^2\,\theta+\lambda\,\mu-\nu=-\theta,\ -\theta\lambda\mu+\mu^2+\theta\nu=-1,\ (1-\theta\nu)\lambda+(\nu+\theta)\mu=0.$ Из первого уравнения системы: $\lambda\mu-\nu=-\theta(\lambda^2+1),$ из второго уравнения системы: $\lambda\mu-\nu=\dfrac{1+\mu^2}{\theta},$ т.е. $-\theta(\lambda^2+1)=\dfrac{1+\mu^2}{\theta}.$ Откуда $-\theta^2(\lambda^2+1)=1+\mu^2.$ Система инвариантности в случае 3° противоречива.

В случае 4° ищем инвариантные подпространства в виде: $\{i_5+\lambda\, i_7, i_{10}+\mu\, i_7, i_8, i_6, i_9\}$. Из системы инвариантности следует

$$\lambda^2+\lambda\,\mu\theta=-1,\ \lambda\mu+\theta\mu^2=\theta, \mu-\theta\lambda=0. \tag{1}$$

Третье уравнение системы домножим на λ, и от второго уравнения отнимем третье, получим $\mu=0,\ \lambda=0.$ Подставив найденные значения в первое уравнение системы (1), получим противоречие. Следовательно, система инвариантности в случае 4° противоречива.

В случаях 5°, 6° системы инвариантности противоречивы.

3.5 Подведем итоги исследования однородных пространств с однопараметрическими группами стационарности точки в виде следующей теоремы.

Теорема 1. Ниже перечислены все инвариантные подпространства для всех однопараметрических подгрупп Ли группы Ли вращений пространства Минковского $(\overline{G_1}-\overline{G_4})$:

1) для пространства H/G_1 инвариантными подпространствами являются только следующие пространства: $\{i_5, i_{10},\ i_7, i_8, i_6+si_9\}, \{i_5, i_{10},\ i_7, i_8, i_9\}$;

2) для пространства H/G_2 инвариантными подпространствами являются только следующие пространства: $\{i_5, i_{10},\ i_7, i_8, i_6+si_9\}$, $\{i_5, i_{10},\ i_7, i_8, i_9\}$. $\{i_5\pm i_8, i_{10}+\mu\, i_8,\ i_7\pm\mu\, i_8, i_6, i_9\}, \{i_5, i_{10}\pm i_7, i_8, i_6, i_9\}$;

3) для пространства H/G_3 инвариантными подпространствами являются только следующие пространства: $\{i_5-i_8, i_{10}+\mu\, i_8, i_7-\mu\, i_8, i_6, i_9\},\ \{i_5, i_7+i_{10}, i_8, i_6, i_9\}$;

4) для пространства H/G_4 инвариантными подпространствами являются только следующие пространства: $\{i_5, i_{10}, i_7, i_8, i_6+s\, i_9\}, \{i_5, i_{10}, i_7, i_8, i_9\}$.

Теорема 2. Пространство $\{i_5, i_{10},\ i_7, i_8, i_9\}$ не является дополнительным к $\overline{G_1}$, пространства $\{i_5\pm i_8, i_{10}+\mu\, i_8,\ i_7\pm\mu\, i_8, i_6, i_9\}, \{i_5, i_{10}\pm i_7, i_8, i_6, i_9\}$ не являются дополнительными к $\overline{G_2}$, пространства $\{i_5-i_8, i_{10}+\mu\, i_8, i_7-\mu\, i_8, i_6, i_9\},\ \{i_5, i_7+i_{10}, i_8, i_6, i_9\}$ не являются дополнительными к $\overline{G_3}$, пространство $\{i_5, i_{10}, i_7, i_8, i_6 + s\, i_9\}$ при $s = \theta$ не является дополнительным к $\overline{G_4}$.

Таким образом, получена следующая теорема:

Теорема 3. Пространство H / G_1, является редуктивным, редуктивными дополнениями к $\overline{G_1}$ являются только подпространства $\{i_5, i_{10},\ i_7, i_8, i_6 + si_9\}$, пространство H / G_2 является редуктивным, редуктивными дополнениями к $\overline{G_2}$ являются только подпространства $\{i_5, i_{10},\ i_7, i_8, i_6 + si_9\}$ при $s \neq 0$ и $\{i_5, i_{10},\ i_7, i_8, i_9\}$, пространство H / G_3 не является редуктивным, пространство H / G_4 является редуктивным, редуктивными дополнениями являются только подпространства $\{i_5, i_{10}, i_7, i_8, i_6 + s\, i_9\}$ при $s \neq 0$ и $\{i_5, i_{10}, i_7, i_8, i_9\}$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Белько, И.В. Подгруппы группы Лоренца / И.В. Белько, А.С. Феденко // ДАН БССР. –1970. – т. XIY. – № 6. – С. 393–395.
2. Белько, И.В. Подгруппы группы Лоренца-Пуанкаре / И.В. Белько // Известия АН БССР. Сер. физ.-мат. – 1971. –№1. – С. 5–13.
3. Ведерников, В.И. Симметрические пространства и сопряженные связности / В.И. Ведерников // Уч. зап. Казанского ун-та. – 1965. – Т. 125 – кн. 1. – С. 7–59.
4. Рийвес, К. Подгруппы группы движений Евклида пространства R_5 и их орбиты / К. Рийвес // Уч. зап. Тартуского ун-та. – 1975. – Выпуск 355. – С. 35–56.
5. Лунисте, Ю. Связности в главных расслоениях / Ю. Лунисте // Труды I республиканской конференции математиков БССР. – 1965.– Минск. – С. 247–258.
6. Тутаев, Л.К. К дифференциальной геометрии линий и поверхностей в пространстве Минковского / Л.К. Тутаев //Труды I республиканской конференции математиков БССР. – 1965. – Минск. – С. 290–307.
7. Юдов, А.А. Подгруппы группы движений четырехмерного псевдоевклидова пространства нулевой сигнатуры / А.А. Юдов // Вестник БГУ им. В.И. Ленина. – 1977. – №1. – С. 16–21.
8. Хелгасон, С. Дифференциальная геометрия и симметрические пространства / С. Хелгасон. – М : Мир, 1964. – 533 с.
9. Кобаяси, Ш. Основы дифференциальной геометрии / Ш. Кобаяси, К. Номидзу. – Т.I – М : Наука, 1981. – 343 с.
10. Кобаяси, Ш. Основы дифференциальной геометрии / Ш. Кобаяси, К. Номидзу. – Т.II – М : Наука, 1981. – 413 с.
11. Картан, Э. Геометрия групп Ли и симметрические пространства / Э. Картан. – М. – 1949. – С. 119–149.

***E.V. Zubej*, *A.A. Judov* About the Properties of Reductive Spaces Generated by the Group of Motions of Space $^1R_4$ with One-Parameter Groups of Stationarity**

One-dimensional sub-groups of group G of rotation of space $^2R_4$ and corresponding homogeneous spaces G / G_i are considered in the article. Among these homogeneous spaces reduce homogeneous spaces were found.

Рукапіс паступіў у рэдакцыю 21.10.2014