

УДК 524.3+537.6+539.171

**А.И. Серый****О ПОПРАВКАХ К КРИТЕРИЮ СТОНЕРА  
ДЛЯ ЯДЕРНОЙ МАТЕРИИ**

Рассмотрен вопрос о ферромагнетизме электронно-нуклонного вещества в вырожденном и невырожденном состоянии с учетом межнуклонной ядерной (в контактном приближении), а также протонной обменной и корреляционной кулоновской энергии. Рассматриваются конечные значения спиновой поляризации нуклонов и критерий Стонера. Показано существование диапазона температур и плотностей, в котором имеет место энергетическая выгода спиновой поляризации нуклонов.

**Введение. Постановка задачи**

В работе продолжены исследования, начатые в [1, с. 30–37; 2, с. 50–58] с целью объяснить происхождение магнитных полей вследствие спиновой поляризации нуклонов в астрофизике. Объект исследований – электронно-протонная (eр-) и электронно-нуклонная (eнр-) системы при взрывах Сверхновых II типа и в оболочках белых карликов классов DAP и DAN [3, с. 185] в приближениях крайнего вырождения и невырождения. У белых карликов в тесных двойных системах намагниченность может возникнуть (наряду с другими путями) при аккреции водорода [4]. Рассмотрим плотности, при которых критерий Стонера выполнен лишь для нуклонов, но не для электронов [2, с. 51]. Поэтому энергия электронов не учтена, присутствие электронов учтено в равенстве длин ядерного протон-протонного и нейтрон-нейтронного рассеяния.

**Учет корреляционной кулоновской энергии вырожденных протонов**

Корреляционная энергия кулоновского взаимодействия жидкой протонной подсистемы вычисляется во 2-м порядке теории возмущений по фреиховской константе в рамках диаграммной техники Фейнмана [5, с. 67–112] или Мацубары [5, с. 195–202]. Рассмотрим соответствующее выражение согласно [6, с. 205, 206]:

$$\alpha \frac{\partial}{\partial \alpha} w_{corr} = \frac{-\hbar c p_{Fp}}{8\pi^3 m_p c} \int_0^{+\infty} \kappa^4 \ln \left( 1 + \frac{P_{Fp}^2}{\kappa^2 \hbar^2 P(s)} \right) P^2(s) ds, \quad P(s) = 1 - s \cdot \arctg \left( \frac{1}{s} \right),$$

$$p_{Fp} = (3\pi^2 n_p)^{1/3} \hbar, \quad \kappa^2 = 4\pi \hbar c \nu \alpha, \quad \nu = \frac{m_p p_{Fp}}{\pi^2 \hbar^3}, \quad \alpha = \frac{e^2}{\hbar c}. \quad (1)$$

Здесь  $n_p$ ,  $m_p$  – концентрация и масса протонов,  $P(s) \rightarrow 1$  при  $s \rightarrow 0$ ,  $P(s) \rightarrow 0$  при  $s \rightarrow +\infty$ . Если несобственный интеграл в (1) сходится равномерно по  $\alpha$ , то его можно интегрировать по  $\alpha$  (от 0 до  $\alpha$ ). Тогда с учетом обозначений в (1) получаем:

$$w_{corr} = -w_0 F(X), \quad w_0 = \frac{3m_p c^2 n_p \alpha^2}{\pi^3},$$

$$F(X) = \int_0^{+\infty} \left( \ln \left( 1 + \frac{X}{P(s)} \right) + \frac{X}{P(s)} - \frac{X^2}{P^2(s)} \ln \left( 1 + \frac{P(s)}{X} \right) \right) P^2(s) ds, \quad X = \frac{\pi p_{Fp}}{4m_p c \alpha}. \quad (2)$$

Перепишем (2) с учетом новых обозначений:

$$X_{\uparrow,\downarrow} = \frac{\pi\hbar(6\pi^2 n_{p\uparrow,\downarrow})^{1/3}}{4m_p c\alpha}, \quad n_{p\uparrow,\downarrow} = \frac{n_p}{2} + \delta n_{p\uparrow,\downarrow}, \quad n_p = \sum_{i=\uparrow,\downarrow} n_{pi}, \quad w_{corr} = -\frac{w_0}{2} \sum_{i=\uparrow,\downarrow} F(X_i). \quad (3)$$

В конечном интервале значений  $n_p$  можно считать, что несобственный интеграл в (2) сходится равномерно, и его можно дифференцировать по параметру  $n_p$ . Тогда, согласно (3), дифференцируя по  $n_{p\uparrow,\downarrow}$  и сразу разлагая по  $\delta n_{p\uparrow,\downarrow}$ , находим корреляционные поправки к химическому потенциалу протонов:

$$E_{corr\uparrow,\downarrow} = \frac{\partial w_{corr}}{\partial n_{p\uparrow,\downarrow}} = \frac{w_{corr}}{n_p} - \frac{2w_0 X}{3n_p} \int_0^{+\infty} P(s) ds + \frac{2w_0 X^2}{3n_p} \int_0^{+\infty} \ln\left(1 + \frac{P(s)}{X}\right) ds + Z \delta n_{p\uparrow,\downarrow},$$

$$Z = \frac{4w_0 X}{9n_p^2} \left( 2 \int_0^{+\infty} P(s) ds - XG \right), \quad G = \int_0^{+\infty} \left( \ln\left(1 + \frac{P(s)}{X}\right) + \frac{P(s)}{P(s)+X} \right) ds. \quad (4)$$

Применяя алгоритм, использованный при выводе критерия Стонера для вырожденного электронно-нуклонного вещества с поляризованными по спину нуклонами [1, с. 33], можно убедиться, что корреляционную поправку к эффективной константе протон-протонного взаимодействия  $g_{pp}$  дает лишь выражение  $Z$  в (4):

$$\Delta g_{pp}^{corr} = -\frac{2c\alpha\hbar}{(3\pi^2)^{2/3} n_p^{2/3}} \int_0^{+\infty} P(s) ds + \frac{\pi\hbar^2 G}{4m_p n_p^{1/3} (3\pi^2)^{1/3}}. \quad (5)$$

Т.к.  $X = X(n_p)$ , то 2-й интеграл в (5) зависит от  $n_p$  как от параметра. Численно 1-й интеграл в (5) приближенно равен 0.785398. Согласно [1, с. 34], запишем выражение для флуктуаций плотности энергии вырожденной протонно-нейтронной системы

$$\delta w = \sum_{i=n,p} \frac{(\delta n_{i\uparrow})^2 + (\delta n_{i\downarrow})^2}{2\nu_{0i}} + \sum_{i=n,p} \tilde{g}_{ii} \delta n_{i\uparrow} \delta n_{i\downarrow} + g_{np}^{\uparrow\uparrow} (\delta n_{n\uparrow} \delta n_{p\uparrow} + \delta n_{n\downarrow} \delta n_{p\downarrow}) + g_{np}^{\uparrow\downarrow} (\delta n_{n\uparrow} \delta n_{p\downarrow} + \delta n_{n\downarrow} \delta n_{p\uparrow}). \quad (6)$$

Учтем соотношение  $\delta n_{i\uparrow} = -\delta n_{i\downarrow}$  и связь между  $\delta n_{p\uparrow}$ ,  $\delta n_{n\uparrow}$  при  $B = 0$  [1, с. 33]:

$$\delta n_{i\uparrow} = \nu_{0i} \tilde{g} \lambda_i^{-1} \delta n_{j\uparrow}, \quad \tilde{g} = g_{np}^{\uparrow\downarrow} - g_{np}^{\uparrow\uparrow}, \quad \lambda_i = 1 - \nu_{0i} \tilde{g}_{ii}. \quad (7)$$

Подставляя (7) в (6), получим (как и через нахождение полюсов магнитной восприимчивости) критерий Стонера для вырожденной протонно-нейтронной системы:

$$\nu_{0n} \nu_{0p} \Xi + \tilde{g}_{nn} \nu_{0n} + \tilde{g}_{pp} \nu_{0p} - 1 \geq 0, \quad \nu_{0i} = \frac{m_i P_{Fi}}{2\pi^2 \hbar^3}, \quad \Xi = \tilde{g}^2 - \tilde{g}_{pp} g_{nn},$$

$$g_{np}^{\uparrow\uparrow} = 2J_{np} a_t > 0, \quad g_{np}^{\uparrow\downarrow} = J_{np} (a_t + a_s) < 0, \quad g_{ii} = J_{ii} a_i < 0, \quad J_{ij} = \pi\hbar^2 \frac{m_i + m_j}{m_i m_j},$$

$$\tilde{g}_{pp} = g_{pp} + \Delta g_{pp}^{exch} + \Delta g_{pp}^{corr}, \Delta g_{pp}^{exch} = \frac{2\pi e^2}{(3\pi^2 n_p)^{2/3}}, \tilde{g}_{nn} = g_{nn}. \quad (8)$$

Длины  $s$ -рассеяния (в  $10^{-13}$  см) [7, с. 20, 30, 31]:  $a_s = -23.71$ ,  $a_t = 5.42$ ,  $a_p = a_n = -17.2$  (когда протонная энергия Хартри компенсируется фоном электронов).

Представив интегралы  $G$  в виде бесконечных рядов, можно перенести параметры из подынтегральных выражений в пределы интегрирования. При  $n_p < 2.9 \cdot 10^{33} \text{ см}^{-3}$  возможно  $X < P(s)$  и  $X > P(s)$ , поэтому каждый интеграл разбивается на 2 – от 0 до  $s_1$  и от  $s_1$  до  $+\infty$ , где  $X = P(s_1)$  при заданном  $n_p$ , т.е.  $s_1 = s_1(n_p)$ . Тогда получим:

$$G = \frac{2}{X} \int_{s_1}^{+\infty} P(s) ds + \int_0^{s_1} \ln(P(s)) ds - s_1 \ln X + s_1 + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{(-1)^j (j-1)}{j} X^j \int_0^{s_1} P^{-j}(s) ds + \sum_{j=2}^{\infty} \frac{(-1)^{j-1} (j+1)}{j X^j} \int_{s_1}^{+\infty} P^j(s) ds. \quad (9)$$

При  $n_p > 2.9 \cdot 10^{33} \text{ см}^{-3}$   $X > P(s)$  при любом  $s$ , и тогда в (9) остается 1-й интеграл и последняя сумма, причем  $s_1 = 0$ . Результаты для (8) представлены в таблице 1 и графически на рисунках 1, 2. Принятые обозначения: I – модель, в которой учтено лишь контактное ядерное взаимодействие, II – также учтена обменная кулоновская протон-протонная поправка, III – помимо обменной поправки учтена еще и корреляционная.

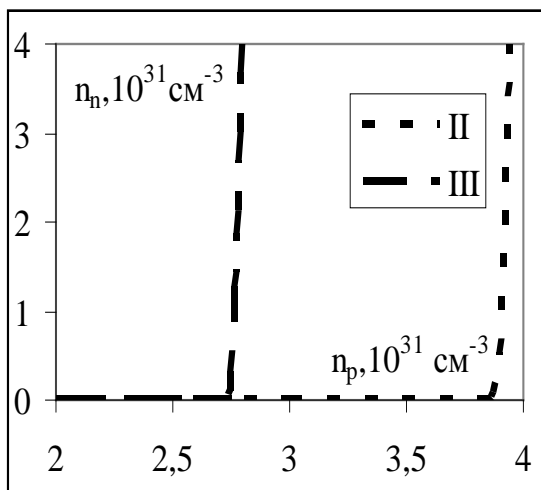


Рисунок 1 – Область ферромагнетизма для низких плотностей

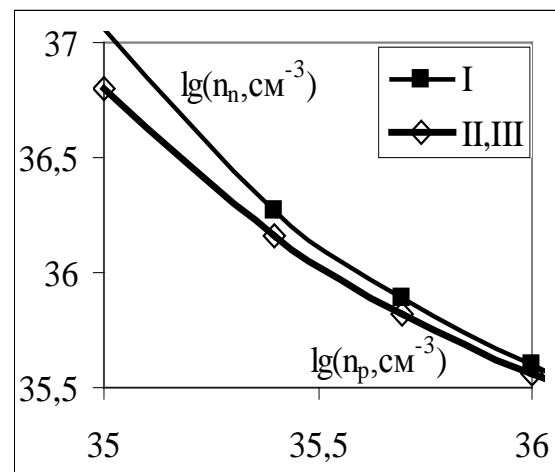


Рисунок 2 – Область ферромагнетизма для высоких плотностей

Из рисунков 1 и 2 и данных таблицы 1 видно, что качественно графики не отличаются от полученных при учете лишь обменной поправки для кулоновского протон-протонного взаимодействия [1, с. 35], т.е. имеются 2 области ферромагнетизма на диаграмме  $(n_p, n_n)$ , причем обе несколько уменьшаются по сравнению со случаем учета лишь обменной поправки (на рисунке 2 различия почти нет).

Таблица 1 – Минимальные значения  $n_n$  и соответствующие им  $n_p$

Область	минимальное $n_n$	значения $n_p$ , при которых есть ферромагнетизм		
		I	II	III
Левая	0	---	$< 3.85 \cdot 10^{31} \text{ см}^{-3}$	$< 2.73 \cdot 10^{31} \text{ см}^{-3}$
	$+\infty$	---	$6.91 \cdot 10^{31} \text{ см}^{-3}$	$4.68 \cdot 10^{31} \text{ см}^{-3}$
Правая	$+\infty$	$3.156 \cdot 10^{34} \text{ см}^{-3}$	$2.079 \cdot 10^{34} \text{ см}^{-3}$	$2.127 \cdot 10^{34} \text{ см}^{-3}$
	$3.156 \cdot 10^{34} \text{ см}^{-3}$	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$

Возникает, однако, вопрос о правильности предположения о жидком (газообразном) состоянии протонов. Не учитывая ядерную энергию взаимодействия протонов, считая, что она в твердой и жидкой фазе практически одинакова, запишем выражение для плотности энергии протонной подсистемы в жидкой фазе:

$$w_{ж} = \frac{3}{5} n_p \varepsilon_{Fp} + w_{exch} + w_{corr}, \quad \varepsilon_{Fp} = \frac{p_{Fp}^2}{2m_p}, \quad w_{exch} = -\frac{e^2 (3\pi^2)^{4/3} n_p^{4/3}}{4\pi^3}. \quad (10)$$

При  $n_p = 7.4 \cdot 10^{30} \text{ см}^{-3}$   $w_{TT} \approx -0.035 \cdot 10^{30} \text{ МэВ} \cdot \text{см}^{-3}$  [2, с. 52]. С учетом (2), (10)  $w_{ж} \approx -0.016 \cdot 10^{30} \text{ МэВ} \cdot \text{см}^{-3}$ , т.е.  $w_{TT} < w_{ж}$ , и система неустойчива по отношению к кристаллизации. Т.е. под оболочками белых карликов вблизи порога нейтронизации водород может быть кристаллическим, т.к. фрелиховская константа больше единицы: согласно [6, с. 202], условие  $m_p e^2 (\hbar p_{Fp})^{-1} > 1$  соответствует  $n_p < 1.42 \cdot 10^{33} \text{ см}^{-3}$ , что целиком включает в себя диаграмму на рисунке 1.

Несмотря на это, представленные результаты имеют смысл, т.к.: 1) выше порога нейтронизации возникает вопрос о влиянии последней на агрегатное состояние водорода; 2) при кристаллизации радиус локализации отдельного протона не больше размеров кристаллической ячейки [6, с. 210], но при дефектах решетки локализация электронов и протонов может быть андерсоновской, т.е. область локализации должна возрастать [3, с. 82, 83], что также может оказывать влияние на вопрос об агрегатном состоянии; 3) полученные результаты правомерны для диаграммы на рисунке 2, хотя в этой области влияние корреляционной кулоновской энергии, как и обменной, мало; 4) для рисунка 1 полученные результаты сравнимы с результатами для невырожденного водорода (где ферромагнетизм возможен до  $n_p \sim 10^{30} - 10^{31} \text{ см}^{-3}$  [2, с. 53, 56]), который должен существовать в верхних слоях белых карликов и не должен быть кристаллическим.

### Критерий Стонера для невырожденного электронно-нуклонного вещества

Рассмотрим вопрос о спиновых флуктуациях в невырожденном электронно-нуклонном веществе. Для начала потребуется вывести соотношение между флуктуациями спиновой плотности для нейтронов и протонов.

В слабом магнитном поле  $B$  (по оси  $z$ ) меняется баланс между разными проекциями спинов нуклонов. Далее рассуждаем аналогично [1, с. 33] с заменой вырожденного химического потенциала на невырожденный [8, с. 194]. Здесь  $T_{3i}$  – проекция изоспина,  $T$  – температура,  $\mu_{я}$  – ядерный магнетон,  $\vec{\mu}_i$  – собственный магнитный момент нуклона,  $\gamma_i = |\vec{\mu}_i| / \mu_{я}$ ,  $\gamma_p = 2.793$ ,  $\gamma_n = -1.913$ . Стрелки соответствуют направлениям проекций спинов. Тогда с учетом зеемановской энергии  $\pm \gamma_i / \mu_{я} B$  и энергии между-

клонного взаимодействия запишем выражения для химических потенциалов  $\mu_{i\uparrow,\downarrow}$ :

$$\mu_{i\uparrow,\downarrow} \approx \mu_{0i\uparrow,\downarrow} \mp 2T_{3i} |\gamma_i| \mu_{Я} B + \tilde{g}_{ii}^T \xi_{i\downarrow,\uparrow} + g_{np}^{T\downarrow} \xi_{j\downarrow,\uparrow} + g_{np}^{T\uparrow\uparrow} \xi_{j\uparrow,\downarrow}, x_{i\uparrow,\downarrow} = \frac{(2\pi\hbar)^3 \xi_{i\uparrow,\downarrow}}{2(\pi m_i kT)^{3/2}},$$

$$\frac{\mu_{0i\uparrow,\downarrow}}{kT} \approx \ln\left(\sqrt{2}\left(1 - \sqrt{1 - x_{i\uparrow,\downarrow}}\right)\right), \xi_{i\uparrow,\downarrow} = \frac{n_i}{2} + \delta n_{i\uparrow,\downarrow}, i = n, p, j = p, n, \delta n_{i\uparrow} = -\delta n_{i\downarrow}. \quad (11)$$

Формулы (11) – приближенные, т.к. обменная и корреляционная кулоновская поправка для протонов в  $\tilde{g}_{pp}^T$  – усредненная. На самом деле для отдельного протона она зависит от импульса протона [8, с. 289], что должно быть учтено при получении формулы для  $\mu_{i\uparrow,\downarrow}$ . Но это сильно усложняет задачу математически даже при получении приближенного выражения для  $\mu_{i\uparrow,\downarrow}$ .

Эффективную константу протон-протонного взаимодействия найдем из флуктуаций плотности ядерной, кулоновской обменной и корреляционной энергии [2, с. 55]:

$$\delta w_{Np} + \delta w_{exch} + \delta w_{corr} = \left( (\delta n_{p\uparrow})^2 + (\delta n_{p\downarrow})^2 \right) \left( -\frac{g_{pp}^T}{2} - \frac{\alpha\pi(\hbar c)^3}{m_p c^2 kT} + \frac{3\pi^2 \alpha^{3/2} (\hbar c)^{9/2} n_p^{1/2}}{2(m_p c^2)^{3/2} (kT)^2} \right) =$$

$$= -\frac{\tilde{g}_{pp}^T}{2} \left( (\delta n_{p\uparrow})^2 + (\delta n_{p\downarrow})^2 \right) \Rightarrow \tilde{g}_{pp}^T = g_{pp}^T + \frac{2\alpha\pi(\hbar c)^3}{m_p c^2 kT} - \frac{3\pi^2 \alpha^{3/2} (\hbar c)^{9/2} n_p^{1/2}}{(m_p c^2)^{3/2} (kT)^2}. \quad (12)$$

Усредненные по температуре константы ядерного межнуклонного взаимодействия выразим согласно [7, с. 19, 69], где эффективные радиусы (в фм) [7, с. 20, 30]  $r_{0p} = r_{0n} = 2.79$  (с учетом электронного фона),  $r_{0t} = 1.76$ ,  $r_{0s} = 2.70$ :

$$\tilde{g}_{mm}^T = g_{mm}^T, \quad g_{ii}^T = -\frac{2\pi\hbar^2}{m_i} f_i(q_i), \quad q_i \approx \sqrt{6m_i kT}, \quad \frac{1}{f_i(q_j)} = -\frac{1}{a_i} + \frac{1}{2} r_{0i} \left( \frac{q_j}{\hbar} \right)^2, \quad i = n, p,$$

$$g_{np}^{T\downarrow} = -\frac{\pi\hbar^2}{m_{np}^*} (f_s(q_{np}) + f_t(q_{np})), \quad g_{np}^{T\uparrow\uparrow} = -\frac{2\pi\hbar^2}{m_{np}^*} f_t(q_{np}),$$

$$\frac{1}{f_i(q_{np})} = -\frac{1}{a_i} + \frac{1}{2} r_{0i} \left( \frac{q_{np}}{\hbar} \right)^2, \quad i = t, s, q_{np} \approx \sqrt{3(m_n + m_p)kT}. \quad (13)$$

Приравняв химические потенциалы  $\mu_{i\uparrow} = \mu_{i\downarrow}$  и выполняя приближенные разложения по  $\delta n_{i\uparrow,\downarrow}$  в (11), получим:

$$kT \left( \frac{2}{n_i} + \frac{(\pi\hbar)^3}{(\pi m_i kT)^{3/2}} - \frac{\tilde{g}_{ii}^T}{kT} \right) \delta n_{i\uparrow} \approx 2T_{3i} |\gamma_i| \mu_{Я} B + \tilde{g}^T \delta n_{j\uparrow}, \quad \tilde{g}^T = g_{np}^{T\downarrow} - g_{np}^{T\uparrow\uparrow}. \quad (14)$$

Решая (14) при  $B = 0$  и  $B \neq 0$ , выразим  $\delta n_{i\uparrow}$  ( $\vec{k}_0$  – орт оси  $z$ ):

$$\delta n_{i\uparrow}^{B=0} = \frac{v_{0i}^T \tilde{g}^T \delta n_{j\uparrow}}{\lambda_i^T}, \delta n_{i\uparrow}^{B \neq 0} = 2T_{3i} \mu_{Я} B \left( \gamma_i / v_{0i}^T \lambda_j^T - \tilde{g}^T v_{0p}^T v_{0n}^T / \gamma_j \right) \Omega_T^{-1},$$

$$\Omega_T = \lambda_p^T \lambda_n^T - (\tilde{g}^T)^2 v_{0p}^T v_{0n}^T, \lambda_i^T = 1 - v_{0i}^T \tilde{g}_{ii}^T; v_{0i}^T = \left( \frac{2kT}{n_i} + \frac{\pi^{3/2} \hbar^3}{m_i^{3/2} \sqrt{kT}} \right)^{-1}. \quad (15)$$

В выражении для  $v_{0i}^T$  1-е слагаемое в скобках возникает из-за нахождения  $n_i$  под логарифмом; им нельзя пренебречь по сравнению со 2-м, т.к. это противоречит условию невырождения. Это создает проблемы при согласовании выражения для критерия Стонера с результатом в [2, с. 55] для электронно-протонного вещества через флуктуации энергии, где, вследствие наличия одного сорта нуклонов, соотношения (15) не требовались. Запишем вспомогательные соотношения

$$\delta n_{i\uparrow}^{B=0} = \frac{\tilde{v}_{0i}^T \tilde{g}^T \delta n_{j\uparrow}}{\tilde{\lambda}_i^T}, \delta n_{i\uparrow}^{B \neq 0} = 2T_{3i} \mu_{Я} B \left( \gamma_i / \tilde{v}_{0i}^T \tilde{\lambda}_j^T - \tilde{g}^T \tilde{v}_{0p}^T \tilde{v}_{0n}^T / \gamma_j \right) \tilde{\Omega}_T^{-1},$$

$$\tilde{\Omega}_T = \tilde{\lambda}_p^T \tilde{\lambda}_n^T - (\tilde{g}^T)^2 \tilde{v}_{0p}^T \tilde{v}_{0n}^T, \tilde{\lambda}_i^T = 1 - \tilde{v}_{0i}^T \tilde{g}_{ii}^T; \tilde{v}_{0i}^T = \frac{2m_i^{3/2} \sqrt{kT}}{3\pi^{3/2} \hbar^3}. \quad (15a)$$

Далее можно рассмотреть 2 способа вывода критерия Стонера.

Во-первых, можно вывести критерий Стонера через условие отрицательности флуктуаций энергии при спонтанном нарушении спинового баланса. Опираясь на результаты [1, с. 34; 2, с. 54, 55], аналогично запишем выражение для плотности энергии невырожденной нейтронно-протонной смеси:

$$\delta w^T = g_{np}^{T\uparrow\uparrow} (\delta n_{n\uparrow} \delta n_{p\uparrow} + \delta n_{n\downarrow} \delta n_{p\downarrow}) + g_{np}^{T\uparrow\downarrow} (\delta n_{n\uparrow} \delta n_{p\downarrow} + \delta n_{n\downarrow} \delta n_{p\uparrow}) +$$

$$+ \sum_{i=n,p} \left( \frac{3\pi^{3/2} \hbar^3}{4m_i^{3/2} \sqrt{kT}} - \frac{\tilde{g}_{ii}^T}{2} \right) ((\delta n_{i\uparrow})^2 + (\delta n_{i\downarrow})^2). \quad (16)$$

Преобразуем (16) с учетом  $\delta n_{i\uparrow} = -\delta n_{i\downarrow}$  и взаимосвязи между  $\delta n_{p\uparrow}, \delta n_{n\uparrow}$  при  $B = 0$  в (15). Из условия  $\delta w^T < 0$  получим (в зависимости от выбора  $\delta n_{i\uparrow}$ ):

$$v_{0i}^T \tilde{v}_{0j}^T \tilde{\Xi}_T + \tilde{g}_{ii}^T v_{0i}^T + \tilde{g}_{jj}^T \tilde{v}_{0j}^T - 1 > 0, \Xi_T = (\tilde{g}^T)^2 \left( 2 - \frac{v_{0i}^T \tilde{\lambda}_i^T}{\tilde{v}_{0i}^T \lambda_i^T} \right) - \tilde{g}_{pp}^T \tilde{g}_{nn}^T. \quad (17)$$

Т.о., возникает проблема получения одинаковых результатов при оставлении в (16) только  $\delta n_{p\uparrow}$  или только  $\delta n_{n\uparrow}$ . При использовании (15a) вместо (15) получаем вместо (17) результат, не зависящий от выбора  $\delta n_{i\uparrow}$  при подстановке в (16) (сравни с (8)):

$$\tilde{v}_{0n}^T \tilde{v}_{0p}^T \Xi_T + \tilde{g}_{nn}^T \tilde{v}_{0n}^T + \tilde{g}_{pp}^T \tilde{v}_{0p}^T - 1 > 0, \Xi_T = (\tilde{g}^T)^2 - \tilde{g}_{pp}^T \tilde{g}_{nn}^T. \quad (17a)$$

Кроме того, этот результат, как и (16), при  $n_n = 0$  совпадает с результатом, полученным в [2, с. 54, 55] для водородной плазмы.

Во-вторых, можно найти критерий Стонера через полюсы магнитной восприимчивости системы. Выражение для намагниченности с учетом  $\delta n_{i\uparrow}^{B \neq 0}$  в (15) и (15а) имеет, соответственно, вид, сходный с формулами в [1, с. 33] ( $\vec{k}_0$  – единичный вектор):

$$\vec{M} = 4\vec{k}_0 \mu_{\text{Я}} \sum_{i=n,p} T_{3i} / \gamma_i / \delta n_{i\uparrow},$$

$$\vec{M} = 2\vec{k}_0 \mu_{\text{Я}}^2 B \Omega_T^{-1} \Gamma_T, \quad \Gamma_T = v_{0p}^T \gamma_p^2 \lambda_n^T + v_{0n}^T \gamma_n^2 \lambda_p^T - 2\tilde{g}^T \prod_{i=n,p} v_{0i}^T / \gamma_i /, \quad (18)$$

$$\vec{M} = 2\vec{k}_0 \mu_{\text{Я}}^2 B \tilde{\Omega}_T^{-1} \tilde{\Gamma}_T, \quad \tilde{\Gamma}_T = \tilde{v}_{0p}^T \gamma_p^2 \tilde{\lambda}_n^T + \tilde{v}_{0n}^T \gamma_n^2 \tilde{\lambda}_p^T - 2\tilde{g}^T \prod_{i=n,p} \tilde{v}_{0i}^T / \gamma_i / . \quad (18a)$$

$\Gamma_T > 0, \tilde{\Gamma}_T > 0$ , т.к.  $\tilde{g}^T < 0, \lambda_i^T > 0, \tilde{\lambda}_i^T > 0, v_{0i}^T > 0, \tilde{v}_{0i}^T > 0$  в силу (13)–(15а). Переход магнитной восприимчивости  $\chi = |\vec{M}| / B$  через  $\pm \infty$  к  $\chi < 0$  дает критерий Стонера. В случае (18) из условия  $\Omega_T \leq 0$  получаем (сравни с (8)):

$$v_{0n}^T v_{0p}^T \Xi_T + \tilde{g}_{nm}^T v_{0n}^T + \tilde{g}_{pp}^T v_{0p}^T - 1 \geq 0, \quad \Xi_T = (\tilde{g}^T)^2 - \tilde{g}_{pp}^T \tilde{g}_{nm}^T. \quad (19)$$

Этот результат в точности не совпадает ни с (17), ни с (17а); поэтому при  $n_n = 0$  (19) не совпадает с результатом, полученным в [2, с. 54, 55] для водородной плазмы. В случае (18а) из условия  $\tilde{\Omega}_T \leq 0$  получаем результат, совпадающий с (17а) и, следовательно, с результатами для водородной плазмы при  $n_n = 0$ .

Т.о., хотя критерий Стонера и выводится различными путями, но, в отличие от приближения крайнего вырождения, в приближении крайнего невырождения результаты не совпадают. Возможно, во 2-м случае корректен лишь подход через флуктуации энергии. Обращение магнитной восприимчивости в бесконечность формально приводит к бесконечным флуктуациям спиновой плотности, что должно соответствовать полной поляризации, а при отличной от нуля температуре это в принципе невозможно.

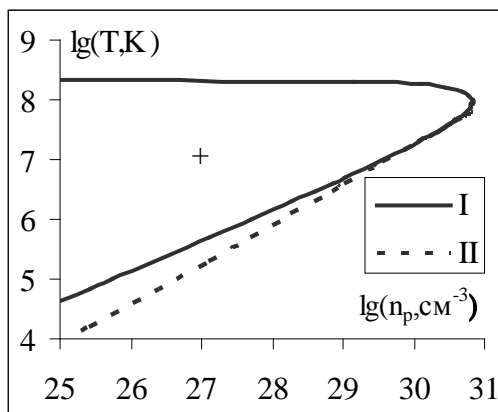


Рисунок 3 – Критерий Стонера для невырожденных протонов, согласно (17а)

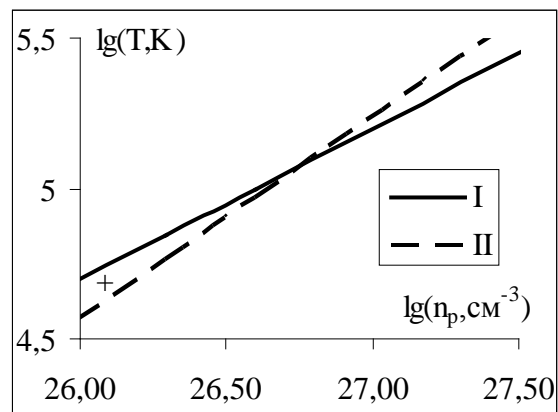


Рисунок 4 – Критерий Стонера для невырожденных протонов, согласно (19) без учета корреляционной энергии

Для рассмотрения критерия Стонера введем параметр изоспиновой асимметрии

$$\eta = (n_n - n_p) / (n_n + n_p). \quad (20)$$

Критерий Стонера для невырожденных протонов, согласно (17а) при  $n_n = 0$  представлен на рисунке 3 (область «+», ограниченная кривой I; при  $n_n \neq 0$  качественных изменений не наблюдается, зависимости от  $\eta$  нет, т.к.  $\tilde{g}_{nn}^T$  и  $\tilde{v}_{0n}^T$  не зависят от  $n_n$ ); область, аналогичная рисунку 2, по-видимому, отсутствует. «Точка поворота» кривой I при  $n_n = 0$  соответствует  $n_{pmax} \approx 6.8 \cdot 10^{30} \text{ см}^{-3}$ ,  $T_{кр} \approx 9.5 \cdot 10^7 \text{ К}$ ; при  $n_n \neq 0$   $n_{pmax} \approx 8.9 \cdot 10^{30} \text{ см}^{-3}$ ,  $T_{кр} \approx 1.2 \cdot 10^8 \text{ К}$ . Без учета корреляционной энергии ферромагнетизм независимо от  $n_p$ ,  $n_n$  для чистого водорода предсказывается до  $T \approx 2.09 \cdot 10^8 \text{ К}$ , а для нуклонной среды до  $T \approx 2.69 \cdot 10^8 \text{ К}$ . Кривая II на рисунках 3 и 4 соответствует  $kT = 7.5\varepsilon_{Fp}$  (приблизительный порог невырождения). Для (19) без учета корреляционной энергии (иначе решение вообще не существует) ферромагнетизм предсказывается ниже кривой I на рисунке 4, т.е. с т.зр. применимости приближения невырождения результаты корректны в области «+» на рисунке 4. В нуклонной среде при  $\eta < 0$ , т.е. с преобладанием протонов, данная область также существует, но при  $\eta > 0$  кривая I целиком лежит ниже кривой II. Т.о., результаты на рисунках 3 и 4 сильно различаются. Данные трудности требуют дальнейших исследований для промежуточных температур, а также рассмотрения зависимости плотности энергии от конечных значений спиновой поляризации.

### Энергия при конечных значениях спиновой поляризации нуклонов

Критерий Стонера не позволяет найти конкретные значения спиновой поляризации нуклонов. Выясним, каким значениям соответствует минимум энергии электронно-нуклонной системы. Вопрос рассмотрим для электронно-протонной и электронно-нуклонной системы, причем как для вырожденного, так и для невырожденного случая. Поскольку экспериментально подтверждено, что ядерное псевдомагнитное поле с т.зр. воздействия на отдельный нуклон на 2 порядка превосходит обычное магнитное поле, возникающее при спиновой поляризации, не будем учитывать плотность энергии этого магнитного поля, а также плотность энергии нуклонов в этом магнитном поле. Квантование Ландау также не учитываем, т.к.  $B \ll m_p^2 c^3 (e\hbar)^{-1}$ .

Рассмотрим вырожденную электронно-нуклонную плазму. Согласно (1)–(4), (6), (8), (10), а также с учетом ядерной энергии, запишем выражение для плотности энергии нуклонов; также учтем равенство химических потенциалов нуклонов с противоположными проекциями спина (в т.ч. опираясь на результаты из [1, с. 33]):

$$\begin{aligned} w_{deg}^{np}(p_{0p}, p_{0n}) &= \sum_{i=p,n} w_i + g_{np}^{\uparrow\uparrow} (n_{p+} n_{n+} + n_{p-} n_{n-}) + g_{np}^{\uparrow\downarrow} (n_{p+} n_{n-} + n_{p-} n_{n+}) - \\ &- \frac{e^2 (6\pi^2)^{4/3}}{8\pi^3} (n_{p+}^{4/3} + n_{p-}^{4/3}) - \frac{w_0}{2} (F(X_+) + F(X_-)), \quad X_{\pm} = \frac{\pi\hbar (6\pi^2 n_{p\pm})^{1/3}}{4m_p c \alpha}, \\ w_i &= \frac{3(6\pi^2)^{2/3} \hbar^2}{10m_i} (n_{i+}^{5/3} + n_{i-}^{5/3}) + g_{ii} n_{i+} n_{i-}, \quad n_{i\pm} = \frac{n_i}{2} (1 \pm p_{0i}). \end{aligned} \quad (21)$$



$$E_{Fi}^{\uparrow} = E_{Fi}^{\downarrow}; E_{Fi}^{\uparrow, \downarrow} = \frac{(6\pi^2 n_{i\pm})^{2/3} \hbar^2}{2m_i} + g_{ii} n_{i\mp} + g_{np}^{\uparrow\uparrow} n_{j\pm} + g_{np}^{\downarrow\downarrow} n_{j\mp} + \left(\frac{1}{2} + T_{3i}\right) \Lambda_{\pm}, \quad i = n, p;$$

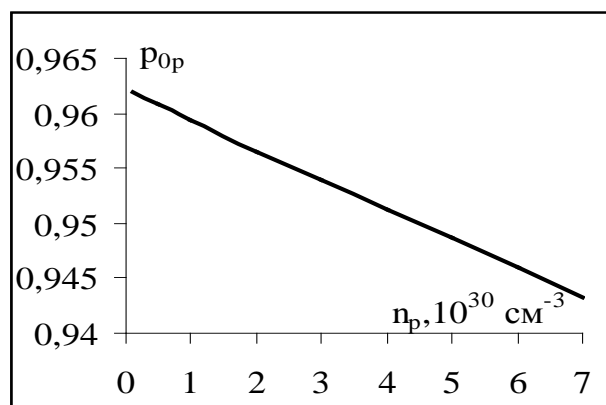
$$T_{3j} = -T_{3i}; \Lambda_{\pm} = -\frac{w_0}{2n_p} \sum_{i=+,-} F(X_i) - \frac{w_0 X_{\pm}}{3n_{p\pm}} \left( \int_0^{+\infty} P(s) ds - X_{\pm} \int_0^{+\infty} \ln \left( 1 + \frac{P(s)}{X_{\pm}} \right) ds \right) -$$

$$-\frac{e^2}{\pi} (6\pi^2 n_{p\pm})^{1/3}, \quad (22)$$

$$E_{Fi}^{\uparrow} \leq E_{Fi}^{\downarrow}. \quad (22a)$$

Неравенство (22a) используется вместо (22) при полной поляризации.

Не рассматривая вопрос о бета-равновесии, получаем зависимость плотности энергии в (21) не от 4, а от 2 аргументов, т.к. на остальные 2 наложены связи в (22). Хотя (22) всегда имеет решение в отсутствие спиновой поляризации, нужно найти поляризованное решение, и чтобы при этом плотность энергии в (21) была меньше по сравнению с неполяризованным состоянием при заданных  $n_n, n_p$ . При  $n_n = 0$  плотность энергии в (21) зависит от 1 аргумента, т.к. на 2-й наложена связь в (22). Без учета корреляционной энергии плотность энергии, по-видимому, минимальна при полной поляризации независимо от  $n_p$ . С учетом корреляционной энергии значение  $p_{0p}$ , при котором плотность энергии минимальна для заданного  $n_p$ : а) не превосходит 0.963 ни при каких  $n_p$ ; б) уменьшается с ростом  $n_p$  практически линейно (см. рисунок 5); в) достигает значения  $p_{0p} \approx 0.943$  при  $n_p \approx 7 \cdot 10^{30} \text{ см}^{-3}$  (т.е. вблизи порога нейтронизации). Все это может быть связано с расходимостью корреляционной составляющей  $E_{Fi}^{\downarrow}$  при  $p_{0p} \rightarrow 1$ ; вопрос о физическом смысле этой расходимости требует отдельных исследований.



**Рисунок 5 – Значение  $p_{0p}$ , соответствующее минимуму энергии вырожденных протонов при заданном  $n_p$**

Рассмотрим невырожденную электронно-нуклонную систему при конечной поляризации, используя вывод уточненного выражения для плотности энергии невзаимодействующих протонов [2, с. 54], выражения для плотностей обменной [8, с. 290], корреляционной [5, с. 460, 461], ядерной энергий [6, с. 199] (в т.ч. с учетом (11), (12)).

$$\begin{aligned}
 w_{Np}^T &= g_{pp}^T n_{p+} n_{p-}, \quad w_{exch}^T = -\frac{e^2 m_p^2 (kT)^2}{8\pi^2 \hbar^4} \left( \exp\left\{ \frac{2\mu_{0p+}}{kT} \right\} + \exp\left\{ \frac{2\mu_{0p-}}{kT} \right\} \right), \\
 w_{corr}^T &= -\frac{kT}{8\pi} \left( 4\pi e^2 \sum_{j=\uparrow, \downarrow} \frac{\partial n_{pj}}{\partial \mu_{0pj}} \right)^{3/2} = -\frac{(kT)^{7/4} \alpha^{3/2} (m_p c^2)^{9/4}}{2^{3/2} \pi^{7/4} (\hbar c)^3} \left( \sum_{j=+,-} y_{pj} \sqrt{1-x_{pj}} \right)^{3/2}, \\
 \mu_{0i\pm} &= kT \ln(\sqrt{2} y_{i\pm}), \quad y_{i\pm} = 1 - \sqrt{1-x_{i\pm}}, \quad x_{i\pm} = \frac{(2\pi\hbar)^3 n_{i\pm}}{2(\pi m_p kT)^{3/2}}, \quad i = n, p.
 \end{aligned} \tag{23}$$

Из (23) найдем обменную и корреляционную поправки кулоновского взаимодействия к химическим потенциалам протонов:

$$\begin{aligned}
 \mu_{exch\uparrow, \downarrow} &= \frac{\partial w_{exch}^T}{\partial n_{p\uparrow, \downarrow}} \Rightarrow \mu_{exch\pm} = -\frac{\alpha \sqrt{m_p c^2 kT} y_{p\pm}}{\sqrt{\pi(1-x_{p\pm})}}; \quad \mu_{corr\uparrow, \downarrow} = \frac{\partial w_{corr}^T}{\partial n_{p\uparrow, \downarrow}} \Rightarrow \\
 \Rightarrow \mu_{corr\pm} &= -\frac{3(kT)^{1/4} \alpha^{3/2} (m_p c^2)^{3/4}}{\sqrt{2}\pi^{1/4}} \left( 1 - \frac{1}{2\sqrt{1-x_{p\pm}}} \left( \sum_{i=+,-} (\sqrt{1-x_{pi}} + x_{pi}) - 2 \right) \right)^{1/2}.
 \end{aligned} \tag{24}$$

Запишем равенства химических потенциалов нуклонов с противоположными проекциями спина, а также выражение для плотности энергии нуклонов

$$\begin{aligned}
 \mu_{i+} &= \mu_{i-}, \quad \mu_{i\pm} \approx \mu_{0i\pm} + g_{ii}^T n_{i\mp} + g_{np}^{\uparrow\uparrow} n_{j\pm} + g_{np}^{\uparrow\downarrow} n_{j\mp} + \left( \frac{1}{2} + T_{3i} \right) (\mu_{exch\pm} + \mu_{corr\pm}), \\
 i = n, p; \quad T_{3j} &= -T_{3i}.
 \end{aligned} \tag{25}$$

$$\begin{aligned}
 ,0 w_{non\ deg}^{np} (p_{0p}, p_{0n}) &= \sum_{i=p,n} w_i^T + g_{np}^{T\uparrow\uparrow} (n_{p+} n_{n+} + n_{p-} n_{n-}) + g_{np}^{T\uparrow\downarrow} (n_{p+} n_{n-} + n_{p-} n_{n+}) + \\
 + w_{exch}^T + w_{corr}^T; \quad w_i^T &= \frac{3\pi^{3/2} (m_i kT)^{5/2}}{2m_i (2\pi\hbar)^3} \sum_{j=+,-} (4y_{ij} - y_{ij}^2) + w_{Ni}^T.
 \end{aligned} \tag{26}$$

Не рассматривая вопрос о бета-равновесии, получаем зависимость плотности энергии в (26) не от 4, а лишь от 2 аргументов (при заданной температуре), т.к. на остальные 2 наложены связи в (25). При  $n_n = 0$  получаем зависимость плотности энергии в (26) от 1 аргумента (при заданной температуре), т.к. на 2-й наложена связь в (25). Плотность энергии водородной плазмы минимальна при  $p_{0p} \rightarrow 1$ , если значения  $T, n_p$  согласуются с критерием невырождения и с (17а) (а также с рисунком 3 при учете корреляционной энергии). При этом при  $p_{0p} \neq 0$  без учета корреляционной энергии  $\mu_{p+} < \mu_{p-}$ , с учетом корреляционной энергии  $\mu_{p+} > \mu_{p-}$ , что составляет определенную трудность. Это может быть связано с расходимостью  $\mu_{0p-}$  при  $p_{0p} \rightarrow 1$ ; вопрос о физическом смысле этой расходимости требует отдельных исследований. Это может быть связано как с невозможностью полной поляризации при  $T \neq 0$ , так и, например, с необходимостью уточнения формулы Веденова–Ларкина в [5, с. 460, 461].

Т.к. при рассматриваемых плотностях ядерная энергия, по крайней мере, на 2 и более порядков меньше других составляющих энергии, при учете нейтронов (причем в

Сверхновых II типа вряд ли может быть  $n_n \gg n_p$ ) ситуация качественно не меняется, т.е. плотность энергии уменьшается с изменением  $p_{0n}$  от 0 до  $-1$  (т.е.  $p_{0n} \uparrow \downarrow p_{0p}$ ).

**Магнитные поля в белых карликах и при взрывах Сверхновых II типа**  
Индукция магнитного поля при спонтанной намагниченности [9, с. 316, 327]:

$$\vec{B} = (1 + 4\pi\chi)\vec{H} = (\chi^{-1} + 4\pi)\vec{I} \xrightarrow{\chi \rightarrow \infty} 4\pi\vec{I} = 4\pi\vec{k}_0\mu_{\text{Я}} \sum_{i=n,p} n_i p_{0i} \gamma_i. \quad (27)$$

Если  $p_{0i} \sim 1$ , то магнитные поля в верхних расплавленных слоях белых карликов при  $n_n = 0$  вследствие спиновой поляризации протонов могут достигать значений до  $10^4$  Гс. Важен вопрос о возможности усиления магнитного поля в более глубоких слоях белых карликов, где плотность водорода близка к порогу нейтронизации, но водород является кристаллическим, и протоны, локализуясь в пределах ячейки, подчиняются статистике Бозе и могут ориентировать свои спины во внешнем поле независимо друг от друга. Здесь важным является соотношение  $\zeta = \gamma_p \mu_{\text{Я}} B (kT)^{-1}$ , где  $\gamma_p = 2.7928$ ,  $B$  – магнитное поле, возникшее в верхних слоях за счет спиновой поляризации протонов и проникшее во внутренние слои,  $T$  – температура внутренних слоев. Спиновая поляризация и усиление магнитного поля до  $10^9$  Гс возможны лишь при  $\zeta \gg 1$ . Дальнейшие рассуждения рассмотрим в таблице 2 для 2 видов белых карликов: I. Одиночный белый карлик. II. Практически потухший белый карлик, на который началась аккреция водорода со звезды-компаньона в тесной двойной системе.

Таблица 2 – Сравнение условий для возможности усиления магнитного поля

Белый карлик	Внутренние слои	Объяснение	$\zeta$	Может ли магнитное поле быть усилено
I	Горячее внешних	это естественно при остывании изолированной звезды	$< 1$	Нет, оно остается порядка $10^4$ Гс
II	Холоднее внешних	внешние слои нагрелись сильнее за счет аккреции	$> 1$	Да, и достичь порядка $10^9$ Гс

Для Сверхновых II типа формула (27) дает оценку  $B \sim 10^7 - 10^{13}$  Гс при  $n_p \sim n_n \sim 10^{30} - 10^{36} \text{ см}^{-3}$ . С учетом температурных ограничений, вопрос о возможности ферромагнетизма уместно рассматривать для внешних слоев, успевших достаточно остыть. Приведенные результаты сравнимы с оценками, полученными в рамках других моделей. В [10] в модели асимметричного коллапса с вращением и джетами (со ссылками на другие работы) приведены оценки  $B \sim 10^{12} - 10^{16}$  Гс. В [11] в рамках магнитной гидродинамики через моделирование неустойчивостей Рэлея–Тейлора и Кельвина–Гельмгольца утверждается, что данный механизм более эффективен по сравнению с сжатием магнитного поля  $B \sim 10^6$  Гс ударной волной. В [12] в рамках аналогичной модели с проведением лазерных экспериментов была также дана оценка  $B \sim 10^6$  Гс.

**Заключение. Основные результаты**

В рамках статистической термодинамики рассмотрен вопрос о ферромагнетизме электронно-нуклонного вещества в вырожденном и невырожденном состоянии с учетом межнуклонной ядерной (в контактном приближении), а также протонной обменной и корреляционной кулоновской энергии. Вопрос рассматривался как для конечных значений спиновой поляризации нуклонов, так и через критерий Стонера. Последний рассматривался как через нахождение полюсов магнитной восприимчивости, так и через флуктуации энергии. Показано, что возможна энергетическая выгода спиновой поляризации протонов и нейтронов в определенном диапазоне температур и плотностей. Показано, что в рамках концепции ферромагнетизма возможно объяснение происхождения магнитных полей до  $B \sim 10^{13}$  Гс при взрывах Сверхновых II типа, до  $B \sim 10^4$  Гс в одиночных водородных белых карликах и до  $B \sim 10^9$  Гс в остывших белых карликах на начальной стадии аккреции водорода со стороны массивного компаньона в тесной двойной системе.

Часть идей, лежащих в основе данной работы, принадлежат В.Г. Барышевскому и В.В. Тихомирову.

**СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ**

1. Серый, А.И. О ферромагнетизме вырожденной нейтронно-протонной системы / А.И. Серый // Веснік Брэсц. ун-та. Сер. 4. Фізіка. Матэматыка. – 2012. – № 1. – С. 30–37.
2. Серый, А.И. К вопросу о магнитных полях белых карликов и Сверхновых II типа / А.И. Серый // Веснік Брэсц. ун-та. Сер. 4. Фізіка. Матэматыка. – 2013. – № 1. – С. 50–58.
3. Физическая энциклопедия / Гл. ред. А.М. Прохоров; ред. кол.: Д.М. Алексеев [и др]. // М. : Сов. энцикл., 1988. – Т. I. Ааронова–Бома эффект – Длинные линии. – 704 с.
4. Cumming, Andrew. Magnetic Field Evolution in Accreting White Dwarfs / Andrew Cumming // ASP Conference Series. – P. 1–13.
5. Ландау, Л.Д. Теоретическая физика : учеб. пособ. для вузов : в 10 т. / Е.М. Лифшиц, Л.П. Питаевский. – Т. IX Статистическая физика : в 2 ч., Ч. 2: Теория конденсированного состояния / Л.Д. Ландау, Е.М. Лифшиц // 3-е изд., стереот. – М. : Физматлит, 2001. – 496 с.
6. Левитов, Л.С. Функции Грина. Задачи и решения / Л.С. Левитов, А.В. Шитов. – М. : Физматлит, 2003. – 392 с.
7. Ситенко, А.Г. Лекции по теории ядра / А.Г. Ситенко, В.К. Тартаковский. – М. : Атомиздат, 1972. – 351 с.
8. Ландау, Л.Д. Теоретическая физика : учеб. пособие для вузов : в 10 т. / Л.Д. Ландау, Е.М. Лифшиц. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2001. – Т. V: Статистическая физика. – Ч. I. – 616 с.
9. Сивухин, Д.В. Общий курс физики. / Д.В. Сивухин. – М. : Наука, 1977. – Т. 3: Электричество. – 688 с.
10. Wheeler, J. Craig. Magnetic Fields in Core-collapse Supernovae: Possibilities and Gaps / J. Craig Wheeler, Akiyama Shizuka [Electronic resource]. – Mode of access : [www.int.washington.edu/talks/WorkShops/int\\_04\\_2/People/Wheeler\\_C/Wheeler\\_INT.pdf](http://www.int.washington.edu/talks/WorkShops/int_04_2/People/Wheeler_C/Wheeler_INT.pdf).
11. Jun, Byung-II. On the Origin of Strong Magnetic Fields in Young Supernova Remnants / Byung-II Jun, Michael L. Norman [Electronic resource]. – Mode of access : [arXiv.org/abs/astro-ph/9601035v1](http://arXiv.org/abs/astro-ph/9601035v1).

12. Fryxell, Bruce. Supernova Rayleigh-Taylor Instabilities / Bruce Fryxell [Electronic resource]. – Mode of access: [www.mpa-garching.mpg.de/hydro/NucAstro/PDF\\_10/fryxell.pdf](http://www.mpa-garching.mpg.de/hydro/NucAstro/PDF_10/fryxell.pdf).

***A.I. Sery On Corrections to Stoner Criterion for Nuclear Matter***

We consider the question of ferromagnetism of electron-nucleon matter in degenerate and non-degenerate state regarding inter-nucleon nuclear (in contact approximation), as well as proton exchange and correlation Coulomb energy. Finite values of spin polarization of nucleons and Stoner criterion are considered. The existence of range of temperatures and densities has been shown where energetic preference of spin polarization of nucleons takes place.

Рукапіс паступіў у рэдакцыю 10.10.2013