

УДК 524.354.6-33

В.С. Секержицкий, Е.А. Саванчук

О КРИТЕРИЯХ УСТОЙЧИВОСТИ ТВЕРДОГО СОСТОЯНИЯ ЭЛЕКТРОННО-ПРОТОННОГО ВЕЩЕСТВА В МАГНИТНОМ ПОЛЕ

Сформулированы оценочные критерии устойчивости твердого состояния плотного замагниченного электронно-протонного вещества. Показано, что при низких температурах сильное магнитное поле уменьшает диапазон значений массовой плотности, при которых твердое состояние электронно-протонного вещества является устойчивым. При высоких температурах влияние сильного магнитного поля на устойчивость твердого состояния незначительно.

Рассмотрим вопрос о состоянии водорода при плотностях, превышающих порог полной ионизации. Как отмечалось в [1–3], вследствие кулоновских взаимодействий положительно заряженные ядра электронно-протонного вещества могут совершать колебания относительно некоторых точек равновесия. В этом случае следует говорить о твердом состоянии вещества [1; 4]. В [5] указывалось, в частности, что при плотностях порядка и ниже ядерной плотности может образовываться кристаллическая решетка, разрушением которой можно объяснить, например, внезапные изменения периода пульсара PSR 0833-45. Для нас не будет иметь принципиального значения вопрос о том, имеем мы дело с кристаллической структурой или же с аморфным веществом. Следуя приближенным оценкам [1], полагаем, что при определенных условиях протоны образуют упорядоченную структуру, обладающую некоторыми свойствами твердого тела. Оценим области значений массовой плотности, при которых твердое состояние замагниченного электронно-протонного вещества при низких и высоких температурах устойчиво (не переходит в плазменное состояние).

Предположим, что в электронно-протонном замагниченном веществе имеет место фаза твердого тела. Воспользуемся для оценки ее границ приближенным методом, изложенным в [1] для сверхплотного водорода и в [4] для сверхплотного электронно-ядерного вещества произвольного (но однородного) химического состава. Следуя [1], разделим среду на нейтральные сферические ячейки с одним протоном в каждой, упакованные максимально плотно. Считаем электронный заряд распределенным по ячейке равномерно. Это предположение, строго говоря, неверно, но, как отмечалось в [1], отклонения от равномерного распределения для предстоящих оценок незначительны. Также пренебрегаем в первом приближении взаимодействием протона с соседними ячейками [1]. Радиус такой ячейки

ки $R \approx \left(\frac{3m_p}{4\pi\rho} \right)^{1/3}$, где m_p – масса протона, ρ – массовая плотность вещества. Выражение

для кулоновского взаимодействия протона с электронным «облаком» своей ячейки в отсутствие магнитного поля имеет вид:

$$U(r) = -\frac{3e^2}{2R} + \frac{e^2}{2R^3}r^2. \quad (1)$$

Протон находится в электростатической трехмерной изотропной потенциальной яме, граница которой, определяемая условием $r = R$, выше дна на величину $U_0 = e^2 / (2R)$.

Потенциал (1) осцилляторного типа, поэтому при оценочных расчетах для случая малых колебаний протон в ячейке можно, с определенной степенью точности, ото-

ждествить с изотропным гармоническим осциллятором, частота нулевых колебаний которого дается выражением:

$$\omega_0 = \frac{e}{m_p^{1/2} R^{3/2}} = \frac{e}{m_p} \sqrt{\frac{4}{3} \pi \rho}. \quad (2)$$

Средняя энергия рассматриваемого осциллятора при температуре T [1; 4]:

$$\langle \varepsilon \rangle = \frac{3}{2} \hbar \omega_0 \operatorname{cth} \frac{\hbar \omega_0}{2kT}. \quad (3)$$

Условие малости величины $\langle \varepsilon \rangle$ по сравнению с U_0 принято в [1; 4] в качестве критерия устойчивости твердого состояния вещества. При $T = 0$ из (3) имеем энергию нулевых колебаний протона $\varepsilon_0 = 1,5 \hbar \omega_0$.

Основные недостатки изложенного выше подхода очевидны: модель изотропного гармонического осциллятора некорректна при $r \sim R$ (и тем более при $r \geq R$), а электронное «облако» весьма чувствительно к движению протона, и любое перемещение последнего приведет к деформации ячейки. Однако, даже с помощью такой грубой модели можно провести приближенные оценки границ фазы твердого тела в замагниченном электронно-протонном веществе.

В сверхсильном магнитном поле с индукцией B глубина потенциальной ямы изменяется на величину

$$\Delta U_0 = \frac{e^2 B^2 R^2}{8m_p c^2} \sin^2 \varphi, \quad (4)$$

где φ – угол между направлениями вектора индукции и движения протона. При этом разность высот границы потенциальной ямы и ее дна равна

$$U_0(B) = U_0 + \Delta U_0 \approx U_0 \left(1 + \frac{3B^2}{16\pi\rho c^2} \sin^2 \varphi \right) = U_0 \left(1 + \frac{\omega_B^2}{\omega_0^2} \sin^2 \varphi \right), \quad \omega_B = \frac{eB}{2m_p c}. \quad (5)$$

Энергетический спектр протона, совершающего колебания около положения равновесия в присутствии постоянного и однородного магнитного поля с индукцией B , определяется выражением [6; 7]:

$$\varepsilon = \hbar \sqrt{\omega_B^2 + \omega_0^2} (2l + |m| + 1) + \hbar \omega_B m + \hbar \omega_0 \left(g + \frac{1}{2} \right), \quad (6)$$

где $l = 0, 1, 2, \dots$; $m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$; $g = 0, 1, 2, \dots$ – квантовые числа. При нулевой температуре $l = m = g = 0$, и энергия нулевых колебаний протона в магнитном поле

$$\varepsilon_0(B) = \hbar \sqrt{\omega_B^2 + \omega_0^2} + \frac{1}{2} \hbar \omega_0 \approx \frac{1}{2} \hbar \omega_0 \left(1 + 2 \sqrt{1 + \frac{3B^2}{16\pi\rho c^2}} \right). \quad (7)$$

При $B = 0$ имеем $\varepsilon_0(B) = \varepsilon_0$. Из (4) и (7) следует, что при значениях $\sin^2 \varphi \neq 0$ увеличение с ростом индукции магнитного поля $U_0(B)$ превалирует над увеличением $\varepsilon_0(B)$.

Для вычисления средней энергии протона в присутствии магнитного поля при $T \neq 0$ воспользуемся известными соотношениями статистической физики:

$$\langle \varepsilon \rangle = kT^2 \frac{\partial}{\partial T} (\ln z), \quad z = \sum_i \exp\left(-\frac{\varepsilon_i}{kT}\right) G(\varepsilon_i), \quad (8)$$

где ε_i – энергия осциллятора в определенном квантовом состоянии, $G(\varepsilon_i)$ – число квантовых состояний, соответствующих энергии ε_i , равное единице для каждого составляющего энергии. Энергия ε_i определяется формулой (6). Считая, как и в [7], $2l + |m| = n_1 + n_2$ и $m = n_1 - n_2$, где $n_1 = 0, 1, 2, \dots$ и $n_2 = 0, 1, 2, \dots$, и подставляя (6) в (8), получим следующее выражение для функции состояний трехмерного осциллятора в магнитном поле:

$$z = \frac{\exp\left(-\frac{\hbar(\omega + \omega_0/2)}{kT}\right)}{\left(1 - \exp\left(-\frac{\hbar\omega}{kT}\right)\right)^2 \left(1 - \exp\left(-\frac{\hbar\omega_0}{kT}\right)\right)}, \quad \omega = \sqrt{\omega_B^2 + \omega_0^2} \quad (9)$$

Тогда средняя энергия колеблющегося при температуре T в магнитном поле с индукцией B протона может быть представлена в виде:

$$\langle \varepsilon(B) \rangle = \hbar\omega \cdot \text{cth}\alpha + \frac{1}{2} \hbar\omega_0 \cdot \text{cth}\alpha_0. \quad (10)$$

Здесь введены обозначения: $\alpha = \frac{\hbar\omega}{2kT}$, $\alpha_0 = \frac{\hbar\omega_0}{2kT}$. При $B = 0$ имеем $\omega = \omega_0$, и (10) переходит в (3). Для низких температур (если ω_B не превышает значительно ω_0) $\text{cth}\alpha \approx 1$, $\text{cth}\alpha_0 \approx 1$ и $\langle \varepsilon(B) \rangle \approx \varepsilon_0(B)$. Для высоких температур $\text{cth}\alpha \approx 1/\alpha$, $\text{cth}\alpha_0 \approx 1/\alpha_0$ и $\langle \varepsilon(B) \rangle \approx 3kT \approx \langle \varepsilon \rangle$.

Твердое состояние замагниченного электронно-протонного вещества является устойчивым и не переходит в плазменное при $\langle \varepsilon(B) \rangle \ll U_0(B)$. Если $\omega_B = u\omega_0$, то условие $\varepsilon_0(B) = 3kT$ соответствует массовая плотность

$$\rho = \rho_0 \approx 1,79 \cdot 10^{-6} \left(\frac{T}{2\sqrt{1+u^2}+1} \right)^2 (\text{г/см}^3). \quad (11)$$

Критерии устойчивости твердого состояния замагниченного вещества при низких ($\rho \gg \rho_0$) и высоких ($\rho \ll \rho_0$) температурах имеют соответственно вид:

$$\rho^{1/6} \ll 50,5 \frac{1+u^2 \sin^2 \varphi}{2\sqrt{1+u^2}+1}, \quad (12)$$

$$\rho^{1/3} \gg 2,65 \cdot 10^{-5} \frac{T}{1+u^2 \sin^2 \varphi}. \quad (13)$$

При $B = 0$ из (11)–(13) получаем: $\rho_0 \approx 1,98 \cdot 10^{-7} T^2 (\text{г/см}^3)$, $\rho^{1/6} \ll 16,8$ при $\rho \gg \rho_0$, $\rho^{1/3} \gg 2,65 \cdot 10^{-5} T$ при $\rho \ll \rho_0$.

Выражение в правой части неравенства (12) при $B = \text{const}$ имеет наименьшее значение, если $\varphi = 0$. Тогда при оценочных расчетах в качестве критерия устойчивости твердого состояния холодного замагниченного электронно-протонного вещества можно принять

условие:

$$\rho^{1/6} \leq 0,1 \frac{50,5}{2\sqrt{1+u^2}+1} \quad \text{или} \quad \rho \leq \frac{1,56 \cdot 10^4}{(2\sqrt{1+u^2}+1)^6} \text{ (г/см}^3\text{)}. \quad (14)$$

Таким образом, сильное магнитное поле уменьшает диапазон значений массовой плотности, при которых твердое состояние является устойчивым: локализуя движение протона в плоскости, перпендикулярной вектору индукции, магнитное поле одновременно облегчает выход протона из электростатической потенциальной ямы вдоль линий индукции.

Аналогично для горячего замагниченного электронно-протонного вещества из (13) находим:

$$\rho^{1/3} \geq 2,65 \cdot 10^{-4} T \quad \text{или} \quad \rho \geq 1,86 \cdot 10^{-11} T^3 \text{ (г/см}^3\text{)}, \quad (15)$$

что совпадает с условием устойчивости твердого состояния в отсутствие магнитного поля.

Отметим в заключение, что в веществе сверхплотных сильно замагниченных астрофизических объектов индукция магнитного поля вряд ли может превышать значение $B_{\max} = 2c\sqrt{2\pi\rho}$, поскольку при $B > B_{\max}$ плотность энергии магнитного поля будет больше плотности энергии покоя вещества. Это означает, что в приведенных выше соотношениях допустимы значения $u^2 < 1,5$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Киржниц, Д.А. О внутреннем строении сверхплотных звезд / Д.А. Киржниц // Журнал экспериментальной и теоретической физики. – 1960. – Т. 38, № 2. – С. 503–508.
2. Абрикосов, А.А. Некоторые свойства сильно сжатого вещества / А.А. Абрикосов // Журнал экспериментальной и теоретической физики. – 1960. – Т. 39, № 6 (12). – С. 1797–1805.
3. Hamada, T. Models for zero-temperature stars / T. Hamada, E.E. Salpeter // Astrophys. J. – 1961. – V. 134, № 3. – P. 683–698.
4. Саакян, Г.С. Равновесные конфигурации вырожденных газовых масс / Г.С. Саакян. – М. : Наука, 1972. – 344 с.
5. Смит, Ф.Г. Пульсары / Ф.Г. Смит. – М. : Мир, 1979. – 267 с.
6. Fock, V. Bemerkung zur Quantelung des harmonischen Oszillators in Magnetfeld / V. Fock // Zs. f. Physik. – 1928. – Bd. 47, № 2. – Z. 446–447.
7. Дубнер, В.М. Заряженный осциллятор в магнитном поле / В.М. Дубнер // Известия вузов. Физика. – 1966. – № 4. – С. 167–168.

V.S. Sekerzhitsky, E.A. Savanchuk About Criteria of Stability Solid State of Electron-proton Matter in Magnetic Field

An appreciation of criteria of stability solid state of dense magnetized electron-proton matter is formulated. The strong magnetic field a range senses of substance dense by low temperatures decrease. The solid state of electron-proton matter is stability by. Influence of strong magnetic field on stability solid state is unimportant by high temperatures.

Рукапіс паступіў у редакцію 01.10.2013