УДК 539.12

Е.М. Овсиюк, К.В. Казмерчук

ЧАСТИЦА СО СПИНОМ 1 В СФЕРИЧЕСКОМ ПРОСТРАНСТВЕ РИМАНА: ПРИБЛИЖЕНИЕ ПАУЛИ В ПОЛЕ МАГНИТНОГО ЗАРЯДА

Частица со спином 1 в сферическом пространстве Римана S_3 исследуется в поле магнитного заряда. В релятивистском уравнении Даффина–Кеммера проведено разделение переменных с использованием D-функций Вигнера, при этом возникают три квантовых числа (E, j, m): энергии, квадрата и третьей проекции обобщенного полного момента. В радиальной системе уравнений выполнен переход к нерелятивистскому приближению – задача сводится к трем зацепляющимся дифференциальным уравнениям второго порядка. Полученная система оказывается достаточно сложной. Полному анализу поддается только особый случай минимального значения квантового числа $j_{\min}$. При этом можно дополнительно учесть внешние сферически-симметричные электрические поля. Детально исследованы обобщенные на пространство Римана случаи кулоновского поля и поля осциллятора; построены точные волновые функции и найдены спектры энергий частицы.

1. Разделение переменных в релятивистском уравнении Даффина–Кеммера

Известно, что спин существенно влияет на поведение квантово-механической частицы в поле дираковского монополя [1; 2]. В частности, частица со спином 1/2 обнаруживает существование особого класса решений, которые можно сопоставлять связанным состояниям в системе «частица в потенциале монополя» (простое изложение вопроса см., например, в [3]). В [3] было показано, что такие простые и выделенные состояния возможны и для частицы со спином 1 в поле монополя. Однако до недавнего времени других точных решений в этой системе найти не удавалось. В работе [4] было проведено исследование нерелятивистского приближения в системе «векторная частица в поле монополя». Оказалось, что в таком подходе можно построить точные решения для всех значений обобщенного полного момента j; удается также учесть дополнительное присутствие внешних сферически-симметричных потенциалов, тем самым получить спектры для частицы со спином 1, модифицированные присутствием внешнего монопольного потенциала. Этот анализ был обобщен на случай пространств Лобачевского в [5]. В настоящей работе аналогичное исследование выполнено в сферическом пространстве Римана S_3. Напомним, что в этой геометрической модели сингулярная нить Дирака – это замкнутая линия конечных размеров.

Используя общековариантный тетрадный формализм Даффина–Кеммера [3], рассмотрим задачу о векторной частице в поле монополя. Исходное уравнение в сферической тетраде имеет следующий вид [3]:

$$\left[i\,\beta^0\,\partial_t + i\left(\beta^3\,\partial_r + \frac{1}{\sin r}(\beta^1\,j^{31} + \beta^2\,j^{32})\right) + \frac{1}{\sin r}\,\Sigma^k_{\theta,\phi} - M \right]\Phi(x) = 0,$$

$$\Sigma^k_{\theta,\phi} = i\,\beta^1\,\partial_\theta + \beta^2\,\frac{i\,\partial_\phi + (i\,j^{12} - k)\cos\theta}{\sin\theta}, \qquad (1.1)$$

где $k = eg/\hbar c$ – квантующийся согласно Дираку (см. в [1]) параметр $|k| = 1/2,\ 1,\ 3/2,\ 2,\ \ldots$ Ниже применим циклическое представление для матриц Даффина–Кеммера [3], в котором матрица ij^{12} имеет диагональную структуру

$$iJ^{12}=\begin{vmatrix}0&0&0&0\\0&t_3&0&0\\0&0&t_3&0\\0&0&0&t_3\end{vmatrix},\qquad t_3=\begin{vmatrix}+1&0&0\\0&0&0\\0&0&-1\end{vmatrix}.$$

Три компонента сохраняющегося общего момента [1] задаются в этом базисе формулами [3]

$$J_1^k=l_1+\frac{\cos\phi}{\sin\theta}(iJ^{12}-\kappa)\,,\qquad J_2^k=l_2+\frac{\sin\phi}{\sin\theta}(iJ^{12}-\kappa)\,,\qquad J_3^k=l_3\,. \tag{1.2a}$$

Согласно общей методике [3], волновая функция векторной частицы с квантовыми числами $(\varepsilon,\, j, m)$ должна строиться как

$$\Phi_{\varepsilon jm}(x)=e^{-i\varepsilon t}\,[\; f_1(r)\,D_k,\; f_2(r)\,D_{k-1},\; f_3(r)\,D_\kappa,\; f_4(r)\,D_{k+1},$$
$$f_5(r)\,D_{k-1},\; f_6(r)\,D_k,\; f_7(r)\,D_{k+1},\; f_8(r)\,D_{k-1},\; f_9(r)\,D_k,\; f_{10}(r)\,D_{k+1}\,]\,, \tag{1.2b}$$

где $D^j_{-m,\sigma}(\phi,\theta,0)$ обозначается для краткости символом D_σ. При нахождении 10 радиальных уравнений для $f_1,\ldots,f_{10}$ предстоит воспользоваться рекуррентными соотношениями [6]

$$\partial_\theta\, D_{k-1}=a\,D_{\kappa-2}-c\,D_k\,,\qquad \frac{-m-(k-1)\cos\theta}{\sin\theta}\,D_{k-1}=-a\,D_{k-2}-c\,D_k\,,$$
$$\partial_\theta\, D_k=(c\,D_{\kappa-1}-d\,D_{k+1})\,,\qquad \frac{-m-k\cos\theta}{\sin\theta}\,D_k=-c\,D_{\kappa-1}-d\,D_{k+1}\,,$$
$$\partial_\theta\, D_{k+1}=(d\,D_k-b\,D_{k+2})\,,\qquad \frac{-m-(k+1)\cos\theta}{\sin\theta}\,D_{k+1}=-d\,D_k-b\,D_{k+2}\,, \tag{1.3}$$

где

$$a=\frac{1}{2}\sqrt{(j+k-1)(j-k+2)}\,,\qquad b=\frac{1}{2}\sqrt{(j-k-1)(j+k+2)},$$
$$c=\frac{1}{2}\sqrt{(j+k)(j-k+1)}\,,\qquad d=\frac{1}{2}\sqrt{(j-k)(j+k+1)}\,.$$

Из (1.1) получаем систему радиальных уравнений

$$-i\Big(\frac{d}{dr}+\frac{1}{\sin r}\Big)\,f_2-i\frac{\sqrt{2}c}{\sin r}\,f_3-M\,f_8=0\,,$$
$$i\Big(\frac{d}{dr}+\frac{1}{\sin r}\Big)\,f_4+\frac{i\sqrt{2}d}{\sin r}\,f_3-M\,f_{10}=0\,,$$
$$i\varepsilon\,f_5+i\Big(\frac{d}{dr}+\frac{1}{\sin r}\Big)\,f_8+i\frac{\sqrt{2}c}{\sin r}\,f_9-M\,f_2=0\,,$$
$$i\varepsilon\,f_7-i\Big(\frac{d}{dr}+\frac{1}{\sin r}\Big)\,f_{10}-i\frac{\sqrt{2}d}{\sin r}\,f_9-M\,f_4=0\,,$$
$$-i\varepsilon\,f_2+\frac{\sqrt{2}c}{\sin r}\,f_1-M\,f_5=0\,,\qquad -i\varepsilon\,f_4+\frac{\sqrt{2}d}{\sin r}\,f_1-M\,f_7=0\,,$$
$$-\Big(\frac{d}{dr}+\frac{2}{\sin r}\Big)\,f_6-\frac{\sqrt{2}}{\sin r}(c\,f_5+d\,f_7)-M\,f_1=0\,,$$
$$i\varepsilon\,f_6+\frac{\sqrt{2}i}{\sin r}(-c\,f_8+d\,f_{10})-M\,f_3=0\,,$$

$$i\frac{\sqrt{2}}{\sin r}(c\ f_2-d\ f_4)-M\ f_9=0\,,\qquad -i\varepsilon\ f_3-\frac{d}{dr}\ f_1-M\ f_6=0\,. \qquad (1.4)$$

Величина j может принимать только следующие значения:

если $k=\pm 1/2$,

$$j=|k|,|k|+1,\ldots;$$

если $k=\pm 1,\pm 3/2,\ldots$

$$j=|k|-1,|k|,|k|+1,\ldots \qquad (1.5)$$

Обратимся к состояниям с $j_{\min}=|k|-1$. Вначале следует исследовать $j_{\min}=0$ – ситуацию, возникающую при $k=\pm 1$; соответствующая волновая функция не будет зависеть от угловых переменных $\theta,\ \phi$. Пусть $k=+1$ и $j_{min}=0$, тогда подстановка имеет вид:

$$\Phi^0(t,r)=e^{-i\varepsilon t}\ (\,0,\ \ f_2,\ 0,\ 0,\ f_5,\ 0,0;\ f_8,\ 0,\ 0\,)\,. \qquad (1.6a)$$

Легко проверяется, что угловой оператор $\Sigma_{\theta,\phi}$ действует на Φ_0 как нулевой оператор: $\Sigma_{\theta,\phi}\Phi_0=0$, поскольку $(ij^{12}-k)\,\Phi^0\equiv 0$. В результате получаем только три нетривиальных радиальных уравнения:

$$i\,\varepsilon\ f_5+i\,(\frac{d}{dr}+\frac{1}{\sin r})\ f_8-M\ f_2=0\,,$$

$$-\,i\,\varepsilon f_2-M\ f_5=0\,,\qquad -\,i\,(\frac{d}{dr}+\frac{1}{\sin r})\ f_2-M\ f_8=0\,. \qquad (1.6b)$$

Отсюда следует

$$f_5=-\,i\,\frac{\varepsilon}{M}\ f_2\,,\qquad f_8=-\frac{i}{M}\,(\frac{d}{dr}+\frac{1}{\sin r})\ f_2\,,$$

$$\left(\frac{d^2}{dr^2}+\frac{2}{\sin r}\frac{d}{dr}+\frac{1-\cos r}{\sin^2 r}+\varepsilon^2-M^2\right)f_2=0\,;$$

с помощью подстановки

$$f_2(r)=\frac{1+\cos r}{\sin r}\,F_2(r)$$

приходим к уравнению

$$(\,\frac{d^2}{dr^2}+\varepsilon^2-M^2\,)\,F_2=0\,,\ F_2=e^{\pm\sqrt{M^2-\varepsilon^2}\,r},\qquad r\in[0,\pi]\,. \qquad (1.6c)$$

Последнее дает знакомое по электронному случаю решение экспоненциального типа, пригодное для описания «связанных состояний» при $\varepsilon<M$. Однако, никакого квантования уровней энергии на решениях $(1.6c)$ из-за компактности сферического пространства получить не удается. С требованиями непрерывности совместим единственный выбор $\varepsilon=M$. Предположим теперь, что $\varepsilon>M$, тогда имеем решения:

$$F_2=e^{\pm i\sqrt{\varepsilon^2-M^2}\,r},\qquad r\in[0,\pi]\,; \qquad (1.6d)$$

требуя выполнения равенства $F_2(0)=F_2(\pi)=1$, можно получить правило квантования:

$$\varepsilon^2=M^2+4n^2\,. \qquad (1.6e)$$

Ситуация при $j_{min}=0$ и $k=-1$ выглядит аналогично:

$$\Phi^0(t,r)=e^{-i\varepsilon t}\ (\,0,\ 0,\ 0,\ f_4\,,\ 0,\ 0,\ f_7,\ 0,\ 0,\ f_{10}\,)\,; \qquad (1.7a)$$

система радиальных уравнений примет вид:

$$i\,\varepsilon\, f_7 - i\,(\frac{d}{dr}+\frac{1}{\sin r})\, f_{10} - M\, f_4 = 0\,,$$

$$-i\, f_4 - M\, f_7 = 0\,, \qquad i\,(\frac{d}{dr}+\frac{1}{\sin r})\, f_4 - M\, f_{10} = 0\,; \tag{1.7b}$$

в итоге находим

$$f_7 = -i\,\frac{\varepsilon}{M}\, f_4\,, \qquad f_{10} = \frac{i}{M}\,(\frac{d}{dr}+\frac{1}{\sin r})\, f_4\,,$$

$$f_4 = \frac{1+\cos r}{\sin r}\, F_4\,, \qquad (\frac{d^2}{dr^2}+\varepsilon^2 - M^2)\, F_4 = 0\,. \tag{1.7c}$$

Теперь переходим к анализу случая минимального $j_{min} = |k|-1$ с полуцелыми значениями $k = \pm 3/2,\ \pm 2,\ \ldots$ Вначале рассмотрим положительные k; должны исходить из подстановки

$$k \ge 3/2, \qquad \Phi^0 = e^{-i\varepsilon t}\,(\,0,\ f_2\, D_{k-1}, 0, 0;\ f_5\, D_{k-1}, 0, 0;\ f_8\, D_{k-1}, 0, 0\,)\,. \tag{1.8}$$

Используя рекуррентные соотношения

$$\partial_\theta\, D_{\kappa-1} = \sqrt{\frac{k-1}{2}}\, D_{k-2}\,, \qquad \frac{-m-(k-1)\cos\theta}{\sin\theta}\, D_{k-1} = -\sqrt{\frac{k-1}{2}}\, D_{k-2}\,,$$

получаем

$$i\beta^1\,\Phi^0 = i\,\sqrt{\frac{k-1}{2}}\begin{vmatrix} -if_5\, D_{k-2} \\ 0 \\ +f_8\, D_{k-2} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -f_2\, D_{k-2} \\ 0 \end{vmatrix}, \beta^2\,\frac{i\,\partial_\phi + (ij^{12}-k)\cos\theta}{\sin\theta}\,\Phi^0 = \sqrt{\frac{k-1}{2}}\begin{vmatrix} -f_5\, D_{k-2} \\ 0 \\ -if_8\, D_{\kappa-2} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ +if_2\, D_{\kappa-2} \\ 0 \end{vmatrix}$$

и дальше находим $\Sigma_{\theta,\phi}\Phi^0 = 0$. Следовательно, радиальная система для функций $f_2,\ f_5,\ f_8$ удовлетворяет $(1.6b)$. Случай $j_{min} = |k|-1$ с отрицательными k выглядит аналогично предыдущему:

$$k \le -3/2, \qquad \Phi^0 = e^{-i\varepsilon t}\,(\,0, 0, 0,\ f_4\, D_{k+1},\ 0, 0,\ f_7\, D_{k+1}, 0, 0,\ f_1\ D_{k+1}\,)\,; \tag{1.9}$$

тождество $\Sigma_{\theta,\phi}\Phi^0 \equiv 0$ выполняется, и система радиальных уравнений аналогична $(1.7b)$. Итак, описание состояний с $j_{min} = |k|-1$ завершено; все они дают решения экспоненциального типа. В то же время это единственный случай, который удастся решить до конца, т. е. решить радиальные уравнения.

2. Нерелятивистское приближение

При осуществлении перехода к нерелятивистскому описанию будем пользоваться известной методикой [7]. В системе (1.4) выделим уравнения, с помощью которых можно исключить нединамические переменные:

$$\left[-(\frac{d}{dr}+\frac{2}{\sin r})\ f_6-\frac{\sqrt{2}}{\sin r}(c\ f_5+d\ f_7)\right]=M\ f_1\,,$$

$$\left[-i(\frac{d}{dr}+\frac{1}{\sin r})\ f_2-i\frac{\sqrt{2}c}{\sin r}\ f_3\right]=M\ f_8\,,$$

$$\left[i\frac{\sqrt{2}}{\sin r}(c\ f_2-d\ f_4)\right]=M\ f_9\,,\qquad \left[i(\frac{d}{dr}+\frac{1}{\sin r})\ f_4+\frac{i\sqrt{2}d}{\sin r}\ f_3\right]=M\ f_{10}\,. \qquad (2.1)$$

В оставшихся шести уравнениях исключаем нединамические переменные (2.1) и одновременно переходим к более симметричным обозначениям:

$$(f_2,f_3,f_4)-->(\Phi_1,\Phi_2,\Phi_3)\,,\qquad (f_5,f_6,f_7)-->(E_1,E_2,E_3)\,; \qquad (2.2)$$

в результате получим

$$i\varepsilon ME_1+i(\frac{d}{dr}+\frac{1}{\sin r})\left[-i(\frac{d}{dr}+\frac{1}{\sin r})\Phi_1-i\frac{\sqrt{2}c}{\sin r}\Phi_2\right]+$$

$$+i\frac{\sqrt{2}c}{\sin r}\left[i\frac{\sqrt{2}}{\sin r}(c\Phi_1-d\Phi_3)\right]-M^2\Phi_1=0\,,$$

$$i\varepsilon ME_2+\frac{\sqrt{2}i}{\sin r}\left[-c\left(-i(\frac{d}{dr}+\frac{1}{\sin r})\Phi_1-i\frac{\sqrt{2}c}{\sin r}\Phi_2\right)+\right.$$

$$\left.+d\left(i(\frac{d}{dr}+\frac{1}{\sin r})\Phi_3+\frac{i\sqrt{2}d}{\sin r}\Phi_2\right)\right]-M^2\ \Phi_2=0\,,$$

$$i\varepsilon ME_3-i(\frac{d}{dr}+\frac{1}{\sin r})\left[i(\frac{d}{dr}+\frac{1}{\sin r})\Phi_3+\frac{i\sqrt{2}d}{\sin r}\Phi_2\right]-$$

$$-i\frac{\sqrt{2}d}{\sin r}\left[i\frac{\sqrt{2}}{\sin r}(c\Phi_1-d\Phi_3)\right]-M^2\ \Phi_3=0\,,$$

$$-i\varepsilon M\Phi_1+\frac{\sqrt{2}c}{\sin r}\left[-(\frac{d}{dr}+\frac{2}{\sin r})E_2-\frac{\sqrt{2}}{\sin r}(c\ E_1+dE_3)\right]-M^2E_1=0\,,$$

$$-i\varepsilon M\Phi_2-\frac{d}{dr}\left[-(\frac{d}{dr}+\frac{2}{\sin r})E_2-\frac{\sqrt{2}}{\sin r}(cE_1+d\ E_3)\right]-M^2E_2=0\,,$$

$$-i\varepsilon M\Phi_3+\frac{\sqrt{2}d}{\sin r}\left[-(\frac{d}{dr}+\frac{2}{\sin r})E_2-\frac{\sqrt{2}}{\sin r}(cE_1+dE_3)\right]-M^2E_3=0\,. \qquad (2.3)$$

Большие и малые компоненты будут вводиться соотношениями:

$$\Psi_j=\Phi_j+iE_j\,,\qquad \psi_j=\Phi_j-iE_j\,. \qquad (2.4)$$

Переписываем уравнения (2.3), собирая их в пары. Одновременно выделяя энергию покоя формальной заменой $\varepsilon=(M+E)$, получаем

$$i(M+E)ME_1+i(\frac{d}{dr}+\frac{1}{\sin r})\left[-i(\frac{d}{dr}+\frac{1}{\sin r})\Phi_1-i\frac{\sqrt{2}c}{\sin r}\Phi_2\right]+$$

$$+i\frac{\sqrt{2}c}{\sin r}\left[i\frac{\sqrt{2}}{\sin r}(c\Phi_1-d\ \Phi_3)\right]-M^2\ \Phi_1=0\,,$$

$$-i(M+E)M\Phi_1+\frac{\sqrt{2}c}{\sin r}\left[-(\frac{d}{dr}+\frac{2}{\sin r})E_2-\frac{\sqrt{2}}{\sin r}(cE_1+dE_3)\right]-M^2E_1=0\,, \qquad (2.5a)$$

$$i(M+E)ME_2+\frac{\sqrt{2}i}{\sin r}\left[-c\left(-i(\frac{d}{dr}+\frac{1}{\sin r})\Phi_1-i\frac{\sqrt{2}c}{\sin r}\Phi_2\right)+\right.$$

$$\left.+d\left(i(\frac{d}{dr}+\frac{1}{\sin r})\,\Phi_3+\frac{i\sqrt{2}d}{\sin r}\Phi_2\right)\right]-M^2\Phi_2=0\,,$$

$$-i(M+E)M\Phi_2-\frac{d}{dr}\left[-(\frac{d}{dr}+\frac{2}{\sin r})\,E_2-\frac{\sqrt{2}}{\sin r}(cE_1+dE_3)\right]-M^2E_2=0\,, \qquad (2.5b)$$

$$i(M+E)ME_3-i(\frac{d}{dr}+\frac{1}{\sin r})\left[i(\frac{d}{dr}+\frac{1}{\sin r})\Phi_3+\frac{i\sqrt{2}d}{\sin r}\Phi_2\right]-$$

$$-i\frac{\sqrt{2}d}{\sin r}\left[i\frac{\sqrt{2}}{\sin r}(c\Phi_1-d\,\Phi_3)\right]-M^2\Phi_3=0\,,$$

$$-i(M+E)M\Phi_3+\frac{\sqrt{2}d}{\sin r}\left[-(\frac{d}{dr}+\frac{2}{\sin r})E_2-\frac{\sqrt{2}}{\sin r}(cE_1+dE_3)\right]-M^2E_3=0\,. \qquad (2.5c)$$

Рассматриваем пару $(2.5a)$:

$$iM^2E_1+iEME_1+(\frac{d^2}{dr^2}+\frac{2}{\sin r}\frac{d}{dr})\Phi_1+\frac{\sqrt{2}\,c}{\sin r}\frac{d}{dr}\Phi_2-$$

$$-\frac{2c}{\sin^2 r}(c\Phi_1-d\,\Phi_3)-M^2\,\Phi_1-\frac{\cos r-1}{\sin^2 r}(\Phi_1+\sqrt{2}\,c\,\Phi_2)=0,$$

$$-iM^2\Phi_1-iEM\Phi_1-\frac{\sqrt{2}c}{\sin r}(\frac{d}{dr}+\frac{2}{\sin r})\,E_2-\frac{2c}{\sin^2 r}(cE_1+dE_3)-M^2E_1=0\,; \qquad (2.6a)$$

переходим в ней к большим и малым компонентам:

$$M^2(\Psi_1-\psi_1)+EM\,(\Psi_1-\psi_1)+(\frac{d^2}{dr^2}+\frac{2}{\sin r}\frac{d}{dr})(\Psi_1+\psi_1)+\frac{\sqrt{2}c}{\sin r}\frac{d}{dr}(\Psi_2+\psi_2)-$$

$$-\frac{2c}{\sin^2 r}[c(\Psi_1+\psi_1)-d\,(\Psi_3+\psi_3)]-M^2\,(\Psi_1+\psi_1)-\frac{\cos r-1}{\sin^2 r}[(\Psi_1+\psi_1)+\sqrt{2}\,c\,(\Psi_2+\psi_2)]=0\,,$$

$$-iM^2(\Psi_1+\psi_1)-iEM\,(\Psi_1+\psi_1)+i\frac{\sqrt{2}c}{\sin r}(\frac{d}{dr}+\frac{2}{\sin r})(\Psi_2-\psi_2)+$$

$$+i\frac{2c}{\sin^2 r}[c(\Psi_1-\psi_1)+d\,(\Psi_3-\psi_3)]+iM^2(\Psi_1-\psi_1)=0\,. \qquad (2.6b)$$

После приведения подобных слагаемых система упрощается

$$-2M^2\psi_1+EM\,(\Psi_1-\psi_1)+(\frac{d^2}{dr^2}+\frac{2}{\sin r}\frac{d}{dr})(\Psi_1+\psi_1)+\frac{\sqrt{2}c}{\sin r}\frac{d}{dr}(\Psi_2+\psi_2)-$$

$$-\frac{2c}{\sin^2 r}[c(\Psi_1+\psi_1)-d\,(\Psi_3+\psi_3)]-\frac{\cos r-1}{\sin^2 r}[(\Psi_1+\psi_1)+\sqrt{2}\,c\,(\Psi_2+\psi_2)]=0\,,$$

$$-2\,M^2\psi_1-EM\,(\Psi_1+\psi_1)+\frac{\sqrt{2}c}{\sin r}(\frac{d}{dr}+\frac{2}{\sin r})(\Psi_2-\psi_2)+$$

$$+\frac{2c}{\sin^2 r}[c(\Psi_1-\psi_1)+d\,(\Psi_3-\psi_3)]=0\,. \qquad (2.6c)$$

Из первого уравнения вычитаем второе, одновременно пренебрегая малыми компонентами на фоне больших:

$$\left(\frac{d^2}{dr^2}+\frac{2}{\sin r}\frac{d}{dr}+\frac{1-\cos r}{\sin^2 r}+2EM\right)\Psi_1-\frac{4c^2}{\sin^2 r}\Psi_1-\frac{\sqrt{2}c(1+\cos r)}{\sin^2 r}\Psi_2=0; \quad (2.6d)$$

полученное уравнение содержит только большие компоненты.

Аналогично рассмотрев пары уравнений $(2.5c)$ и $(2.5b)$, приходим к системе уравнений Паули:

$$\left(\frac{d^2}{dr^2}+\frac{2}{\sin r}\frac{d}{dr}+\frac{1-\cos r}{\sin^2 r}+2EM\right)\Psi_1-$$

$$-\frac{4c^2}{\sin^2 r}\Psi_1-\frac{\sqrt{2}c(1+\cos x)}{\sin^2 r}\Psi_2=0,$$

$$\left(\frac{d^2}{dr^2}+\frac{2}{\sin r}\frac{d}{dr}+\frac{1-\cos r}{\sin^2 r}+2EM\right)\Psi_2-$$

$$-\frac{2(c^2+d^2)}{\sin^2 r}\Psi_2-\frac{1+\cos r}{\sin^2 r}\Psi_2-\sqrt{2}c\frac{1+\cos r}{\sin^2 r}\Psi_1-\sqrt{2}d\frac{1+\cos r}{\sin^2 r}\Psi_3=0,$$

$$\left(\frac{d^2}{dr^2}+\frac{2}{\sin r}\frac{d}{dr}+\frac{1-\cos r}{\sin^2 r}+2EM\right)\Psi_3-$$

$$-\frac{4d^2}{\sin^2 r}\Psi_3-\frac{\sqrt{2}d(1+\cos r)}{\sin^2 r}\Psi_2=0. \quad (2.7)$$

Легко можно убедиться в справедливости тождества

$$\left(\frac{d^2}{dr^2}+\frac{2}{\sin r}\frac{d}{dr}+\frac{1-\cos r}{\sin^2 r}+2EM\right)\frac{\cos r+1}{\sin r}F=\frac{\cos r+1}{\sin r}\left(\frac{d^2}{dr^2}+2ME\right)F,$$

которое позволяет преобразовать систему (2.7) к виду:

$$\left(\frac{d^2}{dr^2}+2EM-\frac{4c^2}{\sin^2 r}\right)F_1=\frac{1+\cos r}{\sin^2 r}\left(\sqrt{2}c\,F_2\right),$$

$$\left(\frac{d^2}{dr^2}+2EM-\frac{2(c^2+d^2)}{\sin^2 r}\right)F_2=\frac{1+\cos r}{\sin^2 r}\left(\sqrt{2}c\,F_1+F_2+\sqrt{2}d\,F_3\right),$$

$$\left(\frac{d^2}{dr^2}+2EM-\frac{4d^2}{\sin^2 r}\right)F_3=\frac{1+\cos r}{\sin^2 r}\left(\sqrt{2}d\,F_2\right). \quad (2.8)$$

К сожалению, система (2.8) оказывается очень сложной. Использованный в аналогичной ситуации в случае плоского пространства метод диагонализации смешивающей матрицы здесь не применим.

3. Частица в присутствии монополя в состояниях минимального *j*: учет кулоновского и осцилляторного потенциалов

Рассмотрим уравнение, описывающее состояния векторной частицы с минимальным значением квантового числа j в присутствии монополя, добавив кулоновский потенциал:

$$\left(\frac{d^2}{dr^2}+(\varepsilon+\frac{\alpha}{\tan r})^2-M^2\right)F_2=0. \quad (3.1)$$

В уравнении (3.1) перейдем к переменной $x=1-e^{-2ir}$:

$$x(1-x)\frac{d^2F_2}{dx^2}-x\frac{dF_2}{dx}+\left[\frac{1}{4}\frac{M^2x}{1-x}+\frac{1}{4}\frac{(\alpha x-2\alpha+i\varepsilon x)^2}{x(1-x)}\right]F_2=0. \qquad (3.2)$$

После подстановки $F_2=x^A(1-x)^B f(x)$ уравнение (3.2) примет вид:

$$x(1-x)\frac{d^2f}{dx^2}-[(1+2A+2B)x-2A]\frac{df}{dx}-$$

$$-\left[(A+B)^2+(\frac{i\varepsilon}{2}+\frac{\alpha}{2})^2+\frac{M^2}{4}-\frac{A(A-1)+\alpha^2}{x}-\frac{1}{4}\frac{(i\varepsilon-\alpha)^2+4B^2+M^2}{1-x}\right]f=0. \qquad (3.3a)$$

Требуя

$$A=\frac{1}{2}\pm\sqrt{\frac{1}{4}-\alpha^2}\,, \qquad B=\pm\sqrt{-(\frac{i\varepsilon}{2}-\frac{\alpha}{2})^2-\frac{M^2}{4}}\,, \qquad (3.3b)$$

из (3.3a) получим более простое уравнение

$$x(1-x)\frac{d^2f}{dx^2}-[(1+2A+2B)x-2A]\frac{df}{dx}-\left[(A+B)^2+(\frac{i\varepsilon}{2}+\frac{\alpha}{2})^2+\frac{M^2}{4}\right]f=0. \qquad (3.3c)$$

Это уравнение можно сопоставить с уравнением для гипергеометрических функций

$$x(1-x)\frac{d^2}{dx^2}f+[c-(a+b+1)x]\frac{df}{dx}-ab\,F=0\,,$$

$$a=A+B-\frac{1}{2}\sqrt{-(i\varepsilon+\alpha)^2-M^2}\,, \qquad b=A+B+\frac{1}{2}\sqrt{-(i\varepsilon+\alpha)^2-M^2}\,. \qquad (3.4)$$

Выбираем

$$A=\frac{1+\sqrt{1-4\alpha^2}}{2}\,, \qquad B=-\frac{1}{2}\sqrt{-(i\varepsilon-\alpha)^2-M^2}\,. \qquad (3.5)$$

Условие полиномиальности $a=-n$ дает

$$1+\sqrt{1-4\alpha^2}-\sqrt{-(i\varepsilon-\alpha)^2-M^2}-\sqrt{-(i\varepsilon+\alpha)^2-M^2}=-2n\,,$$

откуда приходим к формуле для спектра энергий:

$$\varepsilon=\frac{M}{\sqrt{1+\alpha^2/\nu^2}}\sqrt{1+\frac{\alpha^2+\nu^2}{M^2}}\,, \qquad \nu=n+\frac{1+\sqrt{1-4\alpha^2}}{2}\,. \qquad (3.6)$$

В обычных единицах выражение для спектра энергий имеет вид:

$$E=\frac{mc^2}{\sqrt{1+\alpha^2/\nu^2}}\sqrt{1+\frac{\hbar^2}{m^2c^2R^2}(\alpha^2+\nu^2)}\,. \qquad (3.7)$$

Теперь на фоне присутствия монополя в состояниях минимального значения j учтем внешний осцилляторный потенциал. Если обратиться к релятивистской частице в поле монополя, то возникающее уравнение не решается в гипергеометрических функциях. Поэтому рассматриваем здесь только нерелятивистской задачу – она описывается уравнением

$$\left(\frac{d^2}{dr^2}+2M(\varepsilon-\frac{K\tan^2 r}{2})^2\right)F_2=0\,. \qquad (3.8)$$

В уравнении (3.8) перейдем к переменной $y=\cos^2 r$:

$$\left(4y(y-1)\frac{d^2}{dy^2}+(4y-2)\frac{d}{dy}-2ME-MK\frac{y-1}{y}\right)F_2=0\,. \qquad (3.9a)$$

Решения будем искать в виде $F_2(y)=y^a(1-y)^b f(y)$:

$$y(1-y)f''+\left[\ 2a+\frac{1}{2}-(2a+2b+1)y\ \right]f'-$$

$$-\left[-\frac{EM}{2}-\frac{KM}{4}+(a+b)^2\right]f-\frac{1}{y}\left(-a^2+\frac{a}{2}+\frac{KM}{4}\right)f+\frac{1}{1-y}\left(b^2-\frac{b}{2}\right)f=0\,.$$

Требуем обращения в ноль коэффициентов при $y^{-1},(1-y)^{-1}$, получаем

$$a=\frac{1}{4}\pm\frac{1}{4}\sqrt{1+4KM}\,,\qquad b=0,\frac{1}{2}\,. \tag{3.9b}$$

Уравнение принимает более простой вид:

$$y(1-y)f''+\left[\ 2a+\frac{1}{2}-(a+b+1)y\ \right]f'-\left[-\frac{EM}{2}-\frac{KM}{4}+(a+b)^2\right]f=0\,. \tag{3.9c}$$

Это уравнение можно сопоставить с уравнением для гипергеометрической функции:

$$x(1-x)\frac{d^2}{dx^2}f+[\gamma-(\alpha+\beta+1)x]\frac{df}{dx}-\alpha\beta\,F=0\,,\qquad \gamma=2a+1\,,$$

$$\alpha=a+b-\sqrt{\frac{2EM}{4}+\frac{KM}{4}}\,,\qquad \beta=a+b+\sqrt{\frac{2EM}{4}+\frac{KM}{4}}\,,$$

$$F_2(y)=y^a\,(1-y)^b\,F(\alpha,\beta,\gamma,y)=(\cos r)^{2a}\,(\sin r)^{2b}\,F(\alpha,\beta,\gamma,\cos^2 r)\,. \tag{3.10a}$$

Для связанных состояний выбираем положительные значения параметров a,b:

$$2b=1>0\,,\qquad 2a=\frac{1+\sqrt{1+4KM}}{2}>0\,, \tag{3.10b}$$

при этом

$$\alpha=\frac{1+\sqrt{1+4KM}}{4}+\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\sqrt{2EM+KM}\,,$$

$$\beta=\frac{1+\sqrt{1+4KM}}{4}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{2EM+KM}\,. \tag{3.10c}$$

Условие обращения гипергеометрического ряда в полином $\alpha=-n$ дает

$$N+\frac{\sqrt{1+4KM}}{2}=\sqrt{2EM+KM}\,,\qquad N=2n+\frac{3}{2}\,.$$

Откуда находим формулу для спектра энергии

$$E=N\sqrt{\frac{K}{M}+(\frac{1}{2M})^2}+\frac{1}{2M}(N^2+\frac{1}{4})\,. \tag{3.11}$$

В обычных единицах формула имеет вид:

$$\varepsilon=\hbar\left(N\sqrt{\frac{k}{m}+\frac{\hbar^2}{4m^2R^4}}+\frac{\hbar}{2mR^2}(N^2+\frac{1}{4})\right),\qquad N=2n+\frac{3}{2}\,. \tag{3.12}$$

Авторы благодарны В.М. Редькову за интерес к данной работе и полезные советы.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Стражев, В.И. Электродинамика с магнитным зарядом / В.И. Стражев, Л.М. Томильчик. – Минск: Наука и техника, 1975. – 322 с.

2. Fushchych, W.I. Relativistic particle of arbitrary spin in the Coulomb and magnetic monopole field / W.I. Fushchych, A.G. Nikitin, W.M. Susloparow // Nuovo Cimento A. – 1985. – Vol. 87. – P. 415–424.

3. Редьков, В.М. Тетрадный формализм, сферическая симметрия и базис Шредингера / В.М. Редьков. – Минск: Белорусская наука, 2011. – 339 с.

4. Ovsiyuk, E.M. Quasi-plane waves for a electromagnetic and spinor fields on the background of Lobachevsky geometry: simulating of a special medium / E.M. Ovsiyuk, V.M. Red'kov // BGL-8 International Conference on Non-Euclidean Geometry in Modern Physics and Mathematics: programme and abstracts, Uzhgorod, 22–25 May 2012 / укл. А.М. Завілопуло. – Ужгород: ФОП Бреза А.Е., 2012. – С. 31.

5. Ovsiyuk, E. Quantum mechanics of a spin 1 particle in the magnetic monopole potential, in spaces of Euclid, Lobachevsky, and Riemann: nonrelativistic approximation / E. Ovsiyuk, O. Veko, K. Kazmerchuk,V. Kisel, V. Red'kov // Quantum groups and quantum integrable systems: Program and Abstracts of International Conference, Kiev, June 18–21, 2013 / National Academy of Sciences of Ukraine, Bogolyubov Institute for Theoretical Physics, Institute of Mathematics. – Kiev, 2013. – P. 42.

6. Варшалович, Д.А. Квантовая теория углового момента / Д.А. Варшалович, А.Н. Москалев, В.К. Херсонский. – Л.: Наука, 1975. – 439 с.

7. Квантовая механика в однородном магнитом поле: новые задачи / Е.М. Овсиюк, В.В. Кисель, Г.Г. Крылов, В.М. Редьков. – Мозырь: УО МГПУ им. И.П. Шамякина, 2011. – 232 с.

E.M. Ovsiyuk, K.V. Kazmerchuk **Particle with Spin 1 in the Spherical Riemann Space: Pauli Approximation in the Magnetic Monopole Potential**

A particle with spin 1 in the spherical Riemann space S_3 is treated in presence of the Dirac magnetic monopole in non-relativistic approximation. In the relativistic Duffin–Kemmer–Peteau equation we have separated the variables using the Wigner *D*-functions. Thus there arise three quantum numbers (E, j, m): the energy, the square and the third projection of the generalized total angular momentum. In the radial system of equations, transition to the non-relativistic approximation is performed and the problem is reduced to the system of three interrelated equations of second order. The resulting system is complex, complete analysis is possible only for a special case of minimal value of the quantum number $j_{\min}$, at this external spherically symmetric electric fields can be taken into account. The cases of Coulomb and oscillator potential are studied in detail – the exact wave functions and energy spectra of the particle have been constructed.

Рукапіс паступіў у рэдакцыю 19.09.2013