

УДК 539.12:530.145

П.П. Андрусевич, В.А. Плетюхов

КВАНТОВАЯ ТЕОРИЯ БЕЗМАССОВОГО ПОЛЯ СО СПИРАЛЬНОСТЯМИ 0, ±1

Осуществлена процедура вторичного квантования безмассового поля, описываемого не распадающейся по группе Лоренца 11-компонентной системой тензорных уравнений первого порядка. На этой основе показана возможность описания теории безмассового поля со спиральностями 0, ±1 как единого физического объекта.

Введение

Как известно, в классической теории поля микрочастицу с целым спином 1 и ненулевой массой m обычно описывают с помощью системы дифференциальных уравнений второго порядка

$$(\square - m^2)\psi_\mu(x) = 0, \quad (1)$$

$$\partial_\mu \psi_\mu = 0, \quad (2)$$

где $\psi_\mu(x)$ – четырёхмерный вектор. Уравнение (2) имеет вид калибровки Лоренца и играет для уравнения (1) роль дополнительного условия, исключающего «лишнюю» степень свободы.

Описание безмассовых частиц (полей) в таком подходе осуществляется путём предельного перехода $m \rightarrow 0$, т.е. замены уравнения (1) на уравнение Даламбера. При этом безмассовый аналог исходной массивной частицы обладает проекциями спина (спиральностью) ±1, значение же спиральности, равное нулю, теряется.

Однако в современных теоретико-полевых моделях фундаментальных частиц и их взаимодействий нередко возникает необходимость совместного описания безмассовых полей не только с максимальным, но и промежуточными значениями спиральности [1–3]. В работах [4–6] было показано, что такое описание в рамках не распадающейся по полной группе Лоренца теории возможно при использовании формализма дифференциальных линейных уравнений первого порядка – теории релятивистских волновых уравнений (РВУ).

В работе [6], в частности, рассматривается 11-компонентная система

$$\partial_\mu \psi_\mu = 0, \quad (3)$$

$$\partial_\nu \psi_{[\mu\nu]} + \partial_\mu \psi_0 = 0, \quad (4)$$

$$-\partial_\mu \psi_\nu + \partial_\nu \psi_\mu + \psi_{[\mu\nu]} = 0, \quad (5)$$

в которой величины ψ_0 и $\psi_{[\mu\nu]}$ – соответственно скаляр и антисимметричный тензор. Уравнение (3) совпадает по виду с (2), но играет здесь уже не роль дополнительного условия, а равноправного уравнения. Величины ψ_0 , ψ_μ выступают в системе (3)–(5) в качестве потенциалов; компоненты тензора $\psi_{[\mu\nu]}$ – напряжённости.

Система (3)–(5) инвариантна относительно градиентных преобразований

$$\psi_\mu \rightarrow \psi_\mu + \partial_\mu \Lambda(x), \quad (6)$$

где произвол в выборе калибровочной функции $\Lambda(x)$ ограничен условием

$$\square \Lambda = 0. \quad (7)$$

Поэтому по аналогии с электромагнитным полем есть основания считать, что данная градиентная инвариантность в совокупности с уравнением (3) приводит к исключению двух из четырёх степеней свободы вектор-потенциала ψ_μ . Независимыми остаются только две его компоненты, связанные с поперечной поляризацией векторного поля. Ещё одна степень свободы обусловлена потенциалом скалярного поля ψ_0 .

Однако для окончательного и точного ответа на вопрос о числе степеней свободы рассматриваемого поля и их физической интерпретации необходимо провести процедуру вторичного квантования системы (3)–(5), к осуществлению которой мы и переходим.

Вторичное квантование

Прежде всего нетрудно убедиться, что потенциалы $\psi_\mu(x)$, $\psi_0(x)$ удовлетворяют уравнениям второго порядка вида

$$\square \psi_\mu - \partial_\mu \psi_0 = 0, \quad (8)$$

$$\square \psi_0 = 0, \quad (9)$$

т.е. действительно описывают безмассовое поле. При этом градиентный член $\partial_\mu \psi_0$ в (8) выступает в роли внутреннего источника (типа «тока смещения») для векторной составляющей поля.

Общие решения этих уравнений можно представить в виде суперпозиции плоских волн

$$\psi_\mu(x) = \sum_k N_k (C_{\mu k} e^{ikx} + C_{\mu k}^+ e^{-ikx}), \quad (10)$$

$$\psi_0(x) = \sum_k N_k (B_k e^{ikx} + B_k^+ e^{-ikx}), \quad (11)$$

где N_k – нормировочный множитель, $kx = k_\mu x_\mu$, $k_\mu = (\vec{k}, i\omega)$ – четырёхмерный волновой вектор, удовлетворяющий условию $k^2 = k_\mu k_\mu = \vec{k}^2 - \omega^2 = 0$.

Для исключения нефизических решений системы (3)–(5) будем использовать базис, предложенный в работе [7] при квантовании поля нотофа – безмассового поля со спиральностью 0, переносщего во взаимодействиях спин 1, а именно:

$$e_\mu^{(1)}, e_\mu^{(2)}, k_\mu, n_\mu, \quad (12)$$

$$e_\mu^{(i)} e_\mu^{(j)} = \delta_{ij}, e_\mu^{(i)} k_\mu = 0, e_\mu^{(i)} n_\mu = 0, n_\mu^2 = -1. \quad (13)$$

Особенностью этого базиса является его неортогональность, так как он содержит изотропный вектор k_μ и $k_\mu n_\mu \neq 0$.

Разложим амплитуды $C_{\mu k}, C_{\mu k}^+$ по этому базису

$$C_{\mu k} = \sum_{i=1}^2 c_{ki} e_\mu^{(i)} + c_{k3} k_\mu + c_{k0} n_\mu, \quad (14)$$

$$C_{\mu k}^+ = \sum_{i=1}^2 c_{ki}^+ e_\mu^{(i)} + c_{k3}^+ k_\mu + c_{k0}^+ n_\mu. \quad (15)$$

Теперь учтём, что система (3)–(5) инвариантна относительно градиентных преобразований (6), (7). Условие (7) означает, что калибровочную функцию $\Lambda(x)$ также можно представить в виде разложения, аналогичного (14), (15):

$$\Lambda(x) = \sum_k N_k (\lambda_k e^{ikx} + \lambda_k^+ e^{-ikx}), \quad (16)$$

где λ_k, λ_k^+ – произвольные амплитуды.

Подставляя разложения (10), (14)–(16) в преобразование (6), получаем калибровочные преобразования для амплитуд $C_{\mu k}, C_{\mu k}^+$

$$C_{\mu k} \rightarrow C_{\mu k} + i\lambda_k k_\mu, \quad (17)$$

$$C_{\mu k}^+ \rightarrow C_{\mu k}^+ - i\lambda_k^+ k_\mu. \quad (18)$$

Из (17), (18) следует, что амплитуды $C_{\mu k}, C_{\mu k}^+$ определяются с точностью до несущественных слагаемых $i\lambda_k k_\mu, -i\lambda_k^+ k_\mu$ соответственно. В разложениях (14), (15) роль таких несущественных слагаемых выполняют члены $c_{k3} k_\mu$ и $c_{k3}^+ k_\mu$. Отбрасывая их, получим для $C_{\mu k}, C_{\mu k}^+$ выражения

$$C_{\mu k} = \sum_{i=1}^2 c_{ki} e_\mu^{(i)} + c_{k0} n_\mu, \quad (19)$$

$$C_{\mu k}^+ = \sum_{i=1}^2 c_{ki}^+ e_\mu^{(i)} + c_{k0}^+ n_\mu. \quad (20)$$

Далее переходим в обычный ортонормированный базис

$$e_\mu^{(\lambda)} = \delta_{\mu\lambda}, \quad (21)$$

первые два орта которого ($\lambda = 1, 2$) соответствуют поперечным поляризациям и совпадают с ортами $e_\mu^{(i)}$ базиса (12), (13), третий $e_\mu^{(3)}$ и четвёртый $e_\mu^{(4)}$ – продольной и скалярной поляризациям потенциала $\psi_\mu(x)$. При этом выполняются соотношения

$$e_\mu^{(\lambda)} e_\mu^{(\lambda')} = \delta_{\lambda\lambda'}, \quad e_\mu^{(\lambda)} e_\nu^{(\lambda)} = \delta_{\mu\nu} \quad (22)$$

и векторы k_μ, n_μ в базисе (21), (22) имеют компоненты

$$k_\mu = (0, 0, \omega, i\omega), \quad n_\mu = (0, 0, 0, i). \quad (23)$$

Окончательные выражения для амплитуд $C_{\mu k}, C_{\mu k}^+$ в ортонормированном базисе (21) принимают вид

$$C_{\mu k} = \sum_{\lambda=1,2,4} c_{k\lambda} e_\mu^{(\lambda)}, \quad C_{\mu k}^+ = \sum_{\lambda=1,2,4} c_{k\lambda}^+ e_\mu^{(\lambda)}, \quad (24)$$

где использованы обозначения

$$c_{k4} = i c_{k0}, \quad c_{k4}^+ = i c_{k0}^+. \quad (25)$$

Лангранжиан системы (3)–(5) может быть представлен в форме

$$L = -\psi_\mu \partial_\mu \psi_0 - \frac{1}{2} \psi_{[\mu\nu]} (\partial_\mu \psi_\nu - \partial_\nu \psi_\mu) + \frac{1}{4} \psi_{[\mu\nu]}^2. \quad (26)$$

Отсюда для тензора энергии-импульса

$$T_{\mu\nu} = \frac{\partial L}{\partial(\partial_\mu \psi_A)} \partial_\nu \psi_A - \delta_{\mu\nu} L \quad (27)$$

и его компоненты T_{44} вытекают выражения

$$T_{\mu\nu} = -\psi_{,\mu}\partial_{,\nu}\psi_0 - \psi_{[\mu\alpha]}\partial_{,\nu}\psi_{,\alpha} - \delta_{\mu\nu}L, \quad (28)$$

$$T_{44} = -\psi_{,4}\partial_{,4}\psi_0 - \psi_{[4\alpha]}\partial_{,4}\psi_{,\alpha} - L. \quad (29)$$

Подставляя в (29) разложения (10), (11), с учетом (24) получим для энергии поля

$$E = \int T_{44} d^3x \quad (30)$$

формулу

$$E = \frac{1}{2} \sum_k \omega \left[\sum_{\lambda=1,2,4} (c_{k\lambda}^+ c_{k\lambda} + c_{k\lambda} c_{k\lambda}^+) + (b_k^+ b_k + b_k b_k^+) \right], \quad (31)$$

в которой

$$b_k = \frac{B_k}{\omega}, \quad b_k^+ = \frac{B_k^+}{\omega}, \quad (32)$$

а также учтено, что $N = 1/\sqrt{2V\omega}$ (V – нормировочный объем).

Вторичное квантование рассматриваемого поля осуществляется, как обычно, путем замены амплитуды $c_{k\lambda}, c_{k\lambda}^+$, b_k, b_k^+ на операторы, удовлетворяющие перестановочным соотношениям

$$[c_{k\lambda}, c_{k'\lambda'}^+]_- = \delta_{kk'} \delta_{\lambda\lambda'} \quad (\lambda, \lambda' = 1, 2, 4), \quad (33)$$

$$[b_k, b_{k'}^+]_- = \delta_{kk'} \quad (34)$$

и все остальные коммутаторы равны нулю. Из условий квантования (33), (34) следует, что собственные значения операторов $c_{k\lambda}, c_{k\lambda}^+$, и b_k, b_k^+ равны целым положительным числам или нулю.

Уравнение (3), входящее в рассматриваемую классическую систему (3)–(5) в качестве составной части, для квантованного поля сформулируем в виде условия, накладываемого на операторы $\widehat{\psi}_{,\mu}$, а не на волновые функции Ψ гильбертова пространства физических состояний поля, на которые действуют эти операторы. Точнее говоря, будем использовать более слабое условие [8; 9]

$$\partial_{,\mu} \widehat{\psi}_{,\mu}^{(+)} \Psi = 0, \quad (35)$$

в котором операторы $\widehat{\psi}_{,\mu}^{(+)}$ содержат только положительно-частотные части.

Из условия (35) вытекает соотношение

$$\left(\sum_k (\omega c_{k4} e^{ikx}) \right) \Psi = 0, \quad (36)$$

из которого, в свою очередь, следует, что функция Ψ при всех k должна удовлетворять равенству

$$c_{k4} \Psi = 0. \quad (37)$$

Учитывая, что операторы c_{k4} и $(-c_{k4}^+)$ эрмитово сопряжены, имеем также

$$\Psi^* c_{k4}^+ = 0. \quad (38)$$

Из (37), (38) вытекает условие

$$(\Psi, c_{k4}^+ c_{k4} \Psi) = 0, \quad (39)$$

благодаря которому исчезает среднее значение части оператора энергии (31), связанной со скалярной составляющей вектор-потенциала $\psi_{,\mu}$.

В результате для среднего значения энергии квантового поля получается выражение

$$\bar{E} = \frac{1}{2}(\Psi, \sum_k \omega \sum_{\lambda=1,2} (c_{k\lambda}^+ c_{k\lambda} + c_{k\lambda} c_{k\lambda}^+) \Psi) + \frac{1}{2}(\Psi, \sum_k \omega (b_k^+ b_k + b_k b_k^+) \Psi). \quad (40)$$

Дальнейшая процедура квантования осуществляется в соответствии с квантованием обычного электромагнитного поля.

Формула (40) показывает, что вклад в энергию квантованного поля дают две степени свободы, связанные с поперечными колебаниями векторной составляющей Ψ_μ , и одна степень свободы, приходящаяся на скалярный потенциал Ψ_0 . Окончательно, с учетом нераспадения системы (3)–(5) по группе Лоренца, можно сделать вывод о том, что указанная система тензорных уравнений дает совместное описание взаимосвязанных безмассовых полей со спиральностями 0, ± 1 как единого физического объекта.

Заклучение

Из полученных результатов следует вывод о принципиальной возможности совместного описания безмассовых полей с различными значениями спиральности как единого физического объекта в рамках теории обобщенных релятивистских волновых уравнений первого порядка. Ранее в литературе такое описание в данном подходе не предлагалось. Основное значение этого факта заключается в существенном расширении рамок теории РВУ с точки зрения ее приложения в современных полевых моделях, таких как SU(n)-калибровочные модели фундаментальных взаимодействий, теория суперструн.

Еще более широкие возможности в данном отношении представляют собой РВУ, волновая функция которых преобразуется по приводимому представлению полной группы Лоренца, содержащему кратные (повторяющиеся) неприводимые представления этой группы. Уравнения данного типа являются в настоящее время предметом исследования авторов и будут темой последующих публикаций.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Kalb, M. Classical direct interesting action / M. Kalb, P. Ramond // Phys. Rev. – 1974. – № 8. – P. 2273–2284.
2. Aurilia, A. Generalized Maxwell equations and gauge mixing mechanism of mass generation / A. Aurilia, Y. Takahashi // Progr. Theor. Phys. – 1981. – Vol. 66. – P. 693–712.
3. Dvoeglazov, V.V. Photon–notoph equations / V.V. Dvoeglazov // arxiv: physics / 9804010 v. – Дата доступа : 17. 04. 1998.
4. Плетюхов, В.А. Безмассовые частицы в теории релятивистских волновых уравнений / В.А. Плетюхов, В.И. Стражев // Вестник БГУ. Сер. 1. – 2007. – № 3. – С. 3–11.
5. Андрусевич, П.П. Безмассовые и массивные калибровочно-инвариантные поля в теории обобщенных релятивистских волновых уравнений / П.П. Андрусевич, В.А. Плетюхов, В.И. Стражев // Веснік Брэсцкага ўн-та. Сер. прыродазн. навук. – 2007. – №1. – С. 36–45.
6. Плетюхов, В.А. Массивные калибровочно-инвариантные теории и безмассовые поля / В.А. Плетюхов, В.И. Стражев // Весці НАН Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. – 2008. – №1. – С. 80–88.
7. Огиевецкий, В.И. Нотоф и его возможные взаимодействия / В.И. Огиевецкий, И.В. Полубаринов // ЯФ. – 1966. – Т. 4, вып. 1. – С. 216–224.
8. Прохоров, Л. В. Квантование электромагнитного поля / Л.В. Прохоров // УФН. – 1988. – Т. 154, вып. 2. – С. 299–320.

9. Ахиезер, А.И. Квантовая электродинамика / А.И. Ахиезер, В.Б. Берестецкий. – М. : Наука. – 1969. – 623 с.

P.P. Andrusevich, V.A. Pletyukhov Quantum Theory of a Massless Field with Helicity 0, ±1

Implemented procedure of second quantization of a massless field described by 11-component system of tensor equations. On this basis, the possibility of a massless field theory description with helicity 0, ±1 as a single physical entity is showed.

Рукапіс паступіў у рэдакцыю 24.02.14