УДК 517.9

Г.П. Степанюк, А.В. Чичурин

ОБ ОДНОМ УСЛОВИИ ИНТЕГРИРУЕМОСТИ ЛИНЕЙНОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ЧЕТВЕРТОГО ПОРЯДКА

Для линейного дифференциального уравнения четвертого порядка, коэффициенты которого удовлетворяют трем условиям, приводится метод интегрирования в квадратурах. Рассмотрены три примера, иллюстрирующие приведенный метод. Для выбранных начальных условий построена графическая интерпретация искомых частных решений.

Введение

В работе [1, с. 161] при исследовании линейных дифференциальных уравнений четвертого порядка

$$y^{(IV)} + p(x)y''' + q(x)y'' + r(x)y' + s(x)y = 0 \tag{1}$$

с коэффициентами, которые удовлетворяют условиям

$$p' = \frac{2}{3}q - \frac{1}{4}p^2,\ q' = \frac{3}{2}r - \frac{1}{4}pq,\quad r' = 4s - \frac{1}{4}pr, \tag{2}$$

было получено нелинейное дифференциальное уравнение четвертого порядка вида

$$\begin{gathered}20\cdot\left(8\,i^3 - 15\,i'^2 + 12\,i\cdot i''\right)\cdot i^{(\mathrm{IV})} - 280\cdot i'''^2 + 20\cdot\left(42\,i'\cdot i'' - 56\,i^2 i'\right)\cdot i''' + 504\,i''^3 + \\ +192\,i^2\cdot i''^2 + \left(448\,i^4 + 2040\,i\cdot i'^2\right)\cdot i'' - 1275 i'^4 - 560 i^3\cdot i'^2 + 64 i^6 = 0.\end{gathered} \tag{3}$$

В работах [2; 3] для уравнения (3) были найдены одно- и двухпараметрические семейства решений, которые могут быть переписаны следующим образом:

$$i = -\frac{256}{(c-8x)^2}, \tag{4}$$

$$i = -\frac{27}{2(c-3x)^2}, \tag{5}$$

$$i = \frac{-4x^2 + cx + 2d - \frac{3c^2}{32}}{\left(x^2 - \frac{cx}{4} + d\right)^2}, \tag{6}$$

$$i = -\frac{25(75x^2 - 50cx + 19c^2 + 32cd + 24d^2)}{2\left(c^2 - 25x^2 - 25dx + 3cd - 4d^2\right)^2}, \tag{7}$$

где $c, d -$ параметры.

Приведем еще одно однопараметрическое семейство решений уравнения (3):

$$i = \frac{72x(2c - 3x^3)}{\left(c + 12x^3\right)^2}, \tag{8}$$

где $c -$ параметр.

В данной статье покажем, как для приведенных семейств решений (4)–(8) построить уравнения (1)–(2) и их проинтегрировать.

Для отыскания общего решения уравнения (1), (2) (коэффициенты *p(x), q(x), r(x), s(x)* заданы) будем использовать метод, следующий из алгоритма, изложенного в работах [2; 3], а именно:

1. По известной функции *i(x)*, которая будет иметь вид (4)–(8), всегда удается найти функцию $\xi(x)$ как общее решение уравнения Шварца

$$\frac{\xi'''}{\xi'}-\frac{3}{2}\left(\frac{\xi''}{\xi'}\right)^2=i(x). \tag{9}$$

2. Затем найдем решение y_1 уравнения (1), (2) в виде

$$y_1=\exp\left(-\int\frac{k_0(x)}{k_1(x)}dx\right), \tag{10}$$

где (согласно работе [4]) имеем следующие коэффициенты

$$\begin{aligned}
k_0(x)=(\,&320i^3+144i^2p^2+24ip^4-384i^2q-128ip^2q+144iq^2+\\
&+4p^2q^2-16q^3+80ipr-12p^3r+56pqr-72r^2-320is-24p^2s+64qs+\\
&+60p^3i'-240pqi'+480ri'-600(i')^2+576i^2p'+72ip^2p'-272iqp'-\\
&-12p^2qp'+40q^2p'-2prp'-96sp'+180pi'p'+144ip'^2-24qp'^2+\\
&+80ipq'+12p^3q'-40pqq'+48rq'-240i'q'+24pp'q'-160ir'-12p^2r'+\\
&+32qr'-48p'r'+480ii''+36p^2i''-96qi''+144p'i''-120ipp''-12pqp''+\\
&+72rp''-120i'p''-48q'p''+160iq''+12p^2q''-32qq''+48p'q'')\xi''+\\
&+(160i^3p+16i^2p^3+32i^2pq+16ip^3q-56ipq^2-448i^2r-56ip^2r+256iqr+\\
&+4p^2qr-16q^2r+12pr^2-160ips-36p^3s+128pqs-192rs+320i^2i'+96ip^2i'+\\
&+12p^4i'-256iqi'-24p^2qi'-48q^2i'+960si'-300pi'^2+48i^2pp'+24ipqp'-\\
&-224irp'-12p^2rp'+40qrp'-48psp'+384ii'p'+36p^2i'p'+24qi'p'-24rp'^2+\\
&+72i'p'^2+320i^2q'+24ip^2q'-64iqq'+96ip'q'+80ipr'+12p^3r'-40pqr'+\\
&+48rr'-240i'r'+24pp'r'-640is'-48p^2s'+128qs'-192p's'+240ipi''+\\
&+24p^3i''-72pqi''+48ri''-240i'i''+72pp'i''-32i^2p''-80iqp''-12prp''+192sp''-\\
&-60pi'p''-48r'p''-48i''p''+160ir''+12p^2r''-32qr''+48p'r''+160ii^{(3)}+\\
&+12p^2i^{(3)}-32qi^{(3)}+48p'i^{(3)})\xi',
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
k_1(x)=8\xi'(&80i^3+12i^2(3p^2-8q+12p')+3p^3(q'-r+5i')+p(q(14r-10(6i'+q')-3p'')-\\
&-3p'(r-15i'-2q'))+2i(3p^4+p^2(9p'-16q)+5p(2(r+q')-3p'')+\\
&+2(9q^2-17qp'+9p'^2-10(2s+r'-3i''-q'')))+p^2(q^2-6s-3qp'-3r'+9i''+3q'')-\\
&-2(3(3r-5i'-2q')(r-5i'-p'')+(2q-3p')(q^2-4s-qp'-2r'+6i''+2q''))).
\end{aligned}$$

3. Умножим функцию (10) на функцию $\xi(x)$ и получим (согласно [2; 3]) общее решение уравнения (1), (2).

Пусть функция *i(x)* имеет вид (4). Общее решение уравнения (9) есть

$$\xi(x)=\frac{C_2}{1152C_1(1+48C_1(c-8x)^3)}+C_3, \tag{11}$$

где C_i $(i=\overline{1,3})$ – произвольные постоянные.

Имеет место следующая теорема.

Теорема 1. *Уравнение (1) с коэффициентами, удовлетворяющими условиям (2) для функции i(x) вида (4), имеет общее решение*

$$y=\xi(x)\cdot y_1(x), \tag{12}$$

где функции $\xi(x)$ и $y_1(x)$ *определяются соотношениями (11) и (10).*

Доказательство теоремы 1 следует из замен (12), (9) и уравнения (3), которое было получено для коэффициентных соотношений (2).■

Рассмотрим теперь случай, когда функция *i(x)* имеет вид (6). Тогда общее решение уравнения (9) есть

$$\xi(x) = C_3 - \frac{C_2}{6(8x^3 - 3cx^2 + 24dx + 3C_1)}, \tag{13}$$

где C_i $(i = \overline{1,3})$ – произвольные постоянные.

Теорема 2. *Уравнение (1) с коэффициентами, удовлетворяющими условиям (2) для функции i(x) вида (6), имеет общее решение (12), где функции* $\xi(x)$ и $y_1(x)$ *определяются соотношениями (13) и (10).*

Замечание 1. Функция $\xi(x)$ вида (11) и функция $\xi(x)$ вида (13) могут быть получены одна из другой путем переобозначения постоянных.

Замечание 2. Рассматривая функции *i(x)* вида (5), (7), (8), мы получаем функции $\xi(x)$, которые также можно привести к виду (11).

Примеры

Пример 1. Пусть функция *p(x)* имеет вид

$$p(x) = ax, \tag{14}$$

где a параметр. Подставляя (14) в коэффициентные соотношения (2), последовательно найдем остальные коэффициенты уравнения (1):

$$q(x) = \frac{3}{8}\left(4a + a^2x^2\right),\ r(x) = \frac{1}{16}\left(12a^2x + a^3x^3\right),\ s(x) = \frac{1}{256}\left(48a^2 + 24a^3x^2 + a^4x^4\right). \tag{15}$$

Зная вид коэффициентов (14), (15) для уравнения (1), найдем из соотношения (11) соответствующее решение y_1:

$$y_1 = -e^{-ax^2/8}\left(48C_1(c - 8x)^3 + 1\right). \tag{16}$$

Подставляя равенства (11) и (16) в формулу (12) и переобозначая комбинации произвольных постоянных, найдем общее решение уравнения (1) с коэффициентами (14), (15) в виде

$$y = C_1e^{-ax^2/8} + C_2xe^{-ax^2/8} + C_3x^2e^{-ax^2/8} + C_4x^3e^{-ax^2/8},$$

где C_i $(i = \overline{1,4})$ – произвольные постоянные.

Пример 2. Пусть функция *p(x)* имеет вид

$$p(x) = a\sin x, \tag{17}$$

где a параметр. Подставляя (17) в соотношения (2), последовательно найдем

$$q(x) = \frac{3}{8}\left(4a\cos x + a^2\sin x^2\right),\ r(x) = \frac{1}{16}\left(12a^2\cos x\sin x - 16a\sin x + a^3\sin^3 x\right),$$

$$s(x) = \frac{1}{256}\left(48a^2\cos^2 x - 64a\cos x - 64a^2\sin^2 x + 24a^3\cos x\sin^2 x + a^4\sin^4 x\right). \tag{18}$$

Зная вид коэффициентов (17), (18) для уравнения (1), найдем из соотношения (10) соответствующее решение y_1:

$$y_1 = -e^{a\cos x/4}\left(48C_1(c - 8x)^3 + 1\right). \tag{19}$$

Подставляя равенства (11) и (19) в формулу (12) и переобозначая комбинации произвольных постоянных, найдем общее решение уравнения (1), (17), (18) в виде

$$y = C_1 e^{a\cos x/4} + C_2 x e^{a\cos x/4} + C_3 x^2 e^{a\cos x/4} + C_4 x^3 e^{a\cos x/4},$$

где C_i $(i=\overline{1,4})-$ произвольные постоянные.

Пример 3. Пусть функция *p(x)* имеет вид

$$p(x) = a\,J_1(x), \tag{20}$$

где a параметр, $J_1(x)-$функция Бесселя первого рода при *n=1*. Подставляя (20) в соотношения (2), последовательно найдем

$$q(x) = \frac{3}{8}\Big(2a\,J_0(x) + a^2 J_1{}^2(x) - 2a\,J_2(x)\Big),$$

$$r(x) = \frac{1}{16}\Big(6a^2 J_0(x)\,J_1(x) - 12a\,J_1(x) + a^3 J_1{}^3(x) - 6a^2 J_1(x) J_2(x) + 4aJ_3(x)\Big), \tag{21}$$

$$s(x) = \frac{1}{256}(12a^2 J_0{}^2(x) - 24a\,J_0(x) - 48a^2 J_1{}^2(x) + 12a^3 J_0(x) J_1{}^2(x) + a^4 J_1{}^4(x) +$$

$$+32aJ_2(x) - 24a^2\,J_0(x)\,J_2(x) - 12a^3 J_2(x) J_1^2(x) + 12a^2 J_2{}^2(x) + 16a^2\,J_1(x)\,J_3(x) - 8aJ_4(x)).$$

Зная вид коэффициентов (20), (21) для уравнения (1), найдем из соотношения (10) соответствующее решение y_1:

$$y_1 = -e^{\frac{1}{4}a\left(J_0(x)-1\right)}\Big(48C_1(c-8x)^3 + 1\Big). \tag{22}$$

Подставляя равенства (11) и (22) в формулу (12) и переобозначая комбинации произвольных постоянных, найдем общее решение уравнения (1) с коэффициентами (20), (21) в виде

$$y = C_1 e^{\frac{1}{4}a\left(J_0(x)-1\right)} + C_2 x e^{\frac{1}{4}a\left(J_0(x)-1\right)} + C_3 x^2 e^{\frac{1}{4}a\left(J_0(x)-1\right)} + C_4 x^3 e^{\frac{1}{4}a\left(J_0(x)-1\right)},$$

где C_i $(i=\overline{1,4})-$ произвольные постоянные.

Воспользовавшись общим решением (22), приведем вид интегральных кривых, соответствующих частным решениям, в которых произвольные постоянные C_i $(i=\overline{1,4})$ равны соответственно следующим наборам чисел (2;0;1;0), (0;2;0;-1/10), (1;-1;1/10;0), (1;2;1;-1/10) (рисунок)

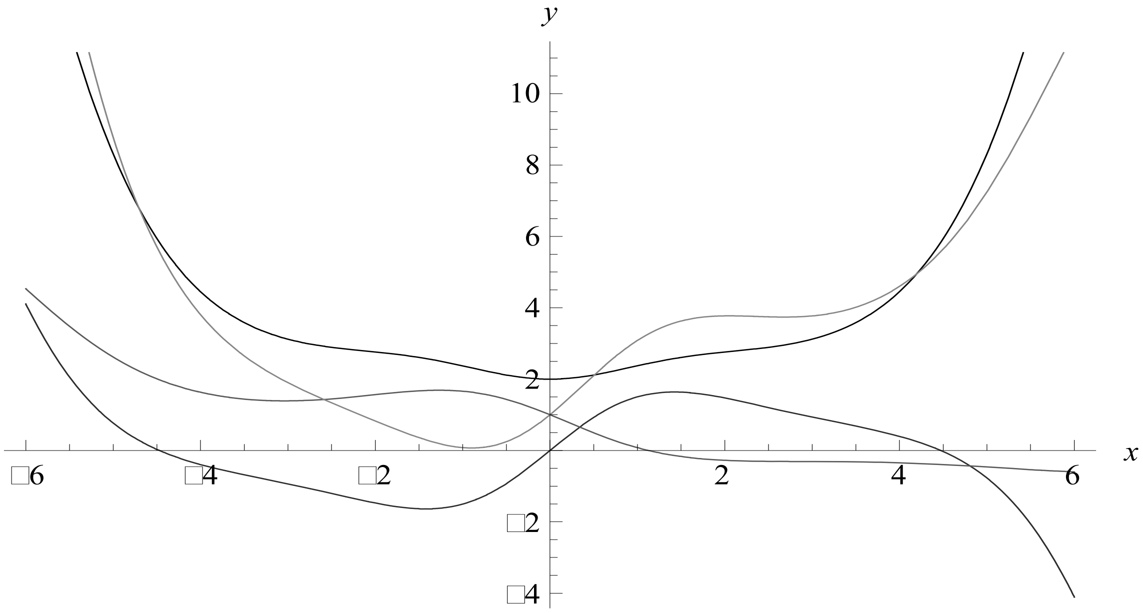

Рисунок – Графики четырех частных решений, полученных из общего решения (22)

Замечание 3. Рассматривая примеры 1–3, где в качестве функции *i(x)* берется одна из функций вида (5)–(8), мы получаем частные решения y_1, которые можно привести соответственно к виду (16), (19) или (22). При этом коэффициенты уравнения (1) будут иметь вид (14)–(15), (17)–(18) или (20)–(21).

Замечание 4. Семейства решений (4)-(7) содержатся среди функций вида

$$\frac{P_2(x)}{\left(Q_2(x)\right)^2}, \tag{23}$$

где P_2, Q_2 – многочлены второй степени. Семейство решений (8) является новым и не принадлежит семейству функций вида (23).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Лукашевич, Н.А. Дифференциальные уравнения первого порядка / Н.А. Лукашевич, А.В. Чичурин – Минск : БГУ, 1999. – 210 с.
2. Чичурин, А.В. Об одном нелинейном уравнении четвертого порядка с постоянными коэффициентами / А.В. Чичурин // Веснік Брэсцкага ўн-та. – 2000. – № 4. – С. 33–38.
3. Чичурин, А.В. Уравнение Шази и линейные дифференциальные уравнения класса Фукса / А.В. Чичурин – М. : РУДН, 2003.
4. Chichurin, A. To the theory of the 4th order linear differential equations./A. Chichurin, N. Lukashevich // Proceedings of the «Computer Algebra Systems in Teaching and Research» international conference, January 31 February 3, 2007, Siedlce, Siedlce Wydawnictwo Akademii Podlaskiej, Poland. – 2007. – P. 47–51.

G.P. Stepanjuk, A.V. Chichurin. **About One Condition of Integrability of the Linear Differential Equation of the Fourth Order**

The method of integration in quadratures for the linear differential equation of the fourth order, coefficients of which satisfy three conditions, is considered. We build three examples which illustrate the using method. For the given initial conditions the graphics of the partial solutions are built.

Рукапіс паступіў у рэдкалегію 14.09.2011 г.