УДК 517.5

Ю. Зайонц, Ю.И. Харкевич, Т.А. Степанюк

АППРОКСИМАТИВНЫЕ СВОЙСТВА ИНТЕГРАЛОВ ПУАССОНА НА КЛАССАХ H_ω

В работе проведено исследование вопросов о приближении функций классов H_ω, т.е. функций, которые удовлетворяют условию $\left|f(x)-f(x')\right|\le\omega\left(\left|x-x'\right|\right)$ $\forall x,x'$, с помощью интегралов Пуассона. Аппроксимативные свойства метода приближения интегралами Пуассона на классах дифференцируемых функций исследовались многими учеными: И.П. Натансоном , А.Ф. Тиманом , Б. Надем, Л.В. Малей, Е.Л. Штарком, В.А. Баскаковым, Л.П. Фалалеевым, К.Н. Жигаллом., Ю.И. Харкевичем и Т.В. Жигалло и др. Нами получено равенство для верхней грани отклонения функций классов H_ω от интегралов Пуассона.

1. Интеграл Пуассона как решение задачи Дирихле для круга

Интеграл Пуассона можно получить как решение так называемой задачи Дирихле для одного простого, но очень важного случая [1]. Напомним, что функция $u=u(x,y)$ называется гармонической в некоторой области, если она в этой области непрерывна вместе со своими производными $\dfrac{\partial u}{\partial x}$, $\dfrac{\partial u}{\partial y}$, $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, $\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}$ и удовлетворяет уравнению в частных производных (уравнению Лапласа)

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0. \tag{1}$$

Рассмотрим конечную область (D), ограниченную замкнутым контуром (L). Тогда задача Дирихле в этой области формулируется следующим образом: на контуре (L) произвольно задана непрерывная функция точки; требуется же найти такую непрерывную в замкнутой области (D) и гармоническую внутри нее функцию $u=u(x,y)$, которая на контуре совпадала бы с заданной функцией. Дадим решение этой задачи для случая, когда область (D) есть круг, описанный вокруг начала координат радиусом 1 (к этому, очевидно, легко приводится и случай произвольного круга).

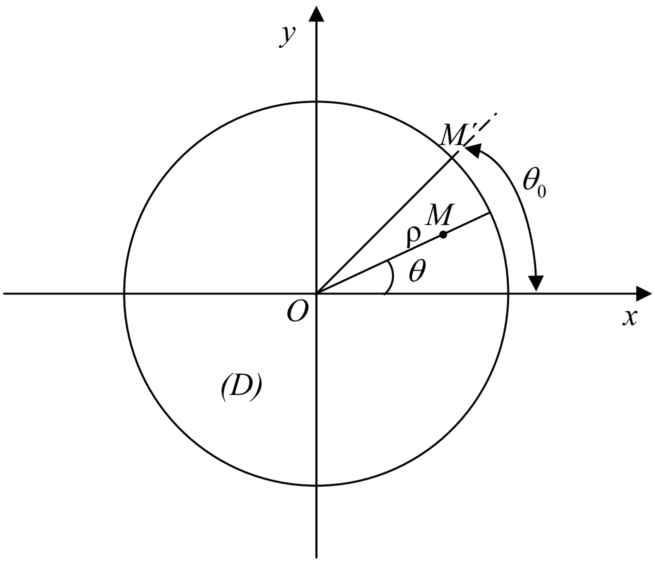

Рисунок 1

Итак, пусть на окружности (L) названого круга задана некоторая непрерывная функция точки. Если положение точки на окружности определять полярным углом θ (рисунок 1), то это равносильно заданию непрерывной (и, очевидно, имеющей период 2π функции $f(\theta)$). Нам удобно и внутри круга (D) перейти к полярным координатам ρ,θ, заменив уравнение (1) соответственно преобразованным уравнением

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \rho^2}+\frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2}+\frac{1}{\rho}\frac{\partial u}{\partial \theta}=0. \tag{2}$$

Нам предстоит, таким образом, найти непрерывную при $\rho \le 1$ функцию $u=u(\rho,\theta)$, которая при $\rho<1$ удовлетворяла бы уравнению (2), а при $\rho=1$ совпадала бы с $f(\theta)$.

В порядке наведения начнем с простейших (не считая постоянной) решений уравнения (2):

$$\rho^n \cos n\theta, \quad \rho^n \sin n\theta, \quad (n=1,2,3,...);$$

найти их можно было бы по методу Фурье. Нетрудно проверить непосредственно, что эти функции уравнению удовлетворяют. Умножив их на произвольные множители A_n, B_n и присоединив еще постоянный член A_0, составим ряд

$$u(\rho,\theta)=A_0+\sum_{k=1}^{\infty}\left(A_k\cos k\theta+B_k\sin k\theta\right)\rho^k,$$

который формально также удовлетворяет уравнению (2). Наконец, учитывая граничное условие $u(1,\theta)=f(\theta)$, получим

$$A_0+\sum_{k=1}^{\infty}A_k\cos k\theta+B_k\sin k\theta=f(\theta).$$

Отсюда заключаем, что A_0, A_k, B_k – коэффициенты Фурье функции $f(\theta)$:

$$A_0=\frac{a_0}{2}, \quad A_k=a_k, \quad B_k=b_k.$$

Окончательно приходим к такому, пока формальному, решению поставленной задачи:

$$u(\rho,\theta)=\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}\rho^k\left(a_k\cos k\theta+b_k\sin k\theta\right). \tag{3}$$

В этом ряде легко узнать ряд Пуассона для функции $f(\theta)$, который, если угодно, можно заменить и интегралом Пуассона:

$$u(\rho,\theta)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(u)\frac{1-\rho^2}{1-2\rho\cos(u-\theta)+\rho^2}du. \tag{4}$$

Остается убедиться, что построенная функция в действительности удовлетворяет всем требованиям.

Прежде всего, так как коэффициенты a_k, b_k ограничены в их совокупности, нетрудно видеть, что если рассматривать лишь значения $\rho \le \rho_0$, где $\rho_0<1$, но может быть взято как угодно близким к единице, ряды, полученные из (3) почленным дифференцированием по ρ или по θ (однажды или дважды), все будут сходиться равномерно как относительно ρ, так и относительно θ. В таком случае они и дадут последовательные производные функции $u(\rho,\theta)$, и эта функция внутри круга, то есть при $\rho<1$, будет удовлетворять преобразованному уравнению Лапласа, поскольку ему удовлетворяют по отдельности все члены ряда.

Внутри круга функция $u(\rho,\theta)$ непрерывна по совокупности переменных (ρ,θ); это вытекает из равномерной сходимости ряда (3) сразу по обеим переменным (при $\rho \le \rho_0 <1$). Установим теперь, что функция $u(\rho,\theta)$ при приближении точки $M(\rho,\theta)$ изнутри круга к точке $M'(1,\theta_n)$ на окружности, стремиться именно к $f(\theta_n)$. Действительно, ввиду непрерывности функции $f(\theta)$ по произвольно взятом $\varepsilon>0$, найдется такое $\delta > 0$, что при $|\theta - \theta_n| < \delta$ будет

$$|f(\theta) - f(\theta_n)| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

С другой стороны, в силу того, что $u(\rho,\theta)$ при $\rho \to 1-0$ стремится к $f(\theta)$ равномерно относительно θ, число δ можно считать и столь малым, что при $|\rho - 1| < \delta$ будет

$$|u(\rho,\theta) - f(\theta)| < \frac{\varepsilon}{2}$$

при всех θ. Итак, окончательно при $|\rho - 1| < \delta$ и $|\theta - \theta_n| < \delta$ имеем:

$$|u(\rho,\theta) - f(\theta_n)| < \varepsilon,$$

что и завершает доказательство.

Интеграл Пуассона, заданный при помощи формулы (4), далее будем обозначать через $P_\rho(f;\theta)$, а именно:

$$u(\rho,\theta) = P_\rho(f;\theta) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(\theta + t)\frac{1-\rho^2}{1-2\rho\cos t + \rho^2}dt, \qquad (5)$$

Не теряя общности рассуждений, заменив в правой части (5) переменную θ на переменную x и также положив $\rho = e^{-\frac{1}{\delta}}$, всюду далее будем пользоваться интегралом Пуассона в виде

$$P_\delta(f;x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x+t)\frac{1-e^{-\frac{2}{\delta}}}{1-2e^{-\frac{1}{\delta}}\cos t + e^{-\frac{2}{\delta}}}dt = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x+t)K_\delta(t)dt, \qquad (6)$$

где

$K_\delta(t) = \dfrac{1-e^{-\frac{2}{\delta}}}{2}\dfrac{1}{1-2e^{-\frac{1}{\delta}}\cos t + e^{-\frac{2}{\delta}}} = \dfrac{1}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} e^{-\frac{k}{\delta}}\cos kt$ – ядро интеграла Пуассона.

2. Постановка задачи и некоторые исторические сведения, касающиеся данного вопроса исследования

Пусть C – пространство 2π-периодических функций, в котором норма задается при помощи равенства

$$\|f\|_C = \max_t |f(t)|.$$

Модулем непрерывности функции $f(x)$ непрерывной на отрезке $[a,b]$ называют функцию $\omega(t) = \omega(f,t)$, определенную для $t \in [0, b-a]$ при помощи равенства:

$$\omega(t) = \omega(f,t) = \sup_{0\le h\le t}\max_{a\le x\le b-h}|f(x+h) - f(x)| = \sup_{\substack{|x'-x''|\le t,\\ x',x''\in[a,b]}}|f(x') - f(x'')|.$$

Пусть $\omega = \omega(t)$ – произвольный фиксированный модуль непрерывности. Говорят, что функция $f(x)$, определенная на отрезке $[a,b]$, принадлежит к классу $H_\omega[a,b]$ ($f \in H_\omega[a,b]$), если ее модуль непрерывности $\omega(f,t)$ удовлетворяет условию

$$\omega(f,t) \le \omega(t)$$

или каковы бы ни были точки $t_1, t_2 \in [a,b]$, справедливо

$$\left|f(t_1)-f(t_2)\right|\le\omega\left(\left|t_1-t_2\right|\right).$$

Задачу об отыскании асимптотических равенств для величины

$$\mathcal{E}(\mathfrak{N};U_\delta(\Lambda))_C=\sup_{f\in\mathfrak{N}}\left\|f(x)-U_\delta(f;x;\Lambda)\right\|_C,$$

где $\mathfrak{N}\subseteq C$ – заданный класс функций, $U_\delta(f;x;\Lambda)$ – операторы, порожденные конкретным методом суммирования рядов Фурье, будем называть, следуя А.И. Степанцу [2], задачей Колмогорова–Никольского.

Если в явном виде найдена функция $g(\delta)=\varphi(P_\delta;\delta)$ такая, что при $\delta\to\infty$

$$\mathcal{E}(H_\omega;P_\delta)_C=\varphi(\delta)+o(\varphi(\delta)),$$

то говорят, что решена задача Колмогорова–Никольского для интеграла Пуассона P_δ на классе H_ω в метрике пространства C.

Аппроксимативные свойства метода приближения интегралами Пуассона на классах дифференцируемых функций исследовались многими учеными: И.П. Натансоном [3], О.П. Тиманом [4], Б. Надем, Л.В. Малей [5], Е.Л. Штарком [6], В.А. Баскаковым [7], Л.П. Фалалеевым, К.Н. Жигалло, Ю.И. Харкевичем и Т.В. Жигалло [8–11] и др.

Сделаем краткий исторический осмотр данного вопроса исследования.

Нахождению точных асимптотических равенств для верхних граней отклонения функций классов W^1 от интегралов Пуассона посвящен ряд работ [3–11].

И.П. Натансон [3] решил задачу Колмогорова–Никольского на классах W^1 для интеграла Пуассона:

$$\mathcal{E}(W^1;P_\rho)_C=\frac{2}{\pi}(1-\rho)\left|\ln(1-\rho)\right|+O\left(1-\rho\right),\qquad\rho\to1-.\tag{7}$$

В работе [4] А.Ф. Тиман получил точные значения аппроксимативных характеристик $\mathcal{E}(W^1;P_\rho)_C$:

$$\mathcal{E}(W^1;P_\rho)_C=\frac{2}{\pi}(1-\rho)\ln\frac{1}{1-\rho}+\varepsilon_\rho,\tag{8}$$

$$\varepsilon_\rho=\frac{2}{\pi}\int_0^{1-\rho}\left\{\frac{1}{1-t}\ln\frac{2-t}{t^t}+1\right\}dt,\qquad0<\rho<1.$$

В работе Л.В. Малей [5] было найдено полное асимптотическое разложение для верхней грани отклонения функций с класса W^1 от интегралов Пуассона вида

$$\mathcal{E}(W^1;P_\rho)_C=\frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\left\{\alpha_k(1-\rho)^k\ln\frac{1}{1-\rho}+\beta_k(1-\rho)^k\right\},$$

$$\alpha_k=\frac{1}{k},\quad\beta_k=\frac{1}{k}\left\{\ln2+\frac{1}{k}-\sum_{i=1}^{k-1}\frac{1}{i\cdot2^i}\right\},\qquad k=1,2,\ldots.$$

Позднее оно было передоказано в работе Е.Л. Штарка [6].

В.А. Баскаков в работе [7] нашел полные асимптотические разложения для верхних граней отклонения функций из классов $H^\alpha,0<\alpha<1$, а также из класса W^1 от интегралов Пуассона, а именно:

$$\mathcal{E}(H^\alpha;P_\delta)_C=\frac{1}{\cos\frac{\alpha\pi}{2}\delta^\alpha}+\frac{2}{\pi}\left\{\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\left[\int_\pi^\infty\frac{(t^\alpha)_{2\pi}dt}{t^{2(k+1)}}-\frac{1}{(2k+1-\alpha)\pi^{2k+1-\alpha}}\right]\frac{1}{\delta^{2k+1}}\right\},\tag{9}$$

$$\mathcal{E}(W^1;P_\delta)_C = \frac{2}{\pi}\frac{1}{\delta}\ln\delta + \frac{1}{\delta}\left[\frac{2\ln\pi}{\pi} + \frac{2}{\pi}\int_\pi^\infty \frac{(t)_{2\pi}}{t^2}dt\right] + \frac{2}{\pi\delta}\sum_{k=1}^\infty (-1)^k\left[\int_\pi^\infty \frac{(t)_{2\pi}}{t^{2(k+1)}}dt - \frac{1}{2k\pi^{2k}}\right]\frac{1}{\delta^{2k}}, \quad (10)$$

где символ $(f(t))_{2\pi}$ обозначает четное 2π-периодическое продолжение функции $f(t),\ 0 \le t \le \pi$.

Как следствие из полных асимптотических разложений (9–10), вытекает справедливость асимптотических равенств

$$\mathcal{E}(H^\alpha;P_\delta)_C = \frac{1}{\cos\frac{\alpha\pi}{2}}\frac{1}{\delta^\alpha} + O\left(\frac{1}{\delta}\right),$$

$$\mathcal{E}(W^1;P_\delta)_C = \frac{2}{\pi}\frac{1}{\delta}\ln\delta + O\left(\frac{1}{\delta}\right).$$

В тоже время аппроксимативные свойства интегралов Пуассона на классах H_ω не были исследованы. Поэтому возник вопрос об отыскании асимптотических равенств для точных верхних граней отклонения функций из классов H_ω их интегралами Пуассона в равномерной метрике.

Основной целью данной работы есть изучение асимптотического поведения величин

$$\mathcal{E}(H_\omega;P_\delta)_C = \sup_{f\in H_\omega}\left\|f(x) - P_\delta(f,x)\right\|_C, \qquad \delta\to\infty.$$

3. Приближение функций с классов H_ω интегралами Пуассона

Имеет место следующая теорема.

Теорема. *Для произвольного фиксированного модуля непрерывности* $\omega(t)$ *в принятых выше обозначениях справедливо равенство*

$$\mathcal{E}(H_\omega;P_\delta)_C = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \omega(t)\frac{1-e^{-\frac{2}{\delta}}}{1-2e^{-\frac{1}{\delta}}\cos t + e^{-\frac{2}{\delta}}}dt. \quad (11)$$

Доказательство. Рядом с функцией $f(t)$ рассмотрим функцию $f_1(t) = f(t+x)$. Тогда $f_1(0) - P_\delta(f_1,0) = f(x) - P_\delta(f,x)$.

Так как функции $f(t)$ и $f_1(t)$ одновременно принадлежат классу H_ω, то делаем выводы, что

$$\mathcal{E}(H_\omega;P_\delta)_C = \sup_{f\in H_\omega}\left|f(0) - P_\delta(f,0)\right|.$$

Для каждой функции $f(x)$ с класса H_ω построим функцию $f_2(x) = f(x) - f(0)$. Очевидно, что функция $f_2(x)$ принадлежит к классу H_ω, причем $f_2(0) = 0$. Отсюда

$$P_\delta(f_2;0) = P_\delta(f;0) - f(0),$$

то есть

$$\mathcal{E}(H_\omega;P_\delta)_C = \sup_{\substack{f\in H_\omega\\ f(0)=0}}\frac{1}{\pi}\left|\int_{-\pi}^{\pi} f(t)K_\delta(t)dt\right|.$$

Вследствие четности ядра $K_\delta(t)$ достаточно ограничиться только случаем четных функций $f(x)$. Это значит, что

$$\mathcal{E}(H_\omega;P_\delta)_C = \sup_{f\in H}\frac{2}{\pi}\left|\int_0^\pi f(t)K_\delta(t)dt\right|, \tag{12}$$

где H – множество четных функций $f\in H_\omega$ таких, что $f(0)=0$. Какой бы ни была функция $f\in H$,

$$\frac{2}{\pi}\left|\int_0^\pi f(t)K_\delta(t)dt\right| \le \int_0^\pi \omega(t)K_\delta(t)dt. \tag{13}$$

С другой стороны, так как $K_\delta(t)\ge 0$, то для функции $f_0(t)\in H$,

$$f_0(t)=\omega\left(|t|\right),\ \ |t|\le\pi,$$

будем иметь

$$\frac{2}{\pi}\int_0^\pi f_0(t)K_\delta(t)dt = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi \omega(t)K_\delta(t)dt. \tag{14}$$

Итак, согласно (12–14) получаем:

$$\mathcal{E}(H_\omega;P_\delta)_C = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \omega(t)\frac{1-e^{-\frac{2}{\delta}}}{1-2e^{-\frac{1}{\delta}}\cos t + e^{-\frac{2}{\delta}}}dt.$$

Теорема доказана.

Следствие 1. *Если в равенстве (11) положить* $\omega(t)=t$*, то получим следствие из результата В.А. Баскакова:*

$$\mathcal{E}(W^1;P_\delta)_C = \frac{2}{\pi}\frac{\ln\delta}{\delta} + O\left(\frac{1}{\delta}\right). \tag{15}$$

Доказательство.

Действительно,

$$\mathcal{E}(W^1;P_\delta)_C = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi t\frac{1-e^{-\frac{2}{\delta}}}{1-2e^{-\frac{1}{\delta}}\cos t + e^{-\frac{2}{\delta}}}dt = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi tK_\delta(t)dt = \frac{2}{\pi\delta}\int_0^\infty \frac{(t)_{2\pi}}{\frac{1}{\delta^2}+t^2}dt =$$

$$= \frac{2}{\pi\delta}\int_0^{2\pi}\frac{t}{\frac{1}{\delta^2}+t^2}dt + \frac{2}{\pi\delta}\int_{2\pi}^\infty \frac{(t)_{2\pi}}{\frac{1}{\delta^2}+t^2}dt.$$

Учтя, что

$$\frac{2}{\pi\delta}\int_0^{2\pi}\frac{t}{\frac{1}{\delta^2}+t^2}dt = \frac{1}{\pi\delta}\ln\left(\frac{1}{\delta^2}+4\pi^2\right) - \frac{1}{\pi\delta}\ln\left(\frac{1}{\delta^2}\right) = \frac{1}{\pi\delta}\ln\left(4\pi^2\delta^2+1\right) =$$

$$= \frac{1}{\pi\delta}\ln\delta^2\left(\frac{1}{\delta^2}+4\pi^2\right) = \frac{2}{\pi\delta}\ln\delta + \left(\frac{1}{\delta}\right),$$

$$\frac{2}{\pi\delta}\int_{2\pi}^\infty \frac{(t)_{2\pi}}{\frac{1}{\delta^2}+t^2}dt < \frac{2}{\pi\delta}\int_{2\pi}^\infty \frac{2\pi}{\frac{1}{\delta^2}+t^2}dt = O\left(\frac{1}{\delta}\right).$$

Получаем равенство (17).

Так как $\frac{1}{\delta}\sim(1-\rho)$, когда $\delta\to\infty,\ \rho\to 1-$, то можно сделать вывод, что равенства (7) и (8) эквивалентные (15).

Следствие 2. *Если в равенстве (11) положить* $\omega(t)=t^{\alpha}$, $0\le\alpha<1$, *то получим следствие из результата В.А. Баскакова:*

$$\mathcal{E}(H^{\alpha};P_{\delta})_C=\frac{1}{\cos\frac{\alpha\pi}{2}}\frac{1}{\delta^{\alpha}}+O\left(\frac{1}{\delta}\right). \tag{16}$$

Доказательство.

Чтобы показать справедливость следствия 2, запишем сначала интеграл Пуассона в виде известного сингулярного интеграла. Для этого ядро интеграла Пуассона представим в виде

$$K_{\delta}(t)=\frac{1}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}e^{-\frac{k}{\delta}}\cos kt=\frac{1}{2}\varphi_{\delta}(0)+\sum_{k=1}^{\infty}\varphi_{\delta}(k),$$

где

$$\varphi_{\delta}(k)=e^{-\frac{k}{\delta}}\cos kt.$$

Применяя формулу суммирования Пуассона [12, с.72], получим, что

$$K_{\delta}(t)=\sqrt{2\pi}\left\{\frac{1}{2}\Phi_{\delta}(0)+\sum_{k=1}^{\infty}\Phi_{\delta}(2\pi k)\right\}, \tag{17}$$

где $\Phi_{\delta}(u)$ – косинус преобразование Фурье функций $\varphi_{\delta}(u)$, то есть

$$\Phi_{\delta}(u)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{\infty}\varphi_{\delta}(z)\cos zudz=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{\infty}e^{-\frac{z}{\delta}}\cos zt\cos zudz=$$

$$=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{\infty}e^{-\frac{z}{\delta}}\cos z(u+t)dz+\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{\infty}e^{-\frac{z}{\delta}}\cos z(u-t)dz=I_1+I_2.$$

Дважды интегрируя первый интеграл из правой части последнего равенства, получим

$$I_1=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{\frac{1}{\delta}}{\frac{1}{\delta^2}+(t+u)^2}.$$

Аналогичным образом получаем, что

$$I_1=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{\frac{1}{\delta}}{\frac{1}{\delta^2}+(t-u)^2}.$$

Отсюда

$$\Phi_{\delta}(u)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{1}{\delta}\left(\frac{1}{\frac{1}{\delta^2}+(t+u)^2}+\frac{1}{\frac{1}{\delta^2}+(t-u)^2}\right).$$

Подставив последнее соотношение в (16), имеем, что

$$K_{\delta}(t)=\frac{1}{\delta}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\frac{1}{\frac{1}{\delta^2}+(t+2\pi k)^2}.$$

Итак,

$$P_\delta(f;x)=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x+t)K_\delta(t)dt=\frac{1}{\pi\delta}\int_{-\pi}^{\pi} f(x+t)\sum_{k=-\infty}^{\infty}\frac{1}{\frac{1}{\delta^2}+(t+2\pi k)^2}dt=\frac{1}{\pi\delta}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{f(x+t)_{2\pi}}{\frac{1}{\delta^2}+t^2}dt, \qquad (18)$$

где $f(x+t)_{2\pi}$ – четное 2π - периодическое продолжение функции $f(x+t)$.
Учитывая равенство (19), убеждаемся в справедливости следствия 2. Действительно,

$$\mathcal{E}(H^\alpha;P_\delta)_C=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} t^\alpha \frac{1-e^{-\frac{2}{\delta}}}{1-2e^{-\frac{1}{\delta}}\cos t+e^{-\frac{2}{\delta}}}dt=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} t^\alpha K_\delta(t)dt=\frac{2}{\pi\delta}\int_0^{\infty}\frac{(t^\alpha)_{2\pi}}{\frac{1}{\delta^2}+t^2}dt=$$

$$=\frac{2}{\pi\delta}\int_0^{2\pi}\frac{t^\alpha}{\frac{1}{\delta^2}+t^2}dt+\frac{2}{\pi\delta}\int_{2\pi}^{\infty}\frac{(t^\alpha)_{2\pi}}{\frac{1}{\delta^2}+t^2}dt.$$

$$\frac{2}{\pi\delta}\int_0^{2\pi}\frac{t^\alpha}{\frac{1}{\delta^2}+t^2}dt=\frac{2}{\pi\delta^\alpha}\int_0^{\pi\delta}\frac{t^\alpha}{1+t^2}dt=\frac{2}{\pi\delta^\alpha}\int_0^{\infty}\frac{t^\alpha}{1+t^2}dt-\frac{2}{\pi\delta^\alpha}\int_{\pi\delta}^{\infty}\frac{t^\alpha}{1+t^2}dt.$$

Пользуясь формулой (856.07) [13], возьмем первый интеграл из правой части последнего равенства:

$$\frac{2}{\pi\delta^\alpha}\int_0^{\infty}\frac{t^\alpha}{1+t^2}dt=\frac{2}{\pi\delta^\alpha}\frac{\pi}{2\cos\frac{\alpha\pi}{2}}=\frac{1}{\cos\frac{\alpha\pi}{2}}\frac{1}{\delta^\alpha}.$$

Так как

$$\frac{2}{\pi\delta^\alpha}\int_{\pi\delta}^{\infty}\frac{t^\alpha}{1+t^2}dt<\frac{2}{\pi\delta^\alpha}\int_{\pi\delta}^{\infty}t^{\alpha-2}dt=O\left(\frac{1}{\delta}\right),$$

$$\frac{2}{\pi\delta}\int_0^{2\pi}\frac{t^\alpha}{\frac{1}{\delta^2}+t^2}dt<\frac{2}{\pi\delta}\int_0^{2\pi}t^\alpha dt=O\left(\frac{1}{\delta}\right),$$

$$\frac{2}{\pi\delta}\int_{2\pi}^{\infty}\frac{(t^\alpha)_{2\pi}}{\frac{1}{\delta^2}+t^2}dt<\frac{2}{\pi\delta}\int_{2\pi}^{\infty}\frac{2\pi}{\frac{1}{\delta^2}+t^2}dt<\frac{4}{\delta}\int_{2\pi}^{\infty}t^{-2}dt=O\left(\frac{1}{\delta}\right),$$

то получаем (18).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Фихтенгольц, Г.М. Курс дифференциального и интегрального исчисления / Г.М. Фихтенгольц. – т. 3. –М. : физматгиз, 1960. – 656 с.

2. Степанец, А.И. Равномерные приближения тригонометрическими полиномами / А.И. Степанец. – К : Наук. Думка, 1981. – 340 с.

3. Натансон, И.П. О порядке приближения непрерывной 2π-периодической функции при помощи ее интеграла Пуассона / И.П. Натансон // Докл. АН СССР. – 1950. – 72. – С. 11–14.

4. Тимман, А.Ф. Точная оценка остатка при приближении периодических дифференцируемых функций интегралами Пуассона / А.Ф. Тиман // Докл. АН СССР. – 1950. – 74. – С. 17–20.

5. Малей, Л.В. Точная оценка приближения квазигладких функций интегралами Пуассона / Л.В. Малей // Докл. АН БССР. Сер. физ.-техн. 1961, № 3. – С.25–32.

6. Штарк, Е.Л. Полное асимптотическое разложение для верхней грани уклонения функций из $Lip_1 1$ от сингулярного интеграла Абеля-Пуассона / Е.Л. Штарк // Мат. Заметки. – 1973.– 13, № 1 – С. 21–28.

7. Баскаков, В.А. О некоторых свойствах операторов типа операторов Абеля-Пуассона / В.А. Баскаков // Мат. Заметки. – 1975. – 17, № 2. –С.169–180.

8. Zhyhallo, K.M. Complete asymptotics of the deviation of a class of differentiable functions from the set of their harmonic Poisson integrals / K.M. Zhyhallo, Yu.I. Kharkevych // Ukr. Math. Journal. – 2002. – 54, № 1. – P. 51–63.

9. Kharkevych, Yu.I. Approximation of (ψ,β)-differentiable functions defined on the real axis by Abel-Poisson operators / Yu.I. Kharkevych, T.V. Zhyhallo // Ukr. Math. Journal. – 2005. – 57, № 8. – P. 1297–1315.

10. Zhyhallo, T.V. Approximation of (ψ,β)-differentiable functions by Poisson integrals in the uniform metric / T.V. Zhyhallo, Yu.I. Kharkevych // Ukr. Math. Journal. – 2009. – 61, № 11. – P. 1757–1779.

11. Zhyhallo, T.V. Approximation of functions from the class C_ψ^β by Poisson integrals in the uniform metric / T.V. Zhyhallo, Yu.I. Kharkevych // Ukr. Math. Journal. – 2009. – 61, №12. – P. 1893–1914.

12. Титмарш, Е. Введение в теорию интегралов Фурье / Е. Титмарш. – М.-Л. – 1948.

13. Двайт, Г.Б. Таблицы интегралов и другие математические формулы / Г.Б. Двайт. – М. – 1973.

J. Zajac, Yu.I. Kharkevych, T.A. Stepaniuk. **Approximating Properties of Poisson's Integrals on the Classes** H_ω

In work we conducted research of questions of approximation functions from the classes H_ω, that is to say the functions which satisfied the condition $|f(x)-f(x')|\le\omega(|x-x'|)\quad \forall x,x'$, with a help of Poisson's integrals. Approximative properties of the method of approximation by integrals of Poisson on the classes of differentiable functions were researched by many of mathematicians, such as I.P. Natanson, A.F. Timan , B. Nagy, L.V. Malej, E.L. Shtark, V.A. Baskakov, L.P. Fallaleev, K.M. Zhyhallo, Yu.I. Kharkevych and T.V. Zhyhallo. and others. We obtained the equality for upper border of defluxion the functions from the classes H_ω from Poisson's integrals.

Рукапіс паступіў у рэдкалегію 10.05.2011 г.