

УДК 539.12

*Е.М. Овсюк, О.В. Веко*

## О МОДЕЛИРОВАНИИ ПОТЕНЦИАЛЬНОГО БАРЬЕРА В ТЕОРИИ ШРЕДИНГЕРА ГЕОМЕТРИЕЙ ПРОСТРАНСТВА ЛОБАЧЕВСКОГО

Построена система точных решений уравнения Шредингера в 3-мерном пространстве Лобачевского в системе квазидекартовых координат. Показано, что поставленная в рамках пространства Лобачевского задача моделирует ситуацию в плоском пространстве для квантово-механической частицы в поле плавно растущего до бесконечности 2-мерного потенциального барьера. Коэффициент отражения для всех состояний оказывается равным 1.

### Введение

Известно, что при наличии у пространства-времени кривизны плоских волн в стандартном понимании для полей частиц не существует. Поэтому особый интерес вызывают примеры неевклидовых пространств, где некоторые аналоги таких решений можно построить. В работах Шапиро [1; 2] было показано, что в пространстве Лобачевского есть такие решения для частиц со спином 0. Проблема построения аналога плоских волн в пространстве постоянной положительной кривизны исследовалась Волобуевым [3]. Следует также отметить, что теоретико-групповой гармонический анализ в пространстве Лобачевского, в том числе с применением решений, аналогичных плоским волнам, развивался в работах Гельфанда – Граева – Виленкина [4; 5]. Более поздняя трактовка вопроса о плоских волнах в пространствах постоянной кривизны дана в [6]. Решения типа плоских волн для уравнений Максвелла были построены в работах [7–10]. Недавно в [11] исследовался вопрос о построении решений уравнений Дирака в пространстве Лобачевского на основе метода квадрирования; при этом, в частности, было указано на возможность построения таким способом решений типа плоских волн из скалярных волн Шапиро.

В настоящей работе мы обращаемся вновь к случаю уравнения Шредингера в пространстве Лобачевского и строим обобщенную систему решений типа плоских волн для уравнения Шредингера в этом пространстве. Используется система квазидекартовых координат, тесно связанная с орисферическими координатами. Основной акцент сделан на вопросе, какую эффективную квантово-механическую ситуацию в обычном пространстве моделирует эта задача, поставленная и решенная в рамках пространства Лобачевского. Оказалось, что она моделирует точно решаемую задачу о прохождении частицы через потенциальный барьер, плавно растущий до бесконечности.

### 1. Параметризация пространства Лобачевского квазидекартовыми координатами

В пространстве-времени Лобачевского будем использовать квазидекартовые координаты

$$dS^2 = dt^2 - e^{-2z}(dx^2 + dy^2) - dz^2, \quad x, y, z \in (-\infty, +\infty);$$

элемент объема равен  $dV = \sqrt{-g} dx dy dz = e^{-2z} dx dy dz$ , величина и знак координаты  $z$  существенны при обращении к вероятностной интерпретации волновой функции

$$dW = |\Psi|^2 dV = |\Psi|^2 e^{-2z} dx dy dz.$$

Нижче потребуються деякі особливості параметризації простору координатами  $(x, y, z)$ . Напамини, що простір Лобачевського може бути отождествлено з гілкою гіперболоїда в 4-вимірному псевдоевклідовому просторі

$$u_0^2 - u_1^2 - u_2^2 - u_3^2 = \rho^2, \quad u_0 = +\sqrt{\rho^2 + u^2}.$$

Використовувані координати  $(x, y, z)$  пов'язані з  $u_a$  співвідношеннями

$$u_1 = xe^{-z}, \quad u_2 = ye^{-z},$$

$$u_3 = \frac{1}{2}[(e^z - e^{-z}) + (x^2 + y^2)e^{-z}], \quad u_0 = \frac{1}{2}[(e^z + e^{-z}) + (x^2 + y^2)e^{-z}]. \quad (1a)$$

Будемо використовувати 3-вимірну реалізацію Пуанкаре простору Лобачевського як внутрішності 3-вимірної сфери:

$$q_i = \frac{u_i}{u_0} = \frac{u_i}{\sqrt{\rho^2 + u_1^2 + u_2^2 + u_3^2}}, \quad q_i q_i < +1. \quad (1b)$$

Координати  $(x, y, z)$  пов'язані з  $q_i$  так:

$$q_1 = \frac{2x}{x^2 + y^2 + e^{2z} + 1}, \quad q_2 = \frac{2y}{x^2 + y^2 + e^{2z} + 1}, \quad q_3 = \frac{x^2 + y^2 + e^{2z} - 1}{z^2 + y^2 + e^{2z} + 1}. \quad (1c)$$

Обернені до (1c) співвідношення мають вигляд

$$x = \frac{q_1}{1 - q_3}, \quad y = \frac{q_2}{1 - q_3}, \quad e^z = \frac{\sqrt{1 - q^2}}{1 - q_3}. \quad (1d)$$

Отзначаємо, що на осі  $q_1 = 0, q_2 = 0, q \in (-1, +1)$  формули (1d) дають

$$x = 0, \quad y = 0, \quad e^z = \frac{\sqrt{1 + q_3}}{\sqrt{1 - q_3}}, \quad (2a)$$

т. е. граничні точки цієї осі параметризуються так:

$$q_3 \longrightarrow +1, \quad e^z \longrightarrow +\infty, \quad z \longrightarrow +\infty;$$

$$q_3 \longrightarrow -1, \quad e^z \longrightarrow +0, \quad z \longrightarrow -\infty. \quad (2b)$$

## 2. Розділення змінних в рівнянні Шредингера. Розв'язки типу плоских хвиль

Рівняння Шредингера в римановому просторі [12]

$$i\hbar \partial_t \Psi = \frac{1}{2M} \left[ \left( \frac{i\hbar}{\sqrt{-g}} \partial_k \sqrt{-g} + eA_k \right) (-g^{kl}) (i\hbar \partial_l + eA_l) \right] \Psi \quad (3)$$

в квазідекартових координатах примет вигляд:

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \Psi = -\frac{\hbar^2}{2M\rho^2} \left[ e^{2z} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + e^{2z} \frac{\partial^2}{\partial y^2} + e^{2z} \frac{\partial}{\partial z} e^{-2z} \frac{\partial}{\partial z} \right] \Psi.$$

Змінні розділяються підстановкою  $\Psi = e^{-iEt/\hbar} e^{ik_1x} e^{ik_2y} f(z)$ :

$$\left[ \frac{d^2}{dz^2} - 2 \frac{d}{dz} + \varepsilon - e^{2z} (k_1^2 + k_2^2) \right] f(z) = 0, \quad (4a)$$

де  $\varepsilon = 2ME\rho^2/\hbar^2$ . Елементарною підстановкою  $f = e^z \varphi(z)$  рівняння (3) приводиться до вигляду

$$\left[ \frac{d^2}{dz^2} + \varepsilon - 1 - (k_1^2 + k_2^2) e^{2z} \right] \varphi(z) = 0 \quad (4b)$$

с потенциальной функцией  $U(z) = 1 + (k_1^2 + k_2^2)e^{2z}$ . Следует обратить внимание на то, что вероятностная интерпретация после преобразования к функции  $\varphi$  принимает вид  $dW = |\Psi|^2 dV = |\varphi|^2 dx dy dz$ . Ситуация иллюстрируется рисунком 1.

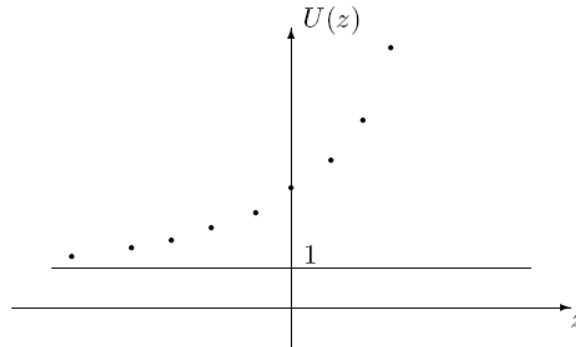


Рисунок 1 – Эффективная потенциальная кривая

Характерным и легко интерпретируемым физическим решением при  $\varepsilon > 1$  является следующее: слева имеем суперпозицию волн (падающей слева и отраженной), а справа за барьером волновая функция должна резко спадать до нуля. Случай, когда исходная волна движется с правой стороны барьера, в принципе, с точки зрения квантовой механики, также возможен. Тогда случае действующее влево эффективное поле, наоборот, способствует продвижению частицы из классически запрещенной области в область, классически разрешенную; эта волна может частично отражаться назад в классически запрещенную область. Из качественных соображений нужно предполагать, что исходная плотность вероятности справа за барьером при достаточно больших значениях  $Z$  должна быть очень большой. Ниже будут построены решения, описывающие обе эти ситуации.

Отметим специально, что случай  $k_1 = 0, k_2 = 0$  является особым; при этом уравнение (4а) существенно меняется: в нем исчезает потенциальная функция

$$\left( \frac{d^2}{dz^2} - 2 \frac{d}{dz} + \varepsilon \right) f(z) = 0, \quad f = e^{(1 \pm i\sqrt{\varepsilon-1}z)}, \quad \varphi = e^{(\pm i\sqrt{\varepsilon-1}z)}; \quad (5)$$

т. е. для функции  $\varphi$  здесь возникают решения типа обычных плоских волн.

### 3. Анализ общего случая

Теперь обращаемся к общему случаю. Перейдем в (4а) к переменной

$$\sqrt{k_1^2 + k_2^2} e^z = Z, \quad Z \in (0, +\infty).$$

Тогда уравнение принимает вид

$$\left( \frac{d^2}{dZ^2} - \frac{1}{Z} \frac{d}{dZ} + \frac{\varepsilon}{Z^2} - 1 \right) f(Z) = 0; \quad (6)$$

выделением множителя  $f = \sqrt{Z} F$  можно убрать член с первой производной

$$\left( \frac{d^2}{dZ^2} + \frac{\varepsilon - 3/4}{Z^2} - 1 \right) F(Z) = 0.$$

Это представление позволяет легко найти асимптотики решений:

$$(z \rightarrow -\infty) \quad Z \rightarrow 0,$$

$$F \sim Z^{1/2 \pm i\sqrt{\varepsilon-1}}, \quad f \sim Z^{1 \pm i\sqrt{\varepsilon-1}}, \quad \varphi \sim e^{\pm i\sqrt{\varepsilon-1}z};$$

$(z \longrightarrow +\infty) \quad Z \rightarrow +\infty,$

$$F \sim e^{\pm Z}, \quad f = \sqrt{Z} e^{\pm Z}, \quad \varphi \sim e^{-z/2} \exp\left[\pm\sqrt{k_1^2 + k_2^2} e^z\right]. \quad (7)$$

Теперь обратимся к построению точных решений уравнения во всей области изменения координаты  $z$ . Будем искать решения в виде  $f(Z) = Z^A e^{BZ} F(Z)$ ; уравнение (5) дает:

$$Z \frac{d^2 F}{dZ^2} + (2A - 1 + 2BZ) \frac{dF}{dZ} + \left( (B^2 - 1)Z - B(1 - 2A) + \frac{A(A - 2) + \varepsilon}{Z} \right) F = 0. \quad (8)$$

При  $A, B$  выбранных согласно (далее для определенности выбираем знак «минус» перед корнем в выражении для  $A$ ; предполагаем  $\varepsilon > 1$ )

$$A = 1 - i\sqrt{\varepsilon - 1}, \quad B^2 = 1, \quad (9)$$

уравнение (8) упрощается:

$$Z \frac{d^2 F}{dZ^2} + (2A - 1 + 2BZ) \frac{dF}{dZ} - B(1 - 2A) F = 0. \quad (10)$$

В полученном уравнении сделаем еще одну замену  $Z = y/2$ :

$$y \frac{d^2 F}{dy^2} + (2A - 1 + By) \frac{dF}{dy} + B\left(A - \frac{1}{2}\right) F = 0. \quad (11)$$

Уравнение (11) при  $B = -1$  представляет собой уравнение для вырожденной гипергеометрической функции:

$$y \frac{d^2 Y}{dZ^2} + (c - y) \frac{dY}{dy} - aY = 0, \\ c = 2a, \quad a = A - 1/2 = 1/2 - i\sqrt{\varepsilon - 1}, \\ f(Z) = y^{a+1/2} e^{-y/2} Y(y). \quad (12)$$

Будем использовать две пары линейно независимых решений [13]:

$$Y_1 = \Phi(a, 2a, y), \quad Y_2 = y^{1-2a} \Phi(1-a, 2-2a, y)$$

и

$$Y_5 = \Psi(a, 2a, y), \quad Y_7 = e^y \Psi(a, 2a, -y). \quad (13)$$

Эти пары решений связаны линейными соотношениями Куммера [13]

$$Y_5 = \frac{\Gamma(1-2a)}{\Gamma(1-a)} Y_1 + \frac{\Gamma(2a-1)}{\Gamma(a)} Y_2, \\ Y_7 = \frac{\Gamma(1-2a)}{\Gamma(1-a)} Y_1 - \frac{\Gamma(2a-1)}{\Gamma(a)} Y_2, \quad (14a)$$

которые после умножения на  $y^{a+1/2} e^{-y/2}$  принимают вид:

$$f_5 = \frac{\Gamma(1-2a)}{\Gamma(1-a)} f_1 + \frac{\Gamma(2a-1)}{\Gamma(a)} f_2, \\ f_7 = \frac{\Gamma(1-2a)}{\Gamma(1-a)} f_1 - \frac{\Gamma(2a-1)}{\Gamma(a)} f_2. \quad (14b)$$

Обращаем внимание, что решения  $Y_1$  и  $Y_2$  описывают при отрицательных  $z \longrightarrow -\infty$  волны с асимптотическим поведением (типа плоских волн)

$$z \rightarrow -\infty, (y \rightarrow 0)$$

$$\begin{aligned} f_1 &= y^{a+1/2} = \left(2\sqrt{k_1^2 + k_2^2}\right)^{1-i\sqrt{\varepsilon-1}} e^z e^{-i\sqrt{\varepsilon-1}z}, \\ \varphi_1 &= \left(2\sqrt{k_1^2 + k_2^2}\right)^{1-i\sqrt{\varepsilon-1}} e^{-i\sqrt{\varepsilon-1}z} \end{aligned} \quad (15a)$$

и

$$\begin{aligned} f_2 &= y^{a+1/2} y^{1-2a} = \left(2\sqrt{k_1^2 + k_2^2}\right)^{1+i\sqrt{\varepsilon-1}} e^z e^{+i\sqrt{\varepsilon-1}z}, \\ \varphi_2 &= \left(2\sqrt{k_1^2 + k_2^2}\right)^{1+i\sqrt{\varepsilon-1}} e^{+i\sqrt{\varepsilon-1}z}. \end{aligned} \quad (15b)$$

Следовательно, функция  $Y_5$  (и связанная с ней  $\varphi_5$ ) при отрицательных  $z \longrightarrow -\infty$  ведет себя как суперпозиция двух плоских волн согласно

$$\begin{aligned} \varphi_5 &= \frac{\Gamma(1-2a)}{\Gamma(1-a)} \left(2\sqrt{k_1^2 + k_2^2}\right)^{1-i\sqrt{\varepsilon-1}} e^{-i\sqrt{\varepsilon-1}z} + \\ &+ \frac{\Gamma(2a-1)}{\Gamma(a)} \left(2\sqrt{k_1^2 + k_2^2}\right)^{1+i\sqrt{\varepsilon-1}} e^{+i\sqrt{\varepsilon-1}z}. \end{aligned} \quad (16)$$

Можно определить коэффициент отражения как квадрат модуля отношения амплитуд в суперпозиции плоских волн:

$$M_- e^{-i\sqrt{\varepsilon-1}z} + M_+ e^{+i\sqrt{\varepsilon-1}z}, \quad R = \left| \frac{M_-}{M_+} \right|^2, \quad (17a)$$

$$R = \left| \frac{\Gamma(1-2a)}{\Gamma(2a-1)} \frac{\Gamma(a)}{\Gamma(1-a)} \right|^2. \quad (17b)$$

Учтем

$$\begin{aligned} 1-2a &= +2i\sqrt{\varepsilon-1}, & 2a-1 &= -2i\sqrt{\varepsilon+1}, \\ a &= 1/2 - i\sqrt{\varepsilon-1}, & 1-a &= 1/2 + i\sqrt{\varepsilon-1}, \end{aligned} \quad (17c)$$

тогда

$$R = \left| \frac{\Gamma(+2i\sqrt{\varepsilon-1})}{\Gamma(-2i\sqrt{\varepsilon-1})} \right|^2 \left| \frac{\Gamma(1/2 - i\sqrt{\varepsilon-1})}{\Gamma(1/2 + i\sqrt{\varepsilon-1})} \right|^2 \equiv 1. \quad (17d)$$

Отметим специально, что в силу (17с) построенные решения подчиняются условиям

$$f_2 = f_1^*, \quad f_5^* = f_5, \quad f_7^* = -f_7. \quad (18a)$$

Это позволяет, обратившись к выражению для  $z$ -компоненты сохраняющегося тока

$$J_z = i(f \partial_z f^* - f^* \partial_z f), \quad (18b)$$

утверждать, что токи решений  $f_1$  и  $f_2$  – ненулевые и противоположны по знаку, а токи решений  $f_5$  и  $f_7$  нулевые

$$J_z^{(2)} = -J_z^{(1)} \neq 0, \quad J_z^{(5)} = 0, \quad J_z^{(7)} = 0. \quad (18c)$$

Найдем поведение  $Y_5$  в области больших  $y$ . Применяя известное [13] асимптотическое соотношение  $Y_5 = \Psi(a, c, y) \sim y^{-a}$ , получим

$$z \rightarrow +\infty, \quad f_5 = y^{a+1/2} e^{-y/2} Y_5 \sim y^{1/2} e^{-y/2} \sim \\ \sim \left(2\sqrt{k_1^2 + k_2^2} e^z\right)^{1/2} \exp\left(-\sqrt{k_1^2 + k_2^2} e^z\right) \longrightarrow \exp^{-e^{+\infty}} = 0. \quad (19)$$

Таким образом, решение  $f_5$  является описанием ожидаемой ситуации: волна падает слева, отражается с вероятностью 1/2 от эффективного барьера; справа за барьером решение резко спадает до нуля.

Решение  $f_7$  при  $y \longrightarrow +\infty$  стремится к бесконечности

$$f_7 \sim y^{a+1/2} e^{-y/2} e^y y^{-a} = y^{+1/2} e^{+y/2};$$

дать физическую интерпретацию этого решения сложно, однако обращаем внимание, что в силу второго уравнения в (14b) далеко слева это решения также является суперпозиций двух плоских волн.

Довольно легко можно интерпретировать решение типа  $f_1$ . Действительно, далеко справа, учитывая известную [13] асимптотическую формулу  $y \rightarrow +\infty, \Phi(A, C, y) \sim e^y y^{A-C}$ , получаем

$$z \longrightarrow +\infty, \quad f_1 \sim y^{1/2} e^{y/2} \longrightarrow +\infty^\infty;$$

т. е. в области  $z \rightarrow +\infty$  это вещественная функция с бесконечно большой плотностью вероятности. Далеко слева это плоская волна, распространяющаяся влево.

*Авторы благодарны В.М. Редькову за интерес к работе и полезные советы.*

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Шапиро И.С. // ДАН СССР. – 1956. – Т. 106. – С. 647.
2. Shapiro, I.S. Expansion of the scattering amplitude in relativistic spherical functions / I.S. Shapiro // Phys. Lett. – 1962. – Vol. 1, № 7. – P. 253–255.
3. Волобуев, И.П. Плоские волны на сфере и некоторые их применения / И.П. Волобуев // ТМФ. – Т. 45, № 3. – С. 421–426.
4. Виленкин, Н.Я. Инвариантные разложения релятивистских амплитуд / Н.Я. Виленкин, Я.А. Смородинский // ЖЭТФ. – 1964. – Т. 46. – С. 1793–1808.
5. Гельфанд, И.М. Интегральная геометрия и связанные с ней вопросы теории представлений / И.М. Гельфанд, М.И. Граев, Н.Я. Виленкин. – Москва : ФМ, 1962. – 656 с.
6. Ovsyuk, E.M. Shapiro's plane waves in spaces of constant curvature and separation of variables in real and complex coordinates / E.M. Ovsyuk, N.G. Tokarevskaya, V.M. Red'kov // NPCS. – 2009. – Vol. 12, № 1. – P. 1–15.
7. Бычковская, Е.М. О решениях уравнений Максвелла в трехмерном пространстве Лобачевского / Е.М. Бычковская // Весці Нац. акад. навук Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. – 2006. – № 5. – С. 45–48.
8. Bogush, A.A. Analogue of the plane electromagnetic waves in the Lobachevsky space / A.A. Bogush, Yu.A. Kurochkin, V.S. Otchik, E.M. Bychkovskaya // Non-euclidean geometry in modern physics: Proceedings of the International Conference BGL-5, Minsk, October 10-13, 2006 / National Academy of Sciences of Belarus, B.I. Stepanov Institute of Physics; Eds. : Yu. Kurochkin, V. Red'kov. – Minsk, 2006. – P. 111–115.
9. Бычковская, Е.М. О волновых решениях уравнений Максвелла в трехмерном пространстве Лобачевского / Е.М. Бычковская // Современные проблемы физики: сб. науч. тр. конф. – Минск : Институт физики им. Б.И. Степанова НАН Беларусі, 2006. – С. 98–102.

10. Овсюк, Е.М. О решениях уравнений Максвелла в квазидекартовых координатах в пространстве Лобачевского / Е.М. Овсюк, В.М. Редьков // Весті Нац. акад. навук Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. – 2009. – № 4. – 99–105.

11. Курочкин, Ю.А. Решения уравнения Дирака в пространстве Лобачевского / Ю.А. Курочкин, В.С. Отчик // Весті Нац. акад. навук Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. – 2011. – № 2. – С. 31–35.

12. Редьков, В.М. Поля частиц в римановом пространстве и группа Лоренца / В.М. Редьков. – Минск: Белорус. наука, 2009. – 495 с.

13. Бейтмен, Г. Высшие трансцендентные функции: в 3 т. / Г. Бейтмен, А. Эрдеи. – 2-е изд. – Москва : Наука, 1973. – Т. 1: Гипергеометрическая функция, функции Лежандра. – 294 с.

***E.M. Ovsyuk, O.V. Veko. On Modeling a Potential Barrier in Schrödinger Theory by Geometry of the Lobachevsky Space***

In the article the system of exact solutions for Schrödinger equation in the Lobachevsky 3-space is constructed in the system of quasi-cartesian coordinates closely related to horospherical ones. It is shown that the problem posed in Lobachevsky space simulates a situation in the flat space for a quantum-mechanical particle in a 2-dimensional potential barrier smoothly rising to infinity on the right. Reflection coefficient for all states turns out to be equal +1.

Рукапіс паступіў у рэдкалегію 20.09.2011 г.