УДК 517.5

И.П. Приймас, Т.А. Степанюк, Ю.И. Харкевич

АППРОКСИМАТИВНЫЕ СВОЙСТВА ИНТЕГРАЛОВ ВЕЙЕРШТРАССА НА КЛАССАХ H_ω

Работа посвящена решению одной из задач теории приближения – задачи об исследовании аппроксимативных свойств интегралов Вейерштрасса $W_\delta(f;x)$ на классах $H_\omega := \left\{\varphi \in C : |\varphi(t) - \varphi(t')| \le \omega\left(|t-t'|\right)\ \forall t,t' \in \mathbb{R}\right\}$. Решена задача Колмогорова–Никольского для интегралов Вейерштрасса на классах H_ω в равномерной метрике.

1. Постановка задачи и некоторые исторические сведения

Рассмотрим краевую задачу в единичном круге для уравнения

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial u}{\partial \rho} - \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^4 u}{\partial x^4} = 0. \tag{1}$$

Решение уравнения (1), которое удовлетворяет граничному условию

$$u(\rho, x)\big|_{\rho=1} = f(x), \quad -\pi \le x \le \pi, \tag{2}$$

где $f(x)$ суммируемая 2π-периодическая функция, далее будем обозначать $W_\rho(f;x) = u(\rho,x)$. Тогда решение граничной задачи (1)–(2) можно записать в виде

$$W_\rho(f;x) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x+t)\left\{\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \rho^{k^2}\cos kt\right\}dt, \quad 0 \le \rho < 1. \tag{3}$$

Величину (3) принято называть интегралом Вейерштрасса функции f. Положив $\rho = e^{-\frac{1}{\delta}}$, интеграл Вейерштрасса запишем в виде

$$W_\delta(f;x) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x+t)\left\{\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} e^{-\frac{k^2}{\delta}}\cos kt\right\}d\,,t\ \delta > 0.$$

Пусть C – пространство 2π-периодических непрерывных функций, в котором норма задается при помощи равенства

$$\|f\|_C = \max_t |f(t)|.$$

Модулем непрерывности функции $f(x)$ непрерывной на отрезке $[a;b]$ (например, [1, с. 12]) называют функцию $\omega(t) = \omega(f,t)$, определенную для $t \in [0; b-a]$ при помощи равенства

$$\omega(t) = \omega(f,t) = \sup_{0\le h \le t}\ \max_{a \le x \le b-h} \left| f(x+h) - f(x)\right| = \sup_{\substack{|x'-x''| \le t,\\ x',x'' \in [a,b]}} \left| f(x') - f(x'')\right|.$$

Пусть $\omega = \omega(t)$ – произвольный фиксированный модуль непрерывности. Говорят, что функция $f(x) \in C$ принадлежит к классу H_ω, если ее модуль непрерывности $\omega(f,t)$ удовлетворяет условию

$$\omega(f,t) \le \omega(t),$$

или каковы бы ни были точки $t_1, t_2 \in \mathbb{R}$, справедливо

$$\left| f(t_1) - f(t_2)\right| \le \omega\left(|t_1 - t_2|\right).$$

Через W^r обозначают множество 2π-периодических функций, которые имеют абсолютно непрерывные производные до $(r-1)$-го порядка включительно и $\left|f^{(r)}(t)\right| \le 1$.

Задачу об отыскании асимптотических равенств для величины

$$\mathcal{E}(\mathfrak{N};W_\delta)_C = \sup_{f\in\mathfrak{N}} \left\| f(x) - W_\delta(f;x) \right\|_C,$$

где $\mathfrak{N} \subseteq C$ – заданный класс функций, будем называть, следуя А.И. Степанцу [1, с. 8], задачей Колмогорова–Никольского.

Если в явном виде найдена функция $\varphi(\delta) = \varphi(\mathfrak{N};W_\delta;\delta)$, такая, что при $\delta \to \infty$

$$\mathcal{E}(\mathfrak{N};W_\delta)_C = \varphi(\delta) + o(\varphi(\delta)),$$

то говорят, что решена задача Колмогорова–Никольского для интеграла Вейерштрасса W_δ на классе $\mathfrak{N}$ в метрике пространства C.

Аппроксимативные свойства метода приближения интегралами Вейерштрасса на классах дифференцируемых функций исследовались многими учеными.

Аппроксимативные свойства интегралов Вейерштрасса впервые исследовались в работе П.П. Коровкина [2] в 1959 году: а именно им была решена задача Колмогорова–Никольского для класса Z_1 и оператора Вейерштрасса

$$\mathcal{E}(Z_1;W_\rho)_C = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\sqrt{1-\rho} + O(1-\rho), \quad \rho \to 1-,$$

$$Z_\alpha = \left\{ f(x) \in C : | f(x+h) - 2f(x) + f(x-h) | \le 2|h|^\alpha \right\}, \quad 0 < \alpha \le 2, \ |h| \le 2\pi.$$

Также им было доказано, что интегралы Вейерштрасса осуществляют наилучшее асимптотическое приближение на классе Z_2 среди операторов типа

$$L_\rho(f;x) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x+t)\left\{ \frac{1}{2} + \rho\cos t + \sum_{k=2}^{\infty}\lambda_k(\rho)\cos kt \right\}dt, \ 0 < \rho < 1,$$

и отмечено, что, например, интеграл Пуассона аппроксимирует класс Z_2 приблизительно в три раза медленнее, чем оператор Вейерштрасса.

Далее Л.И. Баусовым [3] в 1961 году результат Коровкина был обобщен на классы Z_α, $0 < \alpha \le 2$,

$$\mathcal{E}(Z_\alpha;W_\rho)_C = \frac{2^\alpha}{\sqrt{\pi}}\Gamma\left(\frac{1+\alpha}{2}\right)(1-\rho)^{\frac{\alpha}{2}} + o\left((1-\rho)^{\frac{\alpha}{2}} \right), \ \rho \to 1-,$$

а в 1965 году в работе [4] на классы $W^r_{\beta,\infty}$.

В 1975 году В.А. Баскаков [5] получил асимптотические равенства для величин $\mathcal{E}(W^1_\infty;W_\delta)_C$, $\mathcal{E}(H^\alpha;W_\delta)_C$ при $\delta \to \infty$

$$\mathcal{E}(W^1;W_\delta)_C = \frac{2}{\sqrt{\pi\delta}}\left\{ 1 + \sum_{k=1}^{\infty} e^{-(k\pi)^2\delta}\left(\frac{3}{2} - \sum_{i=1}^{\infty}(-1)^i \frac{(2i-1)!!}{2^{i+1}(2k\pi)^{2i}}\frac{1}{\delta^i} \right) - \right.$$

$$\left. - \sum_{k=1}^{\infty} e^{-\frac{1}{4}(2k-1)^2\pi^2\delta}\left(\frac{3}{2} - \sum_{i=1}^{\infty}(-1)^i \frac{(2i-1)!!}{2^{i+1}((2k-1)\pi)^{2i}}\frac{1}{\delta^i} \right) \right\}, \tag{4}$$

$$\mathcal{E}(H^\alpha;W_\delta)_C = \frac{2^\alpha}{\sqrt{\pi}}\frac{1}{\delta^{\frac{\alpha}{2}}}\Gamma\left(\frac{\alpha+1}{2}\right) + O\left(e^{-H\delta}\right), \ 0 < \alpha \le 1, \quad 0 < H \le \frac{\pi^2}{4}. \tag{5}$$

Из равенства (4) следует, что

$$\mathcal{E}(W^1;W_\delta)_C = \frac{2}{\sqrt{\pi\delta}} + O\left(\frac{e^{-H\delta}}{\sqrt{\delta}}\right), \quad 0 < H \le \frac{\pi^2}{4}. \tag{6}$$

В 2001 году Л.П. Фалалеев [6] уточнил результат Л.И. Баусова (равенство (1.21)), то есть, нашел более точный за порядком остаточный член

$$\mathcal{E}(Z_\alpha;W_\rho)_C = \frac{2^\alpha}{\sqrt{\pi}}\Gamma\left(\frac{1+\alpha}{2}\right)(1-\rho)^{\frac{\alpha}{2}} + \Delta(\rho,\alpha),\quad \rho\to 1-,$$

$$\Delta(\rho,\alpha) = \begin{cases} O\left(\left(1-\rho\right)^{\frac{\alpha+1}{2}}\right), & 0<\alpha<1,\\ O\left(\left(1-\rho\right)\ln\dfrac{1}{1-\rho}\right), & 1\le\alpha<2.\end{cases}$$

В 2007 году в работах И.В. Кальчук и Ю.И. Харкевича [7; 8] была решена задача Колмогорова–Никольского для интегралов Вейерштрасса на классах (ψ,β)-дифференцируемых функций.

В тоже время аппроксимативные свойства интегралов Вейерштрасса на классах H_ω не были исследованы. Поэтому возник вопрос об отыскании асимптотических равенств для точных верхних граней отклонения функций из классов H_ω от их интегралов Вейерштрасса в равномерной метрике.

Основная цель данной работы – изучение асимптотического поведения величин

$$\mathcal{E}(H_\omega;W_\delta)_C = \sup_{f\in H_\omega}\left\| f(x) - W_\delta(f,x)\right\|_C,\qquad \delta\to\infty.$$

2. Приближение интегралов Вейерштрасса функциями из класса H_ω в равномерной метрике

Имеет место следующая теорема.

Теорема. *Для произвольного фиксированного модуля непрерывности $\omega(t)$ в принятых выше обозначениях справедливо равенство*

$$\mathcal{E}(H_\omega;\,W_\delta)_C = \frac{\sqrt{\delta}}{\sqrt{\pi}}\int_0^\infty \left(\omega(t)\right)_{2\pi} e^{-\frac{\delta t^2}{4}}dt,\qquad \delta>0, \tag{7}$$

где $\left(\omega(t)\right)_{2\pi}$ – четное 2π-периодическое продолжение функции $f(t)=\omega(t),\ 0\le t\le\pi$, на всю числовую ось.

Доказательство.

Чтобы показать справедливость теоремы, запишем сначала интеграл Вейерштрасса в виде известного сингулярного интеграла. Для этого ядро интеграла Вейерштрасса представим в виде

$$K_\delta(t) = \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^\infty e^{-\frac{k^2}{\delta}}\cos kt = \frac{1}{2}\varphi_\delta(0) + \sum_{k=1}^\infty \varphi_\delta(k),$$

где
$$\varphi_\delta(k) := e^{-\frac{k^2}{\delta}}\cos kt.$$

Применяя формулу суммирования Пуассона (например, [9, с. 72]), получим, что

$$K_\delta(t) = \sqrt{2\pi}\left\{\frac{1}{2}\Phi_\delta(0) + \sum_{k=1}^\infty \Phi_\delta(2\pi k)\right\}, \tag{8}$$

где $\Phi_\delta(u)$ – косинус преобразование Фурье функции $\varphi_\delta(u)$, то есть

$$\Phi_\delta(u) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty \varphi_\delta(z)\cos zu dz = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty e^{-\frac{z^2}{\delta}}\cos zt\cos zu dz =$$

$$=\sqrt{\frac{1}{2\pi}}\int_0^\infty e^{-\frac{z^2}{\delta}}\cos z(u+t)dz+\sqrt{\frac{1}{2\pi}}\int_0^\infty e^{-\frac{z^2}{\delta}}\cos z(u-t)dz=I_1+I_2.$$

Используя формулу из ([10, с. 494])

$$\int_0^\infty e^{-\beta x^2}\cos bx dx=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{\beta}}\exp\left(-\frac{b^2}{4\beta}\right),\qquad \operatorname{Re}\beta>0,$$

найдем значения интегралов I_1 и I_2:

$$I_1=\sqrt{\frac{1}{2\pi}}\int_0^\infty e^{-\frac{z^2}{\delta}}\cos z(u+t)dz=\frac{\sqrt{\delta}}{2\sqrt{2}}e^{-\frac{\delta(u+t)^2}{4}},\tag{9}$$

$$I_2=\sqrt{\frac{1}{2\pi}}\int_0^\infty e^{-\frac{z^2}{\delta}}\cos z(u-t)dz=\frac{\sqrt{\delta}}{2\sqrt{2}}e^{-\frac{\delta(u-t)^2}{4}}.\tag{10}$$

Итак, учитывая (8)–(10), имеем

$$\Phi_\delta(u)=\frac{\sqrt{\delta}}{2\sqrt{2}}\left(e^{-\frac{\delta(u+t)^2}{4}}+e^{-\frac{\delta(u-t)^2}{4}}\right).$$

Отсюда

$$K_\delta(t)=\sqrt{2\pi}\left\{\frac{\sqrt{\delta}}{2\sqrt{2}}e^{-\frac{\delta t^2}{4}}+\frac{\sqrt{\delta}}{2\sqrt{2}}\sum_{k=1}^\infty\left(e^{-\frac{\delta(2\pi k+t)^2}{4}}+e^{-\frac{\delta(2\pi k-t)^2}{4}}\right)\right\}=\frac{\sqrt{\pi\delta}}{2}\sum_{k=-\infty}^\infty e^{-\frac{\delta(2\pi k+t)^2}{4}},$$

и соответственно

$$W_\delta(f;x)=\frac{1}{\pi}\frac{\sqrt{\pi\delta}}{2}\int_{-\pi}^{\pi}f(x+t)\sum_{k=-\infty}^\infty e^{-\frac{\delta(2\pi k+t)^2}{4}}dt=\frac{\sqrt{\delta}}{2\sqrt{\pi}}\sum_{k=-\infty}^\infty\int_{-\pi}^{\pi}f(x+t)e^{-\frac{\delta(2\pi k+t)^2}{4}}dt=$$

$$=\frac{\sqrt{\delta}}{2\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^\infty f(x+t)_{2\pi}e^{-\frac{\delta t^2}{4}}dt.$$

Рядом с функцией $f(t)$ рассмотрим функцию $f_1(t):=f(t+x)$. Тогда $f_1(0)-W_\delta(f_1,0)=f(x)-W_\delta(f,x)$.

Так как функции $f(t)$ и $f_1(t)$ одновременно принадлежат классу H_ω, то делаем выводы, что $\mathcal{E}(H_\omega;W_\delta)_C=\sup\limits_{f\in H_\omega}\left|f(0)-W_\delta(f,0)\right|$.

Для каждой функции $f(x)$ с класса H_ω построим функцию $f_2(x):=f(x)-f(0)$. Очевидно, что функция $f_2(x)$ принадлежит к классу H_ω, причем $f_2(0)=0$. Отсюда

$$W_\delta(f_2;0)=W_\delta(f;0)-f(0),$$

то есть

$$\mathcal{E}(H_\omega;W_\delta)_C=\sup_{\substack{f\in H_\omega\\ f(0)=0}}\frac{1}{\pi}\left|\int_{-\pi}^{\pi}f(t)K_\delta(t)dt\right|=\frac{\sqrt{\delta}}{2\sqrt{\pi}}\sup_{\substack{f\in H_\omega\\ f(0)=0}}\left|\int_{-\infty}^{\infty}\left(f(t)\right)_{2\pi}e^{-\frac{\delta t^2}{4}}dt\right|.$$

Учитывая четность ядра $K_\delta(t)$, нам достаточно ограничиться только случаем четных функций $f(x)$. Это значит, что

$$\mathcal{E}(H_\omega;W_\delta)_C=\sup_{f\in H_1}\frac{\sqrt{\delta}}{\sqrt{\pi}}\left|\int_0^\infty\left(f(t)\right)_{2\pi}e^{-\frac{\delta t^2}{4}}dt\right|,\tag{11}$$

где H_1 – множество четных функций $f \in H_\omega$, таких что $f(0)=0$. Какой бы ни была функция $f \in H$,

$$\frac{\sqrt{\delta}}{\sqrt{\pi}}\left|\int_0^\infty f(t)e^{-\frac{\delta t^2}{4}}dt\right| \le \frac{\sqrt{\delta}}{\sqrt{\pi}}\left|\int_0^\infty \omega(t)e^{-\frac{\delta t^2}{4}}dt\right|. \qquad (12)$$

С другой стороны, так как $e^{-\frac{\delta t^2}{4}} > 0$, то для функции $f_0(t) \in H_1$,

$$f_0(t) = \omega(|t|), \quad |t| \le \pi,$$

будем иметь

$$\frac{\sqrt{\delta}}{\sqrt{\pi}}\int_0^\infty (f(t))_{2\pi} e^{-\frac{\delta t^2}{4}}dt = \frac{\sqrt{\delta}}{\sqrt{\pi}}\int_0^\infty (\omega(t))_{2\pi} e^{-\frac{\delta t^2}{4}}dt. \qquad (13)$$

Итак, согласно (11)–(13) получаем (7).

Теорема доказана.

Следствие 1. *Если в равенстве (7) положить* $\omega(t)=t$, *то при* $\delta \to \infty$ *получим асимптотическое равенство*

$$\mathcal{E}(W^1;W_\delta)_C = \frac{2}{\sqrt{\pi\delta}} + O\left(\frac{e^{-H\delta}}{\sqrt{\delta}}\right), \quad 0 < H \le \frac{\pi^2}{4}. \qquad (14)$$

Доказательство.

Действительно,

$$\mathcal{E}(W^1;W_\delta)_C = \frac{\sqrt{\delta}}{\sqrt{\pi}}\int_0^\infty (t)_{2\pi} e^{-\frac{\delta t^2}{4}}dt = \frac{\sqrt{\delta}}{\sqrt{\pi}}\int_0^\pi te^{-\frac{\delta t^2}{4}}dt + \frac{\sqrt{\delta}}{\sqrt{\pi}}\int_\pi^\infty (t)_{2\pi} e^{-\frac{\delta t^2}{4}}dt, \qquad (15)$$

$$\frac{\sqrt{\delta}}{\sqrt{\pi}}\int_0^\pi te^{-\frac{\delta t^2}{4}}dt = \frac{\sqrt{\delta}}{\sqrt{\pi}}\frac{2}{\delta}\left(1-e^{-\frac{\delta\pi^2}{4}}\right) = \frac{2}{\sqrt{\pi\delta}} + O(1)\frac{1}{\sqrt{\delta}}e^{-\frac{\delta\pi^2}{4}}. \qquad (16)$$

Используя формулу (например, [11, с. 33])

$$1-\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_o^x e^{-z^2}dt = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_x^\infty e^{-z^2}dz = \frac{e^{-\frac{z^2}{2}}}{\sqrt{\pi}z}\left[1+\sum_{k=1}^\infty (-1)^k \frac{1\cdot 3\cdot \ldots \cdot (2k-1)}{(2z^2)^k}\right],$$

найдем оценку второго интеграла из правой части (15)

$$\frac{\sqrt{\delta}}{\sqrt{\pi}}\int_\pi^\infty (t)_{2\pi} e^{-\frac{\delta t^2}{4}}dt \le \frac{\pi\sqrt{\delta}}{\sqrt{\pi}}\int_\pi^\infty e^{-\frac{\delta t^2}{4}}dt = \sqrt{\pi\delta}\,\frac{2}{\sqrt{\delta}}\int_{\frac{\pi\sqrt{\delta}}{2}}^\infty e^{-t^2}dt =$$

$$= 2\sqrt{\pi}\,\frac{e^{-\frac{\pi^2\delta}{4}}}{\sqrt{\pi}\,\frac{\pi\sqrt{\delta}}{2}}\left[1+\sum_{k=1}^\infty (-1)^k \frac{1\cdot 3\cdot \ldots \cdot (2k-1)}{\left(\frac{\pi^2\delta}{2}\right)^k}\right] < K\frac{1}{\sqrt{\delta}}e^{-\frac{\delta\pi^2}{4}}. \qquad (17)$$

Объединив (15)–(17), получаем (14).

Следует отметить, что равенство (14) совпадает со следствием (6) из результата В.А. Баскакова.

Следствие 2. *Если в равенстве (17) положить* $\omega(t)=t^\alpha$, $0 \le \alpha < 1$, *то при* $\delta \to \infty$ *получим асимптотическое равенство*

$$\mathcal{E}(H^{\alpha};W_{\delta})_C = \frac{2^{\alpha}}{\sqrt{\pi}}\frac{1}{\delta^{\alpha}}\Gamma\left(\frac{\alpha+1}{2}\right)+O\left(e^{-H\delta}\right), \quad 0<H\le\frac{\pi^2}{4}. \qquad (18)$$

Доказательство.

Действительно,

$$\mathcal{E}(H^{\alpha};W_{\delta})_C = \frac{\sqrt{\delta}}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\infty}\left(t^{\alpha}\right)_{2\pi}e^{-\frac{\delta t^2}{4}}dt = \frac{\sqrt{\delta}}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\pi}t^{\alpha}e^{-\frac{\delta t^2}{4}}dt + \frac{\sqrt{\delta}}{\sqrt{\pi}}\int_{\pi}^{\infty}\left(t^{\alpha}\right)_{2\pi}e^{-\frac{\delta t^2}{4}}dt. \qquad (19)$$

Учитывая формулу 860.17 из [12]

$$\int_0^{\infty}t^{\alpha}e^{-\frac{t^2}{4}}dt = 2^{\alpha}\Gamma\left(\frac{\alpha+1}{2}\right), \quad \alpha>-1,$$

получим, что

$$\frac{\sqrt{\delta}}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\pi}t^{\alpha}e^{-\frac{\delta t^2}{4}}dt = \frac{\sqrt{\delta}}{\sqrt{\pi}}\left(\int_0^{\infty}t^{\alpha}e^{-\frac{\delta t^2}{4}}dt - \int_{\pi}^{\infty}t^{\alpha}e^{-\frac{\delta t^2}{4}}dt\right) = \frac{2^{\alpha}}{\sqrt{\pi}}\frac{1}{\delta^{\alpha}}\Gamma\left(\frac{\alpha+1}{2}\right) - \frac{\sqrt{\delta}}{\sqrt{\pi}}\int_{\pi}^{\infty}t^{\alpha}e^{-\frac{\delta t^2}{4}}dt, \qquad (20)$$

$$\frac{\sqrt{\delta}}{\sqrt{\pi}}\int_{\pi}^{\infty}t^{\alpha}e^{-\frac{\delta t^2}{4}}dt < \frac{\sqrt{\delta}}{\sqrt{\pi}}\int_{\pi}^{\infty}te^{-\frac{\delta t^2}{4}}dt = \frac{\sqrt{\delta}}{\sqrt{\pi}}\frac{2}{\delta}e^{-\frac{\delta\pi^2}{4}} < \frac{K}{\sqrt{\delta}}e^{-\frac{\delta\pi^2}{4}}. \qquad (21)$$

Принимая во внимание (17), получаем

$$\frac{\sqrt{\delta}}{\sqrt{\pi}}\int_{\pi}^{\infty}\left(t^{\alpha}\right)_{2\pi}e^{-\frac{\delta t^2}{4}}dt \le \frac{\pi^{\alpha}\sqrt{\delta}}{\sqrt{\pi}}\int_{\pi}^{\infty}e^{-\frac{\delta t^2}{4}}dt \le Ke^{-\frac{\delta\pi^2}{4}}. \qquad (22)$$

Из (19)–(22) следует (18).

Следует отметить, что равенство (18) совпадает из результатом В.А. Баскакова (5).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Степанец, А.И. Равномерные приближения тригонометрическими полиномами / А.И. Степанец. – К : Наук. думка, 1981. – 340 с.
2. Коровкин, П.П. О наилучшем приближении функций класса Z_2 некоторыми линейными операторами / П.П. Коровкин // Докл. АН СССР. – 1959. – Т. 127, № 3.– С. 143–149.
3. Баусов, Л.И. О приближении функций класса Z_{α} положительными методами суммирования рядов Фурье / Л.И. Баусов // Успехи мат. наук. – 1961. – Т. 16, № 3. – С. 201–210.
4. Баусов, Л.И. Линейные методы суммирования рядов Фурье с заданными прямоугольными матрицами, I / Л.И. Баусов // Известия вузов. – 1996. – Т. 55, № 6. – С. 5–17.
5. Баскаков, В.А. О некоторых свойствах операторов типа операторов Абеля – Пуассона / В.А. Баскаков // Мат. заметки. – 1975. – Т. 17, № 2. – С. 169–180.
6. Фалалеев, Л.П. О приближении функций обобщенными операторами Абеля – Пуассона / Л.П. Фалалеев // Сиб. мат. журн. – 2001. – Т. 42, №4. – С. 926–936.
7. Kharkevych, Yu.I. V. Approximation of (ψ,β)-differentiable functions by Weierstrass integrals / Yu.I. Kharkevych, I.V. Kal’chuk // Ukr. math. journal. – 2007. – Vol. 59, № 7. – P. 953–978.
8. Kal’chuk, I.V. Approximation of (ψ,β)-differentiable functions defined on the real axis by Weierstrass operators / I.V. Kal’chuk //Ukr. math. journal. – 2007. – Vol. 59, № 9. – P. 1201–1220.
9. Титмарш, Е. Введение в теорию интегралов Фурье / Е. Титмарш. – М.–Л., 1948.

10. Градштейн, И.С. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений / И.С. Градштейн, И.М. Рыжик – М. : Физматиз, 1963. – 1100 с.
11. Лебедев, Н.Н. Специальные функции и их приложения / Н.Н. Лебедев. – М. : Физматиз, 1963. – 359 с.
12. Двайт, Г.Б. Таблицы интегралов и другие математические формулы / Г.Б. Давайт. – М., 1973.

I.P. Pryjmas, T.A. Stepaniuk, Yu.I. Kharkevych. **Approximative Properties of Weierstrass Integrals on the Classes** H_ω

The article focuses on the solution to one of the problems of the Approximation's Theory, the problem about researching approximative properties of Weierstrass integrals $W_\delta(f;x)$ on the classes $H_\omega := \left\{\varphi \in C : |\varphi(t) - \varphi(t')| \le \omega\left(|t-t'|\right) \ \forall t, t' \in \mathbb{R}\right\}$. We solved the problem of Kolmogorov-Nikolsky for Weierstrass integrals on the classes H_ω in the uniform metric.

Рукапіс паступіў у рэдкалегію 05.09.2012