УДК 517.925[41+42]

И.Г. Кожух

КАЧЕСТВЕННОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ ДВУХ КОНКУРИРУЮЩИХ ПОПУЛЯЦИЙ

Проводится качественное исследование динамики развития популяции в предположении об отсутствии или существовании внутривидовой борьбы, а также взаимодействии с представителями другой конкурирующей популяции. Найдены решения соответствующих дифференциальных уравнений, а также условия, при которых осуществляется колебательный процесс, т.е. существуют периодические движения. Исследуется также система двух дифференциальных уравнений, описывающая процесс взаимодействия двух конкурирующих популяций типа «жертва-хищник» в пространстве шести параметров, определяющих состояние систем. Координаты состояний равновесия такой системы рационально выражены через ее параметры. Установлены характер и взаиморасположение состояний равновесия как в конечной части плоскости, так и на бесконечности. Доказано отсутствие предельных циклов.

Модель линейной функции для скорости прироста популяции

Основным объектом исследований в экологии является динамика (или эволюция) популяций. Рассмотрим некоторую популяцию, обитающую в более или менее благоприятных условиях. Число живых организмов в этой популяции с течением времени не остается постоянным и будет меняться в зависимости от интенсивности двух противоположных процессов: рождаемости и смертности. На рождаемость и смертность организмов влияют многие факторы: недостаток пищи, притеснение со стороны другого биологического вида, продолжительность жизни и т.п. Поэтому мы предположим, что данная популяция живет в условиях неограниченных ресурсов питания и неограниченного места и не подавляется никаким другим видом. Отметим сразу, что в природе, да и в лаборатории тоже, нельзя наблюдать популяцию, которая длительное время жила бы в условиях неограниченных ресурсов питания или места. В связи с этим, будем рассматривать не реальную популяцию, а ее модель.

Пусть $x(t)$ обозначает число живых организмов исследуемой популяции в момент времени t, а $x(t+\Delta t)$ – соответствующее число в момент $t+\Delta t$. Разность

$$\Delta x = x(t+\Delta t) - x(t)$$

дает нам прирост числа живых организмов за промежуток времени Δt. За это время взрослые особи произведут потомство, а часть особей могут погибнуть, следовательно, $\Delta x = R - S$, где R – число родившихся за единицу времени особей, а S – число погибших за это время.

С достаточным основанием можно утверждать, что средняя скорость изменения особей в популяции задается формулой

$$\frac{\Delta x}{\Delta t} = R - S. \tag{1}$$

Простейшим случаем является ситуация, когда R и S пропорциональны числу особей в популяции, т.е. $R = ax, S = bx, a > 0, b > 0.$ В этом случае

$$\frac{\Delta x}{\Delta t} = ax - bx = (a-b)x.$$

Переходя к пределу при $\Delta t \to 0$, получим дифференциальное уравнение с разделяющимися переменными

$$\frac{dx}{dt} = (a-b)x. \tag{2}$$

Разделив переменные и проинтегрировав это уравнение (2), получим:

$$\int \frac{dx}{x} = (a-b)\int dt \text{ или } x = Ce^{(a-b)t}, \tag{3}$$

где C – произвольная постоянная.

Пусть x_0 – значение $x(t)$ в тот момент времени t_0, с которого мы начали наблюдения за популяцией, откуда $x_0 = Ce^{(a-b)t_0}$ или $C = \frac{x_0}{e^{(a-b)t_0}}$, а тогда

$$x(t) = x_0 e^{(a-b)(t-t_0)} \tag{4}$$

Простейший анализ полученного решения показывает, что если $a > b$, то при $t \to \infty$ число особей $x \to \infty$, т.е. неограниченно возрастает, а при $a < b$, $x \to 0$ при $t \to \infty$ и популяция становится вымирающей. График функции (4) для $a-b > 0$ и для $a-b < 0$ изображен на рисунке 1. Такое решение (4) уравнения (2) называется показательным законом роста.

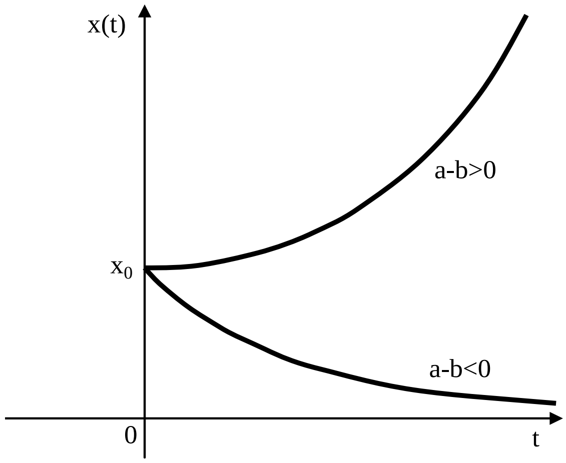

Рисунок 1 – График показательного закона роста

Вполне понятно, что ни одна природная популяция не растет по такой кривой. Действительно, с самого начала были сделаны такие предположения о популяции, которые в природе практически никогда не выполняются. Необходимо отметить, что след установленного нами закона явно заметен и в реальных (природных) популяциях. Пока популяция молода, пока достаточно места и пищи, пока нет борьбы с соседями, развитие популяции происходит в соответствии с показательным законом роста. Этот вывод имеет место для конечного, не очень большого, промежутка времени. Хорошо известны так называемые «экологические взрывы», когда тот или иной биологический вид за короткий срок достигает гигантской численности.

Закон показательного роста в отношении к популяции людей впервые сформулировал английский экономист Томас Мальтус, который сделал вывод, что увеличение численности населения Земли, возрастая по экспоненте, приведет к недостатку питания, а следовательно, к неизбежности войн и других видов истребления населения. Его ошибка состоит в том, что он в своих рассуждениях не учитывал других факторов, влияющих на рост народонаселения, кроме рождаемости и естественной смертности.

Следует также отметить, что в приведенных выше и последующих рассуждениях количество особей популяции есть число целое и, следовательно, может изменяться только скачками, т.е. $x(t)$ как дискретная функция не является дифференцируемой, однако для больших ее значений ошибка, связанная с предположением о непрерывности данной функции и ее дифференцируемости, на наш взгляд, не имеет существенного значения и дает возможность применять методы дифференциального исчисления при моделировании.

Модель нелинейной функции для скорости прироста популяции

Рассмотрим снова одну изолированную популяцию и будем предполагать, что она обитает в некоторой ограниченной по размерам области пространства. Это может быть лабораторная пробирка, опытный участок или природный ареал. Необходимо отметить, что поначалу, пока особей в популяции не так много, ее развитие идет в соответствии с показательным законом роста в предположении, что запасов пищи достаточно. Однако такая модель не может служить подходящим описанием развития популяции для длительного промежутка времени, т.к. с ростом числа популяции возрастает «эффект самоотравления» или, иначе говоря, внутривидовая борьба. Причинами, снижающими рост популяции, являются конкурентная борьба за пищу, за место, распространение инфекций и т.д.

Более реальными случаями для описания эволюции популяции будут являться модели, которые предполагают, что скорость изменения числа особей является нелинейной функцией.

В таком случае скорость прибавления числа особей в популяции задается дифференциальным уравнением вида

$$\frac{dx}{dt} = f(x), \tag{5}$$

где $f(x)$ – некоторая нелинейная функция.

Пусть, например, $f(x) = ax - bx^2$, где $a > 0, b > 0.$ Тогда уравнение (5) принимает вид:

$$\frac{dx}{dt} = ax - bx^2. \tag{6}$$

В этом уравнении первый член справа соответствует естественному приросту, а второй – убыли из-за внутривидовой конкуренции. Коэффициент b называется коэффициентом внутривидовой конкуренции.

Уравнение (6) является уравнением Бернулли, а значит, его можно проинтегрировать. Интегрируя его одним из известных способов и решив задачу Коши $x = x_0$ при $t = t_0$, получим

$$x(t) = x_0 \frac{\frac{a}{b} e^{a(t-t_0)}}{\left(\frac{a}{b} - x_0\right) + x_0 e^{a(t-t_0)}}. \tag{7}$$

Нам понадобится и другая форма этого решения, которую можно получить, разделив числитель и знаменатель на $e^{a(t-t_0)}$:

$$x(t) = \frac{\frac{a}{b} x_0}{x_0 + \left(\frac{a}{b} - x_0\right) e^{-a(t-t_0)}}. \tag{8}$$

В результате получили, что популяция в ограниченной среде развивается в соответствии с формулой (8). Из этой формулы видно, что при $t \to \infty$ число особей в популяции имеет своим пределом $\frac{a}{b}$:

$$\lim_{x(t)} \frac{\frac{a}{b}x_0}{x_0 + \left(\frac{a}{b} - x_0\right)e^{-a(t-t_0)}} = \frac{a}{b}.$$

При этом следует рассмотреть два случая: $\frac{a}{b} > x_0$ и $\frac{a}{b} < x_0$; если $\frac{a}{b} - x_0 > 0$, то функция $x(t)$ возрастает, а при $\frac{a}{b} < x_0$ она убывает. Решение уравнения (8) изображено на рисунке 2.

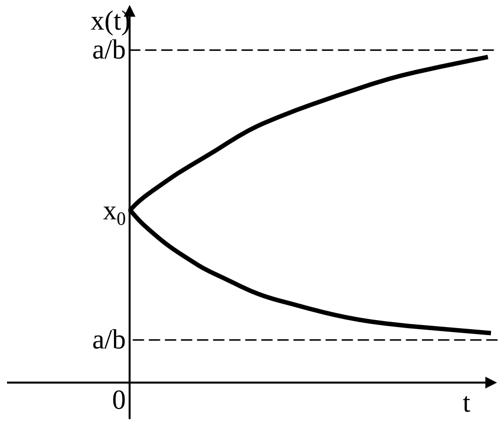

Рисунок 2 – График решения уравнения (8)

Динамика двух популяций без внутривидовой борьбы

Рассмотрим и исследуем взаимодействие двух популяций, условно называемых хищником и жертвой при всевозможных (достаточно общих) предположениях. Сначала рассмотрим модель взаимодействия хищников и жертв в предположении, что между особями одного вида нет конкуренции. Пусть x и y − число жертв и хищников соответственно.

Предположим, что в отсутствии хищников $(x = 0)$ относительный прирост жертв происходит с постоянной скоростью $a > 0$. Наряду с этим жертвы несут потери, пропорциональные количеству хищников $y > 0$ с коэффициентом пропорциональности – b, где $b > 0$.

В свою очередь, рост популяции хищников зависит от количества жертв x, и при отсутствии пищи $(x = 0)$ относительная скорость убывания популяции хищников равна c, где $c > 0$. При наличии пищи в количестве x, $x > 0$, скорость убывания хищников компенсируется пропорционально количеству жертв с коэффициентом пропорциональности d, $d > 0$.

Исходя из вышеизложенного, можно утверждать, что относительная скорость прироста жертв в присутствии хищников равна $\frac{1}{x}\cdot\frac{dx}{dt}=a-by$; аналогично для хищников относительная скорость их убывания $\frac{1}{y}\cdot\frac{dy}{dt}=-c+dx$ при наличии компенсации.

Объединяя оба равенства, получим систему нелинейных дифференциальных уравнений с двумя неизвестными, соответствующую модели Вольтера–Лотка.

$$\frac{dx}{dt}=x(a-by)=P(x,y),\ \frac{dy}{dt}=y(-c+dx)=Q(x,y) \text{ или}$$

$$\frac{dx}{dt}=ax-bxy,\ \frac{dy}{dt}=-cy+dxy, \tag{9}$$

где $a,b,c,d>0.$

Проведем качественное исследование решений системы (9), для чего введем в рассмотрение безразмерные переменные $u(\tau)=\frac{d}{c}x,\ \ v(\tau)=\frac{b}{a}y,\ \tau=ct,\ \alpha=\frac{a}{c}$, тогда система (9) примет вид:

$$\frac{du}{d\tau}=du(v-1),\ \frac{dv}{d\tau}=v(1-u). \tag{10}$$

Разделив первое уравнение системы (10) на второе, получим: $\frac{du}{dv}=\frac{\alpha u(v-1)}{v(1-u)}$.

Разделив переменные, будем иметь: $\frac{1-u}{u}du=\alpha\frac{v-1}{v}dv.$ Откуда $\ln u-u=\alpha v-\alpha\ln v+c.$

Будем считать, что в некоторый момент времени $\tau=\tau_0$ число особей обоих видов известно, т.е. $u(\tau_0)=u_0,\ v(\tau_0)=v_0$. Тогда $c=\ln u_0-u_0-\alpha v_0+$

$+\alpha\ln v_0=\ln u_0 v_0^{\alpha}-u_0-\alpha v_0$. В результате приходим к равенству

$$\alpha v+u-\ln uv^{\alpha}=H, \tag{11}$$

где $H=\alpha v_0+u_0-\ln u_0 v_0^{\alpha}=const.$

Вид кривых (11) для различных значений H представлен на рисунке 3.

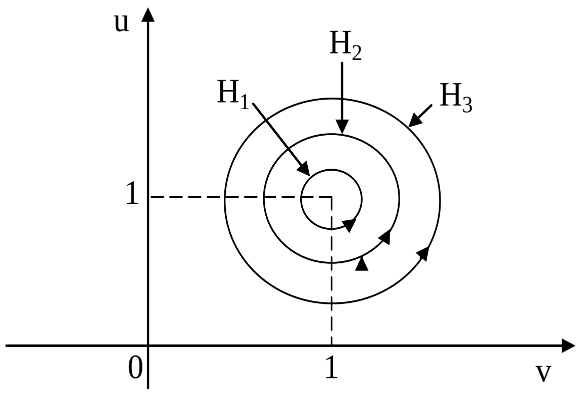

Рисунок 3 – Интегральные кривые уравнения (10)

Отсюда следует, что как переменная $u(\tau)=\dfrac{d}{c}x$, так и переменная $v(\tau)=\dfrac{b}{a}y$ «пробегают» замкнутую траекторию. Это означает, что решение (11) уравнения (10) являются функциями, периодическими по времени.

Проведем далее качественное исследование системы (9) без замены, с принадлежащими ей параметрами. Нетрудно показать, что эта система в конечной части плоскости имеет два состояния равновесия: $O(0;0)$ и $A\left(\dfrac{c}{d};\dfrac{a}{b}\right)$.

Исследуем их характер, для чего составим характеристическое уравнение и найдем его корни.

а) $O(0;0)$. $P'_x=a-by,\ P'_y=-bx,\ Q'_x=dx,\ Q'_y=-c+dx.$ В точке $(0;0)$ имеем: $P'_x=a,\ P'_y=0,\ Q'_x=0,\ Q'_y=-c.$ Откуда $\Delta=\begin{vmatrix} a & 0 \\ 0 & -c \end{vmatrix}=-ac<0;$ $\sigma=a-c;\ \ \sigma^2-4\Delta=a^2-2ac+c^2+4ac=(a+c)^2>0.$ Значит состояние равновесия O является следом, т.к. корни характеристического уравнения $\lambda_1=a,\lambda_2=-c$ действительны и различных знаков.

б) $A\left(\dfrac{c}{d};\dfrac{a}{b}\right)$. Для этой точки $P'_x=0,\ P'_y=-\dfrac{bc}{d},\ Q'_x=c,\ Q'_y=0,$ $\Delta=\dfrac{bc^2}{d},\ \sigma=0.$ Следовательно, корни характеристического уравнения – чисто мнимые числа $\lambda_{1,2}=ic\sqrt{\dfrac{b}{d}}$ и состояние равновесия A является центром. В подтверждение предыдущему получим, что графиком зависимости x и y есть замкнутые кривые, содержащие внутри точку A и удовлетворяющие заданным начальным условиям $x=x_0,\ y=y_0$ при $t=t_0$. Это значит, что с какой бы начальной численности популяций мы ни начали, с течением времени функции $x(t)$ и $y(t)$ будут так меняться, что точка $M(x(t),y(t))$ будет двигаться по замкнутой траектории до тех пор, пока снова не совпадет с начальной точкой $M_0(x_0,y_0)$.

Таким образом, в рассматриваемой модели деятельность хищников не ведет к полному истреблению жертв, а затем и гибели самых хищников от голода.

Динамика двух популяций при наличии внутривидовой и межвидовой борьбы

Исследуем далее проблему динамики двух популяций при наличии внутривидовой борьбы внутри каждой популяции. Учитывая, что внутривидовая борьба ведет к уменьшению численности каждой популяции, система дифференциальных уравнений, моделирующая такой процесс, имеет вид:

$$\frac{dx}{dt}=a_1x-b_1xy-c_1x^2=P(x,y),\quad \frac{dy}{dt}=-a_2y+b_2xy-c_2y^2=Q(x,y),\quad (12)$$

где $a_i,b_i,c_i\ (i=1,2)$ – действительные положительные коэффициенты, c_1 и c_2 – коэффициенты внутривидовой борьбы.

Нетрудно показать, что в конечной части плоскости система (12) имеет четыре состояния равновесия:

а) $O(0;0)$;

б) $A\left(0;-\frac{a_2}{c_2}\right)$;

в) $B\left(\frac{a_1}{c_1};0\right)$;

г) $C\left(\frac{a_1c_2+b_1a_2}{c_1c_2+b_1b_2};\frac{a_1b_2-c_1a_2}{c_1c_2+b_1b_2}\right)$.

Исследуем каждое из состояний равновесия в зависимости от значений параметров системы (12). Имеем:

$$P'_x=a_1-b_1y-2c_1x,\ P'_y=-b_1x,\ Q'_x=b_2y,\ Q'_y=-a_2+b_2x-2c_2y.$$

а) Точка $O(0;0)$. $P'_x=a_1,\ P'_y=0,\ Q'_x=0,\ Q'_y=-a_2$.

$$\Delta=\begin{vmatrix}a & 0\\ 0 & -a_2\end{vmatrix}=-a_1a_2<0;\sigma=a_1-a_2;\sigma^2-4\Delta=a_1^2-2a_1a_2+a_2^2+4a_1a_2=$$
$$=(a_1+a_2)^2.$$

Такое состояние равновесия является седлом для любых допустимых значений параметров исследуемой системы.

б) Точка $A\left(0;-\frac{a_2}{c_2}\right)$.

$$\Delta=a_1a_2+\frac{a_2^2b_1}{c_2}=\frac{a_2}{c_1}(a_1c_2+a_2b_1)>0;\sigma=-a_1-a_2+\frac{a_2b_1}{c_2};$$

$$\sigma^2-4\Delta=\left(a_1-a_2+\frac{a_2b_1}{c_2}\right)^2>0.$$

Точка *A* является узлом, устойчивым, если $\frac{a_2b_1}{c_2}<(a_1+a_2)$, и неустойчивым при выполнении противоположного неравенства.

в) Точка $B\left(\frac{a_1}{c_1};0\right)$. Для нее $\sigma=-a_1-a_2+\frac{a_1b_2}{c_1}$; $\Delta=\frac{a_1}{c_1}(a_2c_1-a_1b_2)$;

$$\sigma^2-4\Delta=\left(a_1-a_2+\frac{a_1b_1}{c_1}\right)^2.$$

Состояние равновесия *B* является узлом, если $a_2c_1>a_1b_2$, устойчивым при и $\frac{a_2b_1}{c_2}<(a_1+a_2)$ неустойчивым в противном случае. Если же $a_2c_1<a_1b_2$, то точка *B* – седло.

г) Точка $C\left(\dfrac{a_1c_2+b_1a_2}{c_1c_2+b_1b_2};\dfrac{a_1b_2-c_1a_2}{c_1c_2+b_1b_2}\right)$. Имеем

$$\sigma=\frac{-c_1(b_1a_2+a_1c_2)+c_2(a_2c_1-a_1b_2)}{c_1c_2+b_1b_2};$$

$$\Delta=\frac{1}{c_1c_2+b_1b_2}(a_1c_2+a_2b_1)(a_1b_2-a_2c_1);$$

$$\sigma^2-4\Delta=\left(\frac{c_1(a_1c_2+b_1a_2)-c_2(a_1b_2-c_1a_2)}{c_1c_2+b_1b_2}\right)^2.$$

Выразив полученные значения σ,Δ и $\sigma^2-4\Delta$ через переменные x и y, получим: $\sigma=-(c_1x+c_2y)$; $\Delta=(c_1c_2+b_1b_2)xy$; $\sigma^2-4\Delta=(c_1x-c_2y)^2$. Из этого следует, что точка C является узлом, если она расположена в первом квадранте, и седлом, если она находится в четвертом квадранте.

Исследуем характер и устойчивость бесконечно удаленных состояний равновесия. С помощью преобразования Пуанкаре $x=\frac{1}{z}$, $y=\frac{u}{z}$ и умножения каждого уравнения полученной при этом системы на z (что равносильно преобразованию $dt=zd\tau$), сохранив прежнее обозначение времени t, приходим к системе:

$$\begin{aligned}\frac{du}{dt}&=-(a_1+a_2)uz+(c_1+b_2)u+(b_1-c_2)u^2\equiv P(u,z),\\ \frac{dz}{dt}&=c_1z+b_1uz-a_1z^2\equiv Q(u,z).\end{aligned}\tag{13}$$

Состояниями равновесия на бесконечности являются точки $M(0;0)$ и $N\left(\dfrac{c_1+b_2}{c_2-b_1};0\right)$.

Исследовав их характер способом, аналогичным вышеизложенному, приходим к выводу, что точка $M(0;0)$ – узел неустойчивый при любых значениях параметров системы. Точка $N\left(\dfrac{c_1+b_2}{c_2-b_1};0\right)$ является седлом, если $c_2-b_1>0$, узлом, если $c_2-b_1<0$. Отметим также, что выражение $\sigma^2-4\Delta$ всегда положительно, т.к. бесконечно удаленное состояние не может быть фокусом.

Применив преобразование $x=\frac{v}{z}$, $y=\frac{1}{z}$, исследуем характер состояния равновесия на «концах» оси ОУ. В результате приходим к системе:

$$\begin{aligned}\frac{dv}{dt}&=(a_1+a_2)vz+(c_2-b_1)v-(c_1+b_2)v^2,\\ \frac{dz}{dt}&=c_2z-b_1vz+a_2z^2.\end{aligned}\tag{14}$$

Единственным состоянием равновесия системы (14) является точка $O_1(0;0)$. Для нее $\sigma = 2c_2 - b_1$, $\Delta = c_2(c_2 - b_1)$, $\sigma^2 - 4\Delta = b_1^2 > 0$. Это состояние равновесия является узлом, если $c_2 - b_1 > 0$, устойчивым, если $2c_2 - b_1 < 0$, или седлом при $c_2 < b_1 < 0$.

Остается исследовать вопрос существования предельных циклов. Для этого воспользуемся критерием Дюлака, взяв в качестве функции Дюлака функцию $B(x,y) = x^{k-1}y^{h-1}$, где $k = \dfrac{-c_2(b_2 + c_1)}{c_1c_2 + b_1b_2}$, $h = \dfrac{c_1(b_1 + c_2)}{c_1c_2 + b_1b_2}$. Тогда

$$\frac{\partial(BP)}{\partial x} + \frac{\partial(BQ)}{\partial y} = \frac{1}{c_1c_2 + b_1b_2}\left(a_2c_1(c_2 - b_1) - a_1c_2(b_2 + c_1)\right)x^{k-1}y^{h-1}.$$

Это выражение при $\sigma = a_2c_1(c_2 - b_1) - a_1c_2(b_2 + c_1) \neq 0$ может обратиться в нуль только вдоль интегральных прямых $x = 0$ и $y = 0$. Отсюда следует, что предельных циклов, а также замкнутых контуров, составленных из траекторий, быть не может. Допустим, что имеется замкнутый контур, в границу которого входят отрезки ОХ и ОУ. Такой контур целиком лежит в одной из четвертей плоскости ОХУ. В этом случае выражение $\dfrac{\partial(BP)}{\partial x} + \dfrac{\partial(BQ)}{\partial y}$ хотя и обращается в нуль на осях ОХ и ОУ, но в каждой четверти плоскости знак этого выражения не меняется. Значит, $\iint\left(\dfrac{\partial(BP)}{\partial x} + \dfrac{\partial(BQ)}{\partial y}\right)dxdy \neq 0$, и, следовательно, замкнутых контуров существовать не может. В случае $\sigma = 0$ система (12) имеет аналитический интеграл $x^k y^h(a_2c_1x - a_1c_2y - a_1a_2) = const$, при этом одно из состояний равновесия этой системы является центром, т.е. имеется целая область плоскости, целиком заполненная замкнутыми траекториями.

Построим качественные картины поведения траекторий системы (12) в круге Пуанкаре для наиболее типичных случаев расположения состояний равновесия (рисунки 4; 5).

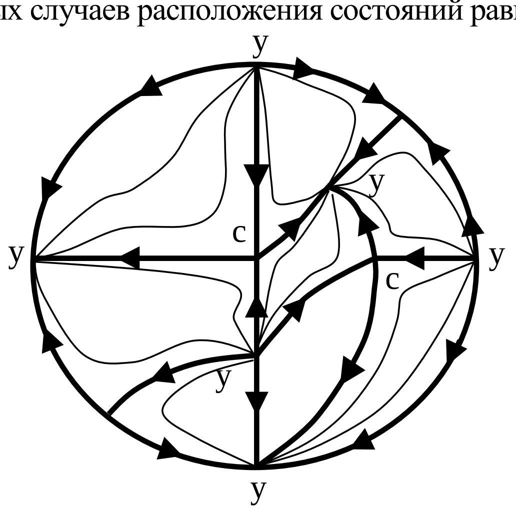

Рисунок 4 – Качественный портрет в целом системы (12) при $a_1b_2 - c_1a_2 > 0$

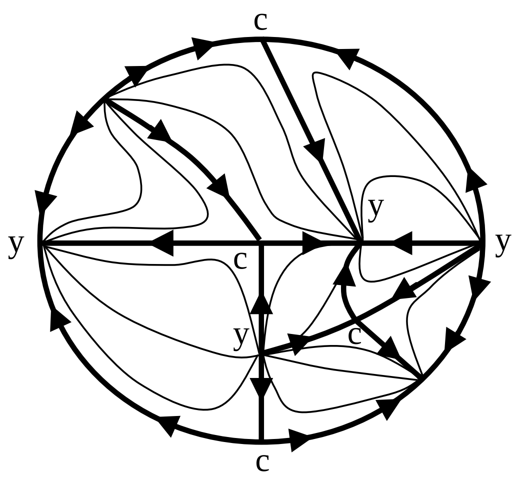

Рисунок 5 – Качественный портрет в целом системы (12) при $a_1b_2 - c_1a_2 < 0$

При этом рисунок 4 соответствует неравенству $a_1b_2 - c_1a_2 > 0,$ а рисунок 5 – неравенству $a_1b_2 - c_1a_2 < 0.$ В первом случае состояние равновесия C находится в первой четверти и является узлом, тогда точка B – седло; во втором случае характер состояния равновесия меняется: седло на узел и узел на седло, причем седло C расположено в четвертой четверти. Этот вывод подтверждается характером состояний равновесия в бесконечно удаленной части плоскости.

Таким образом, исходя из вышеизложенного можно сделать вывод, что при $x = \dfrac{a_1}{c_1}$ при $t \to \infty$ популяция y вымирает, а при $x = \dfrac{a_1c_2 + b_1a_2}{c_1c_2 + b_1b_2}$, $y = \dfrac{a_1b_2 - c_1a_2}{c_1c_2 + b_1b_2}$, $a_1b_2 - c_1a_2 > 0$, точка c показывает, что популяции x и y принимают значения, соответствующие координатам этой точке, при $t \to \infty$. Колебательные процессы или периодические движения отсутствуют.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Андронов, А.А. Теория колебаний / А.А. Андронов, А.А. Витт, С.Э. Хайкин. – М. : Наука, 1981. – 568 с.
2. Баутин, Н.Н. Методы и приемы качественного исследования динамических систем на плоскости / Н.Н. Баутин, Е.А. Леонтович. – М. : Наука, 1990. – 488 с.
3. Кожух, И.Г. Качественное исследование в целом некоторых классов динамических систем на плоскости : дисс. … канд. физ.-мат. аук / И.Г. Кожух. – Минск, 1980. – 127 с.
4. Кожух, И.Г. Математический анализ : учеб. пособие / И.Г. Кожух. – Минск : Изд-во Гревцова, 2011. – 443 с.
5. Пуанкаре, А. О кривых, определяемых дифференциальными уравнениями / А. Пуанкаре. – М. – Л. : ОГИЗ ГИТТЛ, 1947. – 392 с.

I.G. Kozhukh. **A Qualitative Research of the Interaction of two Competing Populations**

A qualitative research of a differential equation and a system of two differential equations describing the interaction of two populations one of which exists at the expense of consumption of the other is held. The conditions of their coexistence during a long period of time are found.

Рукапіс паступіў у рэдкалегію 29.09.2012