УДК 513.82

А.А. Юдов, И.Н. Машлякевич

О РЕДУКТИВНОСТИ ОДНОРОДНЫХ ПРОСТРАНСТВ С ФУНДАМЕНТАЛЬНОЙ ГРУППОЙ *G*-ГРУППОЙ ДВИЖЕНИЙ ПРОСТРАНСТВА МИНКОВСКОГО С ДВУХПАРАМЕТРИЧЕСКИМИ ГРУППАМИ СТАЦИОНАРНОСТИ

В работе рассматривается пространство ${}^1R_4$ – четырехмерное псевдоевклидово пространство сигнатуры 2 (пространство Минковского). Исследуются однородные пространства с фундаментальной группой Ли G – группой Ли движений пространства ${}^1R_4$. Изучается класс таких пространств, имеющих в качестве группы стационарности двухпараметрическую подгруппу Ли группы Ли H вращений пространства ${}^1R_4$. Среди однородных пространств такого вида находятся все редуктивные пространства. В алгебрах Ли этих редуктивных пространств находятся все редуктивные дополнения.

Введение

В работе изучается геометрия однородных пространств. Исследование таких пространств является одной из актуальных проблем современной геометрии. В этом направлении выполняется много исследовательских работ. В Беларуси задачами такого характера занимались В.И. Ведерников, И.В. Белько, А.А. Бурдун, В.В. Балащенко, С.Г. Кононов, Л.К. Тутаев, А.С. Феденко и другие, а за рубежом – эстонский геометр Ю. Лумисте [1] и японские геометры К. Номидзу и Ш. Кобаяси [2; 3]. Ю. Лумисте показал применимость редуктивных однородных пространств к проблеме расширения связностей на расслоениях с редуктивными однородными слоями. К. Номидзу и Ш. Кобаяси проводили широкое исследование редуктивных однородных пространств, в частности, исследовали свойства инвариантной связности в редуктивных однородных пространствах. В данной работе исследуется специальный класс однородных пространств, фундаментальной группой для которых является группа Ли G движений четырёхмерного псевдоевклидова пространства сигнатуры 2 – пространства ${}^1R_4$. Рассматриваются такие однородные пространства, группа стационарности у которых двухпараметрическая. Среди таких пространств находятся все редуктивные однородные пространства, в алгебрах Ли фундаментальных групп Ли которых находятся все соответствующие редуктивные дополнения.

Постановка задачи и метод исследования

Группа Ли G является полупрямым произведением группы Ли H стационарности точки пространства ${}^1R_4$ и абелевой группы T_4 параллельных переносов пространства ${}^1R_4$: $G = H \otimes T_4$.

Алгебра Ли $\overline{G}$ является полупрямой суммой алгебры Ли $\overline{H}$ группы Ли H и коммутативной алгебры Ли группы Ли: $\overline{G} = \overline{H} \oplus \tau_4$.

Рассмотрим связные подгруппы Ли группы Ли G движений пространства ${}^1R_4$. Все связные подгруппы Ли группы Ли G, с точностью до сопряженности, перечислены в работе [4].

Тем самым классифицированы с точностью до изоморфизма все однородные пространства со структурной группой G. Ставится задача среди всех таких однородных пространств выделить редуктивные однородные пространства. В данной работе найдены все редуктивные однородные пространства вида G/G_i, где G_i – связная двухпараметрическая подгруппа Ли группы Ли H вращений пространства ${}^1R_4$. Метод решения задачи состоит в том, что для исследуемого однородного пространства G/G_i рассматриваются соответствующие алгебры Ли $\overline{G}$ и $\overline{G_i}$, затем находятся все двумерные подпространства алгебры Ли $\overline{H}$, инвариантные относительно $ad\overline{G_i}$. Среди таких пространств находятся дополнительные к $\overline{G_i}$. Эти пространства будут редуктивными дополнениями для однородного пространства H/G_i. Поскольку пространство G/H редуктивно, отсюда будет следовать редуктивность однородного пространства G/G_i. При этом можно показать, что всякое редуктивное однородное пространство G/G_i может быть получено таким образом.

Определение. *Однородное пространство* H/G_i *называется редуктивным, если алгебра Ли* $\overline{H}$ *группы Ли H распадается в прямую сумму подпространств:*

$$\overline{H} = m + \overline{G_i}\,, \tag{1}$$

причем подпространство m инвариантно относительно $ad\overline{G_i}$, *где* $ad\overline{G_i}$ *– присоединенное представление алгебры Ли* $\overline{G_i}$.

Для нахождения редуктивных дополнений используем следующий способ. Пусть a_1, a_2 – базис алгебры Ли $\overline{G_i}$ группы Ли G_i, принадлежащей группе ли H. Рассмотрим четырехмерное векторное подпространство m алгебры Ли $\overline{H}$, образованное векторами b_1, b_2, b_3, b_4, т.е. $m=\{b_1, b_2, b_3, b_4\}$. Для этого подпространства m потребуем выполнимость условия инвариантности относительно ada_i, i=1, 2, т.е. выполнимость условий:

$$[a_i, b_j]=\alpha_{j1}b_1+\alpha_{j2}b_2+\alpha_{j3}b_3+\alpha_{j4}b_4,\ j=1, 2, 3,4. \tag{2}$$

Систему (2) будем называть системой инвариантности пространства m, или просто системой инвариантности. Раскладывая левую и правую части по базису i_5, i_6, i_7, i_8, i_9, i_{10} алгебры Ли $\overline{H}$ [5], получим систему инвариантности в виде системы алгебраических уравнений. Пусть например $b_j=\beta_{j5}i_5+\ldots+\beta_{j10}i_{10}$. Элементарными преобразова-ниями можно от базиса $\{b_1, b_2, b_3, b_4\}$ перейти к базису $\{b'_1, b'_2, b'_3, b'_4\}$ с более простыми коэффициентами $\beta_{jк}$. Для этого придется рассмотреть 15 случаев. При этом система инвариантности упростится. Пусть система инвариантности решена и в итоге получены четырехмерные пространства $m_1,\ldots,m_k$, инвариантные относительно $ad\overline{G_i}$. Среди этих пространств нужно выбрать такие, которые удовлетворяют условию (1). Такие пространства m_l и будут искомыми редуктивными дополнениями.

Нахождение редуктивных пространств H/G_i

Все двухпараметрические подгруппы Ли группы Ли H известны [4]. Запишем алгебры Ли для этих подгрупп с помощью базисов: $\overline{G_5}=\{i_6, i_9\}$, $\overline{G_6}=\{i_5-i_8, i_7+i_{10}\}$, $\overline{G_7}=\{i_5-i_8, i_6\}$.

Рассмотрим оператор i_6. Будем искать четырехмерные инвариантные подпространства алгебры Ли $\overline{H}$, инвариантные относительно $ad(i_6)$. Достаточно рассмотреть следующие случаи:

1. Инвариантные пространства ищем в виде: $\{i_5+\lambda i_6+\mu i_9, i_{10}+\nu i_6+\sigma i_9, i_7+si_6+ti_9, i_8+pi_6+qi_9\}$. Система инвариантности имеет вид: $-p=0$, $-q=0$, $s=0$, $t=0$, $\nu=0$, $\sigma=0$, $-\lambda=0$, $\mu=0$. Из первого, второго и седьмого уравнений следует, что $p=0$, $q=0$, $\lambda=0$ соответственно. Тогда получим инвариантные пространства в виде: $\{i_5, i_{10}, i_7, i_8\}$.

2. Инвариантные пространства ищем в виде: $\{i_5+\lambda i_8+\mu i_9, i_{10}+\nu i_8+\sigma i_9, i_7+si_8+ti_9, i_6+pi_9\}$. Система инвариантности примет следующий вид: $-\lambda^2=-1$, $-\lambda\mu=0$, $-\lambda\nu+s=0$, $-\nu\mu+t=0$, $-\lambda s+\nu=0$, $-\mu s+\sigma=0$. Из первого уравнения следует, что $\lambda=\pm1$, тогда рассмотрим первый случай, когда $\lambda=1$. Получим: $\mu=0$, $\nu=s$, $t=0$, $\sigma=0$. Рассмотрим второй случай, когда $\lambda=-1$, получим $\mu=0$, $\nu=-s$, $t=0$, $\sigma=0$. Тогда получим инвариантные пространства в виде: $\{i_5\pm i_8, i_{10}+\nu i_8, i_7\pm\nu i_8, i_6+pi_9\}$.

3. Инвариантные пространства ищем в виде: $\{i_5+\lambda i_8+\mu i_6, i_{10}+\nu i_8+\sigma i_6, i_7+si_8+ti_6, i_9\}$. Система инвариантности имеет вид: $-\lambda\mu=0$, $-\lambda^2=-1$, $-\nu\mu+t=0$, $-\mu s+\sigma=0$, $-\lambda\nu+s=0$, $-\lambda s+\nu=0$. Из второго уравнения следует, что $\lambda=\pm1$, тогда из первого следует, что $\mu=0$, а из третьего, четвертого ($t=0$, $\sigma=0$) и из пятого и шестого уравнений видно, что $\nu=\pm s$. Получим инвариантные пространства в виде: $\{i_5\pm i_8, i_{10}+\nu i_8, i_7\pm\nu i_8, i_9\}$.

4. Инвариантные пространства ищем в виде: $\{i_5+\lambda i_7+\mu i_9, i_{10}+\nu i_7+\sigma i_9, i_8+si_9, i_6+ti_9\}$. Система инвариантности примет следующий вид: $\nu\lambda=0$, $\sigma\lambda-s=0$, $\nu^2=1$, $\sigma\nu=0$, $-\lambda=0$, $-\mu=0$. Из третьего уравнения следует, что $\nu=\pm1$. Рассмотрим случай, когда $\nu=1$, тогда получим из первого и четвертого $\lambda=0$, $\sigma=0$ соответственно и из второго $s=0$. Рассмотрим случай, когда $\nu=-1$. Получим $\lambda=0$, $\sigma=0$, $s=0$. Тогда получим инвариантные пространства в виде : $\{i_5, i_{10}\pm i_7, i_8, i_6+ti_9\}$.

5. Инвариантные пространства ищем в виде: $\{i_5+\lambda i_7+\mu i_6, i_{10}+\nu i_7+\sigma i_6, i_8+si_6, i_9\}$. Система инвариантности имеет вид: $\sigma\lambda-s=0$, $\nu\lambda=0$, $\sigma\nu=0$, $\nu^2=1$, $-\mu=0$, $\lambda=0$. Из четвертого уравнения следует, что $\nu=\pm1$, а из пятого $\mu=0$. Рассмотрим случай, когда $\nu=1$, получим $\sigma=0$, а тогда и $s=0$. Рассмотрим случай, когда $\nu=-1$, получим $\sigma=0$, $s=0$. Получим инвариантные пространства в виде: $\{i_5, i_{10}+i_7, i_8, i_9\}$.

6. Инвариантные пространства ищем в виде: $\{i_5+\lambda i_7+\mu i_8, i_{10}+\nu i_7+\sigma i_8, i_6, i_9\}$ Система инвариантности имеет вид: $-\lambda\mu+\nu\lambda=0$, $-\mu^2+\sigma\lambda=-1$, $-\lambda\sigma+\nu^2=1$, $-\mu\sigma+\sigma\nu=0$. Сложив второе и третье уравнения, получим, что $\mu=\pm\nu$. Рассмотрим первый случай, когда $\mu=\nu$. Тогда $\mu=\pm\sqrt{1+\lambda\sigma}$, $\nu=\pm\sqrt{1+\lambda\sigma}$ при условии, что $1+\lambda\sigma\geq0$. Рассмотрим второй случай, когда $\mu=-\nu$. Получим систему вида: $-2\lambda\mu=0$, $-\mu^2+\sigma\lambda=-1$, $-\lambda\sigma+\mu^2=1$, $-\mu\sigma=0$. Рассмотрим случай 2а) $\mu\neq0$. Тог-

да из второго уравнения системы получим $\mu = \pm 1$, из третьего $\nu = \mp 1$, а из четвертого $\sigma = 0$. Рассмотрим случай 2б) $\mu = 0$. Получаем $\sigma = -\frac{1}{\lambda}$. В итоге получим инвариантные пространства в виде: $\{i_5 + \lambda i_7 \pm \sqrt{1+\lambda\sigma} i_8, i_{10} \pm \sqrt{1+\lambda\sigma} i_7 + \sigma i_8, i_6, i_9\}$, $\{i_5 \pm i_8, i_{10} \mp i_7, i_6, i_9\}$, $\left\{i_5 + \lambda i_7, i_{10} - \frac{1}{\lambda} i_8, i_6, i_9\right\}$.

7. Инвариантные пространства ищем в виде: $\{i_5 + \lambda i_{10} + \mu i_9, i_7 + \nu i_9, i_8 + \sigma i_9, i_6 + s i_9\}$. Система инвариантности противоречива.

8. Инвариантные пространства ищем в виде: $\{i_5 + \lambda i_{10} + \mu i_6, i_7 + \nu i_6, i_8 + \sigma i_6, i_9\}$. Система инвариантности противоречива.

9. Инвариантные пространства ищем в виде: $\{i_5 + \lambda i_{10} + \mu i_8, i_7 + \nu i_8, i_6, i_9\}$ Система инвариантности имеет вид: $-\mu^2 + \nu\lambda = -1$, $-\lambda\mu = 0$, $-\nu\mu = 0$, $-\lambda\nu = 1$. Рассмотрим случай, когда $\mu = 0$, тогда из последнего уравнения получим $\nu = -\frac{1}{\lambda}$. В случае, когда $\lambda = 0$, $\nu = 0$ приходим к противоречию. Получим инвариантные пространства в виде: $\left\{i_5 + \lambda i_{10}, i_7 - \frac{1}{\lambda} i_8, i_6, i_9\right\}$.

10. Инвариантные пространства ищем в виде: $\{i_5 + \lambda i_{10} + \mu i_7, i_8, i_6, i_9\}$. Система инвариантности примет вид: $\lambda = 0$, $\mu = 0$. Получим инвариантные пространства в виде: $\{i_5, i_8, i_6, i_9\}$.

11. Инвариантные пространства ищем в виде: $\{i_{10} + \lambda i_9, i_7 + \mu i_9, i_8 + \nu i_9, i_6 + \sigma i_9\}$. Система инвариантности противоречива.

12. Инвариантные пространства ищем в виде: $\{i_{10} + \lambda i_6, i_7 + \mu i_6, i_8 + \nu i_6, i_9\}$ Система инвариантности противоречива.

13. Инвариантные пространства ищем в виде: $\{i_{10} + \lambda i_8, i_7 + \mu i_8, i_6, i_9\}$ Система инвариантности имеет вид: $\lambda = 0$, $\mu = 0$. Получим инвариантные пространства в виде: $\{i_{10}, i_7, i_6, i_9\}$.

14. Инвариантные пространства ищем в виде: $\{i_{10} + \lambda i_7, i_8, i_6, i_9\}$. Система инвариантности противоречива.

15. Инвариантные пространства ищем в виде: $\{i_7, i_8, i_6, i_9\}$. Система инвариантности противоречива.

Таким образом, получена

Теорема 1. *Относительно adi_6 инвариантны только следующие четырехмерные подпространства алгебры Ли $\overline{H}$:*

1. $\{i_5, i_{10}, i_7, i_8\}$,
2. $\{i_5 \pm i_8, i_{10} + \nu i_8, i_7 \pm \nu i_8, i_6 + p i_9\}$,
3. $\{i_5 \pm i_8, i_{10} + \nu i_8, i_7 \pm \nu i_8, i_9\}$,
4. $\{i_5, i_{10} \pm i_7, i_8, i_6 + t i_9\}$,
5. $\{i_5, i_{10} + i_7, i_8, i_9\}$,
6. $\{i_5 + \lambda i_7 \pm \sqrt{1+\lambda\sigma} i_8, i_{10} \pm \sqrt{1+\lambda\sigma} i_7 + \sigma i_8, i_6, i_9\}$,

$$\{i_5 \pm i_8, i_{10} \mp i_7, i_6, i_9\},\ \left\{i_5 + \lambda i_7, i_{10} - \frac{1}{\lambda} i_8, i_6, i_9\right\},$$

$$7.\ \left\{i_5 + \lambda i_{10}, i_7 - \frac{1}{\lambda} i_8, i_6, i_9\right\},\ 8.\ \{i_5, i_8, i_6, i_9\},\ 9.\ \{i_{10}, i_7, i_6, i_9\}.$$

Рассматривая аналогично операторы adi_9, $ad(i_5 - i_8)$, $ad(i_7 + i_{10})$ приходим к следующим теоремам.

Теорема 2. *Относительно* adi_9 *инвариантны только следующие четырехмерные подпространства алгебры Ли* $\overline{H}$ *:*

$$1.\ \{i_5, i_{10}, i_7, i_8\},$$

$$2. \left\{i_5 + \mu i_8, i_{10} - \frac{1}{\mu} i_7, i_6, i_9\right\},\ \left\{i_5 \pm \sqrt{-1-\nu\mu}\, i_7 + \mu i_8, i_{10} + \nu i_7 \mp \sqrt{-1-\nu\mu}\, i_8, i_6, i_9\right\},$$

$$3. \{i_5 + \lambda i_{10}, i_7 + \lambda i_8, i_6, i_9\},\ 4.\ \{i_{10}, i_8, i_6, i_9\}.$$

Теорема 3. *Относительно* $ad(i_5 - i_8)$ *инвариантны только следующие четырехмерные подпространства алгебры Ли* $\overline{H}$ *:*

$$1. \{i_6, i_9, i_7 + i_{10}, i_5 - i_8\},\ \{i_6, i_9 + \sigma i_8, i_7 + i_{10}, i_5 - i_8\},$$

$$\left\{i_6 + \lambda i_{10} \pm \sqrt{\lambda\sigma}\, i_8, i_9 \pm \sqrt{\lambda\sigma}\, i_{10} + \sigma i_8, i_7 + i_{10}, i_5 - i_8\right\},$$

$$2.\ \left\{i_6 + \lambda i_9, i_7 + \frac{1}{\lambda} i_8, i_{10} - \frac{1}{\lambda} i_8, i_5 - i_8\right\},$$

$$3.\ \{i_6, i_7 + i_{10}, i_5, i_8\},\ 4.\ \{i_9, i_7, i_{10}, i_5 - i_8\}.$$

Теорема 4. *Относительно* $ad(i_7 + i_{10})$ *инвариантны только следующие четырехмерные подпространства алгебры Ли* $\overline{H}$ *:*

$$1. \left\{i_6 + \lambda i_8 \pm \sqrt{-\lambda\sigma}\, i_{10}, i_9 \mp \sqrt{-\lambda\sigma}\, i_8 + \sigma i_{10}, i_5 - i_8, i_7 + i_{10}\right\},\ \{i_6, i_9 + \sigma i_{10}, i_5 - i_8, i_7 + i_{10}\},$$

$$\{i_6, i_9, i_5 - i_8, i_7 - i_{10}\},$$

$$2.\ \left\{i_6 + \lambda i_9, i_5 + \frac{1}{\lambda} i_{10}, i_8 + \frac{1}{\lambda} i_{10}, i_7 + i_{10}\right\},$$

$$3.\ \{i_6, i_5 - i_8, i_7, i_{10}\},\ 4.\ \{i_9, i_5, i_8, i_7 + i_{10}\}.$$

Вернемся к вопросу о редуктивности однородных пространств. Рассмотрим подалгебру $G_5 = \{i_6, i_9\}$. Из теоремы 1 и теоремы 2 следует, что для adi_6 и adi_9 одновременно инвариантным является только одно четырехмерное пространство $\{i_5, i_{10}, i_7, i_8\}$, которое также является дополнительным к алгебре G_5. Следовательно, получена теорема:

Теорема 5. *Однородное пространство* H/G_5 *являются редуктивным. Единственным редуктивным дополнением для подалгебры Ли* $\overline{G}_5$ *в алгебре Ли* $\overline{H}$ *является подпространство* $\{i_5, i_{10}, i_7, i_8\}$.

Из теорем 3 и 4 следует, что у операторов $ad(i_5 - i_8)$ и $ad(i_7 + i_{10})$ нет общих инвариантных четырехмерных подпространств алгебры Ли $\overline{H}$. Поэтому алгебра Ли $\overline{G}_6$ не имеет в алгебре Ли $\overline{H}$ редуктивных дополнений. Таким образом, получим теорему:

Теорема 6. *Однородное пространство* H/G_6 *не является редуктивным.*

Рассмотрим подалгебру $G_7 = \{i_5 - i_8, i_6\}$. Из теорем 1 и 3 следует, что у операторов $ad(i_5 - i_8)$ и adi_6 нет общих инвариантных четырехмерных подпространств алгебры Ли $\overline{H}$. Поэтому алгебра Ли $\overline{G}_7$, не имеет в алгебре Ли $\overline{H}$ редуктивных дополнений. Следовательно, получили теорему:

Теорема 7. *Однородное пространство* H/G_7 *не является редуктивным.*

Итоги исследований заключим в следующей теореме:

Теорема 8. *Однородное пространство* H/G_5 *является редуктивным. Редуктивным дополнением в алгебре Ли* $\overline{H}$ *для подалгебры Ли* $\overline{G}_5$ *является только подпространство* $\{i_5, i_{10}, i_7, i_8\}$. *Однородные пространства* H/G_6, H/G_7 *не являются редуктивными.*

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Лумисте, Ю. Связности в главных расслоениях / Ю. Лумисте // Науч. труды I респ. конф. математиков Белоруссии. – Минск, 1965. – С. 247–258.
2. Кобаяси, Ш. Основы дифференциальной геометрии : в 2 т. / Ш. Кобаяси, К. Номидзу. – М. : Наука, 1981. – Т.1. – 343 с.
3. Кобаяси, Ш. Основы дифференциальной геометрии : в 2 т. / Ш. Кобаяси, К. Номидзу. – М. : Наука, 1981. – Т.2.– 413 с.
4. Белько, И.В. Подгруппы группы Лоренца–Пуанкаре / И.В. Белько // Известия АН БССР. Сер. физ.-мат. наук. – 1971. – № 1. – С. 16–21.
5. Корчук, О.В. Исследование и классификация редуктивных однородных пространств с группой вращений пространства $^1R_4$ с четырехмерными группами стационарности / О.В. Корчук, А.А. Юдов // Современные проблемы математического моделирования и новые образовательные технологии в математике : материалы респ. науч.-практ. конф., Брест, 23 апреля 2009 г. / Брест. гос. ун-т им. А.С. Пушкина. – Брест, 2009. – С. 182–183.

A. Yudov, I. Mashliakevich. **About the Reduction Homogenous Spaces with Fundamental Group *G*-Group of Motions of Space** $^1R_4$

In work space $^1R_4$ – 4–dimensional pseudoeuclidous space of the signature two is considered. Homogenous spaces with fundamental group Lee G – group Lee of motions space $^1R_4$ are being dealt with. A class of such spaces, having are as group of stability a 2–parametrical subgroup Lee of group Lee H of rotations of space $^1R_4$ is investigated. Homogeneous spaces of such kind being all reductive homogeneous spaces. Whether there are all reductive decomposition of algebras Lee of the received reductive spaces.

Рукапіс паступіў у рэдкалегію 20.04.2012