УДК 512.542

А.А. Трофимук

О КОНЕЧНЫХ ГРУППАХ С НЕБОЛЬШИМИ ПОРЯДКАМИ НЕБИЦИКЛИЧЕСКИХ СИЛОВСКИХ ПОДГРУПП ФАКТОРОВ

В работе исследована разрешимая группа G, которая обладает нормальным рядом таким, что силовские p-подгруппы его факторов являются либо бициклическими, либо порядка p^3 для каждого $p \in \pi(G)$. Установлена справедливость следующих утверждений: нильпотентная длина группы G не превышает 4, производная длина фактор-группы $G/\Phi(G)$ не превышает 6, $l_2(G) \le 2$, $l_3(G) \le 2$ и $l_p(G) \le 1$ для всех простых $p > 3$. Также оказалось, что если порядки небициклических силовских подгрупп в факторах ограничить кубами малых простых чисел $p \in \{2,3,5,11,17\}$, либо 16, либо 32, то можно сохранить верхнюю оценку производной длины $G/\Phi(G)$ равную 5. Здесь $l_p(G)$ – p-длина группы G.

Введение

Рассматриваются только конечные группы.

Бициклической называют группу $G = AB$, являющуюся произведением двух циклических подгрупп A и B. Группы с бициклическими силовскими подгруппами изучались в [1, теорема 1]. В частности, доказано, что производная длина таких разрешимых групп не превышает 6, а нильпотентная длина не превышает 4.

Нормальным рядом группы G называется цепочка подгрупп

$$1 = G_0 \subseteq G_1 \subseteq \ldots \subseteq G_m = G, \quad (1)$$

в которой подгруппа G_i нормальна в группе G для всех i. Фактор-группы G_{i+1}/G_i называются факторами нормального ряда (1).

В [2] исследовались разрешимые группы G, обладающие нормальными рядами, факторы которых имеют бициклические силовские подгруппы. Установлена справедливость следующих утверждений: нильпотентная длина группы G не превышает 4, а производная длина фактор-группы $G/\Phi(G)$ не превышает 5; группа G содержит нормальную дисперсивную по Оре подгруппу N такую, что фактор-группа G/N сверхразрешима; $l_2(G) \le 2$, $l_3(G) \le 2$ и $l_p(G) \le 1$ для всех простых $p > 3$; группа G содержит нормальную дисперсивную по Оре $\{2,3,7\}'$-холлову подгруппу. Здесь $l_p(G)$ – p-длина группы G.

В [3] установлено, что производная длина разрешимой группы G, силовские p-подгруппы которой либо бициклические, либо порядка p^3 для каждого $p \in \pi(G)$ не превышает 6; $l_2(G) \le 2$, $l_3(G) \le 2$, в частности, если силовская 3-подгруппа бициклическая, то $l_3(G) \le 1$; $l_p(G) \le 1$ для $p > 3$.

В настоящей работе продолжено изучение разрешимых групп, обладающих нормальными рядами, факторы которых имеют ограничения на силовские подгруппы. Основными результатами работы являются следующие теоремы.

Теорема 1. Пусть разрешимая группа G обладает нормальным рядом таким, что силовские p-подгруппы его факторов являются либо бициклическими, либо порядка p^3 для каждого $p \in \pi(G)$. Тогда справедливы следующие утверждения.

1. Нильпотентная длина группы G не превышает 4.

2. Производная длина фактор-группы $G/\Phi(G)$ не превышает 6.

3. $l_2(G) \le 2$, $l_3(G) \le 2$ и $l_p(G) \le 1$ для всех простых $p > 3$. Кроме того, если G A_4-свободна, то производная длина фактор-группы $G/\Phi(G)$ не превышает 5, а $l_3(G) \le 2$ и $l_p(G) \le 1$ для всех простых $p \ne 3$.

Разрешимые группы из [2] и группы, исследуемые в теореме 1, имеют одинаковые верхние границы нильпотентной длины и p-длины, а для производной длины верхние границы различны. Однако оказалось, что если порядки небициклических силовских подгрупп в факторах ограничить кубами малых простых чисел $p \in \{2,3,5,11,17\}$ либо 16, либо 32, то можно сохранить верхнюю оценку производной длины $G/\Phi(G)$ равную 5.

Теорема 2. Пусть разрешимая группа G обладает нормальным рядом таким, что силовские p-подгруппы его факторов являются либо бициклическими, либо порядка p^3 для каждого $p \in \{2,3,5,11,17\}$, либо 16, либо 32. Тогда справедливы следующие утверждения.

1. Производная длина фактор-группы $G/\Phi(G)$ не выше 5.

2. Группа G содержит нормальную дисперсивную по Оре $\{2,3,5,7,11,13,17,19,31,307\}'$-холлову подгруппу.

Пример 1. Пусть E_{13^3} – элементарная абелева группа порядка 13^3, а K – экстраспециальная группа порядка 27. С помощью компьютерной системы GAP [4] обнаружена группа $G = [E_{13^3}]([K]SL(2,3))$ порядка 1 423 656. Очевидно, что группа G обладает нормальным рядом, факторы которого являются либо бициклическими, либо имеют порядок 13^3 и 3^3. Подгруппа Фраттини $\Phi(G) = 1$, производная длина группы G равна 6, а нильпотентная длина группы G равна 4. Таким образом, полученные оценки производной и нильпотентной длины в теореме 1 являются точными. Кроме того, с помощью компьютерной системы GAP можно построить группу $G_1 = [E_{7^3}]([K]SL(2,3))$ порядка 222 264, обладающую теми же свойствами, что и группа G. Примеры групп G и G_1 объясняют отсутствие среди чисел $p \in \{2,3,5,11,17\}$ теоремы 2 простых чисел 7 и 13.

Пример 2. Пусть E_{7^3} – элементарная абелева группа порядка 7^3, S – экстраспециальная группа порядка 27, Q_8 – группа кватернионов порядка 8. С помощью системы компьютерной алгебры GAP построена группа $G = [E_{7^3}]([S]Q_8)$ порядка $74088 = 2^3 \cdot 3^3 \cdot 7^3$, которая является A_4-свободной группой. Очевидно, что группа G обладает нормальным рядом, факторы которого являются либо бициклическими, либо имеют порядок 7^3 и 3^3. Ее подгруппа Фраттини $\Phi(G) = 1$ и производная длина равна 5. Таким образом, оценка производной длины в случае A_4-свободной группы является точной.

1. Вспомогательные результаты

Все обозначения и используемые определения соответствуют [5; 6]. В доказательствах будут использоваться фрагменты теории формаций, [6; 7]. Пусть $\mathfrak{F}$ – некоторая формация групп и G – группа. Тогда $G^{\mathfrak{F}}$ – $\mathfrak{F}$-корадикал группы

G, т.е. пересечение всех тех нормальных подгрупп N из G, для которых $G/N \in \mathfrak{F}$. Произведение $\mathfrak{FH} = \{G \in \mathfrak{G} \mid G^{\mathfrak{H}} \in \mathfrak{F}\}$ формаций $\mathfrak{F}$ и $\mathfrak{H}$ состоит из всех групп G, для которых $\mathfrak{H}$-корадикал принадлежит формации $\mathfrak{F}$. Как обычно, $\mathfrak{F}^2 = \mathfrak{FF}$. Формация $\mathfrak{F}$ называется насыщенной, если из условия $G/\Phi(G) \in \mathfrak{F}$ следует, что $G \in \mathfrak{F}$. Формации всех нильпотетных и абелевых групп обозначают через $\mathfrak{N}$ и $\mathfrak{A}$ соответственно.

Для доказательства нам потребуются следующие вспомогательные утверждения.

Лемма 1 ([8], лемма 9). Если H – подгруппа группы $GL(3,2)$, то $H \in \{1$, $GL(3,2)$, Z_2, Z_3, Z_7, $Z_2 \times Z_2$, Z_4, D_8, S_3, A_4, S_4, $[Z_7]Z_3\}$. В частности, если H A_4-свободна, то H метациклическая.

Лемма 2. Если H – неприводимая разрешимая подгруппа группы $GL(4,2)$, то $H \in \{ [S_3 \times S_3]Z_2$, $S_3 \times S_3$, $[E_{3^2}]Z_4$, $[Z_{15}]Z_4$, $[Z_5]Z_4$, $Z_3 \times S_3$, $Z_3 \times D_{10}$, D_{10}, Z_5, $Z_{15}\}$.

Доказательство. Утверждение легко получить с помощью компьютерной системы GAP.

Лемма 3. Если H – неприводимая разрешимая подгруппа группы $GL(5,2)$, то $H \in \{ [Z_{31}]Z_5$, $Z_{31}\}$.

Доказательство. Утверждение легко получить с помощью компьютерной системы GAP.

Лемма 4 ([8], лемма 10). Если H – разрешимая подгруппа группы $GL(3,3)$ и $O_3(H) = 1$, то $H \cong Z_2 \times D$ или $H \cong D$, где D либо 2-группа производной длины, не превосходящей 2, либо $D \in \{Z_{13}, A_4, S_4, [Z_{13}]Z_3, SL(2,3), GL(2,3)\}$. В частности, производная длина H не превышает 4, а если H A_4-свободна, то H метабелева.

Лемма 5 ([8], лемма 11). Если H – разрешимая подгруппа группы $GL(3,5)$ и $O_5(H) = 1$, то $H \cong Z_2 \times D$, $H \cong Z_4 \times D$ или $H \cong D$, где D либо 2-группа производной длины, не превосходящей 2, либо $D \in \{Z_3$, Z_6, S_3, $[Z_3]Z_4$, Z_{12}, D_{12}, A_4, S_4, $Z_4 \times S_3$, Z_{24}, $[Z_3]Z_8$, Z_{31}, $SL(2,3)$, $[SL(2,3)]Z_2$, $[Z_4 \times Z_4]Z_3$, $[Z_{24}]Z_2$, $[Z_{31}]Z_3$, $[[Z_4 \times Z_4]Z_3]Z_2$, $[SL(2,3)]Z_4\}$. В частности, производная длина H не превышает 4, а если H A_4-свободна, то производная длина H не превышает 3.

Лемма 6. Если H – неприводимая разрешимая подгруппа группы $GL(3,p)$ и $p \in \{11,17\}$, то производная длина H не превышает 3.

Доказательство. Утверждение легко вывести с помощью компьютерной системы GAP.

Лемма 7 ([8], лемма 7). Пусть G – разрешимая группа и k – натуральное число. Тогда и только тогда $G/\Phi(G) \in \mathfrak{A}^k$, когда $G \in \mathfrak{N}\mathfrak{A}^{k-1}$.

Лемма 8 ([8], лемма 12). Пусть H – неприводимая разрешимая подгруппа группы $GL(n,p)$. Тогда:

1) если $n = 2$, то $H \in \mathfrak{N}^3 \cap \mathfrak{A}^4$;

2) если $n = 3$, то $H \in \mathfrak{N}^3 \cap \mathfrak{A}^5$.

Кроме того, если $n \in \{2,3\}$, $p > 3$ и $O_p(H) = 1$, то H – p'-группа.

Пример 3. Вычисления в компьютерной системе GAP показали, что в группе $GL(2,5)$ существует неприводимая подгруппа H, изоморфная группе $[SL(2,3)]Z_4$ порядка 96, здесь Z_4 – циклическая группа порядка 4. Кроме того, производная длина подгруппы H равна 4, а нильпотентная длина равна 3. Поэтому в п. 1 леммы 8 оценка производной и нильпотентной длины является точной.

Пример 4. Вычисления в компьютерной системе GAP показали, что как в группе $GL(3,7)$, так и в группе $GL(3,13)$ существует неприводимая подгруппа H, изоморфная группе $[S]SL(2,3)$ порядка 648, здесь S – экстраспециальная группа порядка 27. Кроме того, производная длина подгруппы H равна 5, а нильпотентная длина равна 3. Поэтому в п. 2 леммы 8 оценка производной и нильпотентной длины является точной.

Лемма 9 ([8], лемма 13). 1. Если H – разрешимая A_4-свободная подгруппа группы $GL(2,p)$, то H метабелева. 2. Если H – разрешимая A_4-свободная неприводимая подгруппа группы $GL(3,p)$, то $H \in \mathrm{A}^4$.

Пример 5. В $GL(2,5)$ существует неприводимая метабелева подгруппа, изоморфная симметрической группе S_3 степени 3. Поэтому в п. 1 леммы 9 оценка производной длины для $p=5$ является точной.

Пример 6. В $GL(3,7)$ существует неприводимая подгруппа, изоморфная A_4-свободной группе $[S]Q_8$, производной длины 4 и порядка 216. Здесь S – экстраспециальная группа порядка 27. Поэтому в п. 2 леммы 9 оценка производной длины является точной.

Следующая лемма легко выводится из соответствующих определений.

Лемма 10. Пусть F – насыщенная формация и G – разрешимая группа. Предположим, что G не принадлежит F, но $G/N \in \mathrm{F}$ для всех неединичных нормальных подгрупп N группы G. Тогда G – примитивная группа.

Лемма 11 ([9], теорема I.8; [5], теорема II.3.2). Пусть G – примитивная разрешимая группа с примитиватором M. Тогда справедливы следующие утверждения:

1) $\Phi(G)=1$;

2) $F(G)=C_G(F(G))=O_p(G)$ и $F(G)$ является элементарной абелевой p-группой порядка p^n для некоторого простого p;

3) в группе G существует единственная минимальная нормальная подгруппа, совпадающая с $F(G)$;

4) $G=[F(G)]M$ и $O_p(M)=1$;

5) M изоморфна неприводимой подгруппе группы $GL(n,p)$.

Лемма 12. Пусть разрешимая группа G обладает нормальным рядом таким, что силовские p-подгруппы его факторов являются либо бициклическими, либо порядка p^3 для каждого $p \in \pi(G)$. Тогда индексы максимальных подгрупп группы G свободны от четвертых степеней. В частности, если силовские p-подгруппы его факторов являются либо бициклическими, либо порядка p^3 для каждого $p \in \{2,3,5,11,17\}$, либо 16, либо 32, то индекс каждой максимальной подгруппы группы G есть простое число, квадрат простого числа либо 8, 16, 27, 125, 1331, 4913.

Доказательство. Пусть ряд (1) является нормальным рядом группы G, факторы которого удовлетворяют условию леммы. Уплотним этот ряд до главного следующим образом. Пусть $\overline{N}=N/G_i \subseteq G_{i+1}/G_i=\overline{G_{i+1}}$ является минимальной нормальной подгруппой фактор-группы $\overline{G}=G/G_i$. Так как $\overline{G}$ разрешима, то $\overline{N}$ – элементарная абелева p-подгруппа для некоторого простого $p \in \pi(G)$ и содержится в силовской p-подгруппе $\overline{P}$ группы $\overline{G_{i+1}}$. Пусть $\overline{P}$ бициклическая. Если $p > 2$, то $\overline{P}$ метациклическая, поэтому $|\overline{N}| = p$ или p^2. Если $p = 2$, то $|\overline{N}| = 2$, 4 или 8 по лемме 1 [1]. Пусть $\overline{P}$ – небициклическая подгруппа. Тогда $|\overline{N}| \le p^3$. Заменяя в (1) отрезок $G_i \le G_{i+1}$ на $G_i \le N \le G_{i+1}$ и повторяя эту процедуру нужное число раз, в итоге получим главный ряд

$$1 = N_0 < N_1 < \ldots < N_i < N_{i+1} < \ldots < N_m = G$$

с факторами порядка p, q^2 или r^3, где $p, q, r \in \pi(G)$.

Пусть M – максимальная подгруппа группы G. Зафиксируем число i такое, что $N_i \subseteq M$, но $N_{i+1} \not\subseteq M$. Так как M – максимальная подгруппа группы G, то $N_{i+1}M = G$ и $|G : M| = |N_{i+1} : N_{i+1} \cap M|$. Поскольку $N_i \subseteq N_{i+1} \cap M$,

то $|N_{i+1} : N_{i+1} \cap M| = \dfrac{|N_{i+1} : N_i|}{|N_{i+1} \cap M : N_i|}$ и $|G : M|$ есть простое число, квадрат простого числа или куб простого числа.

Частный случай леммы непосредственным образом вытекает из вышеизложенного доказательства. Лемма доказана.

2. Доказательство теоремы 1

1. Для этого покажем, что $G \in \mathrm{N}^4$. Пусть $\Phi(G) = 1$. Так как условие теоремы наследуется всеми фактор-группами, то $G/\Phi(G) \in \mathrm{N}^4$ и $G \in \mathrm{N}^4$, так как формация N^4 насыщенна. Поэтому $\Phi(G) = 1$ и по индукции $F = F(G)$ является единственной минимальной нормальной подгруппой группы G. Кроме того, $F = C_G(F)$ и $G = [F]M$, где M – некоторая максимальная подгруппа группы G. Так как $|F| = |G : M|$, то из леммы 12 следует, что порядок $|F|$ равен p либо p^2, либо p^3, где p – простое число.

Пусть $|F| = p$, то G/F – циклическая группа, как группа автоморфизмов группы простого порядка p, и $G/F \in \mathrm{A}$.

Пусть $|F| = p^2$. Тогда G/F изоморфна некоторой неприводимой разрешимой подгруппе группы $GL(2, p)$. По п. 1 леммы 8 фактор-группа $G/F \in \mathrm{N}^3$.

Осталось рассмотреть случай, когда $|F| = p^3$. Тогда G/F изоморфна некоторой разрешимой неприводимой подгруппе H группы $GL(3, p)$. По п. 2 леммы 8 группа $G/F \in \mathrm{N}^3$. Итак, мы доказали, что $G/F \in \mathrm{N}^3$. Поскольку F нильпотентна, то $G \in \mathrm{N}^4$.

2. По лемме 12 индексы максимальных подгрупп в группе G являются простыми числами, квадратами простых чисел либо кубами простых чисел. Такие группы исследовались в работе [10], где установлено, что производная длина фактор-группы $G/\Phi(G)$ не превышает 6.

3. Так как p-длина метанильпотентной группы не превышает 1, то из включения $G \in \mathrm{N}^4$ следует, что $l_p(G) \le 2$ для любого простого p. Применим индукцию по порядку группы G. Покажем, что $l_p(G) \le 1$ для любого простого $p > 3$. По лемме VI.6.9 [5] можно считать, что $O_{p'}(G) = \Phi(G) = 1$, а подгруппа Фиттинга

$F = F(G)$ – единственная минимальная нормальная p-подгруппа и $|F| = |G : M|$. Из леммы 12 следует, что порядок $|F|$ равен p либо p^2, либо p^3, где p – простое число.

Если $|F| = p$, то G/F изоморфна подгруппе циклической группы автоморфизмов $AutF$ группы F, порядок которой равен $p-1$. Отсюда, $G_p = F$ и $l_p(G) \le 1$.

Если $|F| = p^n$, $n \in \{2,3\}$, то $AutF = GL(n,p)$, G/F – неприводимая разрешимая подгруппа группы $GL(n,p)$ и $O_p(G/F) = 1$. По лемме 8 G/F – p'-группа, т.е. $l_p(G) \le 1$ для всех простых $p > 3$.

Пусть G является A_4-свободной группой. Повторяя доказательство утв. 1 теоремы и используя лемму 9, несложно показать, что $G \in \mathrm{N}\mathrm{A}^4$. Теперь из леммы 7 следует, что производная длина $G/\Phi(G)$ не превышает 5.

Покажем, что для A_4-свободной группы $l_2(G) \le 1$. По лемме VI.6.9 [5] и лемме 12 можно считать, что подгруппа Фиттинга $F = F(G)$ является единственной минимальной нормальной подгруппой порядка 2^{α}, где $\alpha \le 3$.

Если $|F| = 2$, то $l_2(G) \le 1$.

Если $|F| = 4$, то $Aut(F) \cong GL(2,2) \cong S_3$. Тогда $G/F \cong Z_3$ или $G/F \cong S_3$. Если $G/F \cong Z_3$, то $G \cong A_4$. Если $G/F \cong S_3$, то $G \cong S_4$. В любом случае группа не A_4-свободна. Противоречие.

Пусть теперь $|F| = 8$. Тогда G/F изоморфна подгруппе группы $GL(3,2)$. Из леммы 1 следует, что во всех случаях, кроме $G/F \cong S_3$, 2-длина не превышает 1. По теореме 4.32 [6] в группе G существует подгруппа $H = [F]Z_3$, у которой в качестве подгруппы выступает знакопеременная группа A_4. Противоречие. Теорема доказана.

3. Доказательство теоремы 2

1. Вначале докажем, что $G \in \mathrm{N}\mathrm{A}^4$. По индукции $G/\Phi(G) \in \mathrm{N}\mathrm{A}^4$. Так как $\mathrm{N}\mathrm{A}^4$ – насыщенная формация, то, по лемме 10, G – примитивная группа: $F = F(G)$ является единственной минимальной нормальной подгруппой группы G, $F = C_G(F)$, F – элементарная абелева подгруппа порядка p^n, $G = [F]M$, а G/F изоморфна некоторой неприводимой подгруппе из группы $AutF \cong GL(n,p)$ (лемма 11). Из леммы 12 следует, что порядок F равен либо p, либо p^2, либо 2^3, либо 2^4, либо 2^5, либо 3^3, либо 5^3, либо 11^3, либо 17^3.

Если $|F| = p$, то $AutF = Z_{p-1}$ и G/F – циклическая группа. Поэтому $G/F \in \mathrm{A}$ и $G \in \mathrm{N}\mathrm{A} \subseteq \mathrm{N}\mathrm{A}^4$. Пусть $|F| = p^2$. Тогда G/F изоморфна некоторой неприводимой подгруппе группы $GL(2,p)$. По лемме 8, $G/F \in \mathrm{A}^4$, поэтому $G \in \mathrm{N}\mathrm{A}^4$.

Рассмотрим случай, когда $|F| = 2^3$. Тогда G/F изоморфна некоторой разрешимой подгруппе группы $GL(3,2)$. Так как $O_2(G/F) = 1$, то из леммы 1 следует, что $G/F \in \mathrm{A}^2$ и $G \in \mathrm{N}\mathrm{A}^2 \subseteq \mathrm{N}\mathrm{A}^4$.

Рассмотрим случай, когда $|F| = 2^4$. Тогда G/F изоморфна некоторой разрешимой неприводимой подгруппе группы $GL(4,2)$. Из леммы 2 следует, что $G/F \in \mathrm{A}^3$ и $G \in \mathrm{N}\mathrm{A}^3 \subseteq \mathrm{N}\mathrm{A}^4$.

Рассмотрим случай, когда $|F|=2^5$. Тогда G/F изоморфна некоторой разрешимой неприводимой подгруппе группы $GL(5,2)$. Из леммы 3 следует, что $G/F \in \mathrm{A}^2$ и $G \in \mathrm{NA}^2 \subseteq \mathrm{NA}^4$.

Рассмотрим случай, когда $|F|=3^3$. Тогда G/F изоморфна некоторой разрешимой подгруппе группы $GL(3,3)$. Так как $O_3(G/F)=1$, то из леммы 4 следует, что $G \in \mathrm{NA}^4$.

Рассмотрим случай, когда $|F|=5^3$. Тогда G/F изоморфна некоторой разрешимой подгруппе группы $GL(3,5)$. Так как $O_5(G/F)=1$, то из леммы 5 следует, что $G \in \mathrm{NA}^4$.

Осталось рассмотреть случаи, когда $|F|=11^3$ или $|F|=17^3$. Тогда G/F изоморфна некоторой разрешимой неприводимой подгруппе группы $GL(3,11)$ или $GL(3,17)$ соответственно. Из леммы 6 следует, что в каждом из случаев $G \in \mathrm{NA}^3 \subseteq \mathrm{NA}^4$.

Итак, $G \in \mathrm{NA}^4$. Из леммы 7 получаем, что производная длина $G/\Phi(G)$ не превышает 5.

2. Пусть p – наибольший простой делитель порядка группы, а G_p – ее силовская p-подгруппа. Предположим, что $p>19$ и $p \notin \{31,307\}$. Используя индукцию по порядку группы, покажем, что G_p нормальна в G. Поскольку формация всех p-замкнутых подгрупп является насыщенной формацией, то по лемме 10 G – примитивная группа: $\Phi(G)=1$, $F=F(G)$ – единственная минимальная нормальная подгруппа группы G порядка q^n для некоторого $q \in \pi(G)$ и натурального n, $F=C_G(F)$, а G/F изоморфна подгруппе группы автоморфизмов F (лемма 11). Из леммы 12 следует, что порядок F равен q, q^2, 8, 16, 32, 27, 125, 1331 и 4913. При $p=q$ из п. 3 теоремы 1 получаем, что G_p нормальна в G. Поэтому считаем, что $p>q$.

Пусть $|F|=q$, тогда G/F – циклическая группа порядка, делящего $q-1$. Ввиду того, что p – наибольший простой делитель порядка группы G, этот случай исключается.

Пусть теперь $|F|=q^2$. Тогда G/F изоморфна подгруппе группы $GL(2,q)$, порядок которой равен $(q^2-q)(q^2-1)$. Поэтому, учитывая, что $p>q$, получим, что p делит $q+1$, что возможно только при $p=3$, а $q=2$. Противоречие.

Если $|F|=8$, то G/F изоморфна подгруппе группы $GL(3,2)$, порядок которой равен $2^3 \cdot 3 \cdot 7$. Теперь $p \in \{2,3,7\}$, что исключается условием.

Если $|F|=16$, то G/F изоморфна подгруппе группы $GL(4,2)$, порядок которой равен $2^6 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7$. Теперь $p \in \{2,3,5,7\}$, что исключается условием.

Если $|F|=32$, то G/F изоморфна подгруппе группы $GL(5,2)$, порядок которой равен $2^{10} \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 31$. Теперь $p \in \{2,3,5,7,31\}$, что исключается условием.

Если $|F|=27$, то G/F изоморфна подгруппе группы $GL(3,3)$, порядок которой равен $2^5 \cdot 3^3 \cdot 13$. Теперь $p \in \{2,3,13\}$, что исключается условием.

Если $|F|=125$, то G/F изоморфна подгруппе группы $GL(3,5)$, порядок которой равен $2^7\cdot 3\cdot 5\cdot 31$. Теперь $p\in\{2,3,5,31\}$, что исключается условием.

Если $|F|=1331$, то G/F изоморфна подгруппе группы $GL(3,11)$, порядок которой равен $2^5\cdot 3\cdot 5^3\cdot 7\cdot 11^3\cdot 19$. Теперь $p\in\{2,3,5,7,11,19\}$, что исключается условием.

Если $|F|=4913$, то G/F изоморфна подгруппе группы $GL(3,17)$, порядок которой равен $2^{13}\cdot 3^2\cdot 17^3\cdot 307$. Теперь $p\in\{2,3,17,307\}$, что исключается условием.

Итак, силовская подгруппа G_p нормальна в группе G для наибольшего простого $p\in\pi(G)$ при условии, что $p>19$ и $p\notin\{31,307\}$.

Теперь положим $\pi=\pi(G)\setminus\{2,3,5,7,11,13,17,19,31,307\}$ и покажем, что π-холлова подгруппа G_π нормальна в группе G. Так как по индукции $O_\pi(G)=1$ и класс всех π-замкнутых групп является насыщенной формацией, то G – примитивная группа по лемме 10. По лемме 11 можно считать, что $\Phi(G)=1$ и в G существует единственная минимальная нормальная подгруппа $F=F(G)$, которая будет элементарной абелевой p-подгруппой порядка, делящего 2^3, 3^3, 5^3, 7^2, 13^2 или 31^2. Фактор-группа G/F изоморфна подгруппе группы $GL(n,p)$ для $p=2$ и $n\le 5$, или $p\in\{3,5,11,17\}$ и $n\le 3$, или $p\in\{7,13,19,31,307\}$ и $n\le 2$. Так как $\pi(GL(n,p))\subseteq\{2,3,5,7,11,13,17,19,31,307\}$ для этих значений n и p, то G/F – π'-группа.

Итак, G_π нормальна для $\pi=\pi(G)\setminus\{2,3,5,7,11,13,17,19,31,307\}$. Если p – наибольшее из π, то G_p нормальна в G по доказанному. По индукции G_π/G_p дисперсивна по Оре, откуда следует, что подгруппа G_π дисперсивна по Оре. Теорема 2 доказана.

Следствие. Пусть разрешимая группа G обладает нормальным рядом таким, что силовские p-подгруппы его факторов являются либо бициклическими, либо порядка p^3 для каждого $p\in\{2,3,5\}$. Если G A_4-свободна, то производная длина $G/\Phi(G)$ не превышает 4.

Доказательство. Используя лемму 9 в доказательстве утв. 1 теоремы 2, получим, что $G/F\in \mathrm{A}^3$. По лемме 7, производная длина $G/\Phi(G)$ не превышает 4.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Монахов, В.С. О максимальных и силовских подгруппах конечных разрешимых групп / В.С. Монахов, Е.Е. Грибовская // Математические заметки. – 2001. – Т. 70, № 4. – С. 603–612.

2. Monakhov, V.S. On a Finite Group Having a Normal Series Whose Factors Have Bicyclic Sylow Subgroups / V.S. Monakhov, A.A. Trofimuk // Communications in Algebra. – Vol. 39, № 9. – P. 3178–3186.

3. Монахов, В.С. Конечные разрешимые группы, силовские p-подгруппы которых либо бициклические, либо имеют p^3 / В.С. Монахов, А.А. Трофимук // Фундаментальная и прикладная математика. – 2009. – Т. 15, № 2. – С. 121–131.

4. The GAP Group, GAP - Groups, Algorithms, and Programming, Version 4.4.12 [Электронный ресурс]. – 2009. – Режим доступа: http://www.gap-system.org.

5. Huppert, B. Endliche Gruppen I / B. Huppert // Berlin, Heidelberg, New York. – 1967.

6. Монахов, В.С. Введение в теорию конечных групп и их классов / В.С. Монахов // Минск : Вышэйшая школа, 2006.

7. Шеметков, Л.А. Формации конечных групп / Л.А. Шеметков. – М : Наука, 1978. –272 с.

8. Монахов, В.С. О конечных разрешимых группах фиксированного ранга / В.С. Монахов, А.А. Трофимук // Сибирский математический журнал. – 2011. – Т. 52, № 5. – С. 1123–1137.

9. Gaschutz, W. Lectures of subgroups of Sylow type in finite soluble groups // Notes on pure mathematics. Canberra, Australian National University. – 1979. – № 11. – 100 p.

10. Монахов, В.С. О разрешимых нормальных подгруппах конечных групп / В.С. Монахов, М.В. Селькин, Е.Е. Грибовская // Украинский математический журнал. – 2002. – Т. 54, № 7. – С. 940–950.

***A.A. Trofimuk.* About Finite Groups with Small Orders of Nonbicyclic Sylow Subgroups of Factors**

The structure of solvable group with bicyclic Sylow subgroups or Sylow subgroups of order p^3 for all $p \in \pi(G)$ in factors of a normal series is studied. The following statements hold: the nilpotent length of G is at most 4, the derived length $G/\Phi(G)$ is at most 6, $l_2(G) \le 2$, $l_3(G) \le 2$ and $l_p(G) \le 1$ for all prime $p > 3$. As it appeared that if orders of nonbicyclic Sylow subgroups in factors to limit to cubes of small prime numbers $p \in \{2,3,5,11,17\}$, either 16, or 32, it is possible to keep the top estimation of derivate length $G/\Phi(G)$ is equal to 5. Here $l_p(G)$ is the p-length of G.

Рукапіс паступіў у рэдкалегію 28.03.2012