УДК 539.12:530.145

П.П. Андрусевич, В.И. Стражев

ВНУТРЕННЯЯ СИММЕТРИЯ СИСТЕМЫ ДВУХ УРАВНЕНИЙ ДИРАКА В ПРОСТРАНСТВЕ РАЗМЕРНОСТИ 2+1

Продолжено начатое в предыдущих работах авторов исследование внутренней симметрии дираковских полей в пространстве размерности 2+1. В рамках вещественного описания рассмотрена система двух уравнений Дирака для случаев $m=0$ и $m\neq 0$. Показано, что наиболее полная группа внутренней симметрии указанной системы при $m=0$ содержит 40, а при $m\neq 0$ –20 независимых параметров. Установленные симметрии существенно шире симметрий, которые сопоставляются в литературе 8-компонентному дираковскому полю в пространстве 2+1, и содержат последние в качестве подгрупп.

Введение

В работах [1; 2] исследовалась внутренняя симметрия уравнения Дирака для массивной и безмассовой частиц в пространстве 2+1. При этом использовался метод, основанный на приведении рассматриваемого уравнения к вещественной форме [3; 4]. Было установлено наличие более широких групп симметрии по сравнению с теми, которые обычно обсуждаются в работах других авторов на данную тему [5; 6].

Интерес к этой проблеме обусловлен возможностью описания решеточной структуры графена методами релятивистской квантовой механики [5–7]. Кристаллическая решетка графена представляет собой плоскость, состоящую из шестиугольных ячеек, то есть является двумерной гексагональной структурой. В элементарной ячейке находятся два атома, которые образуют в кристалле две независимые подрешетки. В низкоэнергетическом пределе для электронов в графене имеет место линейный закон дисперсии

$$E=\hbar v_F k\,, \tag{1}$$

где v_F – скорость Ферми (экспериментальное значение $v_F\approx 10^6$ м/с), k – модуль волнового вектора в двумерном пространстве. Как известно, такого рода энергией обладает фотон. Поэтому реальным электронам и дыркам в графене можно сопоставить квазичастицы с положительной и отрицательной энергией $E=\pm\hbar v_F k$ и нулевой эффективной массой. Если учесть степень свободы, связанную с принадлежностью электронов и дырок к определенной подрешетке, и не принимать во внимание спин (что обычно делается в отсутствие магнитных полей), то получается, что указанные квазичастицы должны описываться четырехкомпонентной волновой функцией. А поскольку электроны и дырки являются фермионами, естественно предположить, что данная волновая функция должна подчиняться уравнению Дирака в пространстве 2+1 с нулевой массой частиц и античастиц, чем и обусловлена постановка задачи в работах [1; 2].

Однако при наличии достаточно сильных магнитных полей необходимо учитывать спин, так что число компонент волновой функции увеличивается до восьми. С такой функцией обычно связывают систему из двух уравнений Дирака [5; 6]. В настоящей работе подход, используемый в [1–4], применяется для исследования внутренней симметрии системы из двух уравнений Дирака в пространстве размерности 2+1.

Вещественная форма исходных уравнений

Рассмотрим систему двух безмассовых уравнений Дирака (уравнений для безмассового нейтрино) в пространстве 2+1

$$\begin{aligned} &\gamma_\mu \partial_\mu \psi_1 = 0, \\ &\gamma_\mu \partial_\mu \psi_2 = 0, \end{aligned} \tag{1}$$

где индекс μ пробегает значения 0,1,2. Метрику пространства $g_{\mu\nu}$ и матрицы γ_μ выберем в виде:

$$g_{\mu\nu} = diag(1,1,1)\,, \tag{2}$$

$$\gamma_0 = \sigma_3 \otimes I_2, \gamma_1 = \sigma_2 \otimes \sigma_1, \gamma_2 = \sigma_2 \otimes \sigma_2 \tag{3}$$

(σ_i – матрицы Паули). Взяв от (1) комплексное сопряжение и учитывая мнимый характер временной координаты x_0, для сопряженных функций ψ_1^*, ψ_2^* получим уравнения:

$$\begin{aligned} &\left(-\gamma_0\partial_0 - \gamma_1\partial_1 + \gamma_2\partial_2\right)\psi_1^* = 0, \\ &\left(-\gamma_0\partial_0 - \gamma_1\partial_1 + \gamma_2\partial_2\right)\psi_2^* = 0. \end{aligned} \tag{4}$$

Рассматривая системы (1) и (4) совместно, придем к 16-компонентной системе, которую можно представить в универсальной матричной форме:

$$\Gamma_\mu \partial_\mu \Psi = 0\,. \tag{5}$$

При выборе волновой функции Ψ в виде

$$\Psi = (\psi_1, \psi_2, \psi_1^*, \psi_2^*) - \text{столбец} \tag{6}$$

для матриц Γ_μ в (5) будем иметь выражения:

$$\Gamma_0 = \gamma_0 \otimes \gamma_0\,,\;\; \Gamma_1 = \gamma_0 \otimes \gamma_1\,,\;\; \Gamma_2 = I_4 \otimes \gamma_2\,. \tag{7}$$

Для дальнейшего удобно перейти к представлению, в котором вещественные и мнимые компоненты волновой функции разделены:

$$\begin{aligned} &\Psi = (\psi_1^r, \psi_2^r, \psi_1^i, \psi_2^i) - \text{столбец}, \\ &\psi_{1,2}^r = \frac{1}{\sqrt{2}}(\psi_{1,2} + \psi_{1,2}^*), \quad \psi_{1,2}^i = \frac{1}{\sqrt{2}}(\psi_{1,2} - \psi_{1,2}^*). \end{aligned} \tag{8}$$

Указанный переход от представления (6) осуществляется с помощью унитарного преобразования базиса в пространстве состояний:

$$u = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} I_8 & I_8 \\ I_8 & -I_8 \end{pmatrix},\; u^{-1} = u^+ = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} I_8 & I_8 \\ I_8 & -I_8 \end{pmatrix}. \tag{9}$$

Матрицы Γ_μ при этом принимают вид

$$\Gamma_0 = \gamma_5 \otimes \gamma_0\,,\;\; \Gamma_1 = \gamma_5 \otimes \gamma_1\,,\;\; \Gamma_2 = I_4 \otimes \gamma_2\,, \tag{10}$$

где

$$\gamma_5 = \gamma_0\gamma_1\gamma_2\gamma_3\,,\; \gamma_3 = \sigma_2 \otimes \sigma_3\,. \tag{11}$$

Лагранжиан уравнения (5)

$$L = -\bar{\Psi}\Gamma_\mu\partial_\mu\Psi = -\Psi^+\eta\Gamma_\mu\partial_\mu\Psi \tag{12}$$

эквивалентен лагранжиану исходной системы (1)

$$L = -\bar{\psi}_1\gamma_\mu\partial_\mu\psi_1 - \bar{\psi}_2\gamma_\mu\partial_\mu\psi_2 = -\psi_1^+\gamma_0\gamma_\mu\partial_\mu\psi_1 - \psi_2^+\gamma_0\gamma_\mu\partial_\mu\psi_2 \tag{13}$$

при выборе матрицы билинейной формы η в (12) в виде

$$\eta = I_4 \otimes \gamma_0\,, \tag{14}$$

который инвариантен относительно преобразования (9).

Уравнение (5) с волновой функцией (8), матрицами Γ_μ (10) и лагранжианом (12) будем называть вещественной формой исходной системы (1), поскольку соответствующая (5) система 16 уравнений, записанных в явном виде, является вещественной. Эту форму мы и будем использовать при установлении группы внутренней симметрии лагранжевой формулировки системы (1).

Внутренняя симметрия

Для решения поставленной задачи будем использовать также фермионный базис, в котором диракоподобные матрицы Γ_μ, по определению, имеют структуру:

$$\Gamma_\mu = I_4 \otimes \gamma_\mu . \tag{15}$$

Переход от представления (8) в фермионный базис может быть осуществлен посредством унитарного преобразования:

$$\begin{aligned} A &= \frac{1}{2}[I_4 \otimes (I_4 + i\gamma_2) + \gamma_5 \otimes (I_4 - i\gamma_2)], \\ A^{-1} = A^{+} &= \frac{1}{2}[I_4 \otimes (I_4 - i\gamma_2) + \gamma_5 \otimes (I_4 + i\gamma_2)]. \end{aligned} \tag{16}$$

Матрица билинейной формы η при этом принимает вид:

$$\eta = \gamma_5 \otimes \gamma_0 . \tag{17}$$

Инвариантность уравнения (5) с матрицами Γ_μ (15) относительно преобразований внутренней симметрии

$$\Psi'(x_\mu) = Q\Psi(x_\mu) \tag{18}$$

обеспечивается матрицами четырех типов

$$\begin{aligned} &Q_1 = q^{(1)} \otimes I_4, \ Q_2 = q^{(2)} \otimes i\gamma_3\gamma_5, \\ &Q_3 = q^{(3)} \otimes \gamma_3, \ Q_4 = q^{(4)} \otimes \gamma_5, \end{aligned} \tag{19}$$

где $q^{(\alpha)}$ $(\alpha = 1 \div 4)$ – комплексные матрицы 4x4, на которые накладываются лишь ограничения, связанные с сохранением вещественного характера уравнения (5). Пр этом матрицы Q_1, Q_2 удовлетворяют условиям коммутации, а матрицы Q_3, Q_4 – условиям антикоммутации с матрицами Γ_μ:

$$[Q_1, \Gamma_\mu]_- = [Q_2, \Gamma_\mu]_- = 0 , \tag{20}$$

$$[Q_3, \Gamma_\mu]_+ = [Q_4, \Gamma_\mu]_+ = 0 . \tag{21}$$

Параметризуя четырехмерные матрицы $q^{(\alpha)}$ посредством базисных элементов e_N $(N = 1 \div 16)$

$$\begin{aligned} &e_1 = I_4, \ e_2 = \gamma_0, \ e_3 = \gamma_1, \ e_4 = \gamma_2, \ e_5 = \gamma_3, \ e_6 = i\gamma_0\gamma_3, \\ &e_7 = i\gamma_1\gamma_3, \ e_8 = i\gamma_2\gamma_3, \ e_9 = \gamma_5, \ e_{10} = i\gamma_0\gamma_5, \ e_{11} = i\gamma_1\gamma_5, \\ &e_{12} = i\gamma_2\gamma_5, \ e_{13} = i\gamma_3\gamma_5, \ e_{14} = i\gamma_0\gamma_1, \ e_{15} = i\gamma_1\gamma_2, \ e_{16} = i\gamma_2\gamma_0, \end{aligned} \tag{22}$$

получим 64 базисных оператора преобразований внутренней симметрии уравнения (5), имеющих в фермионном базисе вид:

$$J^N = e_N \otimes I_4, \ L^N = e_N \otimes i\gamma_3\gamma_5, \ K^N = e_N \otimes \gamma_3, \ I^N = e_N \otimes \gamma_5 \tag{23}$$

(множитель i здесь вводится для обеспечения эрмитовости операторов (22), (23)).

Возвращаясь теперь обратно в базис (8), получим для операторов (23) выражения:

$$\begin{aligned}&J^1=I_{16},\ J^2=-i\gamma_0\gamma_5\otimes\gamma_2,\ J^3=-i\gamma_1\gamma_5\otimes\gamma_2,\ J^4=-i\gamma_2\gamma_5\otimes\gamma_2,\\&J^5=-i\gamma_3\gamma_5\otimes\gamma_2,\ J^6=i\gamma_0\gamma_3\otimes I_4,\ J^7=i\gamma_1\gamma_3\otimes I_4,\ J^8=i\gamma_2\gamma_3\otimes I_4,\\&J^9=\gamma_5\otimes I_4,\ J^{10}=\gamma_0\otimes\gamma_2,\ J^{11}=\gamma_1\otimes\gamma_2,\ J^{12}=\gamma_2\otimes\gamma_2,\\&J^{13}=\gamma_3\otimes\gamma_2,\ J^{14}=i\gamma_0\gamma_1\otimes I_4,\ J^{15}=i\gamma_1\gamma_2\otimes I_4,\ J^{16}=i\gamma_2\gamma_0\otimes I_4;\end{aligned}\tag{24}$$

$$\begin{aligned}&L^1=I_4\otimes i\gamma_3\gamma_5,\ L^2=\gamma_0\gamma_5\otimes\gamma_1\gamma_0,\ L^3=\gamma_1\gamma_5\otimes\gamma_1\gamma_0,\ L^4=\gamma_2\gamma_5\otimes\gamma_1\gamma_0,\\&L^5=\gamma_3\gamma_5\otimes\gamma_1\gamma_0,\ L^6=-\gamma_0\gamma_3\otimes\gamma_3\gamma_5,\ L^7=-\gamma_1\gamma_3\otimes\gamma_3\gamma_5,\ L^8=-\gamma_2\gamma_3\otimes\gamma_3\gamma_5,\\&L^9=\gamma_5\otimes i\gamma_3\gamma_5,\ L^{10}=i\gamma_0\otimes\gamma_1\gamma_0,\ L^{11}=i\gamma_1\otimes\gamma_1\gamma_0,\ L^{12}=i\gamma_2\otimes\gamma_1\gamma_0,\\&L^{13}=i\gamma_3\otimes\gamma_1\gamma_0,\ L^{14}=-\gamma_0\gamma_1\otimes\gamma_1\gamma_0,\ L^{15}=-\gamma_1\gamma_2\otimes\gamma_3\gamma_5,\ L^{16}=-\gamma_2\gamma_0\otimes\gamma_3\gamma_5;\end{aligned}\tag{25}$$

$$\begin{aligned}&K^1=\gamma_5\otimes\gamma_3,\ K^2=-i\gamma_0\otimes\gamma_2\gamma_3,\ K^3=-i\gamma_1\otimes\gamma_2\gamma_3,\ K^4=-i\gamma_2\otimes\gamma_2\gamma_3,\\&K^5=-i\gamma_3\otimes\gamma_2\gamma_3,\ K^6=-i\gamma_1\gamma_2\otimes\gamma_3,\ K^7=-i\gamma_2\gamma_0\otimes\gamma_3,\ K^8=-i\gamma_0\gamma_1\otimes\gamma_3,\\&K^9=I_4\otimes\gamma_3,\ K^{10}=\gamma_0\gamma_5\otimes\gamma_2\gamma_3,\ K^{11}=\gamma_1\gamma_5\otimes\gamma_2\gamma_3,\ K^{12}=\gamma_2\gamma_5\otimes\gamma_2\gamma_3,\\&K^{13}=\gamma_3\gamma_5\otimes\gamma_2\gamma_3,\ K^{14}=-i\gamma_2\gamma_3\otimes\gamma_3,\ K^{15}=-i\gamma_0\gamma_3\otimes\gamma_3,\ K^{16}=-i\gamma_1\gamma_3\otimes\gamma_3;\end{aligned}\tag{26}$$

$$\begin{aligned}&I^1=\gamma_5\otimes\gamma_5,\ I^2=-i\gamma_0\otimes\gamma_2\gamma_5,\ I^3=-i\gamma_1\otimes\gamma_2\gamma_5,\ I^4=-i\gamma_2\otimes\gamma_2\gamma_5,\\&I^5=-i\gamma_3\otimes\gamma_2\gamma_5,\ I^6=-i\gamma_1\gamma_2\otimes\gamma_5,\ I^7=-i\gamma_2\gamma_0\otimes\gamma_5,\ I^8=-i\gamma_0\gamma_1\otimes\gamma_5,\\&I^9=I_4\otimes\gamma_5,\ I^{10}=\gamma_0\gamma_5\otimes\gamma_2\gamma_5,\ I^{11}=\gamma_1\gamma_5\otimes\gamma_2\gamma_5,\ I^{12}=\gamma_2\gamma_5\otimes\gamma_2\gamma_5,\\&I^{13}=\gamma_3\gamma_5\otimes\gamma_2\gamma_5,\ I^{14}=-i\gamma_2\gamma_3\otimes\gamma_5,\ I^{15}=-i\gamma_0\gamma_3\otimes\gamma_5,\ I^{16}=-i\gamma_1\gamma_3\otimes\gamma_5.\end{aligned}\tag{27}$$

Условие сохранения вещественного характера уравнения (5) (вещественности поля) относительно матричных преобразований (18), задаваемых базисными операторами (24)–(27), накладывает на соответствующие параметры ($\omega_N\leftrightarrow J^N$, $\theta_N\leftrightarrow L^N$, $\Lambda_N\leftrightarrow K^N$, $\Omega_N\leftrightarrow I^N$) следующие ограничения:

$$\begin{aligned}&\omega_1,\omega_2,\omega_3,\omega_5,\omega_8,\omega_{10},\omega_{11},\omega_{13},\omega_{15},\omega_{16},\\&\theta_1,\theta_2,\theta_3,\theta_5,\theta_8,\theta_{10},\theta_{11},\theta_{13},\theta_{15},\theta_{16},\\&\Lambda_1,\Lambda_2,\Lambda_3,\Lambda_5,\Lambda_8,\Lambda_{10},\Lambda_{11},\Lambda_{13},\Lambda_{15},\Lambda_{16},\\&\Omega_4,\Omega_6,\Omega_7,\Omega_9,\Omega_{12},\Omega_{14}-\text{вещественные};\\&\omega_4,\omega_6,\omega_7,\omega_9,\omega_{12},\omega_{14},\theta_4,\theta_6,\theta_7,\theta_9,\theta_{12},\theta_{14},\\&\Lambda_4,\Lambda_6,\Lambda_7,\Lambda_9,\Lambda_{12},\Lambda_{14},\Omega_1,\Omega_2,\Omega_3,\Omega_5,\Omega_8,\\&\Omega_{10},\Omega_{11},\Omega_{13},\Omega_{15},\Omega_{16}-\text{мнимые}.\end{aligned}\tag{28}$$

Таким образом, преобразования внутренней симметрии исследуемой системы двух безмассовых уравнений Дирака в пространстве 2+1 описываются унитарной 64-параметрической группой, задаваемой эрмитовскими базисными операторами (24)–(27), которым соответствует 36 вещественных и 28 мнимых параметров (28).

Требование инвариантности лагранжиана (12) относительно преобразований (18) накладывает на матрицу Q ограничение

$$Q^{+}\eta\Gamma_\mu Q=\eta\Gamma_\mu,\tag{29}$$

которое для матриц Q_1, Q_2 (Q_3, Q_4), коммутирующих (антикоммутирующих) с Γ_μ, принимает соответственно вид:

$$Q_1^{+}\eta Q_1=\eta,\ Q_2^{+}\eta Q_2=\eta,\tag{30}$$

$$Q_3^+\eta Q_3 = -\eta,\ Q_4^+\eta Q_4 = -\eta\,, \tag{31}$$

Каждое из соотношений (30), (31) накладывает по 6 связей на параметры этих преобразований:

$$\begin{aligned}
&1-\omega_1^2+\omega_2^2+\omega_3^2+\omega_4^2+\omega_5^2-\omega_6^2-\omega_7^2-\omega_8^2-\omega_9^2+\omega_{10}^2+\omega_{11}^2+\omega_{12}^2+\\
&+\omega_{13}^2-\omega_{14}^2-\omega_{15}^2-\omega_{16}^2=0,\\
&-\omega_3\omega_4+\omega_5\omega_{10}+\omega_6\omega_9-\omega_7\omega_8-\omega_{11}\omega_{12}-\omega_2\omega_{13}-\omega_1\omega_{15}+\omega_{14}\omega_{16}=0,\\
&\omega_3\omega_5-\omega_4\omega_{10}-\omega_6\omega_{14}-\omega_1\omega_7-\omega_9\omega_{16}+\omega_2\omega_{12}+\omega_{11}\omega_{13}-\omega_{15}\omega_8=0,\\
&-\omega_3\omega_9-\omega_6\omega_4-\omega_{10}\omega_{14}-\omega_1\omega_{11}-\omega_2\omega_8+\omega_{13}\omega_7+\omega_{12}\omega_{15}+\omega_{16}\omega_5=0,\\
&\omega_6\omega_{12}-\omega_1\omega_3-\omega_2\omega_{14}-\omega_{13}\omega_6+\omega_4\omega_{15}+\omega_5\omega_7+\omega_8\omega_{10}+\omega_{11}\omega_9=0,\\
&-\omega_{16}\omega_{15}-\omega_7\omega_6+\omega_9\omega_8+\omega_{10}\omega_{11}-\omega_5\omega_{12}+\omega_1\omega_{14}+\omega_2\omega_3+\omega_4\omega_{13}=0;
\end{aligned} \tag{32а}$$

$$\begin{aligned}
&1-\theta_1^2+\theta_2^2+\theta_3^2+\theta_4^2+\theta_5^2-\theta_6^2-\theta_7^2-\theta_8^2-\theta_9^2+\theta_{10}^2+\theta_{11}^2+\\
&+\theta_{12}^2+\theta_{13}^2-\theta_{14}^2-\theta_{15}^2-\theta_{16}^2=0,\\
&-\theta_7\theta_8-\theta_{11}\theta_{12}+\theta_2\theta_{13}-\theta_3\theta_4+\theta_{14}\theta_{16}-\theta_5\theta_{10}-\theta_6\theta_9+\theta_1\theta_{15}=0,\\
&-\theta_{14}\theta_{15}+\theta_2\theta_4+\theta_{10}\theta_{12}+\theta_{13}\theta_3-\theta_9\theta_7-\theta_5\theta_{11}+\theta_6\theta_8+\theta_{16}\theta_1=0,\\
&\theta_5\theta_8+\theta_{16}\theta_2+\theta_{14}\theta_{13}-\theta_3\theta_{15}+\theta_4\theta_1-\theta_6\theta_{11}-\theta_9\theta_{12}+\theta_{10}\theta_7=0,\\
&\theta_1\theta_8-\theta_{10}\theta_3-\theta_9\theta_{14}-\theta_6\theta_{16}+\theta_5\theta_4+\theta_{15}\theta_7+\theta_{13}\theta_{12}+\theta_2\theta_{11}=0,\\
&\theta_1\theta_{12}-\theta_2\theta_7+\theta_{10}\theta_{16}+\theta_9\theta_4+\theta_6\theta_3-\theta_5\theta_{14}-\theta_{15}\theta_{11}+\theta_8\theta_{13}=0;
\end{aligned} \tag{32б}$$

$$\begin{aligned}
&1-\Lambda_1^2+\Lambda_2^2-\Lambda_3^2-\Lambda_4^2+\Lambda_5^2-\Lambda_6^2+\Lambda_7^2+\Lambda_8^2-\Lambda_9^2+\Lambda_{10}^2-\Lambda_{11}^2-\Lambda_{12}^2+\\
&+\Lambda_{13}^2+\Lambda_{14}^2-\Lambda_{15}^2+\Lambda_{16}^2=0,\\
&\Lambda_7\Lambda_8-\Lambda_{14}\Lambda_{16}+\Lambda_3\Lambda_4+\Lambda_6\Lambda_9+\Lambda_5\Lambda_{10}-\Lambda_2\Lambda_{13}+\Lambda_{11}\Lambda_{12}-\Lambda_1\Lambda_{15}=0,\\
&-\Lambda_{10}\Lambda_{16}-\Lambda_9\Lambda_4-\Lambda_6\Lambda_3+\Lambda_{15}\Lambda_4+\Lambda_{11}\Lambda_{15}-\Lambda_{13}\Lambda_8+\Lambda_2\Lambda_7-\Lambda_1\Lambda_{12}=0,\\
&\Lambda_{10}\Lambda_3+\Lambda_9\Lambda_{14}+\Lambda_6\Lambda_{16}-\Lambda_5\Lambda_4-\Lambda_7\Lambda_{15}-\Lambda_{13}\Lambda_{12}-\Lambda_2\Lambda_{11}-\Lambda_1\Lambda_8=0,\\
&-\Lambda_6\Lambda_8+\Lambda_{14}\Lambda_{15}-\Lambda_{10}\Lambda_{12}-\Lambda_3\Lambda_{13}+\Lambda_5\Lambda_{11}-\Lambda_{16}\Lambda_1-\Lambda_4\Lambda_2+\Lambda_9\Lambda_7=0,\\
&\Lambda_9\Lambda_{12}-\Lambda_{10}\Lambda_7+\Lambda_6\Lambda_{11}-\Lambda_5\Lambda_8-\Lambda_{16}\Lambda_2-\Lambda_{14}\Lambda_{13}+\Lambda_3\Lambda_{15}-\Lambda_4\Lambda_1=0;
\end{aligned} \tag{32в}$$

$$\begin{aligned}
&1-\Omega_1^2+\Omega_2^2+\Omega_3^2+\Omega_4^2+\Omega_5^2-\Omega_6^2-\Omega_7^2-\Omega_8^2-\Omega_9^2+\Omega_{10}^2+\Omega_{11}^2+\Omega_{12}^2+\\
&+\Omega_{13}^2-\Omega_{14}^2-\Omega_{15}^2-\Omega_{16}^2=0,\\
&\Omega_{11}\Omega_{12}+\Omega_7\Omega_8-\Omega_{14}\Omega_{16}+\Omega_5\Omega_{10}+\Omega_9\Omega_6+\Omega_3\Omega_4-\Omega_2\Omega_{13}-\Omega_1\Omega_{15}=0,\\
&\Omega_6\Omega_7-\Omega_{10}\Omega_{11}-\Omega_3\Omega_2+\Omega_9\Omega_8+\Omega_{13}\Omega_4-\Omega_5\Omega_{12}+\Omega_{16}\Omega_{15}+\Omega_1\Omega_{14}=0,\\
&\Omega_6\Omega_{12}-\Omega_{13}\Omega_{16}-\Omega_{15}\Omega_4-\Omega_1\Omega_3+\Omega_8\Omega_{10}-\Omega_9\Omega_{11}+\Omega_2\Omega_{14}-\Omega_5\Omega_7=0,\\
&-\Omega_{10}\Omega_4+\Omega_6\Omega_{14}-\Omega_9\Omega_{16}-\Omega_1\Omega_7+\Omega_2\Omega_{12}-\Omega_5\Omega_3+\Omega_8\Omega_{15}-\Omega_{11}\Omega_{13}=0,\\
&\Omega_{14}\Omega_{10}+\Omega_9\Omega_3-\Omega_6\Omega_4-\Omega_{12}\Omega_{15}-\Omega_1\Omega_{11}-\Omega_2\Omega_8-\Omega_7\Omega_{13}+\Omega_5\Omega_{16}=0.
\end{aligned} \tag{32г}$$

В результате получаем 40-параметричекую группу матричных преобразований, задаваемую 64 базисными операторами (24)–(27), на параметры которых (28) накладывается 24 условия (32).

Для того чтобы выделить из указанных преобразований те, которые представимы в форме Ли, надо записать соотношения (29) для бесконечно малых преобразований. В результате получим условия

$$(\omega_N J^N)^+ \eta = -\omega_N \eta J^N,\ (\theta_N L^N)^+ \eta = -\theta_N \eta L^N, \tag{33}$$

$$(\Lambda_N K^N)^+ \eta = \Lambda_N \eta K^N,\ (\Omega_N I^N)^+ \eta = \Omega_N \eta I^N, \tag{34}$$

в которых базисные операторы J^N, L^N, K^N, I^N выступают в качестве генераторов. Непосредственная проверка показывает, что условия (33), (34) выполняются для 36 однопараметрических преобразований, задаваемых генераторами

$$\begin{gathered} J^2, J^3, J^5, J^6, J^7, J^9, J^{10}, J^{11}, J^{13}, J^{14}, L^2, L^3, L^5, L^6, \\ L^7, L^9, L^{10}, L^{11}, L^{13}, L^{14}, K^2, K^3, K^5, K^6, K^7, K^9, K^{10}, K^{11}, \\ K^{13}, K^{14}, I^1, I^4, I^8, I^{12}, I^{15}, I^{16}, \end{gathered} \tag{35}$$

которым соответствуют 20 вещественных ($\omega_2, \omega_3, \omega_5, \omega_{10}, \omega_{11}, \omega_{13}, \theta_2, \theta_3, \theta_5, \theta_{10}, \theta_{11}, \theta_{13}$, $\Lambda_2, \Lambda_3, \Lambda_5, \Lambda_{10}, \Lambda_{11}, \Lambda_{13}, \Omega_4, \Omega_{12}$) и 16 мнимых ($\omega_6, \omega_7, \omega_9, \omega_{14}, \theta_6, \theta_7, \theta_9, \theta_{14}$, $\Lambda_6, \Lambda_7, \Lambda_9$, $\Lambda_{14}, \Omega_1, \Omega_8, \Omega_{15}, \Omega_{16}$) параметров. Указанные преобразования образуют группу Ли, изоморфную группе SO(5,4).

При переходе в пространство размерности 3+1 из рассматриваемых преобразований надо исключить те, что связаны с базисными операторами L^N, K^N. Тогда получим 20-параметрическую группу матричных преобразований внутренней симметрии системы двух безмассовых уравнений Дирака, определяемую базисными операторами (24), (27) при наложении на соответствующие параметры 12 условий. Преобразования, представимые в форме Ли, задаются 16 генераторами:

$$J^2, J^3, J^5, J^6, J^7, J^9, J^{10}, J^{11}, J^{13}, J^{14}, I^1, I^4, I^8, I^{12}, I^{15}, I^{16}. \tag{36}$$

При этом генератор I^1 коммутирует со всеми остальными в наборе (36), которые образуют 15-параметрическую унитарную группу с 8 вещественными ($\omega_2, \omega_3, \omega_5, \omega_{10}, \omega_{11}, \omega_{13}, \Omega_4, \Omega_{12}$) и 7 мнимыми ($\omega_6, \omega_7, \omega_9, \omega_{14}$, $\Omega_8, \Omega_{15}, \Omega_{16}$) параметрвми, изоморфную группе SO(4,2).

Полную группу внутренней симметрии лагранжиана системы двух уравнений Дирака с $m \neq 0$ в пространстве 2+1 можно получить из вышеустановленной 40-параметрической группы симметрии для безмассовых уравнений путем исключения преобразований, связанных с генераторами K^N, I^N, которые антикоммутируют с матрицами Γ_μ. В результате получим 20-параметрическую группу преобразований, представимых в форме Ли и задаваемых генераторами

$$J^2, J^3, J^5, J^6, J^7, J^9, J^{10}, J^{11}, J^{13}, J^{14}, L^2, L^3, L^5, L^6, L^7, L^9, L^{10}, L^{11}, L^{13}, L^{14} \tag{37}$$

с 12 вещественными ($\omega_2, \omega_3, \omega_5, \omega_{10}, \omega_{11}, \omega_{13}, \theta_2, \theta_3, \theta_5, \theta_{10}, \theta_{11}, \theta_{13},$) и 8 мнимыми ($\omega_6, \omega_7, \omega_9, \omega_{14}, \theta_6, \theta_7, \theta_9, \theta_{14}$) параметрами.

Заключение

Итак, наиболее полная группа матричных преобразований внутренней симметрии системы двух безмассовых уравнений Дирака в пространстве размерности 2+1 содержит 40 независимых параметров. При этом непрерывные преобразования, представимые в форме Ли, описываются 36-параметрической группой, изоморфной группе SO(5,4). Симметрия системы двух уравнений Дирака с $m \neq 0$ описывается 20-параметрической группой. Установленные симметрии значительно шире U(4) –

U(2)xU(2)-симметрий, которые обычно сопоставляются указанным системам уравнений в работах других авторов на данную тему [5 – 7].

Полученные результаты являются новыми и могут оказаться полезными при описании методами релятивистской квантовой механики свойств графена, таких, например, как парадокс Клейна, квантовый эффект Холла и других эффектов, характерных для двумерного электронного газа.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Плетюхов, В.А. Внутренняя симметрия уравнения Дирака в пространстве 2+1 / В.А. Плетюхов // Веснік Брэсцкага ўн-та. Сер. 4 «Фізіка. Матэматыка». – 2011. – № 1. – С. 30–34.

2. Андрусевич, П.П. О внутренней симметрии уравнения Дирака в графене / П.П. Андрусевич, В.А. Плетюхов, В.И. Стражев // Проблемы физики, математики и техники. – 2011. – № 2. – С. 11–14.

3. Плетюхов, В.А. Вещественное поле Дирака-Кэлера и дираковские частицы / В.А. Плетюхов, В.И. Стражев // Вестник БГУ, сер. 1. 2009. № 2. С. 3–7.

4. Андрусевич, П.П. О внутренней симметрии дираковских полей (ч. 1) / П.П. Андрусевич, В.А. Плетюхов, В.И. Стражев // Веснік Брэсцкага ўн-та. Сер. 4 «Фізіка. Матэматыка». – 2010. – № 1. – С. 5–10.

5. Gorbar, E.V. Magnetic field driven metal-insulator phase transition in planar systems / E.V. Gorbar [et all.] // arXiv: cond-mat/0202422v3 26 Aug 2002.

6. Gusynin, V.P. AC Conductivity of grapheme: from tight-binding model to 2+1-dimensional quantum electrodynamics / V.P. Gusynin, S.G. Sharapov, J.P. Carbotte // arXiv: 0706. 3016v2 [cond-mat. mess-hall] 27 Nov 2007.

7. Bashir, A. Fermions in odd space-time dimensions: back to basics / A. Bashir, Ma. De J.A. Galicia // arXiv: hep-ph/0502089v1 9 Feb 2005.

***P.P. Andrusevich, V.I. Strazhev.* Internal Symmetry of Two Dirac Equations in the Space of Dimension 2 +1**

In the present paper we continue our investigation of the internal symmetry of the Dirac fields in 2+1 dimensional space. In the framework of the real description, a system of two Dirac equations for cases of masses m=0 and $m\neq0$ is considered. It is shown that the most complete group of the internal symmetry of such a system contains forty and twenty independent parameters for m=0 and $m\neq0$, respectively. These symmetries are more complete than ones usually discussed in the literature.

Рукапіс паступіў у рэдкалегію 30.09.2011 г.