УДК 517.923

Е.А. Натынчик, Т.И. Шило

УРАВНЕНИЕ ВТОРОГО ПОРЯДКА С НЕПОДВИЖНЫМИ КРИТИЧЕСКИМИ ОСОБЫМИ ТОЧКАМИ

В настоящей работе найдены необходимые условия принадлежности специального уравнения второго порядка к классу P-типа, т.е. найдены необходимые условия отсутствия подвижных многозначных особых точек в решениях данного уравнения. Эта проблема не нова, однако для данного уравнения эта задача ещё не была рассмотрена. Предлагаемый метод решения задачи по выделению уравнений с неподвижными критическими особыми точками несколько отличается от методов, которые применялись ранее для решения такого рода задач. Наряду с методом малого параметра Пенлеве в этой заметке рассмотрен метод, основанный на редукции от нелинейных уравнений второго порядка к системе двух уравнений Брио и Буке. Найденные условия принадлежности уравнения второго порядка к P-типу выписаны в явном виде, которые легко проверяются на практике.

Еще Пенлеве и его ученики Гарнье, Гамбье и другие выделили 50 канонических уравнений вида

$$w'' = A_0(w,z)w'^2 + A_1(w,z)w' + A_2(w,z)w, \qquad (1)$$

где A_0, A_1, A_2 – рациональные дроби по w и голоморфные по z, для которых выполнялись необходимые условия принадлежности к P-типу.

Русский математик Голубев [1] упростил и существенно дополнил рассуждения Гамбье и Пенлеве. Однако подробное описание выделения уравнений вида (1) с неподвижными критическими особыми точками сделано лишь для случаев, когда коэффициент $A_0(w,z)$ имел одну из восьми форм:

1. $A_0(w,z) = 0;$
2. $A_0(w,z) = \dfrac{1-\frac{1}{n}}{w};$
3. $A_0(w,z) = \dfrac{1}{w};$
4. $A_0(w,z) = \dfrac{1}{2w} + \dfrac{1}{w-1};$
5. $A_0(w,z) = \dfrac{2}{3}\left(\dfrac{1}{w} + \dfrac{1}{w-1}\right);$
6. $A_0(w,z) = \dfrac{3}{4}\left(\dfrac{1}{w} + \dfrac{1}{w-1}\right);$
7. $A_0(w,z) = \dfrac{2}{3}\cdot\dfrac{1}{w} + \dfrac{1}{2(w-1)};$
8. $A_0(w,z) = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{w} + \dfrac{1}{w-1} + \dfrac{1}{w-h}\right);$

где n – целое, h – постоянное, или равно z.

В настоящей работе данная задача решена в случае, когда $A_0(w,z) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{w} + \frac{1}{w-1}\right)$. Предлагаемый метод решения задачи по нахождению необходимых условий отсутствия подвижных многозначных особых точек в решениях уравнения вида (1) несколько отличается от метода, рекомендуемого в работах [1, 2].

Рассмотрим уравнение вида

$$w'' = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{w} + \frac{1}{w-1}\right)w'^2 + \left(a_0(z)w + a_1(z) + \frac{B_1(z)}{w} + \frac{B_2(z)}{w-1}\right)w' + b_0(z)w^3 + b_1(z)w^2 + b_2(z)w + b_3(z) + \frac{C_1(z)}{w} + \frac{C_2(z)}{w-1} \qquad (2)$$

с коэффициентами голоморфными относительно z в некоторой области D.

Сделаем в уравнении (2) замену $w = \lambda W$ и $z = z_0 + \lambda Z$, получим

$$W'' = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{W} + \frac{\lambda}{\lambda W - 1}\right) W'^2 + \left(a_0(z_0 + \lambda Z) W \lambda^2 + a_1(z_0 + \lambda Z) + \frac{B_1(z_0+\lambda Z)}{W} + \frac{\lambda B_2(z_0+\lambda Z)}{\lambda W - 1}\right) W' + \lambda^4 b_0(z_0 + \lambda Z) W^3 + \lambda^3 b_1(z_0 + \lambda Z) W^2 + \lambda^2 b_2(z_0 + \lambda Z) W + \lambda b_3(z_0 + \lambda Z) + \frac{C_1(z_0+\lambda Z)}{W} + \frac{\lambda C_2(z_0+\lambda Z)}{\lambda W - 1}.$$

Откуда при $\lambda = 0$ получим упрощенное уравнение

$$W_0'' = \frac{\frac{1}{2} W_0'^2 + B_1(z_0) W_0' + C_1(z_0)}{W_0}. \qquad (3)$$

Заменим уравнение (3) системой

$$\begin{cases} \dfrac{dW_0}{dZ} = T, \\ \dfrac{dT}{dZ} = \dfrac{\frac{1}{2}(T-\alpha)(T-\beta)}{W_0}, \end{cases} \qquad (4)$$

где α и β удовлетворяют условиям

$$\begin{cases} \alpha + \beta = -2B_1(z_0) \\ \alpha \cdot \beta = 2C_1(z_0). \end{cases} \qquad (5)$$

Положим в системе (4) $T - \alpha = \lambda T_1$. Тогда при условии $\lambda = 0$ получим

$$\begin{cases} \dfrac{dW_0}{dZ} = \alpha \\ \dfrac{dT_1}{dZ} = \dfrac{\frac{1}{2}(\alpha - \beta) T_1}{W_0}, \end{cases}$$

откуда находим $T_1 = (z - z_0)^{\frac{1}{2}\left(1 - \frac{\beta}{\alpha}\right)}$.

Для отсутствия подвижных критических особых точек необходимо, чтобы

$$\frac{1}{2}\left(1 - \frac{\beta}{\alpha}\right) = M, \qquad (6)$$

где M – целое число. Меняя местами α и β, получим еще условие

$$\frac{1}{2}\left(1 - \frac{\alpha}{\beta}\right) = N, \qquad (7)$$

где N – целое число. Из уравнений (6) и (7) находим

$$\frac{1}{M} + \frac{1}{N} = 2. \qquad (8)$$

Очевидно, что в качестве M и N можно взять лишь число 1, т.е. $M = 1$ и $N = 1$. В этом случае $\alpha = -\beta$. Согласно (5) $\alpha + \beta = -2B_1(z_0)$, т.е. $B_1(z_0) = 0$.

Сделав в уравнении (2) замену $w - 1 = \lambda W$ и $z = z_0 + \lambda Z$, аналогично получим, что для принадлежности уравнения (2) к классу Р-типа необходимо, чтобы $B_2(z) \equiv 0$.

Итак, в дальнейшем будем исследовать уравнение вида

$$w'' = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{w} + \frac{1}{w-1}\right) w'^2 + \left(a_0(z) w + a_1(z)\right) w' + b_0(z) w^3 + b_1(z) w^2 + b_2(z) w + b_3(z) + \frac{C_1(z)}{w} + \frac{C_2(z)}{w-1}. \qquad (9)$$

Делая в (9) подстановку

$$w = \frac{W}{\lambda^2}, \ z = z_0 + \lambda^2 Z,$$

при $\lambda = 0$ получим упрощенное уравнение

$$W_0'' = \frac{1}{W_0} W_0'^2 + a_0(z_0) W_0 W_0' + b_0(z_0) W_0^3. \qquad (10)$$

Сделав замену $W_0 = \frac{W_1}{\sqrt{-b_0(z_0)}}$, придем к уравнению

$$W_1'' = \frac{1}{W_1} W_1'^2 + \frac{a_0(z_0)}{\sqrt{-b_0(z_0)}} W_1 W_1' - W_1^3. \tag{11}$$

Наконец, сделав подстановку $W_1' = \frac{W_1^2}{T}$, заменим уравнение (11) системой

$$\begin{cases} W_1' = \dfrac{W_1^2}{T} \\ T' = W_1\left(T^2 - \dfrac{a_0(z_0)}{\sqrt{-b_0(z_0)}} T + 1\right) \end{cases}$$

или

$$\begin{cases} \dfrac{dT}{dZ} = W_1(T-\alpha)(T-\beta) \\ \dfrac{dW_1}{dZ} = \dfrac{W_1^2}{T} \end{cases}, \tag{12}$$

где

$$\begin{cases} \alpha + \beta = \dfrac{a_0(z_0)}{\sqrt{-b_0(z_0)}}, \\ \alpha \cdot \beta = 1. \end{cases} \tag{13}$$

Полагая далее в (12) $T - \alpha = \lambda T_1$, при $\lambda = 0$ получим систему

$$\begin{cases} \dfrac{dW_1}{dZ} = \dfrac{W_1^2}{\alpha} \\ \dfrac{dT_1}{dZ} = W_1 T_1(\alpha - \beta), \end{cases}$$

решение которой

$$W_1 = -\frac{\alpha}{z - z_0}, T_1 = C_1(z - z_0)^{-\alpha(\alpha-\beta)}.$$

Для отсутствия критических подвижных особых точек необходимо, чтобы $-\alpha(\alpha-\beta) = \mathrm{M}$, где M – целое число. Точно так же получим еще условие $-\beta(\beta-\alpha) = N$, где N – целое число.

Из этих условий имеем в силу (13)

$$\alpha^2\beta^2 = (M-1)(N-1)$$

или

$$\frac{1}{M} + \frac{1}{N} = 1.$$

Очевидно, $\mathrm{M} = 2, N = 2$. Тогда $\alpha^2 = \beta^2 = -1$, откуда $\alpha = \pm i, \beta = \pm i$. Но так как $\alpha \cdot \beta = 1$, то $\alpha = \pm i, \beta = \mp i$, т.е. $\alpha + \beta = 0$ и $a_0(z_0) = 0$.

Для дальнейшего исследования уравнения (2) применим метод, основанный на редукции от нелинейных уравнений второго порядка к системе двух уравнений Брио и Буке. Так как мы ищем уравнения с неподвижными критическими особыми точками, то при сведении уравнения к системе Брио и Буке мы должны требовать, чтобы решения системы были однозначны при обходе вокруг всех точек, которые не являются неподвижными особыми точками.

Для этого перепишем уравнение (9) в виде

$$w(w-1)w'' = \left(w - \frac{1}{2}\right)w'^2 + a_1(z)(w^2 - w)w' + b_0(z)w^5 + \big(b_1(z) - b_0(z)\big)w^4 + \\ +\big(b_2(z) - b_1(z)\big)w^3 + \big(b_3(z) - b_2(z)\big)w^2 + (C_1(z) + C_2(z) - b_3(z)w - C_1(z)) \tag{14}$$

Полагая в уравнении (14)

$$w = \frac{1}{W},$$

получим

$$W(W-1)W'' = \left(\frac{3}{2}W - 1\right)W'^2 + a_1(z)(W^2 - W)W' + b_0(z) + \big(b_1(z) - b_0(z)\big)W +$$

$$+\left(b_2(z)-b_1(z)\right)W^2+\left(b_3(z)-b_2(z)\right)W^3+\left(C_1(z)+C_2(z)-b_3(z)\right)W^4-C_1(z)W^5. \quad (15)$$

Сделав в уравнении (15) подстановку

$$z-z_0=\tau, W=\frac{\beta_0+u}{\tau}, W'=\frac{\tau u'-u+\tau\beta_0'-\beta_0}{\tau^2}$$

и полагая $\tau u'-u=v$, придем к системе двух уравнений Брио и Буке

$$\begin{cases} \tau\frac{du}{d\tau}=u+v, \\ \tau\frac{dv}{d\tau}=-v+\tau(-\beta_0{}'-a_1(z_0)\beta_0+\frac{1}{2}+C_2(z_0)\beta_0{}^2-b_3(z_0)\beta_0{}^2-C_1{}'(z_0)\beta_0{}^3+\cdots, \end{cases} \quad (16)$$

где $\beta_0{}^2=-\frac{1}{2C_1(z_0)}$, z_0 – произвольная точка из области Д, для которой $C_1(z_0)\neq 0$.

Интерес представляют голоморфные решения системы (16), обладающие свойством

$$u(\tau)\to 0, v(\tau)\to 0 \text{ при } \tau\to 0. \quad (17)$$

Корни характеристического уравнения для системы (16) будут $\lambda_1=-1, \lambda_2=1$.

Известно [3], что в этом случае для существования голоморфного решения, обладающего свойством (17), необходимо, чтобы

$$-\beta_0{}'-a_1(z)\beta_0+\frac{1}{2}-\frac{C_2(z)}{2C_1(z)}+\frac{b_3(z)}{2C_1(z)}+\frac{C_1{}'(z)}{2C_1(z)}\beta_0\equiv 0, \quad (18)$$

где $\beta_0{}^2=-\frac{1}{2C_1(z)}$, или

$$-\beta_0{}'+\frac{\beta_0}{2}\left(\frac{C_1{}'(z)}{C_1(z)}-2a_1(z)\right)+\frac{C_1(z)-C_2(z)+b_3(z)}{2C_1(z)}\equiv 0. \quad (19)$$

Условие (19) эквивалентно соотношению

$$C_1(z)-C_2(z)+b_3(z)\equiv 0 \text{ при условии } \frac{\beta_0{}'}{\beta_0}=-\frac{a_1(z)}{2} \text{ или } \frac{C_1{}'(z)}{C_1(z)}=a_1(z). \quad (20)$$

Рассмотрим полюс $w=1$. Сделав в уравнении (14) замену

$$w-1=\frac{1}{W},$$

получим уравнение

$$(W^2+W)W''=\left(1+\frac{3}{2}W\right)W'^2+a_1(z)(W^2+W)W'-b_0(z)(W+1)^5-$$
$$-\left(b_1(z)-b_0(z)\right)W(W+1)^4-\left(b_2(z)-b_1(z)\right)W^2(W+1)^3-$$
$$-\left(b_3(z)-b_2(z)\right)W^3(W+1)^2-(C_1(z)+C_2(z)-b_3(z)W^4(W+1)+C_1(z)W^5. \quad (21)$$

Точно также, т.е. используя метод сведения уравнения (21) к системе Брио и Буке, получим, что для отсутствия подвижных критических особых точек в решениях уравнения (21), а значит и в решениях уравнения (2), должно выполняться условие:

$$-\frac{1}{2}+\frac{C_1(z)+b_0(z)+b_1(z)+b_2(z)+b_3(z)}{2C_2(z)}-\gamma_0{}'-a_1(z)\gamma_0+C_2{}'(z)\gamma_0{}^3\equiv 0, \quad (22)$$

где $\gamma_0{}^2=-\frac{1}{2C_2(z)}$,

или

$$-\gamma_0{}'+\frac{\gamma_0}{2}\left(\frac{C_2{}'(z)}{C_2(z)}-2a_1(z)\right)+\frac{b_0(z)+b_1(z)+b_2(z)}{2C_2(z)}\equiv 0. \quad (23)$$

При условии $\frac{C_2{}'(z)}{C_2(z)}=a_1(z)$ соотношение (23) эквивалентно условию

$$b_0(z)+b_1(z)+b_2(z)\equiv 0. \quad (24)$$

Наконец, сделав в уравнении (14) замену

$$z-z_0=\tau, W=\frac{\alpha_0+u}{\tau}, W'=\frac{\tau u'-u+\tau\alpha_0'-\alpha_0}{\tau^2},$$

придем к системе двух уравнений Брио и Буке

$$\begin{cases} \tau\frac{du}{d\tau} = u + v, \\ \tau\frac{dv}{d\tau} = 2u + \tau\left(\frac{1}{2} + \frac{b_0'(z)}{b_0(z)}\alpha_0 + \frac{b_1(z)}{b_0(z)} - a_1(z)\alpha_0\right) + \tau^2\left(-\alpha_0'' + a_1(z)\alpha_0' - a_1'(z)\alpha_0 + \frac{1}{2}b_0(z)\alpha_0 + \right. \\ \left. + \frac{b_0''(z)}{2b_0(z)}\alpha_0 + b_2(z)\alpha_0 - b_0(z)\alpha_0\alpha_0' + b_0(z)\alpha_0\alpha_0'^2 + \frac{b_1'(z)}{b_0(z)}\right) + 4b_0(z)\alpha_0 u^2 + \\ + \left(2b_0(z)\alpha_0\alpha_0' + 3\frac{b_0'(z)}{b_0(z)} + 2b_1(z)\alpha_0 - b_0(z)\alpha_0\right)u\tau + \cdots, \end{cases} \tag{25}$$

где $\alpha_0{}^2 = \frac{1}{b_0(z)}$.

Корни характеристического уравнения системы (25) равны $\lambda_1 = -1, \lambda_2 = 2$.

Известно [3], что в этом случае для существования голоморфных решений со свойством (17) у системы (25) необходимо, чтобы имело место условие:

$$-\alpha_0'' + a_1(z)\alpha_0' - a_1'(z)\alpha_0 + \frac{1}{2}b_0(z)\alpha_0 + \frac{b_0''(z)}{2b_0(z)}\alpha_0 + b_2(z)\alpha_0 - b_0(z)\alpha_0\alpha_0' +$$
$$+b_0(z)\alpha_0\alpha_0'^2 + \frac{b_1'(z)}{b_0(z)} + \left(2b_0(z)\alpha_0\alpha_0' + 3\frac{b_0'(z)}{b_0(z)} + 2b_1(z)\alpha_0 - b_0(z)\alpha_0\right)\alpha_1 +$$
$$+4b_0(z)\alpha_0\alpha_1{}^2 \equiv 0, \text{ где } \alpha_1 = -\frac{1}{4} - \frac{b_0'(z)}{2b_0(z)}\alpha_0 - \frac{b_1(z)}{2b_0(z)} + \frac{a_1\alpha_0}{2} \text{ и } \alpha_0{}^2 = -\frac{1}{b_0(z)}, \tag{26}$$

или

$$b_0''(z) = \frac{b_0'^2(z)}{2b_0(z)} + \frac{3}{2}a_1(z)b_0'(z) + \left(a_1'(z) - a_1{}^2(z)\right)b_0(z)$$

при

$$\left(b_1(z) + \frac{3}{2}b_0(z)\right)' \equiv a_1(z)\left(b_1(z) + \frac{3}{2}b_0(z)\right). \tag{27}$$

Итак, из вышесказанного следует

Теорема. Если уравнение (2) есть уравнение с неподвижными критическими точками, то должны выполняться следующие условия:

1. $B_1(z) \equiv 0, B_2(z) \equiv 0, a_0(z) \equiv 0$;
2. $b_3(z) \equiv C_2(z) - C_1(z), \frac{C_1'(z)}{C_1(z)} \equiv a_1(z)$;
3. $b_0(z) + b_1(z) + b_2(z) \equiv 0, \frac{C_2'(z)}{C_2(z)} \equiv a_1(z)$;
4. $b_0''(z) = \frac{b_0'^2(z)}{2b_0(z)} + \frac{3}{2}a_1(z)b_0'(z) + \left(a_1'(z) - a_1{}^2(z)\right)b_0(z)$;
5. $\left(b_1(z) + \frac{3}{2}b_0(z)\right)' \equiv a_1(z)\left(b_1(z) + \frac{3}{2}b_0(z)\right)$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Голубев, В.В. Лекции по аналитической теории дифференциальных уравнений / В.В. Голубев – М. : ГИТТЛ, 1950. – 436 с.

2. Айнс, Э.Л. Обыкновенные дифференциальные уравнения. / Э.Л. Айнс. – Харьков : ГТИУ, 1939. – 717 с.

3. Мячин, В.Ф. Системы уравнений Брио и Буке / В.Ф. Мячин // Вестник Ленинградского ун–та. – 1958. – № 7. – С. 88–102.

E.A. Natynchik, T.I. Shilo. **Second Order Equations with Singular Points Stationary Critical**

In this paper we find necessary conditions for a special second order equation for P-type, i.e. find necessary conditions for the absence of mobile multi-valued singularities in the solutions of the equation. This problem is not new, though for this equation this problem has not been reviewed yet. The proposed

method of solving the problem of equation selection with fixed critical singularities is somewhat different from the methods applied earlier for solving such problems.

Along with the method of small parameter Painlevé the method based on the reduction of nonlinear second-order system of two equations of Briot and Bouquet is presented in this article. The found conditions for a second-order equation for P-type written explicitly, are tested in practice.

Рукапіс паступіў у рэдкалегію 15.07.2010 г.