УДК 519.6 + 517.983.54

О.В. Матысик, В.Ф. Савчук

О ПРИБЛИЖЁННОМ РЕШЕНИИ ОПЕРАТОРНЫХ УРАВНЕНИЙ I РОДА

Для решения линейных операторных уравнений I рода с положительным ограниченным самосопряжённым оператором в гильбертовом пространстве предлагается новый неявный итерационный метод. Доказана сходимость метода в исходной норме гильбертова пространства. Получены априорные оценки погрешности метода при точной и приближённой правой части операторного уравнения, погрешность в счёте. Найденные для предложенного метода оценки погрешности оптимизированы. Проведено сравнение оценок погрешности рассматриваемого итерационного метода и явного метода простой итерации.

1. Постановка задачи

В гильбертовом пространстве H решается линейное операторное уравнение первого рода

$$Ax = y \tag{1}$$

с положительным ограниченным самосопряжённым оператором A, для которого нуль не является собственным значением. Однако предполагается, что нуль принадлежит спектру оператора A, поэтому задача (1) неустойчива и, следовательно, некорректна. Для решения задачи предлагается новый неявный итерационный метод

$$\left(E + \alpha^2 A^{2k}\right)x_{n+1} = \left(E - \alpha A^k\right)^2 x_n + 2\alpha A^{k-1} y, \quad x_0 = 0, \quad k \in N. \tag{2}$$

Предполагая существование единственного точного решения x уравнения (1) при точной правой части y, ищем его приближение $x_{n,\delta}$ при приближённой правой части y_δ, $\|y - y_\delta\| \le \delta.$ В этом случае метод (2) примет вид:

$$\left(E + \alpha^2 A^{2k}\right)x_{n+1,\delta} = \left(E - \alpha A^k\right)^2 x_{n,\delta} + 2\alpha A^{k-1} y_\delta, \quad x_{0,\delta} = 0, \quad k \in N. \tag{3}$$

Ниже, под сходимостью метода (3) понимается утверждение о том, что приближения (3) сколь угодно близко подходят к точному решению x операторного уравнения (1) при подходящем выборе n и достаточно малых δ. Иными словами, метод (3) является сходящимся, если $\lim\limits_{\delta \to 0}\left(\inf\limits_n \left(\|x - x_{n,\delta}\|\right)\right) = 0$.

2. Сходимость метода при точной правой части уравнения

Теорема 1. *Итерационный метод* (2) *при условии* $\alpha > 0$ *сходится в исходной норме гильбертова пространства.*

Доказательство.

Покажем по индукции, что

$$x_n = A^{-1}\left[E - \left(E + \alpha^2 A^{2k}\right)^{-n}\left(E - \alpha A^k\right)^{2n}\right]y. \tag{4}$$

Из (2) и (4) $x_1 = 2\alpha\left(E + \alpha^2 A^{2k}\right)^{-1} A^{k-1} y,$ следовательно, при $n = 1$ формула (4) верна. Предположим, что она справедлива при $n = m$, т.е. $x_m = A^{-1}\left[E - \left(E + \alpha^2 A^{2k}\right)^{-m}\left(E - \alpha A^k\right)^{2m}\right]y$ и докажем, что (4) верна при $n = m + 1$:

$$x_{m+1} = \left(E + \alpha^2 A^{2k}\right)^{-1}\left\{\left(E - \alpha A^k\right)^2 A^{-1}\left[E - \left(E + \alpha^2 A^{2k}\right)^{-m}\left(E - \alpha A^k\right)^{2m}\right]y + 2\alpha A^{k-1} y\right\} =$$

$$= A^{-1}\left(E+\alpha^2A^{2k}\right)^{-1}\left(E-\alpha A^k\right)^2 y - A^{-1}\left(E+\alpha^2A^{2k}\right)^{-(m+1)}\left(E-\alpha A^k\right)^{2(m+1)} y +$$

$$+\left(E+\alpha^2A^{2k}\right)^{-1}2\alpha A^{k-1}y = A^{-1}\left(E+\alpha^2A^{2k}\right)^{-1}\left(E+\alpha^2A^{2k}-2\alpha A^k\right)y -$$

$$-A^{-1}\left(E+\alpha^2A^{2k}\right)^{-(m+1)}\left(E-\alpha A^k\right)^{2(m+1)} y + 2\alpha A^{k-1}\left(E+\alpha^2A^{2k}\right)^{-1} y =$$

$$= A^{-1}\left(E+\alpha^2A^{2k}\right)^{-1}\left(E+\alpha^2A^{2k}\right)y - 2\alpha A^{k-1}\left(E+\alpha^2A^{2k}\right)^{-1} y -$$

$$-A^{-1}\left(E+\alpha^2A^{2k}\right)^{-(m+1)}\left(E-\alpha A^k\right)^{2(m+1)} y + 2\alpha A^{k-1}\left(E+\alpha^2A^{2k}\right)^{-1} y =$$

$$= A^{-1}\left[E-\left(E+\alpha^2A^{2k}\right)^{-(m+1)}\left(E-\alpha A^k\right)^{2(m+1)}\right]y.$$

Следовательно, справедливость формулы (4) доказана.

Используя интегральное представление самосопряжённого оператора $A=\int_0^M \lambda\, dE_\lambda$, ($M=\|A\|$, E_λ – спектральная функция), имеем

$$x-x_n = A^{-1}y - A^{-1}\left[E-\left(E+\alpha^2A^{2k}\right)^{-n}\left(E-\alpha A^k\right)^{2n}\right]y = A^{-1}\left(E+\alpha^2A^{2k}\right)^{-n}\left(E-\alpha A^k\right)^{2n} y =$$

$$= \int_0^M \lambda^{-1}\frac{\left(1-\alpha\lambda^k\right)^{2n}}{\left(1+\alpha^2\lambda^{2k}\right)^n}dE_\lambda y = \int_0^\varepsilon \lambda^{-1}\frac{\left(1-\alpha\lambda^k\right)^{2n}}{\left(1+\alpha^2\lambda^{2k}\right)^n}dE_\lambda y + \int_\varepsilon^M \lambda^{-1}\frac{\left(1-\alpha\lambda^k\right)^{2n}}{\left(1+\alpha^2\lambda^{2k}\right)^n}dE_\lambda y.$$

Потребуем, чтобы при $\lambda\in(0,M]$ выполнялось

$$\alpha > 0. \tag{5}$$

Тогда $\dfrac{\left(1-\alpha\lambda^k\right)^2}{1+\alpha^2\lambda^{2k}} \le q < 1$ и, следовательно,

$$\left\|\int_\varepsilon^M \lambda^{-1}\frac{\left(1-\alpha\lambda^k\right)^{2n}}{\left(1+\alpha^2\lambda^{2k}\right)^n}dE_\lambda y\right\| \le q^n\left\|\int_\varepsilon^M \lambda^{-1}dE_\lambda y\right\| = q^n\left\|\int_\varepsilon^M dE_\lambda x\right\| \le q^n\|x\| \to 0,\quad n\to\infty.$$

$\left\|\int_0^\varepsilon \lambda^{-1}\dfrac{\left(1-\alpha\lambda^k\right)^{2n}}{\left(1+\alpha^2\lambda^{2k}\right)^n}dE_\lambda y\right\| \le \left\|\int_0^\varepsilon \lambda^{-1}dE_\lambda y\right\| = \left\|\int_0^\varepsilon dE_\lambda x\right\| \le \|E_\varepsilon x\| \to 0,$ так как при $\varepsilon\to 0$ E_ε сильно стремится к нулю в силу свойств спектральной функции. Таким образом, доказано, что $\|x-x_n\|\to 0,\quad n\to\infty,$ т.е. метод (2) при условии (5) сходится. Теорема 1 доказана.

3. Оценка скорости сходимости

Скорость убывания к нулю $\|x-x_n\|$ неизвестна и может быть сколь угодно малой. Для её оценки предположим, что точное решение уравнения (1) истокообразно представимо, т. е. $x=A^s z,\quad s>0.$ Тогда

$$x-x_n = \int_0^M \lambda^{-1}\frac{\left(1-\alpha\lambda^k\right)^{2n}}{\left(1+\alpha^2\lambda^{2k}\right)^n}dE_\lambda y = \int_0^M \lambda^{s}\frac{\left(1-\alpha\lambda^k\right)^{2n}}{\left(1+\alpha^2\lambda^{2k}\right)^n}dE_\lambda z.$$

Для оценки $\|x-x_n\|$ оценим подынтегральную функцию $f(\lambda)=\lambda^s\dfrac{\left(1-\alpha\lambda^k\right)^{2n}}{\left(1+\alpha^2\lambda^{2k}\right)^n}\geq 0.$

Поскольку $f(\lambda)=\lambda^s\dfrac{\left(1-\alpha\lambda^k\right)^{2n}}{\left(1+\alpha^2\lambda^{2k}\right)^n}\leq\lambda^s\left(1-\alpha\lambda^k\right)^{2n}=\bar{f}(\lambda),$ то достаточно найти максимум функции $\bar{f}(\lambda)$. Приравняв к нулю производную от $\bar{f}(\lambda)$, получим уравнение для нахождения стационарных точек функции $\bar{f}(\lambda)$:

$$\lambda^{s-1}\left(1-\alpha\lambda^k\right)^{2n-1}\left[s-(2kn+s)\alpha\lambda^k\right]=0.$$

Отсюда видно, что производная обращается в нуль при равенстве нулю любого из трёх множителей. Но при обращении в нуль первых двух функция $\bar{f}(\lambda)$ тоже обращается в нуль. Поэтому остаётся рассмотреть равенство: $s-(2kn+s)\alpha\lambda^k=0,$ откуда $\lambda^*=\left[\dfrac{s}{(2kn+s)\alpha}\right]^{1/k}$ – стационарная точка. Она является точкой локального максимума, так как

$$\bar{f}''\left(\lambda^*\right)=-\left[\frac{s}{(2kn+s)\alpha}\right]^{(k+s-2)/k}\left(\frac{2kn}{2kn+s}\right)^{2n-1}k\left(2kn+s\right)\alpha<0.$$

Найдём его:

$$\bar{f}\left(\lambda^*\right)=\lambda^s\left(1-\alpha\lambda^k\right)^{2n}\Big|_{\lambda=\lambda^*}=s^{s/k}\alpha^{-s/k}(2kn+s)^{-s/k}\left(\frac{2kn}{2kn+s}\right)^{2n}=$$

$$=s^{s/k}\alpha^{-s/k}(2kn)^{-s/k}\left(\frac{2kn+s}{2kn}\right)^{-2n-s/k}=$$

$$=s^{s/k}\alpha^{-s/k}(2kn)^{-s/k}\left[\left(1+\frac{s}{2kn}\right)^{2kn/s}\right]^{(s/2kn)(-2n-s/k)}<s^{s/k}\left(2kn\alpha e\right)^{-s/k}.$$

Отсюда $\|x-x_n\|\leq s^{s/k}\left(2kn\alpha e\right)^{-s/k}\|z\|.$

Но может оказаться, что локальный максимум внутри $[0,M]$ не будет являться глобальным, поэтому будем учитывать значение функции $f(\lambda)$ на правом конце отрезка, т.е. в точке $\lambda=M$ (на левом конце отрезка $f(0)=0$). Тогда $\max\limits_{[0,M]}f(\lambda)\leq\max\left\{s^s(2kn\alpha e)^{-s/k},\,M^s\dfrac{\left(1-\alpha M^k\right)^{2n}}{\left(1+\alpha^2M^{2k}\right)^n}\right\}$ и справедливо записать, что $\|x-x_n\|\leq\max\left\{s^{s/k}(2kn\alpha e)^{-s/k},\,M^s\dfrac{\left(1-\alpha M^k\right)^{2n}}{\left(1+\alpha^2M^{2k}\right)^n}\right\}\|z\|.$

4. Сходимость метода при приближённой правой части уравнения

Покажем, что при условии (5) метод (3) можно сделать сходящимся, если нужным образом выбрать число итераций n в зависимости от уровня погрешности δ

приближённой правой части операторного уравнения (1). Рассмотрим разность $x - x_{n,\delta} = (x - x_n) + (x_n - x_{n,\delta})$. По доказанному в разделе 2 $x - x_n \to 0$, $n \to \infty$. Убедимся, что $x_n - x_{n,\delta}$ можно сделать сходящимся к нулю. Воспользовавшись интегральным представлением самосопряжённого оператора, получим

$$x_n - x_{n,\delta} = A^{-1}\left[E - \left(E + \alpha^2 A^{2k}\right)^{-n}\left(E - \alpha A^k\right)^{2n}\right](y - y_\delta) = \int_0^M \lambda^{-1}\left[1 - \frac{\left(1 - \alpha\lambda^k\right)^{2n}}{\left(1 + \alpha^2\lambda^{2k}\right)^n}\right] dE_\lambda (y - y_\delta).$$

Оценим сверху подынтегральную функцию $g_n(\lambda) = \lambda^{-1}\left[1 - \frac{\left(1 - \alpha\lambda^k\right)^{2n}}{\left(1 + \alpha^2\lambda^{2k}\right)^n}\right]$ при условии (5).

При $n = 1$ $g_1(\lambda) = \frac{2\alpha\lambda^{k-1}}{1 + \alpha^2\lambda^{2k}}$. Её производная равна $g_1'(\lambda) = \frac{2\alpha\lambda^{k-1}\left[(k-1)\left(1 + \alpha^2\lambda^{2k}\right) - 2k\alpha^2\lambda^{2k}\right]}{\left(1 + \alpha^2\lambda^{2k}\right)^2}$, следовательно $\lambda^* = \left[\frac{k-1}{(k+1)\alpha^2}\right]^{1/2k}$ – стационарная точка для функции $g_1(x)$.

Поскольку $g_1''\left(\lambda^*\right) < 0$, то λ^* – точка максимума для функции $g_1(\lambda)$ и $\max\limits_{[0,M]} g_1(\lambda) = g_1(\lambda^*) \le 2\alpha^{1/k}$.

Покажем по индукции, что при $n \in N$

$$g_n(\lambda) = \left|g_n(\lambda)\right| \le 2k(n\alpha)^{1/k}. \tag{6}$$

При $n = 1$ неравенство (6) проверено выше. В дальнейшем будем считать $n \ge 2$. Предположим, что (6) верно при $n = m$, т.е. $g_m(\lambda) \le 2k(m\alpha)^{1/k}$ и рассмотрим

$$g_{m+1}(\lambda) = \lambda^{-1}\left[1 - \frac{\left(1 - \alpha\lambda^k\right)^{2(m+1)}}{\left(1 + \alpha^2\lambda^{2k}\right)^{m+1}}\right] = \lambda^{-1}\left[1 - \frac{\left(1 - \alpha\lambda^k\right)^{2m}}{\left(1 + \alpha^2\lambda^{2k}\right)^m}\right] + \lambda^{-1}\left[1 - \frac{\left(1 - \alpha\lambda^k\right)^{2(m+1)}}{\left(1 + \alpha^2\lambda^{2k}\right)^{m+1}}\right] -$$

$$-\lambda^{-1}\left[1 - \frac{\left(1 - \alpha\lambda^k\right)^{2m}}{\left(1 + \alpha^2\lambda^{2k}\right)^m}\right] \le 2k(m\alpha)^{1/k} + \lambda^{-1}\frac{\left(1 - \alpha\lambda^k\right)^{2m}}{\left(1 + \alpha^2\lambda^{2k}\right)^m}\left[1 - \frac{\left(1 - \alpha\lambda^k\right)^2}{1 + \alpha^2\lambda^{2k}}\right] =$$

$$= 2k(m\alpha)^{1/k} + \frac{2\alpha\lambda^{k-1}\left(1 - \alpha\lambda^k\right)^{2m}}{\left(1 + \alpha^2\lambda^{2k}\right)^{m+1}}.$$

Покажем, что

$$k(m\alpha)^{1/k} + \frac{\alpha\lambda^{k-1}\left(1 - \alpha\lambda^k\right)^{2m}}{\left(1 + \alpha^2\lambda^{2k}\right)^{m+1}} \le k\left((m+1)\alpha\right)^{1/k}, \tag{7}$$

равносильно неравенству $\dfrac{\alpha\lambda^{k-1}\left(1-\alpha\lambda^{k}\right)^{2m}}{\left(1+\alpha^{2}\lambda^{2k}\right)^{m+1}} \le \left(\sqrt[k]{m+1}-\sqrt[k]{m}\right)k\alpha^{1/k}$. Последнее неравенство заменим на более сильное неравенство $\alpha\lambda^{k-1}\left(1-\alpha\lambda^{k}\right)^{2m} \le \left(\sqrt[k]{m+1}-\sqrt[k]{m}\right)k\alpha^{1/k}$. Отсюда $\alpha^{(k-1)/k}\lambda^{k-1}\left(1-\alpha\lambda^{k}\right)^{2m} \le \left(\sqrt[k]{m+1}-\sqrt[k]{m}\right)k$. Имеем

$$\sqrt[k]{m+1}=\sqrt[k]{m\left(1+\frac{1}{m}\right)}=\sqrt[k]{m}\left\{1+\frac{1}{km}+\frac{\frac{1}{k}\left(\frac{1}{k}-1\right)}{2!m^{2}}+\frac{\frac{1}{k}\left(\frac{1}{k}-1\right)\frac{1}{k}\left(\frac{1}{k}-2\right)}{3!m^{3}}+\right.$$

$$+\frac{\frac{1}{k}\left(\frac{1}{k}-1\right)\left(\frac{1}{k}-2\right)\left(\frac{1}{k}-3\right)}{4!m^{4}}+\ldots+\frac{\frac{1}{k}\left(\frac{1}{k}-1\right)\ldots\left[\frac{1}{k}-(2p-2)\right]}{1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot(2p-1)m^{2p-1}}+$$

$$\left.+\frac{\frac{1}{k}\left(\frac{1}{k}-1\right)\ldots\left[\frac{1}{k}-(2p-2)\right]\left[\frac{1}{k}-(2p-1)\right]}{1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot(2p-1)\cdot 2p\cdot m^{2p}}+\ldots\right\}.$$

Покажем, что каждый положительный член ряда больше модуля следующего за ним отрицательного члена, т. е. $\dfrac{\frac{1}{k}\left(\frac{1}{k}-1\right)\ldots\left[\frac{1}{k}-(2p-2)\right]}{1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot(2p-1)m^{2p-1}} > \dfrac{\frac{1}{k}\left(\frac{1}{k}-1\right)\ldots\left[\frac{1}{k}-(2p-2)\right]\left[\frac{1}{k}-(2p-1)\right]}{1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot(2p-1)\cdot 2p\cdot m^{2p}}$, что равносильно $1>\dfrac{\left|\frac{1}{k}-(2p-1)\right|}{2pm}$ или $\dfrac{2p-1-\frac{1}{k}}{2pm}<1$, а это уже очевидно при $m\ge 1$. Следовательно, $\sqrt[k]{m+1}>\sqrt[k]{m}\left(1+\dfrac{1}{km}-\dfrac{k-1}{2k^{2}m^{2}}\right)$.

Вернёмся к доказательству неравенства (7). Поскольку (см. раздел 3) $\lambda^{k-1}\left(1-\alpha\lambda^{k}\right)^{2m} \le (k-1)^{(k-1)/k}(2km\alpha e)^{-(k-1)/k}$, то вместо (7) докажем более сильное неравенство

$$(k-1)^{(k-1)/k}(2km\alpha e)^{-(k-1)/k}\alpha^{(k-1)/k} \le km^{1/k}\left(\frac{1}{km}-\frac{k-1}{2k^{2}m^{2}}\right). \qquad (8)$$

Преобразуем его: $\left(\dfrac{k-1}{k}\right)^{(k-1)/k} m^{-(k-1)/k}2^{-(k-1)/k} \le km^{1/k}\dfrac{1}{km}\left(1-\dfrac{k-1}{2km}\right)$.

Поскольку $\left(\dfrac{k-1}{k}\right)^{(k-1)/k}<1$, то докажем более сильное неравенство $m^{-(k-1)/k}2^{-(k-1)/k} \le m^{-(k-1)/k}\left(1-\dfrac{k-1}{2km}\right)$, что тоже самое $1\le 2^{(k-1)/k}\left(1-\dfrac{k-1}{2km}\right)$, $m\ge 2$.

При $k=1$ имеем $1\le 1$, следовательно, последнее неравенство справедливо при $k=1$. При $k\ge 2,\ m\ge 2$ $2^{(k-1)/k}\left(1-\dfrac{k-1}{2km}\right)\ge\dfrac{3}{4}\cdot 2^{1/2}>1$. Значит, неравенство (8) выполняется и, тем более, справедливо неравенство (7). Таким образом, для $n \ge 1$ справедлива оценка (6), т.е. $g_n(\lambda) \le 2k(n\alpha)^{1/k}$, $n \ge 1$. Отсюда $\left\| x_n - x_{n,\delta} \right\| \le 2k(n\alpha)^{1/k}\delta$, $n \ge 1$.

Поскольку $\left\| x - x_{n,\delta} \right\| \le \left\| x - x_n \right\| + \left\| x_n - x_{n,\delta} \right\| \le \left\| x - x_n \right\| + 2k(n\alpha)^{1/k}\delta$ и $\left\| x - x_n \right\| \to 0$, $n \to \infty$, то для сходимости метода (3) достаточно выбрать $n(\delta)$, зависящим от δ так, чтобы $n^{1/k}\delta \to 0$, $n \to \infty$, $\delta \to 0$. Итак, доказана

Теорема 2. *При условии* (5) *метод* (3) *сходится, если число итераций* n *выбирать из условия* $n^{1/k}\delta \to 0$, $n \to \infty$, $\delta \to 0$.

5. Оценка погрешности метода и её оптимизация

Запишем теперь общую оценку погрешности метода (3)

$$\left\| x - x_{n,\delta} \right\| \le \left\| x - x_n \right\| + \left\| x_n - x_{n,\delta} \right\| \le \max\left\{ s^{s/k}(2kn\alpha e)^{-s/k},\ M^s \frac{\left(1-\alpha M^k\right)^{2n}}{\left(1+\alpha^2 M^{2k}\right)^n} \right\} \|z\| + 2k(n\alpha)^{1/k}\delta,\ n \ge 1.$$

Так как для достаточно больших n $M^s \frac{\left(1-\alpha M^k\right)^{2n}}{\left(1+\alpha^2 M^{2k}\right)^n} \le s^{s/k}(2kn\alpha e)^{-s/k}$, то для этих n справедлива оценка

$$\left\| x - x_{n,\delta} \right\| \le s^{s/k}(2kn\alpha e)^{-s/k}\|z\| + 2k(n\alpha)^{1/k}\delta,\ n \ge 1. \tag{9}$$

Следовательно, справедлива

Теорема 3. *Если решение* x *уравнения* (1) *истокообразно представимо, то при условии* (5) *для метода* (3) *справедлива оценка погрешности* (9).

Для минимизации полученной оценки погрешности вычислим правую часть оценки (9) в точке, в которой производная от неё равна нулю; в результате получим априорный момент останова

$$n_{\text{опт}} = s^{\frac{s+k}{s+1}}(2k)^{-\frac{s+k}{s+1}}\alpha^{-1}e^{-\frac{s}{s+1}}\delta^{-\frac{k}{s+1}}\|z\|^{\frac{k}{s+1}}. \tag{10}$$

Подставив $n_{\text{опт}}$ в оценку (9), имеем

$$\left\| x - x_{n,\delta} \right\|_{\text{опт}} \le (1+s)\left(\frac{s}{k}\right)^{\frac{s(1-k)}{k(s+1)}} e^{-\frac{s}{k(s+1)}}\delta^{\frac{s}{s+1}}\|z\|^{\frac{1}{s+1}}. \tag{11}$$

Итак, доказана

Теорема 4. *Оптимальная оценка погрешности имеет вид* (11) *и получается при* $n_{опт}$ *из* (10).

Замечание 1. *Оценка погрешности* (11) *имеет порядок* $O\left(\delta^{s/(s+1)}\right)$ *и, как следует из* [1], *он является оптимальным в классе задач с истокопредставимыми решениями* $x = A^s z$, $s > 0$.

Замечание 2. *Оптимальная оценка* (11) *не зависит от* α, *но от параметра* α *зависит* $n_{опт}$, *поэтому для уменьшения объёма вычислительной работы следует брать* α, *удовлетворяющим условию* (5) *и так, чтобы* $n_{опт} = 1$. *Для этого достаточно выбрать* $\alpha_{опт} = s^{\frac{s+k}{s+1}}(2k)^{-\frac{s+k}{s+1}}e^{-\frac{s}{s+1}}\delta^{-\frac{k}{s+1}}\|z\|^{\frac{k}{s+1}}$.

Сравнение метода (3) с широко известным явным методом итераций [1, 3–6]

$$x_{n+1,\delta} = x_{n,\delta} + \alpha\left(y_\delta - Ax_{n,\delta}\right), \quad x_{0,\delta} = 0 \tag{12}$$

показывает, что порядки их оптимальных оценок одинаковы. Достоинство явных методов в том, что явные методы не требуют обращения оператора, а требуют только вычисления значений оператора на последовательных приближениях. В этом смысле явный метод (12) предпочтительнее неявного метода (3). Однако неявный метод (3) обладает следующим важным достоинствам. В явном методе (12) на параметр α накладывается ограничение сверху – неравенство $0 < \alpha \le \frac{5}{4\|A\|}$, что может привести на практике к необходимости большого числа вычислений. В неявном методе (3) ограничений сверху на $\alpha > 0$ нет. Это позволяет считать $\alpha > 0$ произвольно большим (независимо от $\|A\|$). В связи с чем оптимальную оценку для метода (3) можно получить уже на первом шаге итераций.

6. Погрешность в счёте

Рассмотрим погрешность метода (3) при счёте с округлениями. Пусть $x_{n,\delta}$ – точное значение, полученное по формуле (3), а z_n – значение с учётом вычислительной погрешности, т.е.

$$z_{n+1} = \left(E + \alpha^2 A^{2k}\right)^{-1}\left[\left(E - \alpha A^k\right)^2 z_n + 2\alpha A^{k-1} y\right] + \alpha\gamma_n, \quad z_0 = 0. \tag{13}$$

Здесь γ_n – погрешность вычислений. Обозначим $\varepsilon_n = z_n - x_{n,\delta}$ и вычтем из (13) равенство (3). Имеем

$$\varepsilon_{n+1} = \left(E + \alpha^2 A^{2k}\right)^{-1}\left(E - \alpha A^k\right)^2 \varepsilon_n + \alpha\gamma_n, \quad \varepsilon_0 = 0.$$

Так как нулевые приближения равны нулю, то $\gamma_0 = 0$. По индукции нетрудно получить, что

$$\varepsilon_n = \sum_{i=0}^{n-1}\left(E + \alpha^2 A^{2k}\right)^{-(n-1-i)}\left(E - \alpha A^k\right)^{2(n-1-i)}\alpha\gamma_i.$$

В силу (5) и тему, что $0 \in SpA$ справедливо $\left\|\left(E + \alpha^2 A^{2k}\right)^{-1}\left(E - \alpha A^k\right)^2\right\| \le 1,$ поэтому $\|\varepsilon_n\| \le n\alpha\gamma, \quad \gamma = \sup_i |\gamma_i|.$

Таким образом, с учётом вычислительной погрешности оценка погрешности метода (3) запишется в виде

$$\|x - z_n\| \le \|x - x_{n,\delta}\| + \|x_{n,\delta} - z_n\| \le s^{s/k}(2kn\alpha e)^{-s/k}\|z\| + 2k(n\alpha)^{1/k}\delta + n\alpha\gamma, \quad n \ge 1.$$

Замечание 3. *Для решения операторного уравнения* (1) *с несамосопряжённым или неположительным, но ограниченным оператором* A *можно перейти к уравнению* $A^*Ax = A^*y$. *Тогда при приближённом элементе* y_δ *метод* (3) *примет вид* $\left(E + \alpha^2\left(A^*A\right)^{2k}\right)x_{n+1,\delta} = \left(E - \alpha\left(A^*A\right)^k\right)^2 x_{n,\delta} + 2\alpha\left(A^*A\right)^{k-1}A^*y_\delta, \quad x_{0,\delta} = 0, \quad k \in N.$

Предложенный метод может быть применён для решения задач спектроскопии, гравиметрии, обратных задач теории потенциала, уравнений Фредгольма I рода.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Вайникко, Г.М. Итерационные процедуры в некорректных задачах / Г.М. Вайникко, А.Ю. Веретенников. – М. : Наука. – 1986. – 178 с.
2. Матысик, О.В. О регуляризации операторных уравнений в гильбертовом пространстве / О.В. Матысик // Доклады НАН Беларуси. – 2005. – Т. 49. – № 3. – С. 38–43.
3. Константинова, Я.В. Оценки погрешности в методе итераций для уравнений I рода / Я.В. Константинова, С.А. Лисковец // Вестник Белорус. ун-та. Серия 1. – 1973. – № 1. – С. 9–15.
4. Самарский, А.А. Численные методы решения обратных задач математической физики / А.А. Самарский, П.Н. Вабищевич. – М. : Едиториал УРСС, 2004. – 480 с.
5. Лаврентьев, М.М. О некоторых некорректных задачах математической физики/ М.М. Лаврентьев. – Новосибирск : Изд-во СО АН СССР, 1962. – 92 с.
6. Денисов, А.М. Введение в теорию обратных задач / А.М. Денисов. – М. : Изд-во МГУ, 1994. – 207 с.

O.V. Matysik, V.F. Savchuk. **About Approximamative Decision of the First–Kind Operator Equations**

In the Hilbert space to solve the linear equations of type I with limited affirmated self-adjoned operator we investigate the application of the new non-evident iterative method. The convergence of the method in its initial norm of Hilbert space is proved. The apriori estimations of this method error, having a precise and approximate right-side part of the operator equation, the error in calculation have been received. For the offered method the found estimations of the error are optimised. The comparison of the error estimations of the given iteration method and the evident method of simple iteration has been done.

Рукапіс паступіў у рэдкалегію 20.01.2011 г.