

УДК 517.9:519.61

А.В. Чичурин

РЕШЕНИЕ СИСТЕМЫ ШАЗИ И ИНТЕГРИРОВАНИЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ШАЗИ С ШЕСТЬЮ ПОСТОЯННЫМИ ПОЛЮСАМИ С ПОМОЩЬЮ СИСТЕМЫ *MATHEMATICA*

Рассматривается нелинейное дифференциальное уравнение Шази третьего порядка с шестью постоянными полюсами. Используя возможности системы *Mathematica*, построен программный модуль, позволяющий находить решение соответствующей системы Шази и приведены программные средства, позволяющие находить решение уравнения Шази в численной или аналитической форме, а также осуществлять процесс визуализации и анимации частных решений.

Введение

В работе [1] Ж. Шази при решении задачи об отыскании дифференциальных уравнений третьего порядка Пенлеве-типа с шестью особыми точками построил дифференциальное уравнение вида

$$w''' = \sum_{k=1}^6 \frac{(w' - a_k')(w'' - a_k'') + A_k(w' - a_k')^3 + B_k(w' - a_k')^2 + C_k(w' - a_k')}{w - a_k} + D w'' + E w' + \prod_{i=1}^6 (w - a_i) \sum_{k=1}^6 \frac{F_k}{w - a_k}. \quad (1)$$

Уравнение (1) содержит 32 функции по $z : a_k, A_k, B_k, C_k, F_k (k = \overline{1,6}), D, E$. Развивая метод Пенлеве [2] для уравнения (4), Шази получил систему из 31 алгебраического и дифференциальных уравнений, в которых в качестве неизвестных выступают 32 функции – коэффициенты уравнения (1) [1]:

$$\sum_{k=1}^6 A_k = 0, \quad \sum_{k=1}^6 a_k A_k = -6, \quad \sum_{k=1}^6 a_k^2 A_k = -2 \sum_{k=1}^6 a_k, \quad (2)$$

$$2 A_k^2 + \sum_j \frac{A_k - A_j}{a_k - a_j} = 0, \quad (3)$$

$$2D + \sum_{k=1}^6 (B_k - 3a_k' A_k) = 0, \quad \sum_{k=1}^6 F_k = \sum_{k=1}^6 a_k F_k = \sum_{k=1}^6 a_k^2 F_k = 0, \quad (4)$$

$$\begin{aligned} & -\left(-\frac{5}{2} A_k + \sum_j \frac{1}{a_k - a_j}\right) B_k + \sum_j \left(\frac{1}{2} A_k + \frac{1}{a_k - a_j}\right) B_j = -A_k' + \\ & + A_k \sum_j \frac{a_k' - a_j'}{a_k - a_j} - 3 \sum_j A_j \frac{a_k' - a_j'}{a_k - a_j} + \frac{3}{2} A_k \sum_{i=1}^6 a_i' A_i, \end{aligned} \quad (5)$$

$$\begin{aligned} & -\left(2 A_k + \sum_j \frac{1}{a_k - a_j}\right) C_k + \sum_j C_j \frac{1}{a_k - a_j} = B_k^2 - B_k' - B_k \sum_j \frac{a_k' - a_j'}{a_k - a_j} - \\ & - \sum_j \frac{3 A_j (a_k' - a_j')^2 + 2 B_j (a_k' - a_j')}{a_k - a_j} + B_k D - E - \sum_j \frac{a_k'' - a_j''}{a_k - a_j}, \end{aligned} \quad (6)$$

$$\begin{aligned}
 & -a_k''' - B_k C_k + C_k' + \sum_j \frac{(a_k' - a_j')(a_k'' - a_j'' - C_k) + A_j (a_k' - a_j')^3}{a_k - a_j} + \\
 & + \sum_j \frac{B_j (a_k' - a_j')^2 + C_j (a_j' - a_k')}{a_k - a_j} + E a_k' + D (a_k'' - C_k) + F_k \prod_j (a_k - a_j) = 0. \quad (7)
 \end{aligned}$$

Решение системы (2), (3) имеет вид [3; 4]

$$A_k = \frac{-6a_k^4 + 4\sigma_1 a_k^3 + 3(\alpha_2 - \sigma_2)a_k^2 - 3\beta_2 a_k + 3\beta_3 - \sigma_4}{6a_k^5 - 5\sigma_1 a_k^4 + 4\sigma_2 a_k^3 - 3\sigma_3 a_k^2 + 2\sigma_4 a_k - \sigma_5} \quad (k = \overline{1,6}), \quad (8)$$

где основные симметрические многочлены σ_k , составленные из элементов a_k ($k = \overline{1,6}$), связаны с величинами $\alpha_2, \beta_2, \beta_3$ следующими соотношениями

$$\beta_2 = \frac{(3\alpha_2 - \sigma_2)(2\alpha_2\sigma_1 - 3\sigma_3) - 2\sigma_1\sigma_4 + 6\sigma_5}{18\alpha_2 + \sigma_1^2 - 6\sigma_2}, \quad (9)$$

$$\beta_3 = \frac{2\sigma_1\sigma_5 - (3\alpha_2 - \sigma_2)(12\alpha_2^2 - 4\alpha_2\sigma_2 + \sigma_1\sigma_3 - 4\sigma_4) - 2\sigma_1\sigma_4 + 6\sigma_5}{2(18\alpha_2 + \sigma_1^2 - 6\sigma_2)}, \quad (10)$$

а функция α_2 удовлетворяет уравнению 5-й степени:

$$\begin{aligned}
 & 1296\alpha_2^5 - 1296\sigma_2\alpha_2^4 + 216(2\sigma_2^2 + \sigma_1\sigma_3 - \sigma_4)\alpha_2^3 + 24(\sigma_1^2\sigma_4 - 2\sigma_2^3 - 6\sigma_2(\sigma_1\sigma_3 - 2\sigma_4) - \\
 & - 9\sigma_1\sigma_5 + 54\sigma_6)\alpha_2^2 + (12\sigma_1(\sigma_3(2\sigma_2^2 - 3\sigma_4) + 6\sigma_2\sigma_5) + \sigma_1^2(9\sigma_2^3 - 8\sigma_2\sigma_4 + 144\sigma_6) - \\
 & - 12(4\sigma_2^2\sigma_4 - 9\sigma_3\sigma_5 + 72\sigma_2\sigma_6) - 4\sigma_1^3\sigma_5)\alpha_2 + (2\sigma_1\sigma_4 - 3\sigma_2\sigma_3 - 6\sigma_5)(\sigma_1^2\sigma_3 - 4\sigma_1\sigma_4 + \\
 & + 12\sigma_5) + 4(\sigma_1^2 - 6\sigma_2)^2\sigma_6 = 0. \quad (11)
 \end{aligned}$$

Таким образом, исследование уравнения (1) на первом этапе сводится к отысканию решений системы (4)–(7). Общий метод исследования этой системы и построения уравнения (1) приведен в работах [5; 6].

В данной работе строится программный модуль, позволяющий находить решение соответствующей системы Шази, а также приведены программные средства, позволяющие находить решение уравнения Шази вида

$$w''' = \sum_{k=1}^6 \frac{w' w'' + A_k w'^3 + B_k w'^2 + C_k w'}{w - a_k} + D w'' + E w' + \sum_{k=1}^6 \frac{F_k}{w - a_k} \prod_{i=1}^6 (w - a_i) \quad (12)$$

с шестью постоянными полюсами a_k ($k = \overline{1,6}$) в численной или аналитической форме. На конкретном примере показано, как осуществлять процесс визуализации или анимации искомых частных решений.

Основной результат

Модуль, позволяющий по заданным значениям величин a_k ($k = \overline{1,6}$) находить решения соответствующей системы (4)–(7), а следовательно, построить уравнение (12) имеет вид:

```

constrEquationChazy[a1_, a2_, a3_, a4_, a5_, a6_] :=
Module[{eqa2, sol1}, ρ1 = {a1 → a1, a2 → a2, a3 → a3, a4 → a4, a5 → a5, a6 → a6};

equationChazy = w'''[z] ==  $\sum_{k=1}^6 \frac{1}{w[z] - a_k} (w'[z] w''[z] + \mathfrak{A}_k w'[z]^3 + b_k w'[z]^2 + c_k w'[z]) + d w''[z] +$ 
 $e w'[z] + \sum_{k=1}^6 \frac{f_k}{w_k[z] - a_k} \prod_{i=1}^6 (w[z] - a_i);$ 

σ1 = SymmetricPolynomial[1, {a1, a2, a3, a4, a5, a6}];
σ2 = SymmetricPolynomial[2, {a1, a2, a3, a4, a5, a6}];
σ3 = SymmetricPolynomial[3, {a1, a2, a3, a4, a5, a6}];
σ4 = SymmetricPolynomial[4, {a1, a2, a3, a4, a5, a6}];
σ5 = SymmetricPolynomial[5, {a1, a2, a3, a4, a5, a6}];
σ6 = SymmetricPolynomial[6, {a1, a2, a3, a4, a5, a6}];
β2 =  $\frac{(3 \alpha_2 - \sigma_2) (2 \alpha_2 \sigma_1 - 3 \sigma_3) - 2 \sigma_1 \sigma_4 + 6 \sigma_5}{18 \alpha_2 + \sigma_1^2 - 6 \sigma_2};$ 
β3 =  $(- (3 \alpha_2 - \sigma_2) (12 \alpha_2^2 - 4 \alpha_2 \sigma_2 + \sigma_1 \sigma_3 - 4 \sigma_4) + 2 \sigma_1 \sigma_5) / (2 (18 \alpha_2 + \sigma_1^2 - 6 \sigma_2));$ 
eqa2 =  $1296 \alpha_2^5 - 1296 \alpha_2^4 \sigma_2 - 3 \sigma_1^2 \sigma_2 \sigma_3^2 + \alpha_2^3 (432 \sigma_2^2 + 216 \sigma_1 \sigma_3 - 432 \sigma_4) + 2 \sigma_1^3 \sigma_3 \sigma_4 + 12 \sigma_1 \sigma_2 \sigma_3 \sigma_4 - 8 \sigma_1^2 \sigma_4^2 -$ 
 $6 \sigma_1^2 \sigma_3 \sigma_5 - 36 \sigma_2 \sigma_3 \sigma_5 + 48 \sigma_1 \sigma_4 \sigma_5 - 72 \sigma_5^2 + 4 \sigma_1^4 \sigma_6 - 48 \sigma_1^2 \sigma_2 \sigma_6 + 144 \sigma_2^2 \sigma_6 +$ 
 $\alpha_2^2 (-48 \sigma_3^3 - 144 \sigma_1 \sigma_2 \sigma_3 + 24 \sigma_1^2 \sigma_4 + 288 \sigma_2 \sigma_4 - 216 \sigma_1 \sigma_5 + 1296 \sigma_6) +$ 
 $\alpha_2 (24 \sigma_1 \sigma_2^2 \sigma_3 + 9 \sigma_1^2 \sigma_3^2 - 8 \sigma_1^2 \sigma_2 \sigma_4 - 48 \sigma_2^2 \sigma_4 - 36 \sigma_1 \sigma_3 \sigma_4 - 4 \sigma_1^3 \sigma_5 + 72 \sigma_1 \sigma_2 \sigma_5 + 108 \sigma_3 \sigma_5 + 144 \sigma_1^2 \sigma_6 - 864 \sigma_2 \sigma_6) / . \rho 1;$ 
sol = Solve[eqa2 == 0, α2] // Union // Flatten;
Print[StringForm["polynom for α2 is `` all roots of polynomial: `` ", eqa2, sol]];
Do[If[ $((18 \alpha_2 + \sigma_1^2 - 6 \sigma_2) / . \rho 1 / . sol[[i]]) == 0$ , sol1 = Delete[sol, i],
Print[StringForm["solution exists for `` ", sol[[i, 1]] == sol[[i, 2]] ]], {i, Length[sol]}];
Print[StringForm["roots for solution of the Chazy system (sol1): `` ", sol1]];
ρ[k_] =  $\mathfrak{A}_k \rightarrow (-6 \alpha_k^4 + 4 \sigma_1 \alpha_k^3 + 3 (\alpha_2 - \sigma_2) \alpha_k^2 - 3 \beta_2 \alpha_k + 3 \beta_3 - \sigma_4) / (6 \alpha_k^5 - 5 \sigma_1 \alpha_k^4 + 4 \sigma_2 \alpha_k^3 - 3 \sigma_3 \alpha_k^2 + 2 \sigma_4 \alpha_k - \sigma_5);$ 
eqb[k_] =  $-\left(-\frac{5}{2} \mathfrak{A}_k + \sum_{j=1}^{k-1} \frac{1}{\alpha_k - a_j} + \sum_{j=k+1}^6 \frac{1}{\alpha_k - a_j}\right) b_k + \sum_{j=1}^{k-1} \left(\frac{\mathfrak{A}_k}{2} + \frac{1}{\alpha_k - a_j}\right) b_j + \sum_{j=k+1}^6 \left(\frac{\mathfrak{A}_k}{2} + \frac{1}{\alpha_k - a_j}\right) b_j == 0;$ 
sysb = Table[eqb[i], {i, 1, 6}]; (* system of Bk *)
eqc[k_] =  $-\left(2 \mathfrak{A}_k + \sum_{j=1}^{k-1} \frac{1}{\alpha_k - a_j} + \sum_{j=k+1}^6 \frac{1}{\alpha_k - a_j}\right) c_k + \sum_{j=1}^{k-1} \frac{c_j}{\alpha_k - a_j} + \sum_{j=k+1}^6 \frac{c_j}{\alpha_k - a_j} == b_k^2 + b_k d - e;$ 
sysc = Table[eqc[i], {i, 1, 6}]; (* system of Ck *)
eqf[k_] =  $-b_k c_k + D[c_k, x] - d c_k + f_k \left(\prod_{j=1}^{k-1} (\alpha_k - a_j)\right) \prod_{j=k+1}^6 (\alpha_k - a_j) == 0;$ 
sysf = Table[eqf[i], {i, 1, 6}]; (* system of Fk *)
sysg =  $\left\{2 d + \sum_{k=1}^6 b_k == 0, \sum_{k=1}^6 f_k == 0, \sum_{k=1}^6 \alpha_k f_k == 0, \sum_{k=1}^6 \alpha_k^2 f_k == 0\right\};$ 
For[i = 1, i < Length[sol1] + 1, i++, solA = {ρ[1], ρ[2], ρ[3], ρ[4], ρ[5], ρ[6]} /. ρ1 /. sol1[[i]] // Simplify;
sysbn = sysb /. ρ1 /. sol1[[i]] /. solA // Flatten;
solb = Solve[sysbn, {b1, b2, b3, b4, b5, b6}] // Simplify // Flatten;
syscn = sysc /. ρ1 /. sol1[[i]] /. solA /. solb // Flatten;
solc = Solve[syscn, {c1, c2, c3, c4, c5, c6}] // Simplify // Flatten;
sysgn = sysg /. ρ1 /. sol1[[i]] /. solA /. solb // Flatten;
sysfn = sysf /. ρ1 /. sol1[[i]] /. solA /. solb /. solc // Flatten;
solf = Solve[Join[sysfn, sysgn], {f1, f2, f3, f4, f5, f6, d}] // Simplify // Flatten;
Print[StringForm["i = `` solSysChazy: `` eqChazy: ``", i,
solSysChazy[i] = Join[solA, solb, solc, solf], eqChazy[i] = equationChazy /. ρ1 /. solSysChazy[i]]
If[Coefficient[Coefficient[eqChazy[1][2], w'[z]], w'[z], 0] == 0,
linearEqChazy[i] = eqChazy[i] /. {w'[z] →  $\sqrt{y[w]}$ , w''[z] →  $\frac{y'[w]}{2}$ , w'''[z] →  $\frac{1}{2} \sqrt{y[w]} y''[w]$ , w[z] → w} //
Simplify // Flatten; ];
Print[StringForm["i = `` linearEqChazy: ``", i, linearEqChazy[i]]
];]

```

Проиллюстрируем действие данного модуля. Введем, например, команду

```
In[4]:= constrEquationChazy[1, -1, 3, -3, 1/3, -1/3]
```

(13)

Это означает, что в качестве значений a_k ($k = \overline{1,6}$) выбраны соответственно величины 1, -1, 3, -3, 1/3, -1/3. Напомним, что знак « \equiv » означает в системе *Mathematica* знак «равно», а знак « \rightarrow » означает оператор прямой подстановки. В результате действия введенной команды (13) получим следующие соотношения:

```

polynom for a2 is - $\frac{132496}{9}$  -  $\frac{14179984 \alpha_2}{243}$  +  $\frac{4587424 \alpha_2^2}{243}$  +  $\frac{119392 \alpha_2^3}{3}$  + 13104  $\alpha_2^4$  + 1296  $\alpha_2^5$ 
all roots of polynomial: { $\alpha_2 \rightarrow -\frac{91}{27}$ ,  $\alpha_2 \rightarrow 1$ ,  $\alpha_2 \rightarrow \frac{1}{27} (-59 - 8 \sqrt{43})$ ,  $\alpha_2 \rightarrow \frac{1}{27} (-59 + 8 \sqrt{43})$ }
solution exists for  $\alpha_2 = 1$ 
solution exists for  $\alpha_2 = \frac{1}{27} (-59 - 8 \sqrt{43})$ 
solution exists for  $\alpha_2 = \frac{1}{27} (-59 + 8 \sqrt{43})$ 
roots for solution of the Chazy system (sol1): { $\alpha_2 \rightarrow 1$ ,  $\alpha_2 \rightarrow \frac{1}{27} (-59 - 8 \sqrt{43})$ ,  $\alpha_2 \rightarrow \frac{1}{27} (-59 + 8 \sqrt{43})$ }
i=1 solSysChazy:
{ $\mathcal{A}_1 \rightarrow -1$ ,  $\mathcal{A}_2 \rightarrow 1$ ,  $\mathcal{A}_3 \rightarrow -\frac{7}{15}$ ,  $\mathcal{A}_4 \rightarrow \frac{7}{15}$ ,  $\mathcal{A}_5 \rightarrow -\frac{9}{5}$ ,  $\mathcal{A}_6 \rightarrow \frac{9}{5}$ ,  $b_1 \rightarrow 0$ ,  $b_2 \rightarrow 0$ ,  $b_3 \rightarrow 0$ ,  $b_4 \rightarrow 0$ ,  $b_5 \rightarrow 0$ ,  $b_6 \rightarrow 0$ ,  $c_1 \rightarrow \frac{1}{27} (2e + 75 c_5$ 
+ 60  $c_6)$ ,  $c_2 \rightarrow \frac{1}{27} (-2e + 60 c_5 + 75 c_6)$ ,  $c_3 \rightarrow \frac{1}{81} (100e + 375 c_5 + 354 c_6)$ ,  $c_4 \rightarrow \frac{1}{81} (-100e + 354 c_5 + 375 c_6)$ ,  $f_1 \rightarrow 0$ 
,  $f_2 \rightarrow 0$ ,  $f_3 \rightarrow 0$ ,  $f_4 \rightarrow 0$ ,  $f_5 \rightarrow 0$ ,  $f_6 \rightarrow 0$ ,  $d \rightarrow 0$ } eqChazy:
w(3)[z] == e w'[z] +  $\frac{c_5 w[z] - \frac{9}{5} w'[z]^2 + w[z] w''[z]}{-\frac{1}{3} + w[z]}$  +  $\frac{\frac{1}{27} (2e + 75 c_5 + 60 c_6) w'[z] - w'[z]^3 + w'[z] w''[z]}{-1 + w[z]}$  +
 $\frac{\frac{1}{81} (100e + 375 c_5 + 354 c_6) w'[z] - \frac{7}{15} w'[z]^2 + w'[z] w''[z]}{-3 + w[z]}$  +  $\frac{\frac{1}{81} (-100e + 354 c_5 + 375 c_6) w'[z] + \frac{7}{15} w'[z]^2 + w'[z] w''[z]}{3 + w[z]}$ 
+  $\frac{\frac{1}{27} (-2e + 60 c_5 + 75 c_6) w'[z] + w'[z]^3 + w'[z] w''[z]}{1 + w[z]}$  +  $\frac{c_6 w'[z] + \frac{9}{5} w'[z]^2 + w'[z] w''[z]}{\frac{1}{3} + w[z]}$ 
i=1 linearEqChazy:
 $\frac{1}{2} \sqrt{y[w]} y'[w] = \frac{1}{27 (-9 + 91 w^2 - 91 w^4 + 9 w^6)} \sqrt{y[w]} (-7e + 129e w^2 - 621e w^4 + 243e w^6 + 15(1 + 3w)^2 (59 - 111w - 15w^2$ 
+ 27 w3)  $c_5 + 15(1 - 3w)^2 (-59 - 111w + 15w^2 + 27w^3) c_6 - 3186 y[w] + 8100 w^2 y[w] - 1458 w^4 y[w] + 2457 w y'[w] -$ 
4914 w3 y'[w] + 729 w5 y'[w])
i=2 solSysChazy:
{ $\mathcal{A}_1 \rightarrow \frac{1}{8} (-8 + \sqrt{43})$ ,  $\mathcal{A}_2 \rightarrow 1 - \frac{\sqrt{43}}{8}$ ,  $\mathcal{A}_3 \rightarrow \frac{1}{48} (-31 - \sqrt{43})$ ,  $\mathcal{A}_4 \rightarrow \frac{1}{48} (31 + \sqrt{43})$ ,  $\mathcal{A}_5 \rightarrow -\frac{3}{16} (1 + \sqrt{43})$ ,  $\mathcal{A}_6 \rightarrow \frac{3}{16} (1 + \sqrt{43})$ ,  $b_1 \rightarrow 0$ ,
 $b_2 \rightarrow 0$ ,  $b_3 \rightarrow 0$ ,  $b_4 \rightarrow 0$ ,  $b_5 \rightarrow 0$ ,  $b_6 \rightarrow 0$ ,  $c_1 \rightarrow \frac{-4e - 12(-9 + \sqrt{43}) c_5 + 3(3 + \sqrt{43}) c_6}{9(-6 + \sqrt{43})}$ ,  $c_2 \rightarrow \frac{3(3 + \sqrt{43}) c_5 + 4(e - 3(-9 + \sqrt{43}) c_6)}{9(-6 + \sqrt{43})}$ ,
 $c_3 \rightarrow \frac{-15(7 + 4\sqrt{43}) c_5 + 8(5(-5 + \sqrt{43})e - 6(4 + \sqrt{43}) c_6)}{27(-6 + \sqrt{43})}$ ,  $c_4 \rightarrow -\frac{48(4 + \sqrt{43}) c_5 + 5(8(-5 + \sqrt{43})e + 3(7 + 4\sqrt{43}) c_6)}{27(-6 + \sqrt{43})}$ ,  $f_1 \rightarrow$ 
0,  $f_2 \rightarrow 0$ ,  $f_3 \rightarrow 0$ ,  $f_4 \rightarrow 0$ ,  $f_5 \rightarrow 0$ ,  $f_6 \rightarrow 0$ ,  $d \rightarrow 0$ } eqChazy:
 $\frac{(-15(7 + 4\sqrt{43}) c_5 + 8(5(-5 + \sqrt{43})e - 6(4 + \sqrt{43}) c_6)) w'[z]}{27(-6 + \sqrt{43})} + \frac{\frac{1}{48} (-31 - \sqrt{43}) w'[z]^3 + w'[z] w''[z]}{-3 + w[z]}$  +
 $\frac{(\frac{3(3 + \sqrt{43}) c_5 + 4(e - 3(-9 + \sqrt{43}) c_6)) w'[z]}{9(-6 + \sqrt{43})} + (1 - \frac{\sqrt{43}}{8}) w'[z]^3 + w'[z] w''[z])}{1 + w[z]}$  +
 $\frac{(-4e - 12(-9 + \sqrt{43}) c_5 + 3(3 + \sqrt{43}) c_6) w'[z]}{9(-6 + \sqrt{43})} + \frac{\frac{1}{8} (-8 + \sqrt{43}) w'[z]^3 + w'[z] w''[z]}{-1 + w[z]}$  +  $\frac{c_5 w'[z] - \frac{3}{16} (1 + \sqrt{43}) w'[z]^2 + w'[z] w''[z]}{-\frac{1}{3} + w[z]}$  +
 $\frac{c_6 w'[z] + \frac{3}{16} (1 + \sqrt{43}) w'[z]^2 + w'[z] w''[z]}{\frac{1}{3} + w[z]}$  +
 $\frac{(-48(4 + \sqrt{43}) c_5 + 5(8(-5 + \sqrt{43})e + 3(7 + 4\sqrt{43}) c_6)) w'[z]}{27(-6 + \sqrt{43})} + \frac{\frac{1}{48} (31 + \sqrt{43}) w'[z]^3 + w'[z] w''[z]}{3 + w[z]}$ 

```

i=2 linearEqChazy:

$$\frac{1}{2} \sqrt{y[w]} y''[w] = - \left(\sqrt{y[w]} \left(-14e + \sqrt{43} e + 258 e w^2 - 19 \sqrt{43} e w^2 - 1242 e w^4 + 99 \sqrt{43} e w^4 + 486 e w^6 - 81 \sqrt{43} e w^6 + 12 (1+3w)^2 \left(-8 \left(-5 + \sqrt{43} \right) - 3 \left(-15 + \sqrt{43} \right) w - 16 w^2 + 3 \left(1 + \sqrt{43} \right) w^3 \right) c_5 + 12 (1-3w)^2 \left(8 \left(-5 + \sqrt{43} \right) - 3 \left(-15 + \sqrt{43} \right) w + 16 w^2 + 3 \left(1 + \sqrt{43} \right) w^3 \right) c_6 + 1368 y[w] - 144 \sqrt{43} y[w] + 14652 w^2 y[w] - 2358 \sqrt{43} w^2 y[w] - 2916 w^4 y[w] + 486 \sqrt{43} w^4 y[w] + 4914 w y'[w] - 819 \sqrt{43} w y'[w] - 9828 w^3 y'[w] + 1638 \sqrt{43} w^3 y'[w] + 1458 w^5 y'[w] - 243 \sqrt{43} w^5 y'[w] \right) / \left(9 \left(-6 + \sqrt{43} \right) (-3+w) (-1+w) (1+w) (3+w) (-1+3w) (1+3w) \right)$$

i=3 solSysChazy:

$$\left\{ \mathcal{A}_1 \rightarrow -1 - \frac{\sqrt{43}}{8}, \mathcal{A}_2 \rightarrow \frac{1}{8} (8 + \sqrt{43}), \mathcal{A}_3 \rightarrow \frac{1}{48} (-31 + \sqrt{43}), \mathcal{A}_4 \rightarrow \frac{1}{48} (31 - \sqrt{43}), \mathcal{A}_5 \rightarrow \frac{3}{16} (-1 + \sqrt{43}), \mathcal{A}_6 \rightarrow -\frac{3}{16} (-1 + \sqrt{43}), b_1 \rightarrow 0, b_2 \rightarrow 0, b_3 \rightarrow 0, b_4 \rightarrow 0, b_5 \rightarrow 0, b_6 \rightarrow 0, c_1 \rightarrow \frac{4e - 12(9 + \sqrt{43})c_5 + 3(-3 + \sqrt{43})c_6}{9(6 + \sqrt{43})}, c_2 \rightarrow \frac{3(-3 + \sqrt{43})c_5 - 4(e + 3(9 + \sqrt{43})c_6)}{9(6 + \sqrt{43})}, c_3 \rightarrow \frac{-15(-7 + 4\sqrt{43})c_5 + 8(5(5 + \sqrt{43})e - 6(-4 + \sqrt{43})c_6)}{27(6 + \sqrt{43})}, c_4 \rightarrow -\frac{48(-4 + \sqrt{43})c_5 + 5(8(5 + \sqrt{43})e + 3(-7 + 4\sqrt{43})c_6)}{27(6 + \sqrt{43})}, f_1 \rightarrow 0, f_2 \rightarrow 0, f_3 \rightarrow 0, f_4 \rightarrow 0, f_5 \rightarrow 0, f_6 \rightarrow 0, d \rightarrow 0 \right\}$$

$$eqChazy: w^{(3)}[z] = e w'[z] + \frac{-\frac{48(-4 + \sqrt{43})c_5 + 5(8(5 + \sqrt{43})e + 3(-7 + 4\sqrt{43})c_6)}{27(6 + \sqrt{43})} w'[z] + \frac{1}{48} (31 - \sqrt{43}) w'[z]^3 + w'[z] w''[z]}{3 + w[z]} +$$

$$\frac{\frac{4e - 12(9 + \sqrt{43})c_5 + 3(-3 + \sqrt{43})c_6}{9(6 + \sqrt{43})} w'[z] + \left(-1 - \frac{\sqrt{43}}{8}\right) w'[z]^3 + w'[z] w''[z]}{-1 + w[z]} +$$

$$\frac{\frac{-15(-7 + 4\sqrt{43})c_5 + 8(5(5 + \sqrt{43})e - 6(-4 + \sqrt{43})c_6)}{27(6 + \sqrt{43})} w'[z] + \frac{1}{48} (-31 + \sqrt{43}) w'[z]^3 + w'[z] w''[z]}{-3 + w[z]} +$$

$$\frac{c_6 w'[z] - \frac{3}{16} (-1 + \sqrt{43}) w'[z]^3 + w'[z] w''[z]}{\frac{1}{3} + w[z]} + \frac{c_5 w'[z] + \frac{3}{16} (-1 + \sqrt{43}) w'[z]^3 + w'[z] w''[z]}{-\frac{1}{3} + w[z]} +$$

$$\frac{\frac{3(-3 + \sqrt{43})c_5 - 4(e + 3(9 + \sqrt{43})c_6)}{9(6 + \sqrt{43})} w'[z] + \frac{1}{8} (8 + \sqrt{43}) w'[z]^3 + w'[z] w''[z]}{1 + w[z]}$$

i=3 linearEqChazy:

$$\frac{1}{2} \sqrt{y[w]} y''[w] = \left(\sqrt{y[w]} \left(-14e - \sqrt{43} e + 258 e w^2 + 19 \sqrt{43} e w^2 - 1242 e w^4 - 99 \sqrt{43} e w^4 + 486 e w^6 + 81 \sqrt{43} e w^6 - 12 (1+3w)^2 \left(-8 (5 + \sqrt{43}) - 3 (15 + \sqrt{43}) w + 16 w^2 + 3 (-1 + \sqrt{43}) w^3 \right) c_5 - 12 (1-3w)^2 \left(8 (5 + \sqrt{43}) - 3 (15 + \sqrt{43}) w - 16 w^2 + 3 (-1 + \sqrt{43}) w^3 \right) c_6 + 1368 y[w] + 144 \sqrt{43} y[w] + 14652 w^2 y[w] + 2358 \sqrt{43} w^2 y[w] - 2916 w^4 y[w] - 486 \sqrt{43} w^4 y[w] + 4914 w y'[w] + 819 \sqrt{43} w y'[w] - 9828 w^3 y'[w] - 1638 \sqrt{43} w^3 y'[w] + 1458 w^5 y'[w] + 243 \sqrt{43} w^5 y'[w] \right) / \left(9 \left(6 + \sqrt{43} \right) (-3+w) (-1+w) (1+w) (3+w) (-1+3w) (1+3w) \right)$$

Таким образом, существует три решения системы Шази (solSysChazy) соответствующие корням $\alpha_2 = 1$, $\alpha_2 = -\frac{8\sqrt{43}+59}{27}$, $\alpha_2 = \frac{8\sqrt{43}-59}{27}$. Для каждого i ($i = 1, i = 2, i = 3$) приведено уравнение Шази (eqChazy) с коэффициентами, которые получены при решении соответствующей системы Шази. Поскольку в каждом из трех решений оказалось, что коэффициент $D = 0$, то внутри модуля была использована замена

$$w'(z) = \sqrt{y(w)}, \quad (13)$$

позволяющая свести построенное уравнение Шази к линейному уравнению (получается из уравнения linearEqChazy делением на $\sqrt{y(w)}$) второго порядка с шестью особыми точками. Так, например, для $i = 1$ с помощью команды

$$\text{In[4]:= lineq[1] = \frac{\text{linearEqChazy[1][[1]] - linearEqChazy[1][[2]]}{\sqrt{y[w]}} = 0 // \text{FullSimplify} // \text{TraditionalForm}$$

получается искомое линейное уравнение:

$$\frac{1}{-9 + 91w^2 - 91w^4 + 9w^6} (30(1+3w)^2(59+3w(-37+w(-5+9w)))c_5 + 30(1-3w)^2(-59+3w(-37+w(5+9w)))c_6 - 108(59-150w^2+27w^4)y[w] + 54w(91-182w^2+27w^4)y'[w] + (-1+9w^2)(2e(7-66w^2+27w^4) - 27(9-10w^2+w^4)y''[w])) = 0 \quad (14).$$

Уравнение (14) легко интегрируется с помощью команды

solutionLinear[1]=DSolve[(linearEqChazy[1]/.

{ a₁ → 1, a₂ → -1, a₃ → 3, a₂ → -3, a₂ → 1/3, a₂ → -1/3 }, y[w], w]//Simplify

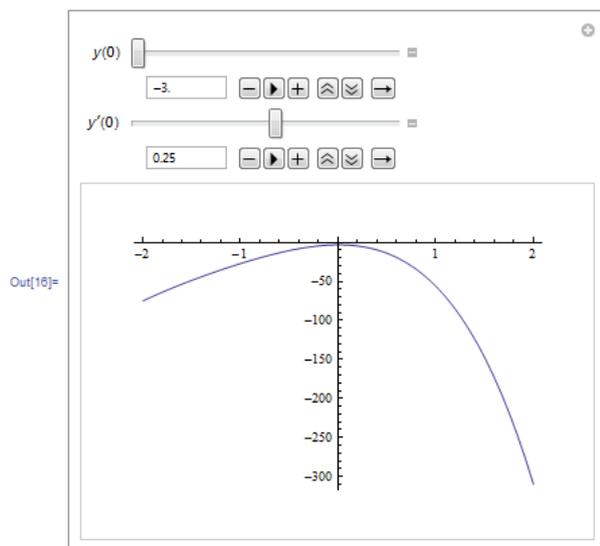
Общее решение уравнения (14) имеет вид:

$$\left\{ \left\{ y[w] \rightarrow 0 \right\}, \left\{ y[w] \rightarrow \frac{2e}{27} + ew^2 + \frac{((-3+w)(-1+3w))^{3/2} \sqrt{-9+91w^2-91w^4+9w^6} C[1]}{\sqrt{(-1+w)(1+w)(3+w)(1+3w)}} - \frac{w(1+w^2) \sqrt{-9+91w^2-91w^4+9w^6} C[2]}{\sqrt{3-10w+3w^2} \sqrt{-3-10w+10w^2+3w^4}} + \left(\frac{5}{18} + 5w\right) c_5 + \left(-\frac{5}{18} + 5w\right) c_6 \right\} \right\} \quad (15)$$

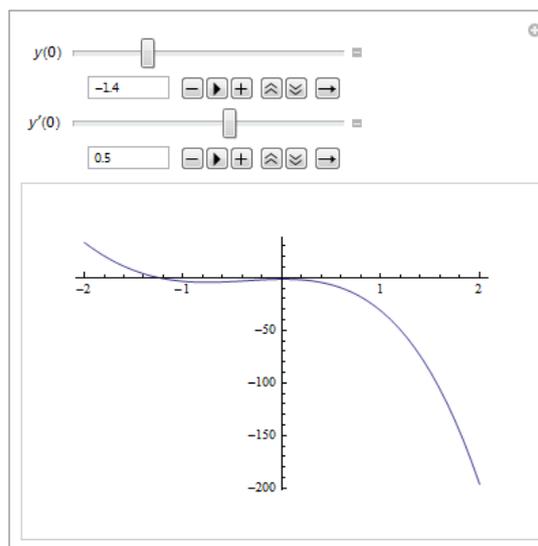
где C[1] и C[2] – произвольные постоянные.

Построить графики частных решений дифференциального уравнения в системе *Mathematica* легко с помощью функции **Plot**, задав значения параметров, входящих в общее решение. Версии системы *Mathematica* 6.0 и выше позволяют также строить частные решения, не определяя конкретных значений параметров, а задавая только интервалы их изменения с помощью модуля манипуляций **Manipulate**. Для уравнения (14) это выглядит следующим образом:

```
In[16]:= Manipulate[Plot[Evaluate[y[w] /. First[NDSolve[{{(lineq[1] /. {c5 → 1, c6 → 2, e → 3}), y[0] == a, y'[0] == b}, y, {w, -10, 10}]], {w, -2, 2}], ImagePadding → 25, PlotRange → Automatic], {{a, 1, TraditionalForm[y[0]]}, -3, 3}, {{b, 0, TraditionalForm[y'[0]]}, -3, 3}]
```



a)



б)

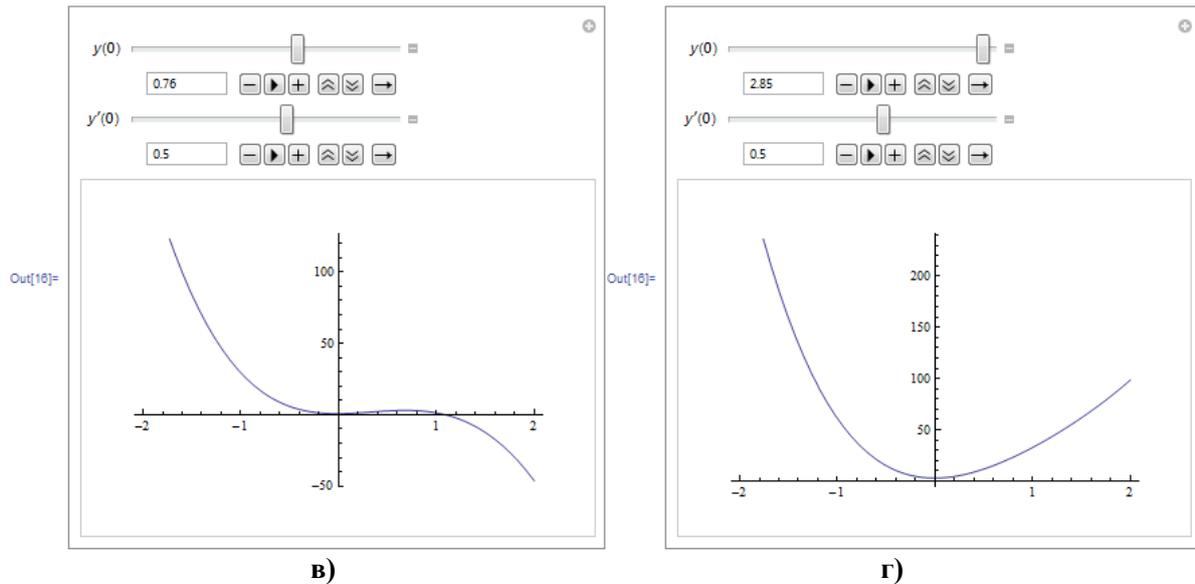


Рисунок – Графики частных решений дифференциального уравнения в системе *Mathematica*

Графики частных решений (Рисунок) изменяются с помощью двух слайдеров, которые автоматически создаются модулем **Manipulate** с помощью динамического объекта **Slider**, и изменение положения слайдеров отвечает изменению начальных условий y_0 и y_0' . Тем самым используется метод объектно-ориентированного программирования для осуществления анимации интегральных кривых в зависимости от изменения начальных условий.

Зная вид общего решения (15) уравнения (14), легко находим общий интеграл уравнения Шази eqChazy для $i = 1$ [7] (аналогично общий интеграл может быть получен и для двух других значений i):

$$\text{Solve}\left[\alpha + 54 C[3] == \frac{\text{RootSum}\left[4 e + 486 C[1] - 3240 C[1] m_1 - 54 C[2] m_1 + 54 e m_1^2 + 6372 C[1] m_1^2 - 3240 C[1] m_1^3 - 54 C[2] m_1^3 + 486 C[1] m_1^4 + 15 c_5 + 270 m_1 c_5 - 15 c_6 + 270 m_1 c_6 \epsilon, \text{Log}[-m_1 + w[m]]\right]}{-60 C[1] - C[2] + 2 e m_1 + 236 C[1] m_1 - 180 C[1] m_1^2 - 3 C[2] m_1^2 + 36 C[1] m_1^3 + 5 c_5 + 5 c_6}, w[m]\right]$$

Замечание. Если при заданных значениях величин $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6$ корни многочлена eq α_2 выражаются через Root-объекты, то в приведенном модуле constrEquationChazy вместо команды

```
sol = solve [eq $\alpha_2$  == 0,  $\alpha_2$ ] // Union // Flatten;
```

следует написать команду

```
sol = N[solve [eq $\alpha_2$  == 0,  $\alpha_2$ ] // Union // Flatten; sol1 = sol;]
```

В результате все вычисления могут быть проведены с нужным числом значащих цифр, посредством задания соответствующих опций инструкции **N**.

Заключение

Используя модуль **constrEquationChazy [a1_, a2_, a3_, a4_, a5_, a6_]**, удастся найти решения системы Шази для нелинейного дифференциального уравнения третьего порядка с шестью постоянными полюсами. Если при этом коэффициент $D = 0$, то данный модуль строит линейное дифференциальное уравнение второго порядка, к которому сводится уравнение Шази. Используя команды DSolve или NDSolve, удастся решить построенные уравнения и с помощью визуализационных средств системы

Mathematica определить поведение интегральных кривых. В частности, используя функции Manipulate или Animate, удастся установить характер изменения интегральных кривых в зависимости от одного или более параметров, входящих в общее решение или общий интеграл дифференциального уравнения Шази.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Chazy, J. Sur les equations differentielles du troisieme ordre et d'ordre superieur, don't l'integrale generale a ses points critiques fixes / J. Chazy // Acta Math. – 1911. – Vol. 34. – P. 317–385.
2. Painleve, P. Lecons sur les theorie analytique des equations differentielles / P. Painleve // Professies a Stokholm. – Paris, 1897.
3. Мартынов, И.П. Использование системы *Mathematica* при решении системы уравнений Шази / И.П. Мартынов, А.В. Чичурин // Математическое моделирование и дифференциальные уравнения: Тезисы докладов межд. конф., Минск, 2007, Минск, ИМ НАНБ, 2007. – С. 89–91.
4. Мартынов, И.П. О решении системы уравнений Шази / И.П. Мартынов, А.В. Чичурин // Нелінійні Коливання. – 2009. – Т. 12. № 1. – С. 92–98.
5. Чичурин, А.В. Уравнение Шази и линейные уравнения класса Фукса : Монография / А.В. Чичурин. – 2-е изд., доп. и перераб. – М. : Изд-во РУДН, 2003. – 163 с.
6. Чичурин, А.В. О компьютерном моделировании метода нахождения решений дифференциальных уравнений второго и третьего порядков с шестью особыми точками / А.В. Чичурин // Современные информационные компьютерные технологии mcIT-2010 : материалы II Международной науч.-практ. Конф. [Электронный ресурс] / УО «Гр.ун-т им. Я. Купаль». – Гродно, 2010. – 1 электр. компакт-диск (CD-R).
7. Wolfram Web Resources [Electronic resource] / ed. S. Wolfram. – Champaign, 2010. – Mode of access : www.wolfram.com – Date of access : 1.09.2010.

A.V. Chichurin. Solution of Chazy System and Integration of Chazy Differential Equation with Six Permanent Poles with the Help of Mathematica

Chazy non-linear differential equation of the third order with six permanent poles is considered. Using the possibility of *Mathematica* system, program module allowing to find the solution to the corresponding Chazy system is built and program measures, allowing to find the solution to Chazy equation in a number or analytic form are given.