УДК 512.542

А.А. Трофимук, В.С. Монахов

КОНЕЧНЫЕ ГРУППЫ С ОГРАНИЧЕНИЯМИ НА СИЛОВСКИЕ ПОДГРУППЫ ФАКТОРОВ

Изучено строение разрешимой группы с бициклическими силовскими подгруппами в факторах нормального ряда и получена оценка производной длины разрешимой группы, обладающей нормальным рядом, в котором небициклические силовские подгруппы факторов имеют ограниченный порядок.

Рассматриваются только конечные группы. Все обозначения и используемые определения соответствуют [1].

В работе [2, следствие 1.5] установлено, что если порядок разрешимой группы G не делится на $(n+1)$-е степени простых чисел, то производная длина фактор-группы $G/\Phi(G)$ не превышает $3+n$. Бициклической называют группу $G = AB$, являющуюся произведением двух циклических подгрупп A и B. Группы с бициклическими силовскими подгруппами изучались в работе [3, теорема 1]. В частности, доказано, что производная длина таких групп не превышает 6, а нильпотентная длина не превышает 4. В работе [4] установлено, что производная длина разрешимой группы G, силовские p-подгруппы которой либо бициклические, либо порядка p^3 для каждого $p \in \pi(G)$, не превышает 6; $l_2(G) \le 2$, $l_3(G) \le 2$, $l_p(G) \le 1$ для $p > 3$. Здесь $l_p(G)$ – p-длина группы G.

Напомним, что нормальным рядом группы G называется цепочка подгрупп
$$1 = G_0 \subseteq G_1 \subseteq \ldots \subseteq G_m = G, \qquad (1)$$
в которой подгруппа G_i нормальна в группе G для всех i. Фактор-группы G_{i+1}/G_i называются факторами нормального ряда (1).

Нахождение инвариантов разрешимых групп с заданными свойствами силовских подгрупп нашло развитие в исследовании строения групп по свойствам силовских подгрупп в факторах их нормальных рядов. Из теоремы Цассенхауза [1, теорема IV.2.11] следует, что группа G, обладающая нормальным рядом с циклическими силовскими подгруппами в факторах, является сверхразрешимой. Поэтому группа G дисперсивна по Оре, ее коммутант нильпотентен и производная длина фактор-группы $G/\Phi(G)$ не выше 2.

Натуральное число n называется свободным от кубов, если n не делится на кубы простых чисел. В работе [5] изучены разрешимые группы G, обладающие нормальным рядом с факторами порядков, свободных от кубов. В частности, установлено, что производная длина $G/\Phi(G)$ не превышает 5, а нильпотентная длина G не выше 4.

Основными результатами данной работы являются теорема 1, в которой получено описание разрешимой группы с бициклическими силовскими подгруппами в факторах нормального ряда, и теорема 2, в которой получена оценка производной длины разрешимой группы, обладающей нормальным рядом, в котором небициклические силовские подгруппы факторов имеют ограниченный порядок.

В доказательствах теорем используются следующие вспомогательные утверждения.

Лемма 1. Пусть разрешимая группа G обладает нормальным рядом таким, что:

1) если все силовские подгруппы в факторах бициклические, то:

1. главные факторы группы G имеют порядки p, q^2 или 8, где p и q – простые числа из $\pi(G)$.

2.1) индексы максимальных подгрупп группы G является простыми числами, квадратами простых чисел или равны 8.

2. если существует в факторах хотя бы одна небициклическая силовская подгруппа и порядок каждой такой небициклической силовской p-подгруппы не делится на p^{n+1}, $p \in \pi(G)$, n – натуральное число, то порядки главных факторов группы G и индексы максимальных подгрупп группы G не делятся на p^{n+1}, $p \in \pi(G)$.

Лемма 2. Пусть в p-разрешимой группе G силовская p-подгруппа имеет порядок $\leq p^3$. Если $p > 3$, то $l_p(G) \leq 1$.

Лемма 3 [1, теорема VI.6.6]. p-длина разрешимой группы не превосходит производную длину и ступень нильпотентности своей силовской p-подгруппы.

В работе [2] введена функция $m(G) = \max\limits_{p\in\pi(G)} m_p(G)$, где

$$m_p(G) = \max\{log_p(|G:M|) \mid M <\cdot G, |G:M| = p^a\}, p \in \pi(G).$$

Здесь запись $M <\cdot G$ означает, что M – максимальная подгруппа в G.

Лемма 4 [2, теорема 1]. Пусть G – разрешимая группа. Тогда $d(G/\Phi(G)) \leq 1 + \rho(m(G))$.

Здесь $d(G)$ – производная длина группы G.

Теорема 1. Пусть разрешимая группа G обладает нормальным рядом, факторы которого имеют бициклические силовские подгруппы. Тогда справедливы следующие утверждения.

1. Нильпотентная длина группы G не превышает 4, а производная длина фактор-группы $G/\Phi(G)$ не превышает 5.

2. $l_2(G) \leq 2$, $l_3(G) \leq 2$ и $l_p(G) \leq 1$ для всех простых $p > 3$.

3. Группа G содержит нормальную дисперсивную по Оре подгруппу N такую, что фактор-группа G/N сверхразрешима.

4. Группа G содержит нормальную дисперсивную по Оре $\{2,3,7\}'$-холлову подгруппу.

5. Если группа G A_4-свободна, то:

5.1) $l_p(G) \leq 1$ для любого простого p;

5.2) производная длина группы $G/\Phi(G)$ не превышает 3.

6. Если G имеет нечетный порядок, то:

6.1) G дисперсивна по Оре;

6.2) коммутант группы G нильпотентен. В частности, фактор-группа $G/\Phi(G)$ метабелева.

Группа G называется A_4-свободной, если она не содержит секций изоморфных знакопеременной группе A_4.

Ясно, что теорема 1 охватывает все разрешимые группы, обладающие нормальным рядом с бициклическими факторами.

Следующий пример показывает, что оценки, полученные в теореме 1, являются точными. Здесь Z_n – циклическая группа порядка n.

Пример. Пусть S – экстраспециальная группа порядка 27. Полупрямое произведение $G = [S]GL(2,3)$ является группой порядка $2^4 3^3$ с подгруппой Фраттини

$\Phi(G)$ порядка 3. Производная длина G равна 6, а производная длина $G/\Phi(G)$ равна 5. Данная группа обладает главным рядом

$$1 \subset Z_3 \subset S \subset [S]Z_2 \subset [S]Q_8 \subset [S]SL(2,3) \subset G$$

с бициклическими факторами, где Q_8 – группа кватернионов порядка 8. Кроме того, 2-длина и 3-длина данной группы равна 2.

Теорема 2. Пусть разрешимая группа G, обладает нормальным рядом, в факторах которого имеются небициклические силовские подгруппы и порядок каждой такой небициклической силовской p-подгруппы не делится на p^{n+1}, $p \in \pi(G)$, n – натуральное число. Тогда производная длина группы $G/\Phi(G)$ не превышает $\rho(n)+1$.

Здесь $\rho(n)$ – максимум производных длин вполне приводимых разрешимых подгрупп полной линейной группы $GL(n, \mathbf{P})$ над полем $\mathbf{P}$.

Следствие 3. Пусть в разрешимой группе G имеется небициклическая силовская подгруппа и порядок каждой небициклической силовской p-подгруппы не делится на p^{n+1}, $p \in \pi(G)$, n – натуральное число. Тогда справедливы следующие утверждения:

1. $d(G) \leq \rho(n) + \delta(n) + 1$, где $\delta(n) = \max\{k \in \mathbf{N} \mid n \geq 2^k + 2k - 2\}$.

2 . Если силовская p-подгруппа G_p бициклическая, то $l_p(G) \leq 1$, $p > 2$ и $l_2(G) \leq 2$. Если G_p небициклическая и $|G_p| = p^{n_p}$, то $l_p(G) \leq \delta(n_p) + 1$, где $n_p \leq n$.

Здесь $\mathbf{N}$ – множество всех натуральных чисел.

Лемма 5 [6]. Производная длина группы G порядка p^n не превышает $\delta(n)+1$. В частности, справедливы утверждения:

1) если $n \leq 2$, то $d(G) = 1$;
2) если $3 \leq n \leq 5$, то $d(G) \leq 2$;
3) если $6 \leq n \leq 11$, то $d(G) \leq 3$;
4) если $12 \leq n \leq 21$, то $d(G) \leq 4$;
5) если $22 \leq n \leq 39$, то $d(G) \leq 5$;
6) если $40 \leq n \leq 73$, то $d(G) \leq 6$.

Из следствия 3, используя значения функций $\delta(n)$ и $\rho(n)$ для конкретных значений n, см. лемму 5 и теорему A_S [7, лемма 5, теорема A_S], получим следующее следствие.

Следствие 4. Пусть G – разрешимая группа, у которой порядок каждой небициклической силовской p-подгруппы не делится на p^{n+1}, $p \in \pi(G)$, $n \in \mathbf{N}$. Тогда:

1) если $3 \leq n \leq 6$, то $d(G) \leq n+4$;
2) если $7 \leq n \leq 10$, то $d(G) \leq n+3$;
3) если $n = 11$, то $d(G) \leq 13$;
4) если $12 \leq n \leq 17$, то $d(G) \leq 14$;
5) если $18 \leq n \leq 21$, то $d(G) \leq 15$;
6) если $22 \leq n \leq 25$, то $d(G) \leq 16$;
7) если $26 \leq n \leq 33$, то $d(G) \leq 17$;
8) если $34 \leq n \leq 39$, то $d(G) \leq 18$;
9) если $40 \leq n \leq 65$, то $d(G) \leq 19$;
10) если $n \geq 66$, то $d(G) \leq 5\log_9(n-2) + \delta(n) + 6{,}3$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Huppert, B. Endliche Gruppen I / B. Huppert. – Berlin–Heidelberg–New York : Springer, 1967.
2. Монахов, В.С. Об индексах максимальных подгрупп конечных разрешимых групп / В.С. Монахов // Алгебра и логика. – 2004. – Т. 43, № 4. – С. 411–424.
3. Монахов, В.С. О максимальных и силовских подгруппах конечных разрешимых групп / В.С. Монахов, Е.Е. Грибовская // Математические заметки. – 2001. – Т. 70, № 4. – С. 603–612.
4. Монахов, В.С. Конечные разрешимые группы, силовские p -подгруппы которых либо бициклические, либо имеют порядок p^3 / В.С. Монахов, А.А. Трофимук // Фундаментальная и прикладная математика. – 2009. – Т. 15, № 2. – С. 121–131.
5. Монахов, В.С. Конечные разрешимые группы с порядками факторов нормального ряда, свободными от кубов / В.С. Монахов, А.А. Трофимук // Весн. Брэсцкага ун-та. Сер 4. Фізіка. Матэматыка. – 2010. – № 1. – С. 118–126.
6. Mann, A. The derived length of p-groups / A. Mann // Journal of Algebra. – 2000. –Vol. 224. – P. 263–267.
7. Newman, M.F. The solvable length of a solvable linear groups / M.F. Newman // Math. Z. – 1972. – Bd. 126. – P. 59–70.

***A.A. Trofimuk, V.S. Monakhov.* Finite Groups with Restrictions on Sylow Subgroups of Factors**

The structure of solvable group with bicyclic Sylow subgroups in factors of a normal series is studied. The estimation of derived length of the solvable group possessing a normal series in which nonbicyclic Sylow subgroups of factors have the limited order is obtained.