УДК 512.542

В.С. Монахов, А.А. Трофимук

КОНЕЧНЫЕ ГРУППЫ С ОГРАНИЧЕНИЯМИ НА СИЛОВСКИЕ ПОДГРУППЫ В ПОДГРУППАХ ШМИДТА

Натуральное число n называется свободным от четвертых степеней, если p^4 не делит n для всех простых p. Изучено строение группы, подгруппы Шмидта которой имеют нормальные силовские подгруппы порядка, свободного от четвертых степеней. В частности, получен критерий отсутствия в группе подгрупп Шмидта, нормальные силовские подгруппы которых имеют порядки, делящиеся на четвертые степени простых чисел.

Введение

Рассматриваются только конечные группы. Ненильпотентная группа, у которой все собственные подгруппы нильпотентны, называется группой Шмидта, или минимальной ненильпотентной группой. В своей работе О.Ю. Шмидт [1] доказал, что группа Шмидта бипримарна (т.е. её порядок делится точно на два различных простых числа), одна из силовских подгрупп нормальна, а другая циклическая, и указал систему индексов главного ряда группы Шмидта. В дальнейшем $S_{<p,q>}$-группой будем называть группу Шмидта с нормальной силовской p-подгруппой и ненормальной циклической силовской q-подгруппой. Подробный обзор результатов о группах Шмидта с их приложениями в теории групп содержится в работе [2].

Пусть n и m – натуральные числа. Говорят, что m свободно от n-х степеней, если p^n не делит m для всех простых чисел p. При $n=2$ говорят, что m свободно от квадратов, а при $n=3$ – свободно от кубов.

В 1995 г. В.С. Монахов [3] исследовал строение групп, у которых все подгруппы Шмидта сверхразрешимы, и строение групп, у которых все подгруппы Шмидта несверхразрешимы. Поскольку группа Шмидта сверхразрешима в точности тогда, когда ее нормальная силовская подгруппа имеет простой порядок, то из [3] следует описание групп, подгруппы Шмидта которых имеют порядки, свободные от квадратов. В [4] были исследованы группы, подгруппы Шмидта которых имеют порядки, свободные от кубов. В частности, перечислены ее бипримарные подгруппы и приведены примеры как разрешимых, так и неразрешимых таких групп.
В настоящей заметке исследуются группы, у которых подгруппы Шмидта имеют нормальные силовские подгруппы, порядки которых делят кубы простых чисел. Отсюда вытекает информация о строении групп с подгруппами Шмидта порядков, свободных от четвертых степеней.

Критерий отсутствия в группе подгрупп Шмидта, нормальные силовские подгруппы которых имеют порядки, делящиеся на четвертые степени простых чисел, получен в следующей теореме.

***Теорема* 1.** В группе G все подгруппы Шмидта имеют нормальные силовские подгруппы порядков, свободных от четвертых степеней, тогда и только тогда, когда для каждой пары простых чисел $\{s,r\}\neq\{3,2\}$ из $\pi(G)$ таких, что $s>r$ и s не делит r^2+r+1, любая $\{s,r\}$-подгруппа группы G является s-замкнутой. Кроме того, если r не делит $(s+1)(s^3-1)$, то любая $\{s,r\}$-подгруппа группы G нильпотентна.

Строение группы, подгруппы Шмидта которой имеют нормальные силовские подгруппы порядков, свободных от четвертых степеней, установлено в следующей теореме.

***Теорема* 2.** Пусть в группе G все подгруппы Шмидта имеют нормальные силовские подгруппы порядков, свободных от четвертых степеней. Тогда справедливы следующие утверждения.

1 . Множество подгрупп Шмидта в группе G исчерпывается следующими подгруппами:

1.1) $S_{<p,q>}$-подгруппами $[Z_p]Z_{q^i}$, где q делит $p-1$, $i\in\mathbf{N}$;

1.2) $S_{<p,q>}$-подгруппами $[E_{p^2}]Z_{q^i}$, $[[E_{p^2}]Z_p]Z_{q^i}$, $[T]Z_{3^i}$, где q делит $p+1$, $q>2$, $i\in\mathbf{N}$, и T – группа кватернионов порядка 8;

1.3) $S_{<p,q>}$-подгруппами $[E_{p^3}]Z_{q^i}$, где q не делит p^2-1, но делит p^2+p+1, $i\in\mathbf{N}$.

2 . Тогда и только тогда в группе G нет подгрупп Шмидта типа 1.1) и 1.2), когда:

2.1) группа G 2-замкнута и 3-замкнута;

2.2) для любых простых $s>r>3$ из $\pi(G)$ таких, что r делит s^2-1, $\{s,r\}$-холлова подгруппа r-замкнута.

3 . Тогда и только тогда в группе G нет подгрупп Шмидта типа 1.1) и 1.3), когда:

3.1) группа G 2-замкнута;

3.2) $3'$- и $2'$-холловы подгруппы дисперсивны по Оре;

3.3) $\{s,r\}$-холлова подгруппа нильпотентна для всех простых чисел $s>r>2$ из $\pi(G)$ таких, что r не делит $s+1$.

4 . Тогда и только тогда в группе G нет подгрупп Шмидта типа 1.2) и 1.3), когда:

4.1) группа G дисперсивна по Оре;

4.2) $\{s,r\}$-холлова подгруппа нильпотентна для всех простых чисел $s>r$ из $\pi(G)$ таких, что r не делит $s-1$.

Здесь $\mathbf{N}$ – множество всех натуральных чисел, E_{p^n} – элементарная абелева группа порядка p^n, Z_n – циклическая группа порядка n. Запись $[A]B$ означает полупрямое произведение с нормальной подгруппой A.

1. Вспомогательные результаты

Символами p и q всегда будем обозначать различные простые числа, а m – показатель p по модулю q. Напомним, что показателем числа p по модулю q называют такое наименьшее натуральное число m, что q делит (p^m-1). Через $\pi(G)$ обозначается множество всех простых чисел, делящих порядок группы G.

Говорят, что группа G дисперсивна, если она обладает нормальным рядом, факторы которого изоморфны силовским подгруппам. Дисперсивной по Оре называется группа G порядка $p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\dots p_n^{\alpha_n}$, $p_1>p_2>\dots>p_n$, у которой для каждого $i\in\{1,2,\dots,n\}$ имеется нормальная подгруппа порядка $p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\dots p_i^{\alpha_i}$. Дисперсивная по Оре группа G p-замкнута для наибольшего $p\in\pi(G)$ и q-нильпотентна для наименьшего $q\in\pi(G)$.

Лемма 1. [2, теорема 2.1] Если группа не p-нильпотентна, то в ней существует $S_{<p,q>}$-подгруппа для некоторого q.

Лемма 2. Если $\{p,q\}$-группа не q-замкнута, то в ней существует $S_{<p,q>}$-подгруппа.

Доказательство. Утверждение вытекат из леммы 1.

Лемма 3. [2, теорема 2.4] В любой не 2-замкнутой группе существует 2-нильпотентная $2d$-подгруппа Шмидта.

Лемма 4. Пусть $S=[P]Q$ – группа Шмидта, где P – нормальная силовская p-подгруппа, Q – ненормальная силовская q-подгруппа, p, q – различные простые числа. Тогда:

1) если q делит $p-1$, то $P \cong Z_p$;

2) если q не делит $p-1$, но делит $p+1$, то либо $P \cong E_{p^2}$, либо P – неабелева группа порядка p^3;

3) если q не делит p^2-1, но делит p^2+p+1, то $P \cong E_{p^3}$;

4) если q не делит p^3-1 и $p+1$, то порядок S делится на p^4.

В частности,

a) если порядок подгруппы P делит p^2, то либо $S=[Z_p]Z_{q^i}$, где q делит $p-1$, либо $S=[E_{p^2}]Z_{q^i}$, где q не делит $p-1$, но делит $p+1$.

b) если порядок подгруппы P делит p^3, то

либо $S=[Z_p]Z_{q^i}$, где q делит $p-1$,

либо $S \in \{[E_{p^2}]Z_{q^i}, [[E_{p^2}]Z_p]Z_{q^i}, [T]Z_{3^i}\}$, где q не делит $p-1$, но делит $p+1$ и T – группа кватернионов порядка 8, $q>2$,

либо $S=[E_{p^3}]Z_{q^i}$, где q не делит p^2-1, но делит p^2+p+1.

Доказательство. Пусть m – показатель числа p по модулю q.

1. Если q делит $p-1$, то $m=1$ и по теореме 1.3 [2] $P \cong Z_p$.

2. Если q не делит $p-1$, но делит $p+1$, то $m=2$ и, по теореме 1.2–1.3 [2], либо $P \cong E_{p^2}$, либо P – неабелева группа порядка p^3 экспоненты p или 4.

3. Если q не делит p^2-1, но делит p^2+p+1, то $m=3$ и, по теореме 1.3 [2], $P \cong E_{p^3}$.

4. Если q не делит p^3-1 и $p+1$, то, по теоремам 1.2–1.3 [2], $m \ge 4$ и порядок S делится на четвертую степень простого числа p.

Если порядок P делит p^2, то $m \le 2$ и возможны только случаи 1) и 2). Поэтому либо $S=[Z_p]Z_{q^i}$, где q делит $p-1$, либо $S=[E_{p^2}]Z_{q^i}$, где q не делит $p-1$, но делит $p+1$.

Если порядок P делит p^3, то $m \le 3$ и возможны случаи 1)–3). Тогда либо $S=[Z_p]Z_{q^i}$, где q делит $p-1$, либо $S \in \{[E_{p^2}]Z_{q^i}, [[E_{p^2}]Z_p]Z_{q^i}, [T]Z_{3^i}\}$, где q не делит

$p-1$, но делит $p+1$ и T – группа кватернионов порядка 8, либо $S=[E_{p^3}]Z_{q^i}$, где q не делит p^2-1, но делит p^2+p+1. Лемма доказана.

Группы, у которых все подгруппы Шмидта имеют нормальные силовские подгруппы порядков, свободных от четвертых степеней, обладают важным свойством π-однородности.

Пусть π – некоторое множество простых чисел. Группа называется π-замкнутой, если она содержит нормальную π-холлову подгруппу. Группа G называется π-однородной, если $N_G(H)/C_G(H)$ – π-группа для любой π-подгруппы $H \le G$. Для любого множества π из π'-замкнутости группы следует её π-однородность. Из π-од-нородности группы не всегда следует её π'-замкнутость. Например, при $\pi=\{2,3\}$ знакопеременная группа A_5 является π-однородной, но не π'-замкнутой.

Лемма 5. Пусть π – некоторое множество простых чисел и G – π-однородная группа. Если выполняется любое одно из следующих условий:

1) $|\pi|=1$;
2) $2 \notin \pi$;
3) G – D_π-группа,

то группа G π'-замкнута. В частности, если G – разрешимая π-однородная группа, то G π'-замкнута.

Доказательство. 1. Если $|\pi|=1$, то $\pi=\{p\}$ и по теореме Фробениуса, [5, теорема IV.5.8] группа G p-нильпотентна, т.е. π'-замкнута.

2. Утверждение доказано в работе [6] с использованием классификации простых групп.

3. Утверждение доказано в работе [7].

Теорема 3. Пусть G – группа, $\pi(G)=\{p_1,\dots,p_n\}$, где $p_1<p_2\dots<p_n$, и $\pi_i=\{p_1,\dots,p_i\}$, причем порядки нормальных силовских подгрупп всех подгрупп Шмидта группы G, свободны от четвертых степеней. Предположим, что в G нет $S_{<p,q>}$-подгрупп для всех простых $p,q\in\pi(G)$ таких, что q не делит p^2-1, но делит p^2+p+1. Тогда справедливы следующие утверждения:

1) если $\{2,3\}\subseteq\pi(G)$, то G – π_i-однородная группа для каждого $i\ge 2$;
2) если $|\{2,3\}\cap\pi(G)|\le 1$, то G – π_j-однородная группа для для каждого $j\ge 1$.

Доказательство. Допустим противное: пусть существует номер i, для которого группа G не является π_i-однородной. Это означает, что существует π_i-подгруппа T такая, что $N_G(T)/C_G(T)$ не является π_i-группой. Поэтому существует простое $p>p_i$, которое делит $|N_G(T)/C_G(T)|$. Пусть P – силовская p-подгруппа из $N_G(T)$. Так как P не содержится в $C_G(T)$, то существует силовская q-подгруппа Q в T такая, что P не содержится в $C_G(Q)$. Пусть $H=N_G(T)$. Из леммы Фраттини следует, что $H=N_H(Q)T$.

Так как $P\subseteq H$ и p не делит $|T|$, то $P\subseteq N_H(Q)$. Так как Q нормальна в $N_H(Q)$, то в группе $N_H(Q)$, имеется $\{p,q\}$-подгруппа QP, причем QP q-замкнута. Если $[Q]P$ – p-замкнута, то $P\le C_G(Q)$, противоречие. Значит, $[Q]P$ не p-замкнута и, по лемме 2, в группе $[Q]P$ существует $S_{<q,p>}$-подгруппа. Так как в группе G все подгруппы Шмидта имеют нормальные силовские подгруппы порядков, свободных от четвертых степеней, то из леммы 4 следует, что или p делит $q-1$, или p не делит $q-1$, но делит $q+1$, или p не делит q^2-1, но делит q^2+q+1. Так как $p>q$ и в группе G нет $S_{<q,p>}$-подгрупп, где p не делит q^2-1, но делит q^2+q+1, то возможен только вариант, когда $q=2$, $p=3$, т.е. $\{2,3\}\subseteq\pi(G)$ и $i=1$. Противоречие.

Следствие. Пусть порядки нормальных силовских подгрупп всех подгрупп Шмидта группы G свободны от четвертых степеней. Предположим, что в G нет $S_{<p,q>}$-подгрупп для всех простых $p,q\in\pi(G)$ таких, что q не делит p^2-1, но делит p^2+p+1. Тогда справедливы следующие утверждения.

1. Если $\{2,3\}\subseteq\pi(G)$, то G является $\{2,3\}$-однородной.
2. Если $3\in\pi(G)$, $2\notin\pi(G)$, то G является 3-однородной.
3. Если $2\in\pi(G)$, $3\notin\pi(G)$, то G является 2-однородной.

Лемма 6. Пусть G – разрешимая группа, подгруппы Шмидта которой имеют нормальные силовские подгруппы порядков, свободных от четвертых степеней. Предположим, что в G нет $S_{<p,q>}$-подгрупп для всех простых $p,q\in\pi(G)$ таких, что q не делит p^2-1, но делит p^2+p+1. Тогда $\{2,3\}'$-холлова подгруппа группы нормальна и дисперсивна по Оре. Кроме того, $2'$- и $3'$-холловы подгруппы группы G дисперсивны по Оре.

Доказательство. По следствию теоремы 3 и по лемме 5, $\{2,3\}'$-холлова подгруппа H нормальна в группе G.

Пусть $\pi(H)=\{p_1,p_2,...,p_n\}$ и $p_1<p_2<...<p_n$. Тогда, по теореме 3, группа H π_i-однородна для каждого $i=1,2,...,n$ и, по лемме 5, H π_i'-замкнута для каждого $i=1,2,...,n$. Значит, существует нормальный ряд

$$1=H_{\pi_n'}\le H_{\pi_{n-1}'}\le\ldots\le H_{\pi_1'}\le H,$$

факторы которого изоморфны силовским подгруппам группы H:

$$H_{\pi_{n-1}'}/1\approx H_{p_n},\ldots,H/H_{\pi_1'}\approx H_{p_1},$$

поэтому H будет дисперсивна по Оре.

2. Доказательство теоремы 1

Пусть группе G все подгруппы Шмидта имеют нормальные силовские подгруппы порядков, свободных от четвертых степеней, и пусть H – произвольная $\{s,r\}$-подгруппа группы G, где s и r – простые числа из $\pi(G)$ такие, что $\{s,r\}\neq\{3,2\}$, $s>r$ и s не делит r^2+r+1. Если H не s-замкнута, то, по лемме 2, в ней существует $S_{<r,s>}$-подгруппа S. По условию теоремы порядок ее нормальной силовской r-подгруппы делит r^3. По лемме 4 простое число s делит либо $r-1$, либо не делит $r-1$, но делит $r+1$, либо не делит r^2-1, но делит r^2+r+1. Первый случай невозможен, так как $s>r$. Второй случай выполняется только при $s=3$ и $r=2$, что противоречит условию. Так как по условию s не делит r^2+r+1, то и в третьем случае имеем противоречие. Поэтому подгруппа H s-замкнута.

Предположим, что подгруппа H ненильпотентна. Тогда H не r-замкнута и, по лемме 2, в H существует $S_{<s,r>}$-подгруппа S, нормальная силовская s-подгруппа которой имеет порядок, делящий s^3. Из леммы 4 следует, что или r делит $s-1$, или r

не делит $s-1$, но делит $s+1$, или r не делит s^2-1, но делит s^2+s+1. Противоречие с тем, что r не делит $(s+1)(s^3-1)$. Значит, H нильпотентна.

Обратно. Пусть для группы G выполняются условия теоремы и S – $S_{<p,q>}$-подгруппа, p и q из $\pi(G)$. Предположим, что $\{p,q\}=\{2,3\}$. Тогда по лемме 4 нормальная силовская p-подгруппа имеет порядок, делящий p^3. Пусть $\{p,q\}\neq\{3,2\}$. Предположим, что $p>q$. Если q делит $(p+1)(p^3-1)$, то по лемме 4 нормальная силовская p-подгруппа имеет порядок, делящий p^3. Если q не делит $(p+1)(p^3-1)$, то, по условию, группа S нильпотентна. Противоречие. Предположим, что $q>p$. Очевидно, что q не делит p^2-1. Поэтому если q делит p^2+p+1, то, по лемме 4, нормальная силовская p-подгруппа имеет порядок, делящий p^3. Если же q не делит p^2+p+1, то, по условию теоремы, группа S q-замкнута. Противоречие. Теорема 1 доказана полностью.

Пример 1. Группа $G=[E_{2^5}]Z_5$ не является 5-замкнутой и имеет в качестве своей подгруппы группу Шмидта $[E_{2^4}]Z_5$.

Пример 2. Группа $G=([E_{2^3}]Z_7)\times D_{10}$ имеет порядок $2^4\cdot 5\cdot 7$, и множество всех подгрупп Шмидта исчерпывается группами типа $[E_{2^3}]Z_7$ и D_{10}. Кроме того, холлова $\{5,7\}$-подгруппа группы G нильпотентна, где 7 не делит $5^2+5+1=31$ и 5 не делит $(7+1)(7^3-1)=2^5\cdot 3^2\cdot 19$.

3. Доказательство теоремы 2

Пусть в группе G все подгруппы Шмидта имеют нормальные силовские подгруппы порядков, свободных от четвертых степеней.

1. Согласно лемме 4 множество подгрупп Шмидта в группе G исчерпывается следующими $S_{<p,q>}$-подгруппами:

$[Z_p]Z_{q^i}$, q делит $p-1$;

$[E_{p^2}]Z_{q^i}$, q делит $p+1$, $q>2$;

$[[E_{p^2}]Z_p]Z_{q^i}$, q делит $p+1$, $q>2$;

$[T]Z_{3^i}$, T – группа кватернионов порядка 8;

$[E_{p^3}]Z_{q^i}$, q не делит p^2-1, но делит p^2+p+1.

2. Пусть в группе G нет подгрупп Шмидта типов 1.1) и 1.2). Тогда в группе G множество подгрупп Шмидта исчерпывается $S_{<p,q>}$-подгруппами $[E_{p^3}]Z_{q^i}$, где q не делит p^2-1, но делит p^2+p+1. В частности, все подгруппы Шмидта в группе G несверхразрешимы и в G нет 2-нильпотентных $2d$-подгрупп Шмидта. По лемме 3, группа G 2-замкнута. В частности, по теореме Томпсона–Фейта, группа G разрешима и в ней существуют π-холловы подгруппы для любого множества $\pi\subseteq\pi(G)$.

Если $\{3,s\}$-холлова подгруппа в G не 3-замкнута, то по лемме 2 в ней существует $S_{<s,3>}$-подгруппа S, нормальная силовская s-подгруппа которой имеет порядок, делящий s^3. Из леммы 4 следует, что или 3 делит $s-1$, или 3 не делит $s-1$, но делит $s+1$, или 3 не делит s^2-1, но делит s^2+s+1. Первые два случая противоречат условию п. 2 теоремы. Если 3 делит s^2+s+1, то 3 делит $s^2+s-2=(s-1)(s+2)$. Возможны варианты: или 3 делит $s-1$, или 3 делит $s+2$. Как из первого, так и из второго вариантов следует, что 3 делит $s-1$. Противоречие. Поэтому группа G является 3-замкнутой.

Пусть H – $\{s,r\}$-холлова подгруппа, где $s>r>3$. Если r делит s^2-1 и H не r-замкнута, то, по лемме 2, в H существует $S_{<s,r>}$-подгруппа S. Однако получаем противоречие с условием п. 2 теоремы.

Обратно, пусть для ненильпотентной группы G выполняются условия 2.1–2.2 и S – ее произвольная $S_{<p,q>}$-подгруппа, p и q из $\pi(G)$.

Если $q=2$, то S 2-замкнута. Противоречие. Если $q=3$, то S 3-замкнута. Противоречие. Поэтому в дальнейшем будем считать, что $q>3$. Пусть $p=2$. Если q делит $p^2-1=2^2-1=3$, то $q=3$. Противоречие. Если q не делит $2^2-1=3$, но делит $2^2+2+1=7$. Тогда группа S является группой Шмидта типа 1.3). Если q не делит $2^2-1=3$ и не делит $2^2+2+1=7$, то порядок нормальной силовской 2-подгруппы группы S делится на 2^4. Пусть $p=3$. Если q делит $p^2-1=3^2-1=8$, то $q=2$. Противоречие. Если q не делит $3^2-1=8$, но делит $3^2+3+1=13$. Тогда группа S является группой Шмидта типа 1.3). Поэтому в дальнейшем будем считать, что $p>3$.

Пусть $p>q>3$. Если q делит p^2-1, то из 2.2) следует, что $\{p,q\}$-холлова подгруппа q-замкнута. Противоречие. Если q не делит p^2-1, но делит p^2+p+1, то $S_{<p,q>}$-подгруппа является группой Шмидта типа 1.3). Пусть $q>p>3$. Следовательно, q не делит p^2-1. Если q делит p^2+p+1, то подгруппа S является группой Шмидта типа 1.3).

Из приведенных рассуждений следует, что в группе G нет подгрупп Шмидта типов 1.1) и 1.2).

3. Пусть в группе G нет подгрупп Шмидта типов 1.1) и 1.3). Тогда в группе G множество подгрупп Шмидта исчерпывается следующими $S_{<p,q>}$-подгруппами:

$[E_{p^2}]Z_{q^i}$, q делит $p+1$, $q>2$;

$[[E_{p^2}]Z_p]Z_{q^i}$, q делит $p+1$, $q>2$;

$[T]Z_{3^i}$, T – группа кватернионов порядка 8.

В частности, все подгруппы Шмидта в группе G несверхразрешимы и в G нет 2-нильпотентных $2d$-подгрупп Шмидта. По лемме 3, группа G 2-замкнута. В частности, по теореме Томпсона-Фейта группа G разрешима и в ней существуют π-холловы подгруппы для любого множества $\pi\subseteq\pi(G)$. Из леммы 6 следует, что $3'$- и $2'$-холловы подгруппы дисперсивны по Оре.

Покажем, что $\{s,r\}$-холлова подгруппа H нильпотентна для всех простых чисел $s>r>2, r$ не делит $s+1$. Если группа H не s-замкнута, то по лемме 2 в ней существует r-замкнутая подгруппа Шмидта. По условию порядок ее силовской r-подгруппы делит r^3. По лемме 4 простое число s делит либо $r^2-1=(r-1)(r+1)$, либо не делит r^2-1, но делит r^2+r+1. Каждый из этих случаев противоречит условию п. 3. Поэтому подгруппа H s-замкнута. Если группа H не нильпотентна, то H не r-замкнута. По лемме 2, в ней существует s-замкнутая подгруппа Шмидта и, по условию, порядок ее силовской s-подгруппы делит s^3. По лемме 4, простое число r делит $(s-1)$ либо не делит $(s-1)$, но делит $(s+1)$ либо не делит (s^2-1), но делит s^2+s+1. Первый и третий случаи исключаются условием п. 3. Поэтому из предположения, что r не делит $s+1$, следует, что подгруппа H группы G нильпотентна.

Обратно. Пусть для группы G выполняются условия 3.1)–3.3) и S является $S_{<p,q>}$-подгруппой, p и q из $\pi(G)$.

Если $q=2$, то, по условию 3.1), S 2-замкнута. Противоречие. Поэтому $q>2$. Пусть $p=2$. Тогда либо q делит $p^2-1=2^2-1=3$, либо q не делит 3, но делит $2^2+2+1=7$. В первом случае S является подгруппой Шмидта типа 1.2), а во втором имеем противоречие с тем, что $3'$-холлова подгруппа дисперсивна по Оре. Поэтому $p>2$ и S – $2'$-группа.

Из 3.2) следует, что S дисперсивна по Оре, поэтому $p>q$. Из 3.3) вытекает, что q делит $p+1$. Если q делит $p-1$, то $q=2$. Противоречие. Поэтому S является подгруппой Шмидта типа 1.2).

4. Пусть в группе G нет подгрупп Шмидта типов 1.2) и 1.3). Тогда в группе G множество подгрупп Шмидта исчерпывается $S_{<p,q>}$-подгруппами $S=[Z_p]Z_{q^i}$, где q делит $p-1$. В частности, все подгруппы Шмидта группы G сверхразрешимы и из теоремы 1 [3] следует, что группа G дисперсивна по Оре и $\{s,r\}$-холлова подгруппа нильпотентна для всех простых чисел s и r таких, что $s>r$, r не делит $s-1$.

Обратно. Пусть группа G дисперсивна по Оре, $\{s,r\}$ -холлова подгруппа нильпотентна для всех простых чисел s и r таких, что $s>r$, r не делит $s-1$,и S – произвольная $S_{<p,q>}$-подгруппа группы G. Согласно теореме 1 [3] все подгруппы Шмидта S группы G сверхразрешимы. Таким образом, в группе G нет подгрупп Шмидта типов 1.2) и 1.3).

Теорема 2 доказана полностью.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Шмидт, О.Ю. Группы, все подгруппы которых специальные / О.Ю. Шмидт // Матем. сб. – 1924. – Т. 31. – С. 366–372.

2. Монахов, В.С. Подгруппы Шмидта, их существование и некоторые приложения / В.С. Монахов // Труды Укр. матем. конгресса. – 2002. – С. 81–90.

3. Монахов, В.С. О конечных группах с заданным набором подгрупп Шмидта / В.С. Монахов // Матем. заметки. – 1995. – Т. 58, № 5. – С. 717–722.

4. Монахов, В.С. Конечные группы, подгруппы Шмидта которых имеют порядки, свободные от кубов / В.С. Монахов, А.А. Трофимук // Весн. Брэсцкага ун-та. Сер. прыродазн. навук. – 2008 – № 2 (31).– С. 19–23.

5. Huppert, B. Endliche Gruppen I / B. Huppert. – Berlin–Heidelberg–New York : Springer, 1967.

6. Arad, Z. A criterion for the existence of normal π-complements in finite groups / Z. Arad, D. Chillag // J. Algebra. – 1984. – Vol. 87, № 2. – P. 472–482.

7. Ferguson, P. On π-closure of π-homogeneonus groups / P. Ferguson // American Math. Society. – 1977. – Vol. 66, № 1. – P. 9–12.

V.S. Monakhov, A.A. Trofimuk. **Finite Groups with Restrictions on Sylow Subgroups of Schmidt Subgroups**

The natural number n is called free from the fourth degrees if p^4 does not divide n for all prime p. The structure of groups such that the Schmidt subgroups of its have normal Sylow subgroups of order free from the fourth degrees are studied. In particular, the criterion of absence in group the Schmidt subgroups such that the orders of its normal Sylow subgroups is divided on the fourth degrees of prime numbers is obtained.