УДК 539.12:530.145

В.А. Плетюхов

СИММЕТРИИ БЕЗМАССОВЫХ ПОЛЕЙ ДИРАКОВСКОГО ТИПА

Предлагается подход для исследования внутренней симметрии безмассовых дираковских полей в рамках их вещественного описания. Показано, что в классической теории 8- и 16-компонентные поля обладают симметриями, описываемыми группами SO(3,1) и SO(4,3) соответственно. При переходе к квантовой теории преобразования группы SO(3,1) сужаются до группы SO(3), группы SO(4,3) – до SO(3,1).

1. Постановка задачи

В работах [1–3] был развит метод исследования диракоподобных релятивистских волновых уравнений для частиц с массой, который позволяет установить наиболее полную группу внутренней симметрии лагранжевой формулировки таких уравнений. В частности, в [1] было показано, что для уравнения Дирака искомая симметрия в классическом случае исчерпывается группой SO(2,1) (так называемая зарядовая симметрия [4]). В настоящей работе данный метод будет адаптирован для исследования безмассовых полей дираковского типа.

2. Внутренняя симметрия безмассового уравнения Дирака

Рассмотрим безмассовое уравнение Дирака

$$\gamma_\mu \partial_\mu \psi = 0\,, \tag{1}$$

где ψ – биспинор первого ранга, γ_μ – матрицы Дирака, которые выберем в виде:

$$\gamma_i = \begin{pmatrix} & -i\sigma_i \\ i\sigma_i & \end{pmatrix},\ \gamma_4 = \begin{pmatrix} I_2 & \\ & -I_2 \end{pmatrix}, \tag{2}$$

σ_i – матрицы Паули. Следуя [1–3], возьмем от уравнения (1) комплексное сопряжение и введем в рассмотрение 8-компонентную волновую функцию

$$\Psi = \begin{pmatrix} \psi^r \\ \psi^i \end{pmatrix}, \tag{3}$$

где

$$\psi^r = \frac{1}{\sqrt{2}}(\psi + \psi^*),\ \psi^i = \frac{1}{\sqrt{2}}(\psi - \psi^*) \tag{4}$$

являются соответственно вещественными и чисто мнимыми компонентами функции Ψ. Волновая функция Ψ (3), (4) подчиняется уравнению

$$\Gamma_\mu \partial_\mu \Psi = 0 \tag{5}$$

с матрицами Γ_μ вида

$$\Gamma_1 = \sigma_1 \otimes \gamma_1,\ \Gamma_2 = I_2 \otimes \gamma_2,\ \Gamma_3 = \sigma_1 \otimes \gamma_3,\ \Gamma_4 = \sigma_1 \otimes \gamma_4\,. \tag{6}$$

Уравнение (5) представляет собой вещественную форму уравнения (1) [1].

Для инвариантности лагранжиана

$$L = -\bar{\Psi}\Gamma_\mu \partial_\mu \Psi \tag{7}$$

($\bar{\Psi} = \Psi^+ \eta$, $\eta = I_2 \otimes \gamma_4$ – матрица билинейной формы) безмассового уравнения (5) относительно преобразований внутренней симметрии

$$\Psi'(x_\mu) = Q\Psi(x_\mu) \tag{8}$$

должно выполняться условие:

$$Q^+\eta\Gamma_\mu Q = \eta\Gamma_\mu . \tag{9}$$

Условию (9) можно удовлетворить двумя способами:
1) посредством соотношений

$$[\Gamma_\mu, Q_1]_- = 0\,,\; Q_1{}^+\eta Q_1 = \eta\,; \tag{10}$$

2) посредством соотношений

$$[\Gamma_\mu, Q_2]_+ = 0\,,\; Q_2{}^+\eta Q_2 = -\eta\,. \tag{11}$$

Условия (10) были рассмотрены в [1] и приводят к упомянутой в п.1 группе зарядовой симметрии с генераторами

$$J^1 = \sigma_1 \otimes I_4,\; J^2 = -\sigma_3 \otimes \gamma_2,\; J^3 = \sigma_2 \otimes \gamma_2, \tag{12}$$

которым соответствуют один мнимый (ω_1) и два вещественных (ω_2, ω_3) параметра.

Рассмотрим подробно условия (11). Для этого удобно сначала использовать фермионный базис, в котором матрицы Γ_μ имеют структуру:

$$\Gamma_\mu = I_2 \otimes \gamma_\mu . \tag{13}$$

В этом базисе наиболее общий вид матрицы Q_2, удовлетворяющей первому из условий (11), очевидно, таков:

$$Q_2 = \begin{pmatrix} q_{11} & q_{12} \\ q_{21} & q_{22} \end{pmatrix} \otimes \gamma_5 . \tag{14}$$

Здесь $\gamma_5 = \gamma_1\gamma_2\gamma_3\gamma_4$, q_{mn} – произвольные комплексные числа. Переход из фермионного базиса в базис (3) осуществляется с помощью унитарного преобразования [1]

$$A = \frac{1}{2}[I_2 \otimes (I_4 - i\gamma_2) + \sigma_1 \otimes (I_4 + i\gamma_2)]. \tag{15}$$

В результате для матрицы Q_2 получим выражение:

$$Q_2 = \begin{pmatrix} \beta & \alpha \\ \alpha & \beta \end{pmatrix} \otimes \gamma_5 + \begin{pmatrix} \lambda & \rho \\ -\rho & -\lambda \end{pmatrix} \otimes i\gamma_2\gamma_5 , \tag{16}$$

где введены обозначения

$$\begin{gathered} \alpha = \frac{1}{2}(q_{11} + q_{22}),\; \beta = \frac{1}{2}(q_{12} + q_{21}), \\ \lambda = \frac{1}{2}(q_{11} - q_{22}),\; \rho = \frac{1}{2}(q_{12} - q_{21}). \end{gathered} \tag{17}$$

Требование сохранения структуры (3) волновой функции при преобразованиях (16) приводит к следующим ограничениям на параметры (17):

$$\alpha, \lambda \text{ – мнимые; } \beta, \rho \text{ – вещественные.} \tag{18}$$

Второе из условий (11) приводит к соотношению:

$$\beta^2 + \lambda^2 - \alpha^2 - \rho^2 = 1 . \tag{19}$$

Таким образом, матрица Q_2 (16) определяет некоторое трехпараметрическое преобразование. Его можно параметризовать посредством эрмитовских генераторов I^i, имеющих в фермионном базисе вид:

$$I^i = \sigma_i \otimes \gamma_5 . \tag{20}$$

В базисе, в котором волновая функция Ψ имеет вид (3), будем иметь:

$$I^1 = I_2 \otimes \gamma_5,\ I^2 = \sigma_2 \otimes i\gamma_5\gamma_2,\ I^3 = \sigma_3 \otimes i\gamma_5\gamma_2. \qquad (21)$$

Сравнивая выражения (16) и (21), заключаем, что генераторам I^i соответствуют параметры:

$$\Omega_1 = \beta,\ \Omega_2 = i\rho,\ \Omega_3 = \lambda, \qquad (22)$$

из которых один вещественный (Ω_1) и два мнимых (Ω_2, Ω_3).

Объединяя эти преобразования с преобразованиями зарядовой симметрии, заключаем, что полная группа внутренней симметрии лагранжиана безмассового поля Дирака задается шестью генераторами J^i (12), I^i (21), удовлетворяющими алгебре

$$\begin{aligned} &[J^i, J^j] = i\varepsilon_{ijk}J^k, \\ &[I^i, I^j] = i\varepsilon_{ijk}J^k, \\ &[J^i, I^j] = i\varepsilon_{ijk}I^k. \end{aligned} \qquad (23)$$

Учитывая, что из шести соответствующих параметров ω_i, Ω_i три являются вещественными (Ω_1, ω_2, ω_3) и три мнимыми (ω_1, Ω_2, Ω_3), заключаем, что полученная группа симметрии изоморфна группе SO(3,1). Данный результат согласуется с результатом, полученным в [5] другим способом для уравнения Дирака без учета условия инвариантности лагранжиана.

Заметим, что помимо подгруппы зарядовой симметрии в указанной группе можно выделить также подгруппу SO(3) с генераторами J^1, I^2, I^3 и мнимыми параметрами ω_1, Ω_2, Ω_3, которая соответствует преобразованиям Паули–Гюрши [6].

3. Внутренняя симметрия системы двух безмассовых уравнений Дирака

Теперь рассмотрим систему двух уравнений типа (1):

$$\begin{aligned} &\gamma_\mu \partial_\mu \psi_1 = 0, \\ &\gamma_\mu \partial_\mu \psi_2 = 0. \end{aligned} \qquad (24)$$

Вводя по аналогии с п. 2 16-компонентную волновую функцию

$$\Psi = (\psi_1^r, \psi_2^r, \psi_1^i, \psi_2^i) \text{ – столбец}, \qquad (25)$$

можем записать (24) в виде (5), где

$$\Gamma_1 = -\gamma_5 \otimes \gamma_1,\ \Gamma_2 = I_4 \otimes \gamma_2,\ \Gamma_3 = -\gamma_5 \otimes \gamma_3,\ \Gamma_4 = -\gamma_5 \otimes \gamma_4. \qquad (26)$$

Условия инвариантности лагранжиана (7) относительно преобразований внутренней симметрии (8) по-прежнему задаются соотношениями (10), (11), где матрица η имеет вид:

$$\eta = I_4 \otimes \gamma_4. \qquad (27)$$

Соотношения (10) для системы (24) были исследованы в [3] и приводят к 10-параметрической группе SO(3,2), задаваемой эрмитовскими генераторами J^A ($A = 1 \div 10$)

$$\begin{aligned} &J^1 = i\gamma_1\gamma_5 \otimes \gamma_2,\ J^2 = i\gamma_3\gamma_5 \otimes \gamma_2,\ J^3 = i\gamma_4\gamma_5 \otimes \gamma_2, \\ &J^4 = \gamma_5 \otimes I_4,\ J^5 = \gamma_1 \otimes \gamma_2,\ J^6 = \gamma_3 \otimes \gamma_2,\ J^7 = \gamma_4 \otimes \gamma_2, \\ &J^8 = i\gamma_3\gamma_1 \otimes I_4,\ J^9 = i\gamma_1\gamma_4 \otimes I_4,\ J^{10} = i\gamma_3\gamma_4 \otimes I_4, \end{aligned} \qquad (28)$$

которым соответствуют 6 вещественных (ω_1, ω_2, ω_3, ω_5, ω_6, ω_7) и 4 мнимых (ω_4, ω_8, ω_9, ω_{10}) параметра.

Для исследования условий (11) здесь, как и в случае одного уравнения Дирака, удобно сначала перейти в фермионный базис, в котором матрицы Γ_μ (26) принимают вид:

$$\Gamma_\mu = I_4 \otimes \gamma_\mu . \quad (29)$$

Искомый переход из базиса (25) осуществляется посредством унитарного преобразования [2; 3]:

$$A = \frac{1}{2}[I_4 \otimes (I_4 + i\gamma_2) - \gamma_5 \otimes (I_4 - i\gamma_2)],$$
$$A^{-1} = A^{+} = \frac{1}{2}[I_4 \otimes (I_4 - i\gamma_2) - \gamma_5 \otimes (I_4 + i\gamma_2)]. \quad (30)$$

Для матрицы Q_2, удовлетворяющей первому из условий (11), получаем в фермионном базисе наиболее общее выражение:

$$Q_2 = q \otimes \gamma_5 , \quad (31)$$

где q – произвольная комплексная матрица размерности 4x4. Преобразование Q_2 (31) может быть параметризовано посредством 16 генераторов

$$(\sigma_i \otimes \sigma_j) \otimes \gamma_5,\ (I_2 \otimes \sigma_i) \otimes \gamma_5,\ (\sigma_i \otimes I_2) \otimes \gamma_5,\ I_2 \otimes \gamma_5 , \quad (32)$$

принимающих в исходном базисе (25) вид

$$(I_2 \otimes \sigma_i) \otimes \gamma_5,\ -(\sigma_2 \otimes \sigma_i) \otimes i\gamma_2\gamma_5,\ -(\sigma_3 \otimes \sigma_i) \otimes i\gamma_2\gamma_5,\ (\sigma_1 \otimes \sigma_i) \otimes \gamma_5,$$
$$I_4 \otimes \gamma_5,\ -(\sigma_2 \otimes I_2) \otimes i\gamma_2\gamma_5,\ -(\sigma_3 \otimes I_2) \otimes i\gamma_2\gamma_5,\ -\gamma_5 \otimes \gamma_5. \quad (33)$$

Второму из соотношений (11) с учетом условия сохранения структуры (25) волновой функции удовлетворяют преобразования, задаваемые генераторами

$$I^0 = -\gamma_5 \otimes \gamma_5,\ I^1 = -i\gamma_1 \otimes \gamma_2\gamma_5,\ I^2 = -i\gamma_3 \otimes \gamma_2\gamma_5,\ I^3 = -i\gamma_4 \otimes \gamma_2\gamma_5,$$
$$I^4 = -I_4 \otimes \gamma_5,\ I^5 = \gamma_1\gamma_5 \otimes \gamma_2\gamma_5,\ I^6 = \gamma_3\gamma_5 \otimes \gamma_2\gamma_5,\ I^7 = \gamma_4\gamma_5 \otimes \gamma_2\gamma_5, \quad (34)$$
$$I^8 = i\gamma_2\gamma_4 \otimes \gamma_5,\ I^9 = i\gamma_2\gamma_3 \otimes \gamma_5,\ I^{10} = i\gamma_1\gamma_2 \otimes \gamma_5,$$

которым соответствуют 4 вещественных (Ω_4, Ω_8, Ω_9, Ω_{10}), и 7 мнимых (Ω_0, Ω_1, Ω_2, Ω_3, Ω_5, Ω_6, Ω_7) параметров.

Объединяя преобразования (28) и (34), получаем 21-параметрическю группу с 10 вещественными и 11 мнимыми параметрами, которая, как можно убедиться, изоморфна группе SO(4,3).

4. Симметрия квантованных безмассовых полей дираковского типа

Внутренняя симметрия уравнения Дирака на квантовом уровне относительно преобразований, задаваемых генераторами (12) была рассмотрена в [1]. Было показано, что квантовая формулировка теории Дирака обладает симметрией только относительно фазовых преобразований, соответствующих генератору J^1.

Рассмотрим преобразования, задаваемые генераторами I^1 (21). Для этого предварительно переведем I^i из базиса (34) в базис

$$\Psi = \begin{pmatrix} \psi \\ \bar{\psi} \end{pmatrix}, \quad (35)$$

где $\bar{\psi}_i = \psi_i^{+}\gamma_4$. В результате получим выражения:

$$I^1 = \sigma_3 \otimes \gamma_5,\ I^2 = -\sigma_2 \otimes i\gamma_5\gamma_2\gamma_4,\ I^3 = \sigma_1 \otimes i\gamma_5\gamma_2\gamma_4 . \quad (36)$$

Затем разложим ψ и $\bar{\psi}$ по «чистым» состояниям $\psi_s^{(+)}$, $\psi_s^{(-)}$, $\bar{\psi}_s^{(+)}$, $\bar{\psi}_s^{(-)}$:

$$\begin{aligned} \psi &= a_s \psi_s^{(+)} + b_s^+ \psi_s^{(-)} , \\ \bar{\psi} &= a_s^+ \bar{\psi}_s^{(+)} + b_s \bar{\psi}_s^{(-)} . \end{aligned} \tag{37}$$

При квантовании коэффициенты разложения в (37) принимают смысл операторов рождения и уничтожения, удовлетворяющих антикоммутационным соотношениям:

$$[a_s, a_{s'}^+]_+ = [b_s, b_{s'}^+]_+ = \delta_{ss'}, \tag{38}$$

и все остальные антикоммутанты равны нулю.

Поступая далее аналогично [1], устанавливаем трансформационные свойства операторов a_s, b_s, a_s^+, b_s^+ относительно однопараметрических преобразований, определяемых генераторами I^1, I^2, I^3 (36). При этом соответственно получим:

$$\begin{aligned} &a'_{1/2} = -b_{1/2}^+ - \omega_1 b_{1/2}^+, \quad a'_{-1/2} = -b_{-1/2}^+ - \omega_1 b_{-1/2}^+, \\ &(b_{1/2}^+)' = -a_{1/2} - \omega_1 a_{1/2}, \quad (b_{-1/2}^+)' = -a_{-1/2} - \omega_1 a_{-1/2}, \\ &(a_{1/2}^+)' = -b_{1/2} + \omega_1 b_{1/2}, \quad (a_{-1/2}^+)' = -b_{-1/2} + \omega_1 b_{-1/2}, \\ &b'_{1/2} = -a_{1/2}^+ - \omega_1 a_{1/2}^+, \quad b'_{-1/2} = -a_{-1/2}^+ - \omega_1 a_{-1/2}^+. \end{aligned} \tag{39}$$

$$\begin{aligned} &a'_{1/2} = -b_{1/2}^+ + \omega_2 a_{1/2}^+, \quad a'_{-1/2} = -b_{-1/2}^+ - \omega_2 a_{-1/2}^+, \\ &(b_{1/2}^+)' = -a_{1/2} + \omega_2 b_{1/2}, \quad (b_{-1/2}^+)' = -a_{-1/2} - \omega_2 b_{-1/2}, \\ &(a_{1/2}^+)' = -b_{1/2} + \omega_2 a_{1/2}, \quad (a_{-1/2}^+)' = -b_{-1/2} + \omega_2 a_{-1/2}, \\ &b'_{1/2} = -a_{1/2}^+ + \omega_2 b_{1/2}^+, \quad b'_{-1/2} = -a_{-1/2}^+ - \omega_2 b_{-1/2}^+. \end{aligned} \tag{40}$$

$$\begin{aligned} &a'_{1/2} = -b_{1/2}^+ - i\omega_3 a_{1/2}^+, \quad a'_{-1/2} = -b_{-1/2}^+ + i\omega_3 a_{-1/2}^+, \\ &(b_{1/2}^+)' = -a_{1/2} - i\omega_3 b_{1/2}, \quad (b_{-1/2}^+)' = -a_{-1/2} + i\omega_3 b_{-1/2}, \\ &(a_{1/2}^+)' = -b_{1/2} + i\omega_3 a_{1/2}, \quad (a_{-1/2}^+)' = -b_{-1/2} + i\omega_3 a_{-1/2}, \\ &b'_{1/2} = -a_{1/2}^+ + i\omega_3 b_{1/2}^+, \quad b'_{-1/2} = -a_{-1/2}^+ - i\omega_3 b_{-1/2}^+. \end{aligned} \tag{41}$$

Проверяя инвариантность соотношений (38) и остальных (нулевых) антикоммутантов относительно преобразований (39)–(41), убеждаемся, что указанная инвариантность имеет место для преобразований, отвечающих генераторам I^2, I^3.

Таким образом, приходим к выводу, что на квантовом уровне группа SO(3,1) инвариантности классического уравнения Дирака сужается до группы SO(3) преобразований Паули–Гюрши.

Симметрия квантовой формулировки системы двух массивных уравнений Дирака относительно преобразований, задаваемых генераторами (28), была исследована в [3], где было показано, что инвариантность условий квантования

$$[a_{is}, a_{i's'}^+]_+ = [b_{is}, b_{i's'}^+]_+ = \delta_{ii'}\delta_{ss'} \tag{42}$$

$(i = 1, 2)$ имеет место для генераторов J^4, J^8, J^9, J^{10}.

В базисе

$$\Psi = (\psi_1, \psi_2, \bar{\psi}_1, \bar{\psi}_2) \ \text{– столбец} \tag{43}$$

они имеют вид:

$$J^4 = \gamma_5 \otimes I_4, \ J^8 = i\gamma_3\gamma_1 \otimes I_4, \ J^9 = i\gamma_1\gamma_5 \otimes I_4, \ J^{10} = i\gamma_3\gamma_5 \otimes I_4 . \tag{44}$$

Последние три из них образуют набор генераторов, который ассоциируется с группой

SO(3) (SU(2)). Генератор же J^4 соответствует фазовому преобразованию, при котором

$$\psi_1 \to \psi_1 e^{i\varphi},\ \psi_2 \to \psi_2 e^{-i\varphi}. \qquad (45)$$

Таким образом, для определения полной группы внутренней симметрии квантовой формулировки системы (24) двух безмассовых уравнений Дирака остается исследовать инвариантность условий квантования (42) относительно однопараметрических преобразований, определяемых генераторами (34). Для этого с помощью матрицы

$$U = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} I_8 & I_8 \\ I_2 \otimes \gamma_4 & -I_2 \otimes \gamma_4 \end{pmatrix} \qquad (46)$$

переведем операторы (34) в базис (43). В результате получим:

$$\begin{aligned} &I^0 = I_4 \otimes \gamma_5,\ I^1 = -i\gamma_1 \otimes \gamma_1\gamma_3,\ I^2 = -i\gamma_3 \otimes \gamma_1\gamma_3,\ I^3 = -i\gamma_5 \otimes \gamma_1\gamma_3, \\ &I^4 = -i\gamma_4 \otimes \gamma_5,\ I^5 = -\gamma_1\gamma_4 \otimes \gamma_1\gamma_3,\ I^6 = -\gamma_3\gamma_4 \otimes \gamma_1\gamma_3,\ I^7 = \gamma_4\gamma_5 \otimes \gamma_1\gamma_3, \\ &I^8 = i\gamma_3\gamma_1 \otimes \gamma_5,\ I^9 = i\gamma_1\gamma_5 \otimes \gamma_5,\ I^{10} = i\gamma_3\gamma_5 \otimes \gamma_5. \end{aligned} \qquad (47)$$

Операторы знака энергии $\widehat{\Gamma}_4$, проекции спина (спиральности) $\widehat{S}_3 = -\frac{i}{4}\Gamma_{[1}\Gamma_{2]}$ и внутренней четности $\widehat{\Pi} = I_2 \otimes (\sigma_3 \otimes I_4)$, выступающие в данном случае в качестве операторов полного набора, имеют в базисе (43) вид:

$$\begin{aligned} &\widehat{\Gamma}_4 = diag(1,1,-1,-1,1,1,-1,-1,-1,-1,1,1,-1,-1,1,1), \\ &\widehat{S}_3 = \frac{1}{2}diag(1,-1,1,-1,1,-1,1,-1,-1,1,-1,1,-1,1,-1,1), \\ &\widehat{\Pi} = diag(1,1,1,1,-1,-1,-1,-1,1,1,1,1,-1,-1,-1,-1). \end{aligned} \qquad (48)$$

Располагая операторы рождения и уничтожения в столбец в последовательности, определяемой выражениями (48), и применяя к нему (столбцу) преобразования $I^0 + \Omega_A I^A$, находим соответствующие трансформационные свойства этих операторов. Так, в случае преобразований, определяемых, например, генераторами J^4, J^8, J^9, J^{10}, будем соответственно иметь:

$$\begin{aligned} &a'_{1s} = -b_{1s}^+ + \omega b_{1s}^+,\ a'_{2s} = -b_{2s}^+ + \omega b_{2s}^+, \\ &(a_{1s}^+)' = -b_{1s} - \omega b_{1s},\ (a_{2s}^+)' = -b_{2s} - \omega b_{2s}, \\ &b'_{1s} = -a_{1s}^+ + \omega a_{1s}^+,\ b'_{2s} = -a_{2s}^+ + \omega a_{2s}^+, \\ &(b_{1s}^+)' = -a_{1s} - \omega a_{1s},\ (b_{2s}^+)' = -a_{2s} - \omega a_{2s}. \end{aligned} \qquad (49)$$

$$\begin{aligned} &a'_{1s} = -b_{1s}^+ - i\omega b_{2s}^+,\ a'_{2s} = -b_{2s}^+ + i\omega b_{1s}^+, \\ &(a_{1s}^+)' = -b_{1s} - i\omega b_{2s},\ (a_{2s}^+)' = -b_{2s} + i\omega b_{1s}, \\ &b'_{1s} = -a_{1s}^+ - i\omega a_{2s}^+,\ b'_{2s} = -a_{2s}^+ + i\omega a_{1s}^+, \\ &(b_{1s}^+)' = -a_{1s} - i\omega a_{2s},\ (b_{2s}^+)' = -a_{2s} + i\omega a_{1s}. \end{aligned} \qquad (50)$$

$$
\begin{aligned}
&a'_{1s} = -b_{1s}^{+} + \omega b_{2s}^{+},\; a'_{2s} = -b_{2s}^{+} + \omega b_{1s}^{+},\\
&(a_{1s}^{+})' = -b_{1s} - \omega b_{2s},\; (a_{2s}^{+})' = -b_{2s} - \omega b_{1s},\\
&b'_{1s} = -a_{1s}^{+} - \omega a_{2s}^{+},\; b'_{2s} = -a_{2s}^{+} - \omega a_{1s}^{+},\\
&(b_{1s}^{+})' = -a_{1s} + \omega a_{2s},\; (b_{2s}^{+})' = -a_{2s} + \omega a_{1s}.
\end{aligned} \tag{51}
$$

$$
\begin{aligned}
&a'_{1s} = -b_{1s}^{+} + \omega b_{1s}^{+},\; a'_{2s} = -b_{2s}^{+} + \omega b_{2s}^{+},\\
&(a_{1s}^{+})' = -b_{1s} - \omega b_{1s},\; (a_{2s}^{+})' = -b_{2s} + \omega b_{2s},\\
&b'_{1s} = -a_{1s}^{+} + \omega a_{1s}^{+},\; b'_{2s} = -a_{2s}^{+} - \omega a_{2s}^{+},\\
&(b_{1s}^{+})' = -a_{1s} + \omega a_{1s},\; (b_{2s}^{+})' = -a_{2s} + \omega a_{2s}.
\end{aligned} \tag{52}
$$

Непосредственной проверкой нетрудно убедиться, что перестановочные соотношения (42) и все прочие антикоммутанты типа $[a_{is}, a_{i's'}^{+}]_{+} = 0$ и т.д. инвариантны относительно преобразований (49)–(52). Относительно остальных преобразований, вид которых мы не выписываем, чтобы не загромождать изложение, соотношения (42) не инвариантны.

Следовательно, полный набор однопараметрических преобразований внутренней симметрии системы (24), «выживающих» на квантовом уровне, задается восемью генераторами J^4, J^8, J^9, J^{10}, I^4, I^8, I^9, I^{10} При этом генераторы J^8, J^9, J^{10}, I^8, I^9, I^{10} с тремя мнимыми (ω_8, ω_9, ω_{10}) и тремя вещественными (Ω_8, Ω_9, Ω_{10}) параметрами удовлетворяют алгебре типа (23) и образуют, следовательно, группу SO(3,1). Что же касается генераторов J^4 и I^4, то они соответствуют фазовому преобразованию (45) и γ_5-преобразованию.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Андрусевич, П.П. О внутренней симметрии уравнения Дирака / П.П. Андрусевич, В.А. Плетюхов, В.И. Стражев // Веснік Брэсцкага ун-та. Сер. прыродазнаўчых навук. – 2009. – №2. – С. 46–51.
2. Плетюхов, В.А. Вещественное поле Дирака-Кэлера и дираковские частицы / В.А. Плетюхов, В.И. Стражев // Вестник БГУ. Сер. 1. – 2009. – №2. – С. 3–7.
3. Андрусевич, П.П. О внутренней симметрии дираковских полей (ч.1) / П.П. Андрусевич, В.А. Плетюхов, В.И. Стражев // Веснік Брэсцкага ун-та. Сер. 4. Фізіка. Матэматыка. – 2010. – № 1. – С. 5–10.
4. Стражев, В.И. О группе зарядовой симметрии релятивистских волновых уравнений / В.И. Стражев, П.Л. Школьников // Известия вузов. Физика. – 1981. – №11. – С. 115–117.
5. Фущич, В.И. О новых и старых симметриях уравнений Максвелла и Дирака / В.И. Фущич, А.Г. Никитин // ЭЧАЯ. – 1983. – Т.14. – №1. – С. 5–57.
6. Нишиджима, К. Фундаментальные частицы / К. Нишиджима. – Москва : Изд-во «Мир», 1965. – 462 с.

V.A. Pletyukhov. **The Symmetries of Massless Dirac Type Fields**

The approach to investigate an internal symmetry of massless Dirac type wave equations in the framework of real description is proposed. It is shown that the classical formulation of 8- and 16-component real fields has the internal symmetry groups SO(3,1) and SO(4,3) respectively. The symmetries of these kinds reduce to groups SO(3) and SO(3,1) respectively in the quantum theory.