О. В. МАТЫСИК

РЕГУЛЯРИЗУЮЩИЕ АЛГОРИТМЫ ДЛЯ НЕКОРРЕКТНЫХ ОПЕРАТОРНЫХ УРАВНЕНИЙ ПЕРВОГО РОДА

Брест
БрГУ имени А.С. Пушкина
2025

Учреждение образования
«Брестский государственный университет имени А.С. Пушкина»

О. В. Матысик

РЕГУЛЯРИЗУЮЩИЕ АЛГОРИТМЫ ДЛЯ НЕКОРРЕКТНЫХ ОПЕРАТОРНЫХ УРАВНЕНИЙ ПЕРВОГО РОДА

Монография

Брест
БрГУ имени А.С. Пушкина
2025

УДК 517.983.54 + 519.6
ББК 22.193
М12

Рецензенты:

Профессор кафедры фундаментальной и прикладной математики
Гродненского государственного университета имени Янки Купалы,
доктор физико-математических наук, профессор
Ю.М. Вувуникян

Заведующий кафедрой информационных интеллектуальных систем
Брестского государственного технического университета,
доктор технических наук, профессор
В.А. Головко

Матысик, О. В.
М12 Регуляризующие алгоритмы для некорректных операторных уравнений первого рода : монография / О. В. Матысик ; Брест. гос. ун-т имени А. С. Пушкина. – Брест : Брест. гос. ун-т, 2025. – 245 с.

В монографии разработаны и исследованы явные и неявные итерационные процедуры для решения некорректных задач (регуляризующие алгоритмы), описываемых операторными уравнениями первого рода с положительными, самосопряженными и несамосопряженными, ограниченными и неограниченными, с точно и приближенно заданными операторами в гильбертовом и банаховом пространствах.

Книга адресована студентам физико-математических факультетов университетов, аспирантам, научным работникам, специализирующимся в области вычислительной математики и теории некорректно поставленных задач.

УДК 517.983.54 + 519.6
ББК 22.193

ISBN

ОГЛАВЛЕНИЕ

ПРЕДИСЛОВИЕ

Настоящая книга посвящена итерационным методам решения операторных линейных уравнений в гильбертовом пространстве с ограниченными и неограниченными, положительными, самосопряженными и несамосопряженными операторами в предположении, что погрешности имеются не только в правой части уравнения, но и в операторе. Такими операторными уравнениями задаются некорректные задачи, которые были сформулированы в начале XX в. и долгое время не изучались, поскольку считалось, что они не могут отвечать никакой физической реальности и поэтому их решение не имеет смысла.

Однако потребности практики привели к необходимости решать некорректные задачи. Для их решения предложены и широко применяются метод регуляризации А. Н. Тихонова, метод квазирешений В. К. Иванова и метод невязки, предложенный Д. Л. Филлипсом и В. К. Ивановым. Наибольшее распространение получили итерационные методы решения некорректных задач. Их частое использование связано с тем, что эти методы сравнительно легко программируются на персональных электронно-вычислительных машинах (далее – ПЭВМ).

В монографии предлагаются новые регуляризующие алгоритмы для некорректных задач, описываемых операторными уравнениями первого рода, в виде явных и неявных итерационных методов, обладающих более высокими скоростными качествами, чем ранее известные методы. Для построения новых явных и неявных итерационных методов был использован наиболее общий из известных в настоящее время подходов к решению некорректных задач – подход, основанный на введенном А. Н. Тихоновым понятии регуляризатора. Проведено сравнение предложенных методов с наиболее изученным в литературе методом итераций Ландвебера [158].

В частности, метод простой итерации с попеременно чередующимся шагом для получения решения требует в три раза меньше итераций, чем метод Ландвебера. Семейство явных методов с более высокой степенью оператора, обобщающее метод простой итерации, для получения оптимального решения требует в k раз меньше итераций, чем метод Ландвебера.

Неявные методы, представляющие собой семейства итерационных схем, зависящих от параметра k, в силу отсутствия ограничений сверху на шаг по антиградиенту позволяют получить оптимальное решение уже на первом шаге итераций. Один из предложенных неявных методов позволяет решать операторные уравнения с неограниченным оператором, притом необязательно положительным.

Для предложенных методов впервые проведено достаточно полное их исследование.

Сначала изучен априорный выбор числа итераций для уравнений с приближенно заданной правой частью и точным оператором. При этом установлены достаточные условия сходимости методов. Получены априорные оценки погрешности в предположении, что известен класс истокопредставимых решений, которому решение при данном $y \in R(A)$ принадлежит. Поскольку такая информация обычно недоступна или неточна, априорный выбор числа итераций имеет в основном теоретическое значение: он позволяет выявлять принципиальные возможности методов.

Использование в работе энергетической нормы делает предложенные методы эффективными и в случае, когда нет сведений об истокопредставимости точного решения. В этом случае удается получить априорные оценки погрешности и априорный момент останова методов уже без дополнительного требования на гладкость точного решения. Получены условия, когда из сходимости в энергетической норме следует сходимость в обычной норме гильбертова пространства.

Предлагается и другой способ сделать методы эффективными и тогда, когда отсутствует дополнительная информация на гладкость точного решения. Для этого в монографии обосновано применение к итерационным методам правил останова по малости невязки: выбирается то значение итераций n, при котором невязка сравнима с уровнем погрешности правой части уравнения. Подобное согласование n с уровнем погрешности правой части принято называть *принципом невязки*. Оказывается, что при таком выборе n мы получаем оптимальные по порядку методы на классах истокопредставимых решений, при этом сам выбор n не использует информацию истокопредставимости и вообще какую-либо другую информацию, кроме оценки уровня погрешности правой части уравнения. Доказано, что предложенные итерационные методы сходятся к точному решению, для них получены оценки погрешности и оценки для момента останова. Обоснована также возможность применения к предложенным методам правила останова по разности соседних приближений: использование этого правила останова делает методы эффективными в случае отсутствия сведений об истокопредставимости точного решения.

Для всех методов исследован случай неединственного решения уравнения (нуль является собственным значением оператора). Показано, что тогда итерационные процессы сходятся к решению с минимальной нормой.

Для некоторых из предложенных методов изучен априорный и апостериорный выбор параметра регуляризации в случае приближенно заданного самосопряженного и несамосопряженного оператора: доказана сходимость методов, получены оценки погрешности и оценки для апостериорного момента останова.

Некоторыми из предложенных методов решены модельные некорректные примеры. Для их решения использовались ПЭВМ, и программы составлялись на языке программирования *C#*. При решении модельных задач нашли подтверждение выводы о преимуществах предложенных методов по сравнению с наиболее изученным в математической литературе явным методом итерации Ландвебера.

Рассмотренные в монографии итерационные методы найдут практическое применение в прикладной математике: они могут быть использованы для решения задач, встречающихся в динамике и кинетике, математической экономике, геофизике, теории потенциала, синтезе антенн, акустике, автоматической обработке результатов физического эксперимента, определении формы радиоимпульса, излученного источником, диагностике плазмы, в наземной или воздушной геологоразведке (математическая обработка измерений), при решении обратной кинематической задачи сейсмики, космических исследованиях (спектроскопии) и медицине (томографии). Разработанные методы позволят успешно решать задачи, часто возникающие в различных отраслях агропромышленного комплекса Республики Беларусь.

Укажем еще на используемую систему нумерации. Все утверждения типа лемм, теорем, замечаний, следствий и т. д. имеют в книге общую для них всех сплошную нумерацию, задаваемую двумя числами. Первое число есть номер главы, а второе – порядковый номер утверждения в данной главе. Пронумерованные соотношения имеют аналогичную двойную нумерацию.

Книга предназначена для научных работников и инженеров-исследователей, занимающихся применениями функционального анализа к приближенным и численным методам или прикладной математикой, а также для иных специалистов, чьи интересы связаны с некорректными задачами. Ее можно использовать в курсе лекций и спецкурсах для студентов физико-математических факультетов университетов.

В заключение считаю своим приятным долгом выразить глубокую благодарность рецензентам – профессору Гродненского государственного университета имени Я. Купалы Ю. М. Вувуникяну и профессору Брестского государственного технического университета В. А. Головко, замечания которых способствовали улучшению содержания книги. Автор также весьма признателен доценту Брестского государственного университета имени А. С. Пушкина В. Ф. Савчуку и профессору Белорусского государственного университета П. П. Забрейко за обсуждение отдельных результатов исследования.

О. В. Матысик

ВВЕДЕНИЕ

Встречается большой класс задач, где решения неустойчивы к малым изменениям исходных данных, т. е. сколь угодно малые изменения исходных данных могут приводить к большим изменениям решений. Задачи подобного типа принадлежат к классу некорректных задач.

Значительная часть задач, встречающихся в прикладной математике, физике, технике и управлении может быть представлена в виде операторного уравнения первого рода

$$Ax = y, \quad x \in X, \quad y \in Y \tag{1}$$

с заданным оператором $A: X \to Y$ и элементом y. Ж. Адамаром (J. Hadamard) [140, 141] было введено следующее понятие корректности:

Определение 1. *Задачу отыскания решения* $x \in X$ *уравнения* (1) *называют* ***корректной*** *(или* ***корректно поставленной****, или* ***корректной по Адамару****), если при любой фиксированной правой части уравнения* $y = y_0 \in Y$ *его решение:*

а) существует в пространстве X;

б) определено в пространстве X однозначно;

в) устойчиво в пространстве X, т. е. непрерывно зависит от правой части $y \in Y$*. В случае нарушения любого из этих условий задачу называют* ***некорректной*** *(****некорректно поставленной****); более конкретно, при нарушении условия в) ее принято называть* ***неустойчивой***.

Из определения видно, что корректность по Адамару эквивалентна однозначной определенности и непрерывности обратного оператора A^{-1} на всем пространстве Y.

На протяжении многих лет в математике считалось, что только корректные задачи имеют право на существование, что только они правильно отражают реальный мир. О некорректных задачах сложилось мнение, что они не имеют физической реальности, поэтому их решение бессмысленно. В результате долгое время некорректные задачи не изучались.

Однако на практике все чаще и настойчивее стала возникать необходимость решать некорректные задачи. К таким задачам относятся задача Коши для уравнения Лапласа, задача решения интегрального уравнения первого рода, задача дифференцирования функции, заданной приближенно, численное суммирование рядов Фурье, когда коэффициенты известны приближенно в метрике l_2, обратная задача гравиметрии, обратная задача теории потенциала, задача спектроскопии, задача аналитического продолжения функции, известной на части области, на всю область. Некорректны также и задача проектирования оптимальных систем, конструкций, задача создания систем автоматической обработки результатов физического эксперимента, задача Коши для уравнения теплопроводности с обращенным временем и т. д.

Однако, обычные методы, применяемые для решения корректных задач, невозможно было применить к некорректным задачам. Поэтому необходимо было пересмотреть определение корректности по Адамару. И это было сделано в 1943 г. А. Н. Тихоновым [109].

Определение 2. *Задача* (1) *называется* ***корректной по Тихонову*** *на множестве* $M \subset X$, *а само множество* M – *ее* ***классом корректности****, если:*

а) точное решение задачи существует в классе M*;*

б) в классе M *решение задачи единственно при любой правой части* $y \in N = AM \subset Y$*;*

в) принадлежащее множеству M *решение задачи устойчиво относительно правых частей* $y \in N$.

Если $M = X$ и $N = Y$, то корректность по Тихонову совпадает с корректностью по Адамару.

После работ А. Н. Тихонова систематическое изучение некорректных задач и способов их решения началось в 1950-х гг., но особенно широкий размах оно приняло в последние 50 лет. Основные результаты отражены в монографиях М. М. Лаврентьева [64], А. Н. Тихонова и В. Я. Арсенина [111], В. А. Морозова [81], В. К. Иванова, В. В. Васина и В. П. Тананы [41], О. А. Лисковца [72], Г. М. Вайникко и А. Ю. Веретенникова [21], А. Ф. Верланя и В. С. Сизикова [24], В. В. Васина и А. Л. Агеева (V. V. Vasin and A. L. Ageev) [187], А. В. Бакушинского, М. Ю. Кокурина, М. М. Кокурина и А. В. Смирновой (A. B. Bakushinsky, M. Yu. Kokurin, M. M. Kokurin and A. V. Smirnova) [128, 129], С. И. Кабанихина (S. I. Kabanikhin) [151].

Наиболее общим из известных в настоящее время подходов к решению некорректных задач является подход, основанный на введенном А. Н. Тихоновым понятии регуляризатора.

Пусть имеется некорректная в классическом смысле задача математической физики.

Определение 3. *Параметрическое семейство операторов* $\{R_\alpha\}$, *действующих из пространства правых частей* Y *в пространство решений* X, *называется* ***регуляризующим*** (***регуляризующим алгоритмом*** *или* ***регуляризатором***)*, если:*

а) при любом $\alpha > 0$ *оператор* R_α *определен на всем пространстве* Y*;*

б) если существует точное решение исходной задачи $x \in X$, *то для любого* $\delta > 0$ *существует* $\alpha(\delta)$ *такое, что для всех* $y_\delta \in Y$, $\|y - y_\delta\| \le \delta$ *имеет место соотношение* $\left\|R_{\alpha(\delta)} y_\delta - x\right\|_X \to 0, \quad \delta \to 0.$ *Параметр* α *называется* ***параметром регуляризации***, $x_{\alpha,\delta} = R_{\alpha(\delta)} y_\delta$ – ***регуляризованными решениями***.

Использование регуляризатора задачи дает возможность сколь угодно точного ее решения при достаточно точных исходных данных. В работе [110] А. Н. Тихонов предлагает способ построения регуляризующих операторов для уравнения (1). Это метод регуляризации решения некорректных задач. Он основан на вариационном принципе. В методе рационально выбирается параметр регуляризации, используется априорный способ выбора и предложены принципы невязки и сглаживающего функционала.

Для решения некорректных задач В. К. Иванов в работе [38] излагает метод квазирешений. Большое применение для регуляризации некорректных задач имеет также и метод невязки, предложенный Д. Л. Филлипсом (D. L. Phillips) [173] и В. К. Ивановым.

Особое место среди методов решения некорректных задач занимают итерационные методы. Еще в 1930-е гг. в работах Т. Карлемана (T. Carleman) [131], Г. М. Голузина и В. И. Крылова [27], И. Г. Малкина [76] были предложены первые методы приближений, дающие в пределе точные решения уравнения (1), если данные, т. е. оператор A и правая часть y, заданы точно. Для решения задачи Коши для уравнения Лапласа с точными данными итеративный метод изложен в работе Б. А. Андреева [2]. В общем виде итеративный метод сформулирован А. К. Маловичко [77]. Однако в этих работах отсутствует необходимое исследование влияния погрешностей данных, которое весьма важно для решения некорректных задач. В работе [64] М. М. Лаврентьев обосновал сходимость метода последовательных приближений Ландвебера при приближенной правой части линейных уравнений и распространил полученные результаты на случай нелинейных уравнений. При других предположениях метод последовательных приближений был исследован Ю. Т. Антохиным [4; 5]. Изучению итеративных методов посвящены работы Л. Ландвебера (L. Landweber) [158], В. М. Фридмана [113], В. Н. Страхова [105–107], М. А. Красносельского, Г. М. Вайникко, П. П. Забрейко, Я. Б. Рутицкого и В. Я. Стеценко [59]. Различные схемы итерационных методов, предложенные А. С. Апарциным [6], В. К. Ивановым [38; 39], А. С. Кряневым [63], М. М. Лаврентьевым [64], В. Липфертом (W. Lipfert) [159], А. Б. Бакушинским и А. В. Гончарским [8; 11], Г. В. Гроэтчем (G. W. Groetsch) [139], В. А. Морозовым [78–81], В. В. Васиным [22], С. М. Оганесяном и В.Ч. Старостенко [83], Л. Э. Сарвом [101], Г. В. Хромовой [118], О. Аксельсоном (O. Axelsson) [127], М. Е. Килмером и Д. П. О'Лири (M. E. Kilmer and D. P. O'Leary) [153], Х. Бялым (H. Bialy) [130], С. Ф. Гильязовым и Н. Л. Гольдманом (S. F. Gilyazov and N. L. Gol'dman) [137], К. Р. Вогелем (C. R. Vogel) [188], применялись для решения многих некорректных задач в гильбертовых пространствах. Для решения некорректных задач в банаховых пространствах применялись методы итераций, предложенные в работах А. Б. Бакушинского и В. Н. Страхова [9; 10]. Метод Ландвебера при приближенно заданных правой части и операторе изучался в работах О. А. Лисковца и Я. В. Константиновой [55; 56]. Различные схемы явных и неявных итеративных методов с априорным выбором числа итераций предложены в работах О. А. Лисковца и В. Ф. Савчука [69–71]. Методу Ландвебера также посвящены работы А. М. Денисова [30], А. А. Самарского и П. Н. Вабищевича (A. A. Samarsky and P. N. Vabishchevitch) [182]. В некоторых из этих работ рассматриваются случай приближенно заданных операторов и случай неединственного решения.

Большинство перечисленных работ посвящено априорному выбору числа итераций. Это означает следующее. В предположении, что точное решение уравнения (1) истокообразно представимо, т. е. $x = A^s z,\ s > 0,$ находилась оценка погрешности метода, которая затем оптимизировалась по $n,$ т. е. вычислялось значение итераций $n_{\text{опт}}$, при котором оценка погрешности являлась минимальной.

Однако поскольку не всегда имеются сведения об истокопредставимости точного решения, то трудно разумным образом определить число итераций $n_{\text{опт}}$. Тем не менее, итерационные методы решения некорректных задач можно сделать вполне эффективными, если воспользоваться правилами останова по невязке и по соседним приближениям. Апостериорный выбор числа итераций для метода Ландвебера впервые был предложен И. В. Емелиным и М. А. Красносельским [36; 37]. Дальнейшее развитие идей, предложенных И. В. Емелиным и М. А. Красносельским в работе [36], получило в работах Г. М. Вайникко [18–20], Г. М. Вайникко и А. Ю. Веретенникова [21].

В. Ф. Савчук [87–100] продолжил исследования в этом направлении. Им предложено несколько новых итерационных методов решения некорректных задач в гильбертовом пространстве с ограниченным и неограниченным, самосопряженным и несамосопряженным операторами. Обоснована возможность применения правил останова по невязке и по соседним приближениям для различных схем методов итераций, явных и неявных, которые превращают предложенные итеративные методы в регуляризующие алгоритмы для задачи (1), не требуя при этом знания истокопредставимости точного решения, но в случае истокопредставимости обеспечивают оптимальную в классе скорость сходимости.

В монографии продолжено изучение явных и неявных итерационных методов. Предложены и изучены четыре явных и четыре неявных итерационных метода решения некорректных задач в гильбертовом пространстве. Для них исследован априорный выбор числа итераций при точной и приближенной правой части уравнения: доказана сходимость предложенных методов в исходной норме гильбертова пространства, получены априорные оценки погрешности, вычислительная погрешность. Исследован случай неединственного решения и показано, что в этом случае имеет место сходимость методов к решению с минимальной нормой. Использование энергетической нормы для исследования сходимости методов позволило получить априорные оценки погрешности и априорный момент останова итераций без дополнительного требования на гладкость решения – его истокообразной представимости. Была обоснована возможность применения к итерационным методам правил останова по невязке и по соседним приближениям, что сделало эти методы эффективными и тогда, когда нет сведений об истокопредставимости точного решения. Проведено сравнение предложенных явных методов между собой и с широко известным явным методом итерации Ландвебера. Показано, что для достижения оптимальной точности зачастую изучаемыми методами требуется выполнить в несколько раз меньше итераций, чем методом Ландвебера, хотя по мажорантным оценкам погрешности все методы имеют один и тот же порядок и незначительно отличаются в ту или другую сторону только коэффициентами пропорциональности. Проведено сравнение неявных методов между собой и с явными методами. Показано преимущество неявных методов итераций по сравнению с явными: за счет выбора итерационного параметра оптимальную оценку погрешности неявными методами можно получить уже на первом шаге итераций, что невозможно для явных методов.

Для некоторых из предложенных методов изучен априорный и апостериорный выбор параметра регуляризации в случае приближенно заданного оператора: доказана сходимость методов, получены оценки погрешности и оценка для апостериорного момента останова.

Некоторыми из предложенных методов решены модельные некорректные задачи. Для их решения использовались ПЭВМ, и программы составлялись на языке программирования *C#*. Причем при решении модельных задач нашли подтверждение выводы о преимуществах предложенных методов по сравнению с наиболее изученным явным методом Ландвебера, т. е. подтвердилось то, что для достижения оптимальной точности предложенными в монографии методами требуется в несколько раз меньше итераций, чем методом Ландвебера.

Анализ предложенных итерационных методов позволил сформулировать общую схему построения таких методов, используя теорию функций от самосопряженных операторов. Для таких абстрактных методов последовательных приближений выяснена скорость их сходимости к точным решениям в исходной и в «ослабленных» нормах как на всем пространстве, так и на некоторых специальных подпространствах; исследовано поведение невязок и поправок при построении этих последовательных приближений; наконец, поведение соответствующих ошибок в случаях, когда правые части заданы приближенно и когда сами вычисления производятся с некоторыми ошибками.

Рассмотренные в монографии итерационные схемы найдут практическое применение в прикладной математике и в народном хозяйстве Республики Беларусь: они могут быть использованы для решения задач, встречающихся в наземной или воздушной геологоразведке (математическая обработка измерений), при решении обратной кинематической задачи сейсмики, в космических исследованиях (спектроскопии), медицине (томографии), гравиметрии, теории потенциала, синтезе антенн, акустике, автоматической обработке результатов физического эксперимента, определении формы радиоимпульса, излученного источником, и формы электрического импульса на входе кабеля.

ГЛАВА 1
АНАЛИТИЧЕСКИЙ ОБЗОР ЛИТЕРАТУРЫ ПО ТЕМЕ ИССЛЕДОВАНИЯ

1.1. Настоящая работа посвящена теории итерационных методов решения некорректных линейных задач или, другими словами, теории итерационных методов решения операторных уравнений первого рода.

В последние десятилетия математическая наука обогатилась важным разделом – теорией некорректно поставленных задач и методов их приближенного решения. Развитие этого раздела математики вызвано многочисленными приложениями в технике, физике, экономике и других естественных науках.

Потребности практики приводят к необходимости решения подобных задач, которые во многих случаях описываются операторными уравнениями первого рода. В настоящее время теория некорректных задач успешно применяется для решения широкого круга обратных задач оптики и спектроскопии, электродинамики, радиоастрономии, диагностики плазмы, геофизики, теории потенциала и гравиметрии. Для их решения широко используются итерационные схемы, позволяющие при обработке экспериментальной информации существенно повысить точность определения характеристик изучаемых физических явлений. Поэтому огромное значение имеют разработка и изучение новых итерационных методов решения некорректных задач, получение условий их сходимости, нахождение оценок погрешности и обоснование применения к методам правил останова в процессе вычислений. Изложим некоторые факты из истории развития теории итерационных методов решения некорректных задач.

Теория линейных некорректных задач появилась в начале XIX в. как теория линейных интегральных уравнений первого рода. Эти уравнения записываются в виде:

$$\int_{\Omega} K(t,s)x(s)ds = f(t) \quad (t \in \Omega). \tag{1.1}$$

Здесь Ω – некоторый интервал на прямой или, более общо, некоторая область конечномерного пространства, $x(s)$ – неизвестная функция, функция $K(t, s)$ (ядро уравнения) – заданная функция двух переменных $t, s \in \Omega$, $f(t)$ – заданная функция. Первоначально такие уравнения рассматривались в предположении, что ядро $K(t, s)$ непрерывно на $\Omega \times \Omega$ за исключением диагонали $\Delta = \{(s, s) : s \in \Omega\}$ и искались, естественно, при непрерывных $f(t)$ непрерывные решения; дальнейшие результаты были получены в случае, когда $K(t, s)$ интегрируемо с квадратом на $\Omega \times \Omega$, искались для функций $f(t)$ с интегрируемым квадратом решения также интегрируемые с квадратом.

Один из первых результатов об уравнении (1.1) был получен уже Н. Абелем, который нашел в случае $\Omega = [0, T]$ и

$$K(t,s) = \begin{cases} \{(t-s)^{-\Theta}, \ 0 \le s < t \le T, \\ 0, \ 0 \le t < s \le T, \end{cases}$$

где $\Theta \in [0,1]$, явное решение соответствующего уравнения. К началу XX в. явные формулы для решений были получены и для многих других уравнений с явно заданными ядрами.

В первой половине XX в. появилось несколько книг и учебников, посвященных линейным интегральным уравнениям. В них, помимо описания конкретных уравнений первого рода, для которых решения были получены в явном виде, излагались и первые результаты, относящиеся к интегральным уравнениям первого рода, ядра которых были на $\Omega \times \Omega$ непрерывны и могли иметь на диагонали Δ разрывы первого рода. Как оказалось, такие уравнения сводились к линейным интегральным уравнениям второго рода:

$$x(t) = \int\limits_{\Omega} K(t,s) f(s) ds + f(t), \ (t \in \Omega), \tag{1.2}$$

исследование которых оказалось существенно более простой задачей, по сравнению с анализом линейных интегральных уравнений первого рода. В частности, для интегральных уравнений второго рода сначала с непрерывными ядрами (И. Фредгольм), а затем и интегрируемыми с квадратом ядрами (Т. Карлеман) были доказаны так называемые теоремы Фредгольма (геометрические аналоги классической теоремы Кронекера–Капелли о решениях произвольных систем линейных алгебраических уравнений). Описанный выше переход от уравнений первого рода к уравнениям второго рода осуществлялся двумя методами; первый из них основывался на дифференцировании один или несколько раз рассматриваемого уравнения по t, второй – на основе замены искомой функции $x(t)$ ее первообразной первого или старшего порядков. Первый метод требовал дифференцируемости ядра $K(t, s)$ по переменной t, второй – дифференцируемости ядра $K(t, s)$ по переменной s. Следует сразу отметить, что оба описанных метода перехода от уравнений первого рода к уравнениям второго рода не являлись эквивалентными переходами; в частности, было выяснено, что аналоги теорем Фредгольма для линейных интегральных уравнений первого рода не верны. Почти одновременно с вышеописанными методами перехода от уравнений первого рода к уравнениям второго рода были установлены и еще два фундаментальных результата, относящихся к линейным интегральным уравнениям первого рода. Первый из них был получен Д. Гильбертом. Он показал, что в случае симметричности и непрерывности ядра $K(t, s)$ ($K(t, s) = K(s, t)$) левая часть уравнения (1.1) представима в виде:

$$\int\limits_{\Omega} K(t,s)\, f(s)ds = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \phi_n(t) \int\limits_{\Omega} \psi_n(s) x(s) ds,$$

где $\psi_n(t)$ (n = 1,2,...) – ортонормированная система собственных функций ядра $K(t, s)$, $\lambda_n(t)$ (n = 1,2,...) – его собственные значения, причем ряд в правой части сходится в среднем квадратичном. Это представление позволяло выписать условия разрешимости и решения уравнения (1.1) с произвольной правой частью $f(t)$ в явном виде. Условия разрешимости выписываются в следующем виде

$$\int\limits_{\Omega} \phi_n(s)\, f(s)ds = 0\left(n \in \{n:\ \lambda_n = 0\}\right),\ \sum_{\lambda_n \neq 0} \frac{1}{\lambda_n^2} \left| \int\limits_{\Omega} \phi_n(s)\, f(s)ds \right|^2 < \infty, \qquad (1.3)$$

а множество решений равенством

$$x(t) = \sum_{\lambda_n \neq 0} \frac{1}{\lambda_n} \int\limits_{\Omega} \phi_n(s)\, f(s)ds \cdot \phi_n(t) + \sum_{\lambda_n = 0} c_n \phi_n(t), \qquad (1.4)$$

здесь c_n ($\lambda_n = 0$) – произвольные постоянные. Первое из условий (1.3) полностью аналогично условиям разрешимости в теоремах Фредгольма. Однако второе из условий (1.3) в случае, когда число ненулевых собственных значений λ_n бесконечно, является существенным ограничением на $f(t)$ иного типа; обычно оно реализуется как некоторое свойство гладкости функции $f(t)$. Наличие этого (необходимого) условия разрешимости уравнения (1.1) и влечет за собой тот факт, что для уравнений первого рода теоремы Фредгольма не верны. Далее, Т. Карлеман установил справедливость теорем Гильберта и для симметричных ядер $K(t, s)$, интегрируемых с квадратом.

Несколько позднее Э. Шмидт фактически распространил утверждения теорем Гильберта–Карлемана на непрерывные или симметричные ядра, не обладающие свойством симметрии. В этом более общем случае ядро $K(t, s)$ представимо в виде:

$$\int\limits_{\Omega} K(t,s)\, f(s)ds = \sum_{n=1}^{\infty} \mu_n \psi_n(t) \int\limits_{\Omega} \phi_n(s) x(s) ds,$$

здесь $\phi_n(t)$ (n = 1,2,...) – ортонормированная система собственных функций ядра $K^* * K(t, s) = \int\limits_{\Omega} K(\xi,t) K(\xi,s) d\xi$, $\psi_n(t)$ (n = 1,2,...) – ортонормированная система функций ядра $K * K^*(t, s) = \int K(t,\xi) K(s,\xi) d\xi$, $\mu_n(t)$ (n = 1,2,...) – собственные значения этих ядер (числа Шмидта ядра $K(t, s)$), причем ряд в правой части также сходится в среднем квадратичном. Условия разрешимости теперь записываются в виде:

$$\int\limits_{\Omega} \psi_n(s) f(s) ds = 0 \left(n \in \{n:\ \lambda_n = 0\}\right), \quad \sum_{\lambda_n \neq 0} \frac{1}{\lambda_n^2} \left| \int\limits_{\Omega} \phi_n(s) f(s) ds \right|^2 < \infty, \qquad (1.5)$$

а формула для решения – в виде:

$$x(t) = \sum_{\lambda_n \neq 0} \frac{1}{\lambda_n} \int\limits_{\Omega} \psi_n(s) f(s) ds \cdot \phi_n(t) + \sum_{\lambda_n = 0} c_n \phi_n(t), \qquad (1.6)$$

где снова c_n ($\lambda_n = 0$) – произвольные постоянные.

Описанные утверждения являются классическими и вошли почти во все курсы по теории интегральных уравнений. Их наиболее полное изложение содержится в работах Э. Гурса, S. Fenyo, H. W. Stolle и A. Zaanen [29, 136, 189]. Последующие работы в указанных направлениях не носили принципиального характера.

1.2. Как было отмечено в подразделе 1.1 для линейных интегральных уравнений первого рода теоремы Фредгольма не верны. Более того, в условиях разрешимости таких уравнений помимо равенств, накладываемых на правые части этих уравнений, фигурируют принципиально иные требования: сходимость некоторых рядов, построенных по этим правым частям, гладкость этих правых частей и др. Анализ же формул для решений этих уравнений обнаруживает еще одно неприятное явление: малым изменениям правых частей соответствуют сколь угодно большие изменения соответствующих решений. Именно это явление дало основание линейные интегральные уравнения первого рода и задачи, сводимые к ним, называть *некорректными*.

Естественно возникает вопрос о выяснении причин столь различных свойств у линейных интегральных уравнений первого и второго рода.

В начале XX в. возникла абстрактная схема исследования линейных задач. Эта схема основывалась на переходе от рассматриваемой задачи к операторному уравнению

$$Ax = y \qquad (1.7)$$

с непрерывным линейным оператором A, действующим между подходящими банаховыми пространствами X и Y. Операторное уравнение (1.1) как частный случай содержит прежде всего системы линейных алгебраических уравнений. Однако оно в той же степени позволяет рассматривать и краевые задачи для обыкновенных дифференциальных уравнений и уравнений с частными производными, линейные интегральные уравнения различных типов и многие другие задачи. Естественно, при анализе уравнения (1.1) в первую очередь возникал вопрос о том, какие именно свойства оператора

A определяют, будет ли уравнение вести себя «хорошо», т. е. будут ли малым изменениям его правой части $y \in Y$ соответствовать малые изменения соответствующих решений $x \in X$, или это уравнение является некорректным, т. е. при малых изменениях правых частей $y \in Y$ соответствующие решения $x \in X$ будут «прыгать» сколь угодно далеко или вовсе «исчезать». Несколько иначе этот вопрос можно сформулировать так: для каких операторов A свойства уравнения (1.1) будут вполне аналогичны свойствам систем линейных алгебраических уравнений и для каких A эти свойства будут совершенно иными.

Как было выяснено Ф. Хаусдорфом и затем С. Банахом, основные теоремы в теории систем линейных алгебраических уравнений – теорема Кронекера–Каппелли – или ее геометрическая форма – теоремы Фредгольма верны и в бесконечномерном случае лишь при дополнительном предположении, что оператор A имеет замкнутую область значений (такие операторы получили название *нормально разрешимых*). Точнее, в их работах была установлена эквивалентность следующих утверждений:

(1) *Область значений оператора A на пространстве X является замкнутым подпространством пространства Y.*

(2) *Уравнение* (1.1) *разрешимо в том и только том случае, когда на его правой части y аннулируются все решения $y_* \in Y^*$ однородного уравнения*

$$A^* y_* = 0 \tag{1.8}$$

с сопряженным к A действующим из Y^* в X^* оператором A^* (*здесь X^* и Y^* – сопряженные или дуальные пространства к пространствам X и Y*).

(3) *Для оператора A справедливо неравенство*

$$\inf\{\|x\| : Ax = y\} \le L\|y\|, \tag{1.9}$$

где L – некоторая постоянная.

Было также доказано, что аналоги этих эквивалентных утверждений верны и для пары уравнений

$$A^* y_* = x_*, \quad Ax = 0. \tag{1.10}$$

В частности, установлено, что оператор A является нормально разрешимым в том и только том случае, когда нормально разрешим оператор A^*.

Важным фактом теории систем линейных алгебраических уравнений является существование для соответствующего линейного оператора A *квазиобратных* операторов B. Так называются операторы B, для которых справедливо равенство $ABA = A$. Смысл этого определения заключается в справедливости следующего утверждения: *если уравнение $Ax = y$ имеет решение, то $x = By$ является одним из решений этого уравнения*. Частными случаями квазиобратных операторов B являются обычные левые обратные операторы ($BA = I$) , правые квазиобратные операторы ($AB = I$) и обычные обратные операторы ($BA = I$, $AB = I$).

Справедливость теорем Фредгольма для уравнения (1.1) (за исключением случая, когда оба пространства X и Y являются гильбертовыми) является необходимым условием для существования квазиобратных операторов, однако в общем случае не достаточным. Известно следующее утверждение: *оператор A имеет квазиобратные в том и только в том случае, когда подпространство нулей оператора и пространство значений оператора A являются дополняемыми подпространствами*. Более того, *если оператор B является квазиобратным для оператора A, то оператор $I - BA$ является проектором на подпространство нулей оператора A, а оператор AB оператором проектирования на множество значений оператора A*. Операторы, имеющие квазиобратные, принято называть *расщепляемыми*.

Детальному изучению подверглись частные классы расщепляемых операторов A, когда одно из подпространств $Ker\ A$ или $Im\ A$ является конечномерным. Операторы A, для которых оба этих подпространства конечномерны, получили название *фредгольмовых* (или *нетеровых*); их теория полностью повторяет теорию систем линейных алгебраических уравнений.

Для операторов A, не являющихся нормально разрешимыми, все перечисленные выше утверждения оказываются неверными. Более того, сформулированное выше свойство (1.3) по сути означает, что существует такая сходящаяся к нулю последовательность $(y_n) \in Im\ A$, для которой при любом выборе элементов $x_n \in X$, для которых $Ax_n = y_n$ ($n = 1,2,...$) справедливо соотношение $\|x_n\| \to \infty$ при $n \to \infty$.

В приложениях обычно в явном виде задается левая часть уравнения (1.7) (оператор A) в виде некоторой аналитической формулы, а пространства X и Y выбираются таким образом, чтобы этот оператор оказывался непрерывным линейным оператором между этими пространствами. Является ли при этом оператор A нормально разрешимым зависит именно от выбора пространств X и Y. Более того, подбирая эти пространства, (почти) всегда можно добиться, чтобы уравнение (1.7) оказалось уравнением с нормально разрешимым оператором. Поэтому в течении первой половины XX в. в ситуации, когда возникало уравнение с ненормально разрешимым оператором считалось, что соответствующая модель, описанная этим уравнением, не является корректной.

Однако выбор пространств X и Y часто диктуется иными соображениями. Среди них наиболее естественным кажется требование совпадения пространств X и Y ($X = Y$), требование, чтобы пространства X и Y были достаточно простыми, а лучше хорошо изученными, такими как пространство C непрерывных функций или пространство L_p ($1 \le p \le \infty$) интегрируемых со степенью p при $1 \le p < \infty$ или ограниченных функций при $p = \infty$. Выбор таких пространств часто диктуется также самой рассматриваемой задачей. Тем самым, во многих случаях операторное уравнение (1.7) приходится рассматривать с действующим и непрерывным из X в Y оператором A, не являющимся нормально разрешимым. И к середине XX в. была осознана необходимость построения общей теории линейных уравнений, не обладающих свойством корректности.

Изложенные выше результаты попали практически во все достаточно полные курсы функционального анализа. Здесь мы отметим курсы С. Банаха, Н. Данфорда – Дж. Т. Шварца, Р. Иосиды, Л. В. Канторовича – Г. П. Акилова, А. Н. Колмогорова – С. В. Фомина и Л. А. Люстерника – В. И. Соболева.

1.3. Важными частными случаями операторного уравнения (1.7) являются случаи, когда пространства X и Y совпадают ($X = Y$) и когда оператор A представим в виде $A = K$ или $A = I - K$, где K – невырожденный ($Im\, K$ не является конечномерным подпространством X) компактный линейный оператор. Именно к этому типу относятся линейные интегральные уравнения первого рода в первом случае и линейные интегральные уравнения второго рода во втором. Это послужило основной причиной для детального изучения обоих случаев.

Основные результаты здесь были получены Ф. Риссом и Ю. Шаудером. Они установили, что в случае $A = K$ этот оператор обязательно не является нормально разрешимым, а в случае $A = I - K$ он будет не только разрешимым, но и фредгольмовым, для которого $dim\, Ker(I - A) = codim\, Im(I - A)$. Именно эти результаты и являются объяснением столь различных свойств линейных интегральных уравнений первого и второго рода.

Позднее результаты Ф. Рисса и Ю. Шаудера были распространены и на другие классы операторных уравнений (в частности, на случай, когда $A = I - K$ с оператором K, для которого некоторая степень является компактным оператором). Методы Ф. Рисса и Ю. Шаудера были распространены также на произвольные фредгольмовы операторы. Систематическое изложение этих результатов приведено в работах З. И. Халилова, N. Danford и D. Shwartz [115, 133].

1.4. Изложенные в подразделах 1.2 – 1.3 общие теоремы о линейных операторах объяснили причины, обуславливающие «плохое» поведение некорректных линейных уравнений, однако мало что добавляли в задаче о реальном построении решений таких уравнений.

Между тем, попытки разработать разнообразные приближенные методы построения решений уравнения (1.7) с оператором A неоднократно предпринимались. Так Э. Пикар рассматривал непрерывные решения интегральных уравнений (1.1) с ядрами, допускающими представление

$$K(t, s) = K_0(t, s) + h(t, s),$$

в котором ядро $K_0(t, s)$ обладало тем свойством, что линейный интегральный оператор

$$K_0 x(t) = \int_{\Omega} K_0(t,s)x(s)ds \tag{1.11}$$

допускал аналитическое обращение K_0^{-1} (в частности, он рассматривал представления (1.11) с $K_0(t, s) = K(s, s)$ или $K_0(t, s) = K(t, t)$. Далее, вместо уравнения (1.1) фактически рассматривалось операторное уравнение

$$x(t) = -K_0^{-1}Hx(t) + K_0^{-1}f(t) \quad \left(Hx(t) = \int_{\Omega} h(t,s)x(s)ds \right), \tag{1.12}$$

решения которого строились методом последовательных приближений

$$x_{n+1}(t) = -K_0^{-1}Hx_n(t) + K_0^{-1}f(t) \quad (n = 0,1,2,...). \tag{1.13}$$

Отметим еще раз, что переход от уравнения (1.11) к уравнению (1.12) не является эквивалентным – для произвольной непрерывной функции $f(t)$ функция $K_0^{-1}f(t)$, вообще говоря, не определена.

Метод последовательных приближений решения линейных интегральных уравнений систематически изучался в течение всей первой половины XX в., однако, в основном для уравнений второго рода (1.2). В абстрактном виде он применяется к уравнениям (1.7) вида

$$x = Bx + f, \tag{1.14}$$

с действующим в банаховом пространстве X непрерывным линейным оператором B; последовательные приближения записывается в виде

$$x_{n+1} = Bx_n + f \quad (n = 0,1,2,...) \tag{1.15}$$

или в виде

$$x_n = \sum_{k=0}^{n} B_n f \quad (n = 0,1,2,...).$$

Ясно, что вопрос о сходимости приближений (1.15) сводится к вопросу о сходимости операторного ряда $\sum_{n=0}^{\infty} B_n$. Общим итогом проведенных исследований явился следующий абстрактный результат: *ряд Неймана* $\sum_{n=0}^{\infty} B_n$ *сходится* (*в норме пространства* $L(X)$ *действующих в* X *операторов*) *в том и только в том случае, когда справедливо неравенство*

$$\rho(B) = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left\| A^n \right\|} < 1. \tag{1.16}$$

Предел в этом равенстве всегда существует и получил название *спектрального радиуса оператора B* [59].

Долгое время этот результат считался необходимым и достаточным условием сходимости последовательных приближений (1.15). Однако это утверждение оказалось неверным. В работе В. М. Фридмана [113] было установлено, что для уравнения (1.1), ядро которого определяет положительно определенный и самосопряженный оператор A, последовательные приближения

$$x_{n+1} = x_n + \mu(y - Ax_n)\ (n = 0,1,2,...) \tag{1.17}$$

с любым начальным условием x_0 сходятся при условии $0 < \mu < \dfrac{2}{\|A\|}$. Эти последовательные приближения могут быть записаны в виде (1.15) с оператором

$$B = I - \mu A, \quad f = \mu y. \tag{1.18}$$

При условии $0 < \mu < \dfrac{2}{\|A\|}$ для оператора B справедливо равенство $\rho(B) = 1$. При этом ряд Неймана $\sum\limits_{n=0}^{\infty} B_n$ не сходится по норме пространства $L(X)$ действующих в X операторов, однако он сходится сильно!

Результаты работы В. М. Фридмана были существенно развиты в работе Г. Н. Положего [84]. В частности, в этой работе рассматривался случай, когда ядро $K(t, s)$ не обладало свойством симметричности, но порождало компактный линейный оператор K. В этом случае уравнение (1.7) заменялось уравнением

$$A^* Ax = A^* f, \tag{1.19}$$

а последовательные приближения (1.17) заменялись приближениями

$$x_{n+1} = x_n + \mu(A^* y - A^* Ax_n) \quad (n = 0,1,2,...). \tag{1.20}$$

Эти результаты по существу не были новыми, т. к. приближения (1.20) являются приближениями (1.17), в которых оператор A заменен положительно определенным и самосопряженным оператором $A^* A$.

Результаты В. М. Фридмана были распространены на произвольные положительно определенные и самосопряженные операторы в работе H. Bialy [130]. В 1961 г. М. А. Красносельский для самосопряженных операторов B с $\rho(B) = 1$, получил окончательный результат: *для самосопря-*

женного оператора B последовательные приближения (1.15) *сходятся при любом начальном условии* x_0 *к одному из решений уравнения* (1.14) *при условии, что для оператора B число* -1 *не является собственным значением.* Теорема М. А. Красносельского позволяет существенно усилить результаты В. М. Фридмана, H. Bialy и Г. Н. Положего.

Дальнейшие результаты по сходимости последовательных приближений (1.17) в критическом случае, когда для оператора B выполняется равенство $\rho(B) = 1$ были получены в работе J. J. Koliha [157]. Он исследовал общий случай, когда оператор B действует в произвольном банаховом пространстве X. Основной его результат следующий: *последовательные приближения* (1.17) *для такого оператора сходятся сильно при любом начальном условии* x_0 *в том и только в том случае, когда выполнены условия*

$$\lim_{n\to\infty}\left\|B^n x\right\| = 0 \ \ (x \in E), \quad (I - B)X = X. \tag{1.21}$$

В работе М. А. Красносельского и П. П. Забрейко [60] был приведен ряд уточнений этой теоремы. В частности, для общего случая, когда хотя бы одно из условий (1.21) не выполнено, там были описаны множества начальных условий x_0 и правых частей f, для которых последовательные приближения (1.17) сходятся.

Нужно отметить еще монографию S. I. Lyashko [160], в которой изучались так называемые корректные операторы, класс которых по существу оказался совпадающим с операторами, удовлетворяющим условиям J. J. Koliha (1.21).

Результаты, описанные в этом разделе, обладают одним существенным недостатком. Формально они описывают условия сильной сходимости последовательных приближений к точным решениям уравнений с операторами, не обладающими свойством нормальной разрешимости, или, иными словами, для некорректных линейных уравнений. Однако эта сходимость в определенном смысле не является устойчивой. При реальных вычислениях этих последовательных приближений на каждом шаге делаются малые ошибки. В некритическом случае ($\rho(B) < 1$) эти ошибки не влияют на сходимость и не накапливаются в процессе вычислений. В критическом же случае ($\rho(B) = 1$) эти ошибки не только «сбивают» эту сходимость, но и накапливаются; последнее означает, что при реальных вычислениях последовательные приближения (1.15) к решениям уравнения (1.14) не сходятся. Описанный недостаток теорем этого раздела, по-видимому, явился основной причиной того, что эти результаты оказались сравнительно мало известными и дальнейшего развития практически не получили.

1.5. К середине XX в. стало ясно, что исследование некорректных линейных уравнений является важной задачей в связи с тем, что многие практические задачи при переходе к операторному уравнению (1.7) приводили к ситуациям, когда соответствующий линейный оператор A оказывался не нормально разрешимым, а пространства X и Y в этих задачах (чаще всего это было пространство C непрерывных функций) менять было нельзя. Революционный шаг в изучении некорректных линейных задач был в 1943 г. сделан А. Н. Тихоновым [109].

А. Н. Тихонов сначала ограничился простейшим случаем, когда ядро оператора A нулевое, а область его значений плотное в Y подпространство. В этом случае уравнение (1.7) с фиксированным $y_0 \in Y$ может быть как разрешимым, так и неразрешимым. Однако при любом $\delta > 0$ для некоторых $y \in B(y_0, \delta)$, где $B(y_0, \delta)$ – шар с центром в точке y_0 радиуса δ, это уравнение обязательно разрешимо. И тем самым, прообраз $A^{-1}B(y_0, \delta)$ шара является обязательно непустым замкнутым выпуклым множеством; эти прообразы $A^{-1}B(y_0, \delta)$ убывают вместе с δ, а при $\delta \to \infty$ «стягиваются» к решению (если оно существует) уравнения (1.7) с $y = y_0$ или к пустому множеству (если решение отсутствует). Опираясь на этот факт, А. Н. Тихонов предложил вместо точного решения x_0 уравнения (1.7) искать какое либо решение $x \in A^{-1}B(y_0, \delta)$ уравнения (1.7) с $y \in B(y_0, \delta)$ при некотором фиксированном ненулевом δ; такие решения для некоторых $y \in B(y_0, \delta)$ всегда существуют! Особенно эффективным такой подход оказался в случаях, когда для решений уравнения (1.7) может быть получена априорная оценка об их принадлежности к некоторому множеству $M \subset X$, обладающем «хорошими» свойствами (ограниченность, компактность, слабая компактность и др.).

Сам А. Н. Тихонов реализовал предложенную схему для уравнений (1.7) с оператором A: $X \to Y$ между гильбертовыми пространствами X и Y следующим образом. Уравнение (1.7) с $y = y_0$ очевидным образом эквивалентно задаче о наименьшем значении функционала $\varphi(x, y_0) = kAx - y_0k^2$ на всем пространстве X; однако эта задача очевидным образом близка к задаче о наименьшем значении «возмущенного» или «сглаживающего» функционала $\varphi^{\varepsilon}(x, y_0) = kAx - y_0k^2 + \varepsilon\Omega(x)$, где $\Omega(x) > 0$ – регуляризующий (стабилизирующий) функционал, область определения которого априорно содержит точные решения уравнения (1.1) с $y \in B(y_0, \delta)$. В построениях А. Н. Тихонова лебеговы множества $\{x \in \{x : \Omega(x) \le h\}$, $h > 0$ были компактами; число ε – неотрицательный и достаточно малый параметр. В этом случае им было показано, что элементы $x_{\varepsilon,\delta}$, минимизирующие функционал $\varphi^{(\varepsilon,\delta)}(x, y_\delta)$ на одном из лебеговых множеств Ω, сходятся к точному решению x_0 уравнения (1.7) с $y = y_0$ (в предположениях А. Н. Тихонова такое решение обязательно существует!), если $\varepsilon \to 0$ и $\dfrac{\delta^2}{\varepsilon} \to 0.$ Им же был рассмотрен частный случай, когда решение x_0 априори имело вид $x_0 = A^* h_0$, $\|h_0\| \le C_0$; в этом случае им были получены достаточно точные оценки близости между $x_{\varepsilon,\delta}$ и x_0, а именно неравенство $\|x_{\varepsilon,\delta} - x_0\| \le \frac{\delta}{\sqrt{\varepsilon}} + h\sqrt{\varepsilon}$ (h выбрано так, что все возможные решения уравнения (1.7) с $y = y_0$ лежат в лебеговом множестве $\Omega(h)$.

В 1962 г. Д. Л. Филлипс (D. L. Phillips) [173] и В. К. Иванов [38] предложили удобную модификацию метода А. Н. Тихонова. Вместо описанного в методе регуляризации А. Н.Тихонова функционала $\varphi^\varepsilon(x, y)$ они предложили минимизировать функционал $\Omega(x)$ при условии $\rho(Ax, y) \le \delta$. Ими, в предположении существования единственного решения x_0 уравнения (1.7) с $y = y_0$, было показано, что элементы $x_{\varepsilon,\delta}$, минимизирующие функционал $\Omega(x)$ при условии $\rho(Ax, y_\delta) \le \varepsilon$, сходятся к точному решению x_0 при $\delta \to 0$. В. К. Ивановым было введено важное понятие квазирешения уравнения (1.7): элемент x_0 называется *квазирешением* уравнения (1.7) на множестве M, если он минимизирует функционал $\rho(Ax, y)$ на этом множестве. В дальнейшем, предложенные А. Н. Тихоновым, Д. Л. Филлипсом и В. К Ивановым вариационные методы получили развитие в работах О. А. Лисковца, Я. В. Константиновой и др.

1.6. Существенный вклад в развитие теории некорректных задач внес М. М. Лаврентьев. В монографии М. М. Лаврентьева [64] был предложен новый подход к исследованию некорректных задач, общая схема которого состояла в следующем: вместо исходного уравнения (1.1) рассматривалось уравнение

$$A_\varepsilon x = y_\delta, \tag{1.22}$$

где A_ε – оператор, который с одной стороны был бы близок к оператору A, а с другой стороны уравнение $A_\varepsilon x = y_\delta$ становилось уравнением с нормально разрешимым оператором; об y_δ предполагалось, что $y_\delta \in B(y, \delta)$. В этом случае уравнение (1.22) определяет решение и возникает естественный вопрос, является ли оно близким к решению уравнения (1.7), если последнее имеет решение. Естественно пытаться получить оценку близости между точным решением (1.7) и решением $x_{\varepsilon,\delta}$ уравнения (1.22) при малых ε и δ. Но, как оказывается, такие оценки можно получить лишь в исключительных случаях и, как правило, при жестких дополнительных ограничениях.

Сам М. М. Лаврентьев рассматривал случай, когда оператор A был положительно определенным самосопряженным, а оператор A_ε определялся равенством $A_\varepsilon = \varepsilon I + A$. Более того, им предполагалось, что правая часть y уравнения (1.7) была представима в виде $y = Bz$, где B – коммутирующий с A оператор. Тем самым возникал вопрос о близости между $x_{\varepsilon,\delta}$ и точным решением x уравнения (1.7) в предположении, что $y = Bz$. Такая оценка М. М. Лаврентьевым была получена в виде

$$\|x_{\varepsilon,\delta} - x\| \le \omega(\varepsilon) + \delta\varepsilon^{-1}, \tag{1.23}$$

где $\omega(\cdot)$ – некоторая построенная по операторам A и B функция, для которой $\omega(\varepsilon) \to 0$ при $\varepsilon \to 0$. Тем самым, М. М. Лаврентьев обнаружил принципиально новое явление в поведении приближений $x_{\varepsilon,\delta}$. Коротко это явление может быть выражено следующими словами: при стремлении ε к нулю приближения $x_{\varepsilon,\delta}$ сначала подходят достаточно близко к решению x уравнения (1.7), а затем начинают удаляться; при этом близость между соответствующими приближениями $x_{\varepsilon,\delta}$ и точным решением x уравнения (1.7) стремится к нулю при $\delta \to 0$. Формально это свойство выражается равенством

$$\lim_{\delta\to 0,\ \delta\varepsilon^{-1}\to 0} \|x_{\varepsilon,\delta} - x\| = 0.$$

В той же монографии М. М. Лаврентьев рассмотрел и случай уравнения (1.7) с произвольным оператором A в гильбертовом пространстве. Уравнение (1.7) сводилось стандартным способом к уравнению

$$A^*Ax = A^*f, \tag{1.24}$$

уже с положительно определенным самосопряженным оператором и, затем, в предположении перестановочности операторов A^*A и B им была получена аналогичная оценка

$$\|x_{\varepsilon,\delta} - x\| \le \omega(\sqrt{\varepsilon}) + \frac{\delta}{\sqrt{\varepsilon}}. \tag{1.25}$$

Наконец, в той же монографии для уравнения (1.7) был рассмотрен и итерационный метод

$$x_{n+1,\delta} = x_{n,\delta} - (Ax_{n,\delta} - f_\delta)\ (n = 0,1,2,...) \tag{1.26}$$

для приближенного решения уравнения (1.7) с положительно определенным самосопряженным оператором A и приближенно заданной правой частью f_δ ($f_\delta \in B(f, \delta)$). При тех же предположениях им была показана оценка

$$\|x_{n,\delta} - x\| \le \omega\left(\frac{1}{n+1}\right) + n\delta. \tag{1.27}$$

Здесь снова $\omega(\cdot)$ – определенная по операторам A и B функция, для которой $\omega(t) \to 0$, $t \to 0$. Неравенство (1.27) показывает, что приближения $x_{n,\delta}$ при увеличении n сначала приближаются к точному решению, а затем от него удаляются; при этом близость «близких» к точному решению x приближений $x_{n,\delta}$ стремится к нулю при $\delta \to 0$. Коротко это явление может быть выражено следующим равенством

$$\lim_{n\to\infty,\ n\delta\to 0} \left\| x_{n,\delta} - x \right\| = 0. \qquad (1.28)$$

Описанную ситуацию можно также выразить равенством

$$\lim_{\delta\to 0}\left(\lim_{n\to\infty}\left(\min_{n\le\nu<\infty} \left\| x_{\nu,\varepsilon} - x \right\| \right)\right) = 0. \qquad (1.29)$$

Для уравнения (1.24) соответствующий итерационному методу (1.26) метод последовательных приближений записывается в виде

$$x_{n+1,\delta} = x_{n,\delta} - (A^* A x_{n,\delta} - A^* f_\delta) \quad (n = 0,1,2,...); \qquad (1.30)$$

для него М. М. Лаврентьев также получил аналог неравенств (1.27). Автором была обоснована сходимость предложенного метода последовательных приближений для некоторых классов нелинейных операторных уравнений.

При других предположениях метод простой итерации был исследован Ю. Т. Антохиным [4]. Здесь рассматривается уравнение $Ax = f$ в гильбертовом пространстве, $A = A^*$ – линейный, неограниченный оператор, со всюду плотной областью определения $D(A)$. Для оператора нуль служит точкой его же спектра, но в тоже время не является собственным значением, т. е. существует последовательность $\{x_n\}$ такая, что $\|x_n\| = 1$, $\|Ax_n\| \to 0, n \to \infty$ и $Ax_n \ne 0$ при $x \ne 0$. В дальнейшем предполагается, что решение уравнения существует. Предложенная здесь схема явного метода последовательных приближений выглядит так: $x_1 = f$, $x_n = \left(E - \frac{1}{n} A \right) x_{n-1} + \frac{1}{n} f$. Для данного метода при условии, что оператор $A = A^* > 0$, доказана сходимость $\|R_n\|^2 = \|x - x_n\|^2 \to 0,\ n \to \infty$ и, также, для предложенного метода еще получена оценка погрешности $\|R_n\|^2 = \int\limits_0^{\|A\|} |r_n(\lambda)|^2 \, d\,(E_\lambda x, x) \le \int\limits_0^{\varepsilon} d\,(E_\lambda x, x) + \left(\frac{K_1{}^2}{n^{2\varepsilon}} + \frac{1}{(n!)^2} \right) K^2$, где $\forall\ \varepsilon \in (0,1)$: $|r_n| \le 1$ при $0 \le \lambda \le \varepsilon$; $|r_n| \le K_1(\varepsilon)/n^{\varepsilon}$ при $\varepsilon \le \lambda \le n + 1 - \varepsilon$; $|r_n| \le \lambda^n / n!$ при $n < \lambda$, и в предположении, что $f \in D(A^n)$, $n = 1,2,...$, причем $\left\| A^n f \right\| \le K$ ($K \ne K(n)$) и $\|x\| \le K$.

А. С. Апарциным [6] в гильбертовом пространстве H решается уравнение первого рода $A\varphi = f$ с положительным самосопряженным вполне непрерывным оператором A. Предполагается, что уравнение разрешимо. Пусть $\overline{\varphi}$ – нормальное решение, т. е. решение с минимальной нормой (случай неединственного решения рассматриваемого операторного уравнения). Хорошо известно, что задача нахождения $\overline{\varphi}$ некорректна. В настоящей работе рассматривается явная итерационная процедура вида

$\varphi_{n+1,\alpha_{n+1}} = [(1-\mu\alpha_n)E - \mu A]\varphi_{n,\alpha_n} + \mu f$, $\varphi_{0,\alpha_0} = \mu f$, которая является дискретным аналогом линейного дифференциального уравнения $\frac{dW(t)}{dt} + [\alpha(t)E + A]W(t) = f$, где $W(t_0) = W_0 \in H$, $\alpha(t)$ – положительная монотонно убывающая функция при $t \geq t_0$ и $\lim\limits_{t\to\infty} \alpha(t) = 0$. Доказана сходимость метода при условии $0 < \mu < \frac{2}{\alpha_n + \|A\|}$, $n = 0,1,2,...$ ($A: H \to H$). Также доказана сходимость предложенной процедуры при приближенной правой части уравнения и когда оператор A заменяют некоторым более удобным для вычислений «приближенным оператором» (если A – интегральный оператор, то его заменяют квадратурной формулой).

А. В. Крянев [63] решает линейное уравнение $Ax = y$, где $A: H \to H$ – ограниченный, самосопряженный, линейный и неотрицательный оператор. Если A – вполне непрерывный оператор, то $A(H) \neq H$ (задача некорректна, т. к. не для всех $y \in H$ разрешима). Рассмотрен случай неединственного решения данного уравнения. Вводится $B: H \to H$ – ограниченный, самосопряженный, линейный и положительно определенный оператор, для которого $M_B = \sup\limits_{\|x\|=1}(Bx, x)$, $m_B = \inf\limits_{\|x\|=1}(Bx, x) > 0$ и $M_A = \sup\limits_{\|x\|=1}(Ax, x)$. При сделанных предположениях определен оператор $C = (A+B)^{-1}B$, спектральный радиус которого, очевидно, равен 1. Для решения линейного уравнения автор предлагает неявный итерационный процесс $Ax_n + Bx_n = Bx_{n-1} + f$, который можно переписать в эквивалентной форме: $x_n = Cx_{n-1} + (A+B)^{-1} f$. Доказана сходимость метода при точной и приближенной правой части уравнения. Рассмотрен случай суммарных возмущений оператора и правой части уравнения: ΔA и Δf, получена оценка погрешности $\|x - x_n\| \leq M_0(n) + \delta \frac{q^n - 1}{(q-1)m_B}\left[MqN_0 + \frac{MN}{m_B} + 1 + O(\delta)\right]$, где $\|C\| = q$, $\|\Delta A\| \leq M\delta$, $\|\Delta f\| \leq \delta$, $\|f\| \leq N$, $0 \leq M_0(n) \to 0$ при $n \to \infty$ и $0 \leq O(\delta) \leq C_0\delta$ $(C_0 \geq 0,\ C_0 \neq C_0(\delta))$, $\left\|(A+B)^{-1}\Delta A\right\| < 1$. Автором решен следующий численный пример. Ищется решение уравнения Фредгольма первого рода $\int\limits_{-3}^{3} K(t-s)x(s)ds = f(t)$, $|t| \leq 3$, где $K(z) = \begin{cases} 1 + \cos(\pi z/3), |z| \leq 3, \\ 0, |z| > 3. \end{cases}$

Бралась такая функция $f(t)$, которой соответствует решение $x(t) = K(t)$. Интеграл заменялся квадратурной формулой по правилу Симпсона (число точек разбиения m = 29). В качестве матрицы B бралась трехдиагональная матрица (b_{ij}): $b_{ii} = 2, i = \overline{1{,}29}$, $\quad b_{i,i-1} = b_{i-1,i} = -1, i = \overline{2{,}29}$. Сначала рассматривается итерационная схема $Ax_n + \varepsilon Bx_n = \varepsilon Bx_{n-1} + f, \varepsilon > 0$, где $A + \varepsilon B$ – положительно определенная симметричная матрица формата $m \times m$ (A, B – положительно определенные симметричные матрицы формата $m \times m$, но A – плохо обусловленная), которая при достаточно больших $\varepsilon > 0$ хорошо обусловленная. Представляется $A + \varepsilon B = C^T C$, где C – верхняя треугольная матрица и предложенная схема заменяется более удобной

$$C^T Cx_n = \varepsilon Bx_{n-1} + f, \varepsilon > 0,$$

которой и решается рассмотренный численный пример.

В. М. Фридман в статье [114] для решения в гильбертовом пространстве уравнения первого рода $Lx = Ax - y = 0$ с линейным ограниченным оператором A предлагает итерационный метод $x_{n+1} = x_n - \dfrac{\|Lx_n\|^2}{\|A^* Lx_n\|^2} A^* Lx_n$. С использованием интегрального представления оператора A^*A рассмотрен случай неединственного решения уравнения (рассматриваемая задача некорректна) и доказана сходимость предлагаемого метода: $x_n \to Px_0 + u$, где $x_0 \in H$ – начальное приближение, u – единственное решение уравнения, P – оператор проектирования на подпространство нулей оператора A.

В. Н. Страховым [105] в гильбертовом пространстве H решается уравнение первого рода $f = (E - T)\varphi$, где оператор $T = T^* \geq 0$ и $\|T\| = 1$, $1 \in S_T$, $f \in R(E - T)$. Для решения уравнения предлагается итерационная схема $\varphi_n = T\varphi_{n-1} + f$, из которого следует $\varphi - \varphi_n = T^n(\varphi - \varphi_0)$. С помощью интегрального представления положительного самосопряженного оператора T получено: $\|\varphi - \varphi_n\|^2 = \int\limits_0^1 \mu^{2n}\, d\big(E_\mu(\varphi - \varphi_0), \varphi - \varphi_0\big)$. Доказана сходимость метода, и для получения оценки погрешности $\left(\|\varphi - \varphi_n\| = O\left(\dfrac{1}{n^x}\right)\right)$ использовалось предположение об истокопредставимости точного решения, т. е. что $\varphi \in R\big((E - T)^x\big)$, $x > 0$.

В работе [107] В. Н. Страхов решает операторное уравнение первого рода $A\varphi = f$ $\left(\|A^{-1}\| = +\infty\right)$ методом $\varphi_0 = f_0$, $\varphi_n = (E - A)\varphi_{n-1} + f$, потребовав $\|E - A\| = 1$. Здесь f_0 – произвольная функция из гильбертова пространства $H = L_2(-\infty, +\infty)$. В работе доказана сходимость итерационного метода: $\|\varphi_n - \varphi\| = \left\|(E - A)^n(\varphi_0 - \varphi)\right\| \to 0,\ n \to \infty$. Оценка погрешности метода не получена.

Наиболее подробно априорный выбор числа итераций для ***метода простой итерации Ландвебера*** [21, 30, 36, 37, 64, 69, 70, 84, 87, 90, 113, 129, 130, 137, 151, 158]

$$x_{n+1,\delta} = x_{n,\delta} + \alpha(y_\delta - Ax_{n,\delta}),\ x_{0,\delta} = 0 \tag{1.31}$$

изучен О. А. Лисковцом и Я. В. Константиновой [55]. Авторами показано, что метод (1.31) сходится к точному решению уравнения $Ax = y_\delta$ ($A: H \to H$ – положительный ограниченный самосопряженный оператор) при условии $0 < \alpha < \frac{2}{\|A\|}$, если ограничиться числом итераций $n = n(\delta)$, зависящим от δ так, чтобы $n(\delta)\delta \to 0$ при $n \to \infty, \delta \to 0$. При условии $0 < \alpha \le \frac{5}{4\|A\|}$ и в предположении, что точное решение истокопредставимо, т. е. $x = A^s z,\ s > 0$, получена справедливая при всех $n \ge 1$ оценка погрешности $\|x - x_{n,\delta}\| \le s^s(n\alpha e)^{-s}\|z\| + n\alpha\delta$. Полученная оценка оптимизирована по *n*. Для этого при заданном δ найдено такое значение числа итераций *n*, при котором оценка погрешности становится минимальной. Оптимальная оценка погрешности для (1.31) имеет вид $\|x - x_{n,\delta}\|_{\text{опт}} \le (s+1)e^{-\frac{s}{s+1}}\delta^{\frac{s}{s+1}}\|z\|^{\frac{1}{s+1}}$ и получается при $n_{\text{опт}} = s\alpha^{-1}e^{-\frac{s}{s+1}}\delta^{-\frac{1}{s+1}}\|z\|^{\frac{1}{s+1}}$. Очевидно, для уменьшения $n_{\text{опт}}$ (здесь и далее $n_{\text{опт}}$ есть целое число) и, значит, числа итераций для получения решения *x* уравнения следует выбирать параметр α возможно большим из условия $0 < \alpha \le \frac{5}{4\|A\|}$. Также для итерационной процедуры получена погрешность в счете и изучен случай приближенно заданного оператора A_h : $\|A_h - A\| \le h$. С учетом погрешности в операторе получена оценка погрешности $\|x - y_{n,\delta}\| \le s^s(n\alpha e)^{-s}\|z\| + n\alpha\delta + \left((1+\alpha h)^n - n\alpha h - 1\right)h^{-1}\|y_\delta\|$, принимающая оптимальный для задач этого класса порядок $\|y_{n,\delta} - x\| = O\left((\delta + h)^{s/(s+1)}\right)$, если $n \asymp (\delta + h)^{-1/(s+1)}$.

В работе [130] H. Bialy решает уравнение первого рода $Ax = y$, где H – полное, сепарабельное гильбертово пространство, $A: H \to H$ – линейный ограниченный положительный оператор, 0 является его собственным значением (решение уравнения неединственно). Для решения рассматриваемого уравнения используется итеративная схема:

$$x_n = x_{n-1} + \tau(y - Ax_{n-1}),\ x_0 \in H,\ 0 < \tau < \frac{2}{\|A\|}.$$

Доказана сходимость метода в случае неединственного решения. Автором рассматриваются обобщения метода простой итерации:

$$x_n = x_{n-1} + T(y - Ax_{n-1}),\ x_0 \in H,\ T : H \to H,\ T = \tau A^*,\ 0 < \tau < \frac{2}{\|A\|^2};$$

и в случае, когда A – эрмитов оператор $\left(A \neq \varnothing,\ A = A^* \text{ и } \forall x \in H\ (Ax, x) \geq 0\right)$

$$x_n = x_{n-1} + (-1)^{n-1}\tau(y - Ax_{n-1}),\ x_0 \in H,\ 0 < \tau < \frac{\sqrt{2}}{\|A\|}.$$

Для всех приведенных схем автор доказывает сходимость в случае неединственного решения.

Впервые В. Ф. Савчуком и О. А. Лисковцом в работе [70] при условии $0 < \alpha < 2\|A\|^{-1}$ доказана сходимость метода итерации (1.31) в энергетической норме гильбертова пространства: $\|x\|_A = \sqrt{(Ax, x)}$, где $x \in H$. Для получения оценок погрешности не потребовалось сведений об истокопредставимости точного решения. Переход к энергетической норме как бы заменяет предположение об истокопредставимости порядка $s = 1/2$ для точного решения. Полученная оценка оптимизирована по n и найдено $n_{\text{опт}} : \|x - x_{n,\delta}\|_A^{\text{опт}} \leq (35/27)^{1/4}(2\delta\|x\|)^{1/2}e^{-1/4}$, $n_{\text{опт}} = (35/27)^{-1/2}\alpha^{-1}e^{-1/2}\delta^{-1}\|x\|$.

Работа О. А. Лисковца и Я. В. Константиновой [56] посвящена решению в гильбертовом пространстве H уравнения $Ax = y$ с положительным ограниченным самосопряженным оператором A. $0 \in S_A$, но нуль не является собственным значением оператора. Предполагается существование единственного решения уравнения. Для его отыскания строится градиентный метод итерации с переменным шагом $x_{n+1} = x_n - \alpha_{n+1}(Ax_n - y)$, $x_0 = 0$. При условиях

$$0 < \alpha_i < \frac{2}{\|A\|},\ \sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n = \infty \tag{1.32}$$

доказана сходимость предложенного метода при точной правой части уравнения. В случае, когда правая часть уравнения известна приближенно $y_\delta : \|y - y_\delta\| \leq \delta$, метод сходится при условиях (1.32) и если $(\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n)\delta \to 0,\ n \to \infty,\ \delta \to 0$. В предположении, что точное решение x истокопредставимо и при условии $0 < \alpha_i \le \frac{r(c_i)}{\|A\|}$ (где $r(c)$ – единственный корень уравнения $r = 1 + \left(\frac{c}{er}\right)^c$, $c > 0$) получена общая оценка погрешности в случае приближенного оператора ($\|A - A_h\| \le h$):

$$\|x - y_{n,\delta}\| \le s^s(\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n)^{-s} e^{-s}\|z\| + (\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n)\delta +$$
$$+ ((1 + \alpha_1 h)(1 + \alpha_2 h) \cdot \ldots \cdot (1 + \alpha_n h) - (\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n)h - 1)h^{-1}\|y_\delta\|.$$

В статье Я. В. Константиновой [57] в случае, когда правая часть уравнения $Ax = y_\delta$ задана приближенно, строится регуляризатор в виде неявного процесса $x_{n+1,\delta} = x_{n,\delta} - \alpha(Ax_{n+1,\delta} - y_\delta)$, $\alpha > 0$, $x_{0,\delta} = 0$. Здесь доказывается сходимость предложенного метода, но не получена эффективная оценка погрешности.

Целая глава О. А. Лисковца в работе [62] посвящена некорректным задачам и методам их решений. Здесь для решения операторного уравнения первого рода $Ax = y_\delta$ предлагаются вариационные методы решения (метод квазирешений Иванова, метод тихоновской регуляризации, метод и принцип невязки Филлипса и Иванова), обобщенное суммирование рядов, конечноразностный метод и метод итераций Ландвебера. Даются определения корректности задачи по Адамару и по Тихонову, определения регуляризующего алгоритма рассматриваемой задачи, формулируются достаточные условия сходимости предлагаемых методов. С помощью метода квазирешений, метода невязки, метода регуляризации и явного итерационного метода $x_{n+1,\delta} = x_{n,\delta} + 9{,}6(y_\delta - Ax_{n,\delta})$, $x_{0,\delta} = 0$ в гильбертовом пространстве $L_2(0,1)$ решается модельная задача в виде уравнения $\int_0^1 A(t,s)\,x(s)\,ds = y(t)$, $0 \le t \le 1$ с симметричным положительным ядром $A(t,s) = \begin{cases} t(1-s), 0 \le t \le s \le 1, \\ s(1-t), 0 \le s \le t \le 1, \end{cases}$ точной правой частью $y(t) = \frac{t(t-1)(t^2 - t - 1)}{12}$ и точным решением $x(t) = t(1-t)$. Оператор, описанный выше интегральным уравнением, непрерывен, взаимнооднозначен и аддитивен.

Работа О. А. Лисковца [72] посвящена обзору основных результатов по рассматриваемой теме. Здесь подчеркивается, что для линейного уравнения $Ax = y$ в гильбертовом пространстве H с самосопряженным оператором $A = A^*$ некорректность задачи эквивалентна принадлежности значения $\lambda = 0$ спектру оператора S_A, поэтому для решения уравнения оператор A можно заменить близким к нему оператором, спектр которого отделен от нуля. Эта идея была реализована различными способами. При положительном самосопряженном операторе $A = A^* \geq 0$ к нему можно добавлять оператор αE, где $\alpha > 0$, а E – тождественный оператор, сводя тем самым исходную задачу к уравнению (метод Лаврентьева):

$$Ax + \alpha x = y, \quad \alpha > 0, \tag{1.33}$$

при этом необходимым и достаточным для регуляризации является условие $\delta = O(\alpha)$, регуляризатором служит семейство линейных операторов $R_\alpha = (A + \alpha E)^{-1}$. При самосопряженном операторе $A = A^*$ к нему можно добавлять оператор $i\alpha E$, где i – мнимая единица, α – вещественное число, или оператор zE с комплексным z, не принадлежащим спектру S_A; то же верно при симметричном замкнутом операторе. При общем линейном операторе к рассматриваемому уравнению после левой трансформации Гаусса (умножения слева на сопряженный A^*) применяют метод (1.31), сводящийся в этом случае к уравнению $A^*Ax + \alpha x = A^*y, \quad \alpha > 0$; регуляризатором теперь служит семейство $R'_\alpha = \left(A^*A + \alpha E\right)^{-1} A^*$. Для решения преобразованного уравнения $A^*Ax = A^*y_\delta$ в случае погрешности в операторе ($\|A - A_h\| \leq h$) пригодны и нелинейные итерационные методы

$$x_{n+1,\delta} = x_{n,\delta} - \gamma_n A_h{}^* r_n, \;\; r_n = A_h x_{n,\delta} - y_\delta, \;\; x_{0,\delta} = 0,$$

$$\gamma_n = \gamma_n(\alpha) = \left(\left(A_h A_h{}^*\right)^\alpha r_n, r_n\right) \Big/ \left(\left(A_h A_h{}^*\right)^{\alpha+1} r_n, r_n\right),$$

называемые α-*методами*. При $\alpha \geq 1$ априорный выбор $n = O\left((\delta + h)^{-2}\right)$, или выбор по невязке первого n, для которого $\|r_n\| \leq b\delta + dh = \eta(\delta, h)$ с заданными числами $b > 1$, $d > \|x\|$ превращает эти методы в регуляризующие алгоритмы.

Работа И. В. Емелина, М. А. Красносельского и Н. П. Панских [35] посвящена спурт–методу построения последовательных приближений. Решается линейное уравнение $x = Ax + f$, где A – самосопряженный положительно определенный оператор, действующий в конечномерном евклидовом пространстве R^k. В работе утверждается:

1) если $\|A\| < 1$, то последовательные приближения $x_{n+1} = Ax_n + f$ сходятся к точному решению уравнения;

2) в случае, когда $\|A\|$ близка к единице (здесь скорость приближений из пункта 1) оказывается недостаточно быстрой) для ускорения сходимости при подсчете некоторых приближений лучше использовать итерацион-

ную процедуру $x_{n+1} = [(1-c)E + cA]x_n + cf$, где $c-$некоторый параметр, не зависящий от x_n.

В итоге авторами был предложен следующий алгоритм спурт–схемы. Полагают $A_\alpha(x) = Ax + f$, $A_\beta(x) = [(1-c)E + cA]x + cf$, и выбирая $0 < q < \|A\|$, обозначают через $r_n = x_n - Ax_n - f$ невязку. Выбрав какое-либо начальное приближение y_0, определяются последовательные приближения $\{y_n\}$ следующим образом:

$$y_{n+1} = \begin{cases} A_\alpha(y_n), \text{если либо } \|r_n\|/\|r_{n-1}\| < q, \text{ либо } y_n = A_\beta(y_{n-1}), \text{ либо } n = 0, \\ A_\beta(y_n), \text{если } n > 0, \ \|r_n\|/\|r_{n-1}\| \ge q \text{ и } y_n = A_\alpha(y_{n-1}). \end{cases}$$

Приближения y_n называют $\alpha-$итерациями, если $y_n = A_\alpha(y_{n-1})$, и $\beta-$итерациями, если $y_n = A_\beta(y_{n-1})$. Из построения алгоритма следует, что первое вычисленное приближение – $\alpha-$итерация; после $\beta-$итерации всегда следует $\alpha-$итерация. При условии $\dfrac{2}{2-\|A\|} < c < \dfrac{2}{2-\|A\|-q}$ доказана сходимость предложенного алгоритма. Показано, что метод сокращает объем вычислений по сравнению с методом Ландвебера. Недостаток спурт–схемы – повышенная чувствительность к ошибкам округления.

В статье И. В. Емелина и М. А. Красносельского [36] решается операторное уравнение $Ax = f$, где $A: H \to H-$ограниченный оператор. Известно, что $0 \in S_A$, но не является собственным значением оператора. Предполагается, что $\|A\| \le 1$. Если уравнение разрешимо $(f \in R(A))$, то применяется процесс $y_{n+1} = y_n - A^* A y_n + A^* \bar{f} + u_n$, где $\|f - \bar{f}\| \le \delta$, $\|u_n\| \le \beta$ ($u_n -$ошибки вычисления итераций). В статье для решения уравнения используется останов по поправкам (по соседним приближениям) $\begin{cases} \|y_n - y_{n+1}\| > \varepsilon, (n < m), \\ \|y_m - y_{m+1}\| \le \varepsilon. \end{cases}$ Здесь $\varepsilon -$ уровень останова. Доказана

Теорема 1.1. *Пусть* $\varepsilon = \varepsilon(\delta,\beta)$, *тогда справедливы следующие утверждения:*

а) если $\varepsilon(\delta,\beta) > 2\beta$, *то момент останова* m *определен при любом начальном приближении* $y_0 \in H$ *и любых* $\bar{f}$ *и* $\{u_n\}$, *удовлетворяющих условиям* $\|f - \bar{f}\| \le \delta$, $\|u_n\| \le \beta$;

б) если $\varepsilon(\delta,\beta) > \delta + 2\beta$, *то справедлива оценка*

$$m \le \frac{\|y_0 - x^*\|^2}{(\varepsilon - \delta - 2\beta)(\varepsilon - \delta)};$$

в) если $\varepsilon(\delta,\beta)\to 0,\ \delta,\beta\to 0$ *и при этом* $\varepsilon(\delta,\beta)\ge c(\delta+\beta^{p})$, *где* $c>1,\quad p\in(0,\,1)$, *то* $\lim\limits_{\delta,\beta\to 0}\left\|y_m - x^*\right\| = 0.$

Этими же авторами в работе [37] при решении линейного уравнения $Ax=f$, где $A: H\to H$ – ограниченный положительный самосопряженный оператор для метода простой итерации $x_{n+1,\delta}=x_{n,\delta}-Ax_{n,\delta}+f_\delta$ обосновывается применение останова по малости невязки $\left\|Ax_{n,\delta}-f_\delta\right\|>\varepsilon$, $(n<m)$, $\left\|Ax_{m,\delta}-f_\delta\right\|\le\varepsilon$. Доказана

Теорема 1.2. *Пусть уровень останова* $\varepsilon=\varepsilon(\delta)$ *предлагаемого итерационного процесса удовлетворяет неравенству* $\varepsilon(\delta)>\delta$ *и стремится к нулю при* $\delta\to 0$. *Тогда справедливо равенство*

$$\lim_{\delta\to 0}\ \sup_{\|f-f_\delta\|\le\delta}\left\|x_{m,\delta}-x\right\|=0,$$

где $x_{m,\delta}$ – *приближенное решение, полученное предлагаемой процедурой с уровнем останова* ε.

Недостаток работы – не получена для рассматриваемого метода оценка погрешности.

Г. М. Вайникко в работе [20] получает оценки погрешности метода Ландвебера при решении уравнений первого рода с неточно заданными оператором и правой частью. Останов последовательных приближений осуществляется по невязке или по поправкам (по соседним приближениям). Показано, что при останове по невязке автоматически делается нужное число итераций для получения оптимального по порядку результата, и при этом не нужно знать гладкости решения. Итак, автором решается уравнение

$$Au=f, \tag{1.34}$$

где $A\in L(H_1,H_2)$ – линейный ограниченный оператор ($A: H_1\to H_2$). Область значений $R(A)\subset H_2$ оператора A не замкнута (задача (1.34) не корректна, т. к. решение уравнения может не существовать), однако предполагается, что $f\in R(A)$. Уравнение (1.34) таким образом, разрешимо; решений может быть много, т. е. нулевое подпространство $N(A)=\{u\in H_1 : Au=0\}$ нетривиально. Автор указывает, что в реальных задачах оператор A и элемент f известны лишь приближенно, вместо них в его распоряжении имеются некоторые приближения $A_\eta\in L(H_1,H_2)$, $f_\delta\in H_2$, где

$$\left\|A_\eta - A\right\|\le\eta,\ \left\|f_\delta - f\right\|\le\delta, \tag{1.35}$$

$$\|A\| \le 1, \quad \|A_\eta\| \le 1. \tag{1.36}$$

Условие (1.36) не ограничивает класса решаемых задач (1.34), так как выполнение (1.36) можно всегда достичь, умножив (1.34) на подходящую константу. Для приближенного решения уравнения (1.34) автором строится итерационный процесс

$$u_n = \left(E - A_\eta^{\ *} A_\eta\right) u_{n-1} + A_\eta^{\ *} f_\delta , \tag{1.37}$$

где E – тождественный оператор, $A_\eta^{\ *} \in L(H_1, H_2)$ – сопряженный к A_η оператор. Здесь уравнение

$$A_\eta^{\ *} A_\eta u = A_\eta^{\ *} f_\delta , \tag{1.38}$$

по которому последовательные приближения (1.37) строятся, может быть и неразрешимым. Тем не менее, если итерации (1.37) остановить в подходящий момент, то соответствующее u_n будет близким к решению уравнения (1.34). Автором предлагается итерации (1.37) вычислять до такого номера *n*, при котором норма невязки $A_\eta u_n - f_\delta$ или норма поправки $u_n - u_{n-1}$ достигнет заданного уровня малости. Здесь обозначается через u_* – нормальное решение (1) относительно u_0 (начального приближения), т. е. решение, для которого норма $\|u_* - u_0\|$ минимальна по сравнению с другими решениями. Автор предлагает следующие правила останова для метода (1.37):

Правило останова (П.0). *Зададим* $a_1 > 0$ *и* $a_2 > 0$*; итерации остановим на таком номере* $n = n(\delta, \eta)$*, для которого впервые* $\|u_n - u_{n-1}\| \le a_1\delta + a_2\eta$.

Правило останова (П.1). *Зададим* $b_1 > 1$ *и* $b_* > \|u_*\|$*; итерации остановим на таком номере* $n = n(\delta, \eta)$*, для которого впервые* $\|A_\eta u_n - f_\delta\| \le b_1\delta + b_*\eta$.

Правило останова (П.2). *Зададим* $b_1 > 1$**,** $b_2 > 1$ *и* $a > 0$*; итерации остановим на таком номере* $n = n(\delta, \eta)$*, для которого впервые будет выполнено хотя бы одно из неравенств* $\|A_\eta u_n - f_\delta\| \le b_1\delta + b_2\|u_n\|\eta$, $n \ge \dfrac{a}{\left(b_1\delta + b_2\|u_n\|\eta\right)^2}$.

Доказаны

Теорема 1.3. *Пусть итерации* (1.37) *останавливаются по любому из правил останова П.0, П.1, П.2. Тогда* $\left\|u_{n(\delta,\eta)} - u_*\right\| \to 0$ *при* $\delta, \eta \to 0$*, при этом для* $n(\delta, \eta)$ *в случае правила П.0 справедливо соотношение:*

$(\delta+\eta)n(\delta,\eta)\to 0$ *при* $\delta,\eta\to 0$*, а в случае правил останова П.1 и П.2 соотношение:* $(\delta+\eta)^2 n(\delta,\eta)\to 0$ *при* $\delta,\eta\to 0$.

Соотношение $\left\|u_{n(\delta,\eta)}-u_*\right\|\to 0$ *при* $\delta,\eta\to 0$ означает, что правила П.0, П.1, П.2 последовательных приближений (1.37) определяют регуляризующие алгоритмы решения операторного уравнения (1.34).

Теорема 1.4. *Пусть погрешность* u_0-u_* *принадлежит области значений положительной степени оператора* A^*A *(требование истокообразной представимости точного решения):* $u_0-u_*=\left(A^*A\right)^p v,\quad p>0,\ \|v\|\le r$. *Тогда в случае П.0 справедливы оценки:* $\left\|u_{n(\delta,\eta)}-u_*\right\|\le C_{p,r}(\delta+\eta)^{p/(p+1)}$, $n(\delta,\eta)\le C'_{p,r}(\delta+\eta)^{-1/(p+1)}$*, а в случае правил останова П.1, П.2 – оценки:* $\left\|u_{n(\delta,\eta)}-u_*\right\|\le C''_{p,r}(\delta+\eta)^{2p/(2p+1)}$, $n(\delta,\eta)\le C'''_{p,r}(\delta+\eta)^{-2/(2p+1)}$.

Г. М. Вайникко и А. Ю. Веретенников в монографии [21] для решения операторного уравнения $Au=f$, где $A\in L(H_1,H_2)$ (в самосопряженном случае $H_1=H_2$, $A=A^*\ge 0, \|A\|\le M$) используют явную и неявную итерационные схемы:

$$u_n=u_{n-1}-\mu(Au_{n-1}-f),\ 0<\mu<\frac{2}{\|A\|},$$

$$\alpha u_n+Au_n=\alpha u_{n-1}+f,\ \alpha=\mathrm{const}>0,$$

которые в случае несамосопряженного оператора и приближенной правой части уравнения f_δ : $\|f-f_\delta\|\le\delta$ запишутся

$$u_{n,\delta}=u_{n-1,\delta}-\mu A^*\left(Au_{n-1,\delta}-f_\delta\right),\ 0<\mu<\frac{2}{\|A\|^2},$$

$$\alpha u_{n,\delta}+A^*Au_{n,\delta}=\alpha u_{n-1,\delta}+A^*f_\delta,\ \alpha=\mathrm{const}>0.$$

Авторами подчеркивается, что в итеративных методах решение операторных уравнений, описывающих некорректные задачи, с приближенной правой частью f_δ: $\|f-f_\delta\|\le\delta$ в приближениях $u_{n,\delta}$ нельзя устремлять n к бесконечности (при $n\to\infty$ эти приближения, как правило, расходятся). Вместо этого следует указать такое согласование $n=n(\delta)$ числа итераций n с уровнем погрешности δ правой части, чтобы при $\delta\to 0$ соответствующие приближения $u_{n,\delta}$ стремились к точному решению уравнения. Это согласование желательно провести так, чтобы получить оптимальные по порядку, а при возможности оптимальные по точности методы. В этой же работе используются два основных способа выбора (согласования с δ) параметра регуляризации – априорный и апостериорный. В итерационных методах параметром регуляризации является номер итерации. Априорный выбор n возможен, если известен класс решений (например, класс истокопредставимых решений), которому решение при данном $f \in R(A)$ принадлежит. Поскольку такая информация обычно недоступна или неточна, то априорный выбор n имеет в основном теоретическое значение: он позволяет выявлять принципиальные возможности метода. Более практичен апостериорный выбор по невязке (или по поправке, указанный в работе И. В. Емелина и М. А. Красносельского [36]): выбирается то значение n, при котором норма невязки $\|Au_{n,\delta} - f_\delta\|$ будет достаточно малой. Подобное согласование n с δ принято называть *принципом невязки*. Из монографии оказывается, что при выборе n по принципу невязки получаются оптимальные по порядку методы на классах истокопредставимых решений и некоторых других классах, при этом сам выбор n не использует информацию об истокопредставимости и вообще какую-либо другую информацию, кроме оценки $\|f - f_\delta\| \le \delta$. В монографии исследуется априорный выбор числа итераций с приближенной правой частью уравнения. Для явного метода итераций доказана сходимость при $n\delta \to 0$, $n \to \infty$, $\delta \to 0$ и в предположении истокопредставимости точного решения уравнения $u_0 - u_* = \left(A^* A\right)^{p/2} v$, $p > 0$, $\|v\| \le \rho$ для них получены оценки погрешности. Также авторами рассматривается апостериорный выбор параметра регуляризации, с этой целью обосновывается применение к явному методу итераций следующих правил останова:

Правило останова (П.3). *Зададим* $b_1 > 1$ *и* $b_2 \ge b_1$. *Если* $\|Au_0 - f_\delta\| \le b_2\delta$, *то положим* $n = 0$ *(т. е.* u_0 *– приближенное решение уравнения). В противном случае выберем такое* $n > 0$, *для которого* $b_1\delta \le \|Au_{n,\delta} - f_\delta\| \le b_2\delta$.

Правило останова (П.4). *Зададим* $b > 1$ *и* $\theta \in (0,1)$. *Если* $\|Au_0 - f_\delta\| \le b\delta$, *то положим* $n = 0$. *В противном случае выберем любое такое* $n > 0$, *что* $\|Au_{n,\delta} - f_\delta\| \le b\delta$, $\|Au_{n',\delta} - f_\delta\| > b\delta$ *для некоторого* $n' \in [\theta n, n]$.

Кроме того в работе рассматривается случай, когда не только правая часть, но и оператор в линейном уравнении считаются известными приближенно: вместо $f \in R(A)$ и $A \in L(H_1, H_2)$ даны некоторые их приближения $f_\delta \in H_2$, и $A_\eta \in L(H_1, H_2)$, $\|f_\delta - f\| \le \delta$, $\|A_\eta - A\| \le \eta$. И в этом случае при условии $n(\delta,\eta) \to \infty$, $(\delta + \eta)n(\delta,\eta) \to 0$, при $\delta,\eta \to 0$ доказана сходимость явного метода к точному решению уравнения. А при условии истокообразной представимости начальной погрешности: $u_0 - u_* = |A|^p v$,

$p>0,\ \|v\|\le\rho$ получены оптимальные оценки погрешности итерационных методов $\|u_{n(\delta,\eta)}-u_*\|_{\text{опт}}\le C_{p,\rho,d}(\delta+\eta)^{p/(p+1)},\quad 0<p\le p_0$ при выборе $n_{\text{опт}}=d(\delta+\eta)^{-1/(p+1)}\ (d>0)$. Здесь же рассматривается и апостериорный выбор параметра регуляризации:

Правило останова (П.5). *Зададим* $b_1>1$ *и* $b_2\ge b_1$. *Если* $\|A_\eta u_0-f_\delta\|\le$ $\le b_2(\delta+\|u_*\|\eta)$, *то положим* $n=0$. *В противном случае выберем такое* $n>0$, *для которого* $b_1(\delta+\|u_*\|\eta)\le\|A_\eta u_{n(\delta,\eta)}-f_\delta\|\le b_2(\delta+\|u_*\|\eta)$.

Правило останова (П.6). *Зададим* $b>1$ *и* $\theta\in(0,1)$. *Если при* $n=0$ $\|A_\eta u_{n(\delta,\eta)}-f_\delta\|\le b(\delta+\|u_*\|\eta)$, *то положим* $n=0$, *иначе выберем любое такое* $n>0$, *при котором* $\|A_\eta u_{n(\delta,\eta)}-f_\delta\|\le b(\delta+\|u_*\|\eta)$ *выполнено, причем для некоторого* $n'\in[\theta n,n]$ $\|Au_{n'(\delta,\eta)}-f_\delta\|\ge b(\delta+\|u_*\|\eta)$.

В монографии рассматривается устойчивость предложенных итерационных методов приближений относительно малых возмущений типа погрешностей округления: помехоустойчивость итерационных методов (в некорректных задачах подобные возмущения безопасны лишь при не слишком большом количестве итераций). В этом случае в правой части предложенных итерационных схем появятся слагаемые $\omega_n\in H,\ n\ge1$ – малые в каком-то смысле возмущения и $\|\omega_n\|\le\varepsilon$. Тогда в случае, когда $A=A^*>0,\ A_\eta=A_\eta^*,\ \|A_\eta-A\|\le\eta,\ \|A_\eta\|\le a,\ f\in R(A),\ \|f_\delta-f\|\le\delta,\ \|\omega_n\|\le\varepsilon$ $(0<\varepsilon<<\delta+\eta)$ и $u_0-u_*=A^pv,\ p>0,\ \|v\|\le\rho$ (и в случае несамосопряженной задачи тоже) получены оценки погрешности методов: $\|\tilde{u}_{n(\delta,\eta,\varepsilon)}-u_*\|\le C_{a,p,\rho}(\delta+\eta+\varepsilon)^{p/(p+1)},\ 0<p<\infty$. Здесь также рассмотрен случай нормально разрешимой задачи, т. е. задачи $Au=f$ с оператором $A\in L(H_1,H_2)$, имеющим замкнутую область значений $R(A)\subseteq H_2$. Изучены априорный и апостериорный выборы параметра регуляризации. Кроме этого авторы рассматривают предложенную ими явную итерационную процедуру в некорректных задачах в условиях случайных ошибок: доказана сходимость методов по вероятности, сходимость методов в среднем квадратичном, обоснован статистический подход к выбору числа итераций.

Различные схемы явных и неявных итеративных методов с априорным выбором числа итераций предложены в работах О. А. Лисковца и В. Ф. Савчука [69–71; 74]. В. Ф. Савчук в работах [44; 45; 87–100] продолжил исследования в этом направлении. Им предложено несколько новых явных и неявных итеративных методов решения некорректных задач в гильбертовом пространстве с ограниченным и неограниченным, самосопряженным и несамосопряженным операторами. Для этих методов подробно рассмотрен априорный выбор числа итераций, доказана их сходимость, получены эффективные оценки погрешности. Для некоторых из предложенных итеративных схем обоснована возможность применения правил останова по невязке и по соседним приближениям, которые превращают эти методы в регуляризующие алгоритмы для задачи $Ax = y_\delta$, не требуя при этом знания истокопредставимости точного решения, но в случае истокопредставимости обеспечивают оптимальную в классе скорость сходимости.

А. М. Денисов в работе [30] решает операторное уравнение $Az = \bar{u}$, где $A: Z \to U$ – линейный, вполне непрерывный оператор (Z, U – сепарабельные гильбертовы пространства), $0 \in S_A$ и 0 не является собственным значением оператора A. Предполагается, что рассматриваемое уравнение имеет единственное решение $\bar{z}$, элемент $\bar{u}$ не известен, а задана приближенная правая часть $\|u_\delta - \bar{u}\| \le \delta$. Для нахождения приближенного решения предлагается явный итерационный процесс

$$z_n = z_{n-1} + \mu\left(A^* u_\delta - A^* A z_{n-1}\right),\ z_0 = \mu A^* u_\delta,\ n = 1,2,...,$$

где A^* – оператор, сопряженный с A, μ – положительный числовой параметр. Показано, что справедливо $z_n = R_n u_\delta = \mu \sum\limits_{i=0}^{n} \left(E - \mu A^* A\right)^i A^* u_\delta$.

Затем доказано, что если при $0 < \mu < \dfrac{2}{\left\|A^* A\right\|}$ выбирать $n = n(\delta)$ так, что $n(\delta)\delta \to 0,\ n \to \infty$ при $\delta \to 0$, то предложенный метод сходится при приближенной правой части уравнения, т. е. что $\left\|R_{n(\delta)} u_\delta - \bar{z}\right\| \to 0,\ \ \delta \to 0$.

А. А. Самарский и П. Н. Вабищевич (A. A. Samarsky and P. N. Vabishchevitch) в монографии [182] рассматривают двухслойный итерационный метод для решения уравнения $Au = f_\delta$ с приближенной правой частью

$$B\frac{u_{k+1} - u_k}{\tau_{k+1}} + Au_k = f_\delta,\ k = 0,1,2,....$$

Здесь $B: H \to H$ и B^{-1} существуют. Применение итерационного метода для симметризованной задачи соответствует использованию приближений

$$B\frac{u_{k+1} - u_k}{\tau_{k+1}} + A^* A u_k = A^* f_\delta,\ k = 0,1,2,... .$$

При $B = E$ и постоянном итерационном параметре $\tau_k = \tau$ получим метод простой итерации Ландвебера $\frac{u_{k+1} - u_k}{\tau} + Au_k = f_\delta$, $k = 0,1,2,\ldots$. Доказана его сходимость. Скорость сходимости последнего метода определяется постоянными γ_1, γ_2 в неравенстве $\gamma_1 E \le A \le \gamma_2 E$. При $\gamma_1 > 0$ метод итерации сходится в H если $0 < \tau < \frac{2}{\gamma_2}$, а для числа итераций n, необходимого для достижения точности ε, справедлива оценка $n \ge n_0(\varepsilon) = \frac{\ln \varepsilon}{\ln \rho_0}$, $\rho_0 = \frac{1-\xi}{1+\xi}$, $\xi = \frac{\gamma_1}{\gamma_2}$. Доказана

Теорема 1.5. *Пусть в методе последовательных приближений* $\frac{u_{n+1} - u_n}{\tau} + Au_n = f_\delta$, $n = 0,1,2,\ldots$ *при условии* $0 < \tau < \frac{2}{\gamma_2}$ *число итераций* $n(\delta) \to \infty$ *и* $n(\delta)\delta \to 0$, $\delta \to 0$. *Тогда* $\left\| u_{n(\delta)} - u \right\| \to 0$, *если* $\delta \to 0$.

Рассматривается метод простой итерации и при более жестких ограничениях $0 < \tau \le \frac{1}{\gamma_2}$, и в предположении истокопредставимости точного решения получена оценка погрешности. Справедлива

Теорема 1.6. *Пусть точное решение уравнения принадлежит классу* $\left\| A^{-p} u \right\| \le M$, $0 < p < \infty$, *тогда для метода простой итерации с* $u_0 = 0$ *справедлива оценка погрешности* $\|z_n\| \le n\tau\delta + M_1 n^{-p}$, $M_1 = M_1(\tau, p, M)$.

Авторами проведена минимизация правой части полученной оценки погрешности и найдено $n_{\text{опт}} = \left(\frac{pM_1}{\tau} \right)^{\frac{1}{p+1}} \delta^{-\frac{1}{p+1}}$, т. е. $n(\delta) = O\left(\delta^{-1/(p+1)}\right)$.

Получена оптимальная оценка погрешности метода простой итерации $\left\| z_{n_{\text{опт}}} \right\| \le M_2 \delta^{\frac{p}{p+1}}$, где $M_2 = \tau \left(\frac{pM_1}{\tau} \right)^{\frac{1}{p+1}} + M_1 \left(\frac{pM_1}{\tau} \right)^{-\frac{p}{p+1}}$. В работе A. A. Samarsky и P. N. Vabishchevitch [182] приводится программная реализация нахождения приближенного решения модельной двумерной задачи продолжения гравитационных полей (потенциала) с использованием метода простой итерации со случайными погрешностями во входных данных.

В последние годы продолжено изучение приближенных методов решения некорректных задач. Над этой проблемой работают В. В. Васин, А. Б. Бакушинский, М. Ю. Кокурин, А. С. Леонов, А. М. Денисов, П. Н. Вабищевич, А. Л. Агеев, Г. В. Хромова, В. А. Морозов, С. Г. Солодкий, С. И. Кабанихин, А. С. Апарцин, U. Hämarik, R. Palm, T. Raus, S. F. Gilyazov, N. L. Gol'dman, H. W. Engl, M. Hanke, A. Neubauer, B. Hofmann, L. Wolfersdorf, J. Janno, U. Tautenhahn, B. Kaltenbacher, A. Neubauer, O. Scherzer, E. Klann, M. Nussbaum, S. Pereverzev, B. Nguyen, R. Ramlau, И. В. Коннов, И. П. Рязанцева, В. Ф. Чистяков и др. [51; 54; 66–67; 82; 85–86; 120; 122; 125; 129; 135; 142; 150–152; 154–155; 164–165; 171–172; 175]. В работах [52–54; 145–149; 156; 161–163; 166–170; 174; 176; 179–181; 183–184] исследуются свойства модификаций методов Лаврентьева, тихоновской регуляризации и различные схемы проекционно-градиентных методов.

В рассмотренных выше работах построены итерационные методы решения некорректных задач и доказано, что среди приближений, полученных этими методами, есть сколь угодно близкие к точному решению. Естественно, возник вопрос об описании всего многообразия таких итерационных схем и их сравнительного анализа с точки зрения быстроты сходимости и оценки числа итераций для достижения нужных погрешностей.

В настоящей монографии были собраны все результаты в этом направлении. В работе впервые предложены 8 регуляризующих алгоритмов для некорректных задач, описываемых операторными уравнениями первого рода, в виде явных и неявных итерационных методов, обладающих более высокими скоростными качествами, чем ранее известные методы. Проведено сравнение предложенных методов с наиболее изученным в литературе методом итерации Ландвебера.

Более конкретно, явные методы:

а) метод простой итерации с попеременно чередующимся шагом

$$x_{n+1,\delta} = x_{n,\delta} - \alpha_{n+1}(Ax_{n,\delta} - y_\delta), \quad x_{0,\delta} = 0,$$
$$\alpha_{2n+1} = \alpha, \quad \alpha_{2n+2} = \beta, \quad n = 0,1,2,\ldots$$

для получения оптимального решения требует в три раза меньше итераций, чем метод простой итерации с постоянным шагом Ландвебера;

б) семейство явных методов с более высокой степенью оператора, обобщающее метод итерации Ландвебера

$$x_{n+1,\delta} = (E - \alpha A)^k x_{n,\delta} + A^{-1}\left[E - (E - \alpha A)^k\right] y_\delta, \; x_{0,\delta} = 0, \; k \in N$$

для получения оптимального решения требует в k раз меньше итераций, чем метод Ландвебера;

в) явная итерационная схема, обобщающая метод Ландвебера

$$x_{n+1,\delta} = \left(E - \alpha A^k\right) x_{n,\delta} + \alpha A^{k-1} y_\delta,\ x_{0,\delta} = 0,\ k \in N$$

эффективна в зависимости от выбора степени истокопредставимости s: для $s \le 5$ его удобнее применять при k = 1, а для $6 \le s \le 27$ – при k = 2;

г) двухшаговая процедура явного типа

$$x_{n,\delta} = 2(E - \alpha A) x_{n-1,\delta} - (E - \alpha A)^2 x_{n-2,\delta} + \alpha^2 A y_\delta,\ x_{0,\delta} = x_{1,\delta} = 0.$$

по мажорантным оценкам погрешности не уступает методу Ландвебера.

Неявные методы, представляющие собой семейства итерационных схем, зависящих от параметра k :

$$\left(E + \alpha A^k\right) x_{n+1,\delta} = \left(E - \alpha A^k\right) x_{n,\delta} + 2\alpha A^{k-1} y_\delta, \quad x_{0,\delta} = 0,\ k \in N,$$

$$\left(E + \alpha A^k\right) x_{n+1,\delta} = x_{n,\delta} + \alpha A^{k-1} y_\delta, \quad x_{0,\delta} = 0,\ k \in N,$$

$$\left(E + \alpha^2 A^{2k}\right) x_{n+1,\delta} = \left(E - \alpha A^k\right)^2 x_{n,\delta} + 2\alpha A^{k-1} y_\delta, \quad x_{0,\delta} = 0, \quad k \in N,$$

$$\left(A^{2k} + B\right) x_{n+1,\delta} = B x_{n,\delta} + A^{2k-1} y_\delta, \quad x_{0,\delta} = 0, \quad k \in N,$$

в силу отсутствия ограничений сверху на шаг по антиградиенту позволяют получить оптимальное решение уже на первых шагах итераций. Последний из предложенных неявных методов позволяет решать операторные уравнения с неограниченным оператором, притом необязательно положительным.

Для предложенных методов впервые проведено достаточно полное исследование.

Сначала изучен априорный выбор числа итераций для уравнений с приближенно заданной правой частью и точным оператором. При этом установлены достаточные условия сходимости методов, получены априорные оценки погрешности в предположении, что известен класс истокообразно представимых решений, которому решение при данном $y \in R(A)$ принадлежит. Поскольку такая информация обычно недоступна или неточна, априорный выбор числа итераций имеет в основном теоретическое значение: он позволяет выявлять принципиальные возможности методов.

Использование в работе энергетической нормы $\|x\|_A = \sqrt{(Ax, x)}$ позволило получить априорные оценки погрешности и априорный момент останова методов уже без дополнительного требования на гладкость точного решения. Получены условия, когда из сходимости в энергетической норме следует сходимость в обычной норме гильбертова пространства.

Предлагается и другой способ сделать методы эффективными и тогда, когда отсутствует дополнительная информация на гладкость точного решения. Для этого в работе обосновано применение к итерационным методам правила останова по малости невязки: выбирается то значение итераций n, при котором невязка сравнима с уровнем погрешности правой части уравнения. Подобное согласование n с уровнем погрешности правой части принято называть *принципом невязки*. Оказывается, что при таком выборе n мы получаем оптимальные по порядку методы на классах истокопредставимых решений, при этом сам выбор n не использует информацию истокопредставимости и вообще какую-либо другую информацию, кроме оценки уровня погрешности правой части уравнения. Доказано, что в этом случае предложенные итерационные методы сходятся к точному решению, для них получены оценки погрешности и оценки для момента останова.

Также в монографии доказана сходимость рассматриваемых методов и получены оценки для апостериорного момента останова в случае применения к методам правила останова по разности соседних приближений (по поправкам): использование этого правила останова делает методы эффективными при отсутствии информации об истокопредставимости точного решения.

Для всех методов исследован случай неединственного решения уравнения (нуль является собственным значением оператора). Показано, что тогда итерационные процессы сходятся к решению, обладающему минимальной нормой.

Для некоторых из предложенных методов изучен априорный и апостериорный выбор параметра регуляризации в случае приближенной правой части уравнения и приближенно заданного самосопряженного и несамосопряженного оператора: доказана сходимость методов, получены оценки погрешности, априорный момент останова и оценки для апостериорного момента останова.

Некоторыми из предложенных методов решены модельные некорректные задачи. Для их решения использовались ПЭВМ, и программы составлялись на языке программирования *C#*. Причем при решении модельных задач нашли подтверждение выводы о преимуществах предложенных методов по сравнению с наиболее изученным явным методом Ландвебера.

В работе выявлены общие свойства этих итерационных процедур и получен новый метод сведения решения поставленной задачи к решению специального вида уравнения второго рода, исследования которого было выполнено в работах М. А. Красносельского. На этом пути получены теоремы о сходимости ошибок, невязок и поправок, даны оценки скорости этих сходимостей в норме исходного гильбертова пространства, а так-

же показана возможность получения теорем о сходимости и скорости сходимости в «ослабленных» (в частности, энергетических) нормах.

Все эти установленные факты являются новыми и вносят существенный вклад в теорию некорректно поставленных задач и методов их приближенного решения.

Очень важно теперь пояснить, что мы понимаем под сходимостью предложенных итерационных процедур, когда правая часть операторного уравнения $Ax = y$ задана приближенно (т. е. известен y_δ, для которого $\|y - y_\delta\| \le \delta$). Полученные в работе для методов априорные оценки погрешности описываются неравенствами вида

$$\|x_{n,\delta} - x_*\| \le \|x_n - x_*\| + \|x_n - x_{n,\delta}\| \le \|x_n - x_*\| + cn\delta, \tag{1.39}$$

где x_* – точное решение уравнения $Ax = y_\delta$, $c \in R_+$.

Из неравенств (1.39) сходимость $x_{n,\delta}$ к x_* не вытекает, т. к. правая часть в (1.39) при $n \to \infty$ не стремится к нулю (и, более того, обычно стремится к бесконечности). Однако во многих случаях из этих неравенств вытекает, что, с одной стороны, при достаточно больших, но не слишком больших, номерах n приближения $x_{n,\delta}$ находятся достаточно близко к точному решению x_* уравнения $Ax = y_\delta$. Более того, эти приближения для достаточно малых в естественном смысле δ «подходят» к точному решению x_* сколь угодно близко!

В монографии доказывается, что для некоторой стремящейся к нулю последовательности неотрицательных чисел μ_n справедливо неравенство $\|x_n - x_*\| \le \mu_n$. Тогда неравенство (1.39) переписывается в виде

$$\|x_{n,\delta} - x_*\| \le \mu_n + cn\delta \quad (n = 0, 1, 2, \ldots). \tag{1.40}$$

Последовательность $(cn\delta)$ является возрастающей; она может быть как неограниченной, так и ограниченной. Особенности поведения последовательности $(\mu_n + cn\delta)$ удобно сформулировать в виде нижеследующего утверждения (лемма 6.2 из главы 6):

Пусть последовательность (μ_n) стремится к нулю, а последовательность $(cn\delta)$ неубывающая. Тогда

$$\lim_{n\to\infty,\, n\delta\to 0} (\mu_n + cn\delta) = 0. \tag{1.41}$$

Иначе говоря, при заданном $\varepsilon > 0$ при достаточно малых $\delta > 0$ выполняется неравенство $\mu_n + cn\delta < \varepsilon$ на сколь угодно далеких и сколь угодно больших промежутках изменения n.

Соотношение (1.41) иногда записывается в виде

$$\lim_{\delta\to 0}\ \min_{\nu\le n<\infty}\left\{\mu_n + cn\delta\right\} = 0 \quad (\nu \in N). \tag{1.42}$$

Однако без дополнительного предположения о сходимости последовательности (μ_n) к нулю, это соотношение слабее (1.41).

Сделаем еще важное замечание. Неравенства (1.40) оказываются полезными лишь в тех случаях, когда при увеличении n правая часть $\mu_n + n\delta$ уменьшается. Факт уменьшения на одном шаге этой правой части эквивалентен неравенству $\delta < \mu_n - \mu_{n+1}$. Тем самым, проведенные рассуждения показывают, что последовательное вычисление приближений оказывается полезным при $n \in [0, N]$ лишь в случае, если $\delta < \dfrac{\mu_n - \mu_{n+1}}{c}$.

При выполнении последнего соотношения будем говорить, что соответствующий итерационный метод *квазисходится*.

Еще раз отметим, что в случае квазисходимости предложенных итерационных методов речь не идет об обычной сходимости соответствующих приближений к точному решению. Можно лишь утверждать, что при достаточно малых δ эти приближения оказываются близкими к точному решению, а затем, как правило, от него удаляются; при этом эти приближения оказываются тем ближе к точному решению, чем меньше δ. Более того, если δ не является достаточно малым, то использование итерационных методов окажется бесполезным – эти приближения могут удаляться от точного решения.

Таким образом, под сходимостью предложенных итерационных методов понимается утверждение о том, что приближения $x_{n,\delta}$ *сколь угодно близко подходят к точному решению* x_* *некорректного уравнения* $Ax = y_\delta$ *при подходящем выборе* n *и достаточно малых* δ*, т. е. если* $\lim\limits_{\delta\to 0}\ \inf\limits_{n}\left\|x_{n,\delta} - x_*\right\| = 0$.

Отметим еще, что в упомянутом выше «парадоксальном случае» $\mu_n = 0$ оказывается, что начальное приближение x_0 совпадает с решением x_*. Именно в этом случае рассуждения о последовательности $(\mu_n + cn\delta)$, приведенные выше, вырождаются и оценка (1.40) делается бесполезной. Однако она и должна быть таковой – если начальное приближение совпадает с точным решением x_*, то уточнять это приближение какими-либо итерационными процедурами бессмысленно.

Рассмотрим теперь поведение оценок $\|x_{n,\delta} - x_*\|$ для примера, когда $f = \mu_n + cn\delta = \frac{1}{n} + n\delta$ при $\delta \in \{0{,}4;\ 0{,}1;\ 0{,}06;\ 0{,}02\}$.

Оптимизируем по n приведенную оценку погрешности. Для этого найдем значение числа итераций n, при котором оценка становится минимальной. Имеем $n_{\text{опт}} = \frac{1}{\sqrt{\delta}} \to \infty,\ \delta \to 0$ (причем $n_{\text{опт}}\delta = \sqrt{\delta} \to 0,\ \delta \to 0$). Подставив полученное выражение для $n_{\text{опт}}$ в оценку погрешности, найдем ее оптимальное значение $\|x_{n,\delta} - x_*\|_{\text{опт}} \le 2\sqrt{\delta} \to 0,\ \delta \to 0$.

Тогда имеем:

1) при $\delta = 0{,}4$ $f_1 = \frac{1}{n} + 0{,}4n$, $n_{\text{опт}} = 2$, $f_1(n_{\text{опт}}) = 1{,}3$;

2) при $\delta = 0{,}1$ $f_2 = \frac{1}{n} + 0{,}1n$, $n_{\text{опт}} = 3$, $f_2(n_{\text{опт}}) = 0{,}63$;

3) при $\delta = 0{,}06$ $f_3 = \frac{1}{n} + 0{,}06n$, $n_{\text{опт}} = 4$, $f_3(n_{\text{опт}}) = 0{,}49$;

4) при $\delta = 0{,}02$ $f_4 = \frac{1}{n} + 0{,}02n$, $n_{\text{опт}} = 7$, $f_4(n_{\text{опт}}) = 0{,}28$.

Графики функций $f(n) = \frac{1}{n} + n\delta$ изображены на рисунке 1.

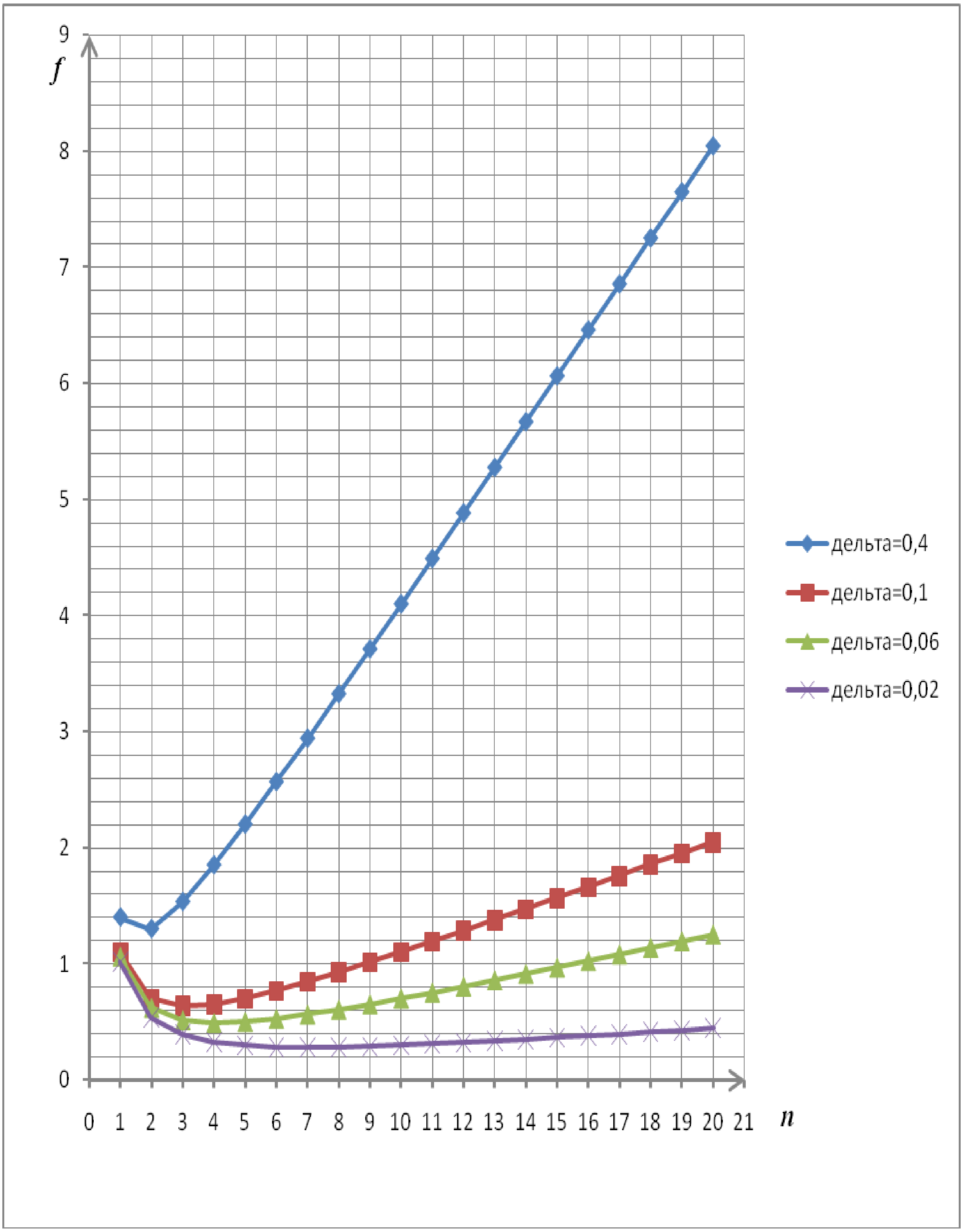

Рисунок 1 – Графики функций $f(n) = \dfrac{1}{n} + n\delta$.

ГЛАВА 2
ЯВНЫЕ МЕТОДЫ ИТЕРАЦИЙ РЕШЕНИЯ ОПЕРАТОРНЫХ УРАВНЕНИЙ С ПРИБЛИЖЕННОЙ ПРАВОЙ ЧАСТЬЮ

В настоящей главе предлагаются явные итерационные процедуры для решения некорректных задач, описываемых операторными уравнениями первого рода. Получены достаточные условия сходимости таких методов, априорные оценки погрешности. Изучается сходимость методов в энергетической норме. Рассмотрен случай неединственного решения. Обоснована возможность применения правил останова по невязке и по соседним приближениям, что делает эти методы эффективными и тогда, когда нет сведений об истокопредставимости точного решения. Проведено сравнение предложенных методов с хорошо известным в математической литературе методом простой итерации Ландвебера.

2.1. Сходимость в гильбертовом пространстве метода итераций решения операторных уравнений

2.1.1. Сходимость метода в случае априорного выбора числа итераций

В работе рассматривается уравнение

$$Ax = y \tag{2.1}$$

с действующим в гильбертовом пространстве H ограниченным положительно определенным самосопряженным оператором $A\colon H \to H$ в предположении, что нуль принадлежит спектру этого оператора, однако, не является его собственным значением. При сделанных предположениях задача о разрешимости уравнения (2.1) является некорректной. Если решение уравнения (2.1) все же существует и единственно, то для его отыскания естественно пытаться применить различные итерационные методы. В настоящей работе предлагается новый явный итерационный метод:

$$x_{n+1} = (E - \alpha A)^k x_n + A^{-1}\left[E - (E - \alpha A)^k\right] y, \quad x_0 = 0. \tag{2.2}$$

Здесь k – некоторое натуральное число, а оператор A^{-1}, фигурирующий в (2.2), не означает, что для рассматриваемой схемы (2.2) необходимо его знать – нужно заметить, что после раскрытия скобок во втором слагаемом он сокращается и весь оператор в квадратных скобках является полиномом от оператора A:

$$C_k^1 \alpha E - C_k^2 \alpha^2 A + C_k^3 \alpha^3 A^2 - \ldots - (-1)^k \alpha^k A^{k-1}.$$

Предложенный метод обобщает метод итерации Ландвебера, рассмотренный в работах [21; 30; 36–37; 55; 62; 64; 69–70; 84; 87; 113;

129–130; 137; 151; 158; 182], т. е. $x_{n+1} = x_n + \alpha(y - Ax_n),\ x_0 = 0$, последний получается из (2.2) при $k = 1$.

Обычно правая часть уравнения известна с некоторой точностью δ, т. е. известен y_δ, для которого $\|y - y_\delta\| \le \delta$. Поэтому вместо (2.2) приходится рассматривать приближения

$$x_{n+1,\delta} = (E - \alpha A)^k x_{n,\delta} + A^{-1}\left[E - (E - \alpha A)^k\right] y_\delta, \quad x_{0,\delta} = 0,\ k \in N. \quad (2.3)$$

Ниже, как обычно, под сходимостью метода (2.3) понимается утверждение о том, что приближения (2.3) сколь угодно близко подходят к точному решению уравнения (2.1) при подходящем выборе n и достаточно малых δ. Иными словами, явный метод итерации (2.3) является сходящимся, если $\lim\limits_{\delta\to 0}\left(\inf\limits_n \|x - x_{n,\delta}\|\right) = 0$.

Докажем сходимость метода (2.3). Получим оценки погрешности метода при точной правой части, при приближенной правой части уравнения (2.1) и погрешность в счете. Справедлива

Теорема 2.1. *Итерационный процесс* (2.2) *при условии*

$$0 < \alpha < 2/\|A\| \quad (2.4)$$

сходится.

Доказательство. По индукции нетрудно показать, что $x_n = A^{-1}\left[E - (E - \alpha A)^{kn}\right] y$. Т. к. уравнение (2.1) имеет по предположению единственное точное решение, то $x = A^{-1}y$ и, значит,

$$x - x_n = A^{-1}y - A^{-1}\left[E - (E - \alpha A)^{kn}\right] y = A^{-1}(E - \alpha A)^{kn} y.$$

Воспользовавшись интегральным представлением самосопряженного оператора [43, с. 309] $A = \int_0^M \lambda\, dE_\lambda$ (E_λ – соответствующая спектральная функция, $M = \|A\|$), получим $x - x_n = \int_0^M \lambda^{-1}(1 - \alpha\lambda)^{kn} dE_\lambda y$. Разобьем полученный интеграл на два интеграла: $x - x_n = \int_0^{\varepsilon_0} \lambda^{-1}(1 - \alpha\lambda)^{kn} dE_\lambda y\ +$ $+ \int_{\varepsilon_0}^M \lambda^{-1}(1 - \alpha\lambda)^{kn} dE_\lambda y.$

При условии (2.4) величина $|1-\alpha\lambda|<1$, тогда $\left\|\int\limits_{\varepsilon_0}^{M}\lambda^{-1}(1-\alpha\lambda)^{kn}dE_\lambda y\right\|\le q^{kn}(\varepsilon_0)\left\|\int\limits_{\varepsilon_0}^{M}\lambda^{-1}dE_\lambda y\right\|=q^{kn}(\varepsilon_0)\left\|\int\limits_{\varepsilon_0}^{M}dE_\lambda x\right\|\to 0,\ n\to\infty.$ (Здесь $|1-\alpha\lambda|\le q(\varepsilon_0)<1,\quad \lambda\in[\varepsilon_0,M]$).

$$\left\|\int\limits_{0}^{\varepsilon_0}\lambda^{-1}(1-\alpha\lambda)^{kn}dE_\lambda y\right\|\le\left\|\int\limits_{0}^{\varepsilon_0}\lambda^{-1}dE_\lambda y\right\|=\left\|\int\limits_{0}^{\varepsilon_0}dE_\lambda x\right\|=\left\|E_{\varepsilon_0}x\right\|\to 0,\ \varepsilon_0\to 0,$$

т. к. E_{ε_0} сильно стремится к нулю при $\varepsilon_0\to 0$ в силу свойств спектральной функции [43, с. 302]. Следовательно, $\|x-x_n\|\to 0,\ n\to\infty,$ т. е. итерационный процесс (2.2) сходится. *Теорема 2.1 доказана.*

Покажем, что при тех же условиях процесс (2.3) можно сделать сходящимся, если нужным образом выбрать число итераций n в зависимости от уровня погрешности δ. Имеет место

Теорема 2.2. *При условии* (2.4) *итерационный процесс* (2.3) *сходится, если выбирать число итераций* n *в зависимости от* δ *так, чтобы* $n\delta\to 0,\ n\to\infty,\ \delta\to 0.$

Доказательство. Будем считать $x_{0,\delta}=0$ и рассмотрим разность $x-x_{n,\delta}=(x-x_n)+(x_n-x_{n,\delta})$. Как показано ранее, $x-x_n\to 0,\ n\to\infty$. Используя интегральное представление самосопряженного оператора A, получим

$$x_n-x_{n,\delta}=A^{-1}\left[E-(E-\alpha A)^{kn}\right](y-y_\delta)=\int\limits_0^M\lambda^{-1}\left[1-(1-\alpha\lambda)^{kn}\right]dE_\lambda(y-y_\delta).$$

По индукции нетрудно показать, что $g_n(\lambda)=\lambda^{-1}\left[1-(1-\alpha\lambda)^{kn}\right]\le kn\alpha.$ Тогда $\|x_n-x_{n,\delta}\|\le kn\alpha\delta.$ Поскольку

$$\|x-x_{n,\delta}\|\le\|x-x_n\|+\|x_n-x_{n,\delta}\|\le\|x-x_n\|+kn\alpha\delta$$

и, как показано ранее, $\|x-x_n\|\to 0,\ n\to\infty,$ то для сходимости метода (2.3) достаточно, чтобы $n\delta\to 0,\ n\to\infty,\ \delta\to 0.$ *Теорема 2.2 доказана.*

Оценить скорость сходимости метода (2.3) без дополнительных предположений невозможно, т. к. неизвестна и может быть сколь угодно малой скорость убывания к нулю $\|x-x_n\|$. Предположим, что точное решение уравнения (2.1) истокообразно представимо, т. е. $x=A^s z,\quad s>0$. Тогда $y=A^{s+1}z$ и, следовательно, $x-x_n=\int\limits_0^M\lambda^s(1-\alpha\lambda)^{kn}dE_\lambda z.$ Для оценки

$\|x - x_n\|$ найдем максимум модуля подынтегральной функции $f(\lambda) = \lambda^s(1-$ $-\alpha\lambda)^{kn}$. Приравняв к нулю производную от $f(\lambda)$, получим $\lambda^{s-1}(1-\alpha\lambda)^{kn-1}[s(1-\alpha\lambda) - kn\alpha\lambda] = 0$. Первые два сомножителя не равны нулю, ибо в противном случае $f(\lambda) = 0$. Поэтому $s(1-\alpha\lambda) - kn\alpha\lambda = 0$. Отсюда $\lambda_* = \dfrac{s}{\alpha(s+kn)}$ – стационарная точка функции $f(\lambda)$. Поскольку $f''(\lambda_*) < 0$, то λ_* – точка локального максимума для $f(\lambda)$. Тогда

$$f(\lambda_*) = \left[\frac{s}{\alpha(s+kn)}\right]^s \left[1 - \frac{\alpha s}{\alpha(s+kn)}\right]^{kn} = (kn)^{kn} s^s \alpha^{-s} (kn+s)^{-kn-s} < s^s (kn\alpha e)^{-s},$$

т. к. $\left[1 + \dfrac{s}{kn}\right]^{s+kn} > e^s$ при всех $n > 0$ [55]. Следовательно, $f(\lambda_*) < s^s (kn\alpha e)^{-s}$. Покажем, что последняя величина не меньше максимального значения $|f(\lambda)|$ для всех α, удовлетворяющих условию $0 < \alpha \le \dfrac{5}{4M}$ более сильному, чем (2.4). (Можно было бы считать, что $\alpha M \in (0, 2-\varepsilon)$, но тогда последнее утверждение было бы верным лишь при достаточно больших *n*, а не для всех *n*). Чтобы проверить это, достаточно исследовать поведение функции $f(\lambda)$ на концах отрезка $[0, M]$. Очевидно, $f(0) = 0$, и максимум в точке $\lambda = 0$ быть не может. Значит, может оказаться, что $|f(M)| > f(\lambda_*)$. Покажем, что если взять $0 < \alpha \le \dfrac{5}{4M}$, то $|f(M)| < s^s (kn\alpha e)^{-s}$. При $\lambda < \dfrac{1}{\alpha}$ функция $f(\lambda)$ имеет максимум, оцененный ранее. При $\lambda > \dfrac{1}{\alpha}$ $f'(\lambda) > 0$ при четных kn и $f'(\lambda) < 0$ при нечетных kn, поэтому наибольшее значение $|f(\lambda)|$ получается в точке $\lambda = M$. Значение $|f(M)| = \left|M^s(1-\alpha M)^{kn}\right|$ тем больше, чем больше α, т. к. $\alpha M > 1$ (напомним, что исследуется случай $\lambda > 1/\alpha$). Поэтому достаточно вычислить $|f(M)|$ при максимальном $\alpha = \dfrac{5}{4M}$. Докажем, что $|f(M)| < s^s (kn\alpha e)^{-s}$ или $\left|M^s \left(-\dfrac{1}{4}\right)^{kn}\right| < (4s)^s (5kne)^{-s} M^s$, т. е. $(4s)^{-s}(5kne)^s < 4^{kn}$. Обозначим $\varphi(s) = (4s)^{-s}(5kne)^s$ и найдем максимум функции $\varphi(s)$. Итак,

$$\varphi'(s) = (4s)^{-s}(-\ln(4s) - 1)(5kne)^s + (4s)^{-s}(5kne)^s \ln(5kne) =$$
$$= (4s)^{-s}(5kne)^s(-\ln(4s) - 1 + \ln(5kne)) = (4s)^{-s}(5kne)^s \ln\big(5kn/(4s)\big).$$

Приравняв к нулю производную $\varphi'(s)$, получим $(4s)^{-s}(5kne)^{s}\ln(5kn/(4s))=0.$ Поскольку $(4s)^{-s}\neq 0,\ (5kne)^{s}\neq 0,$ то $\ln(5kn/(4s))=0$, и, следовательно, $s_*=5kn/4$ – стационарная точка функции $\varphi(s)$. Т. к.

$$\varphi''(s_*)=(4s_*)^{-s*}(5kne)^{s*}\left(-1/s_*\right)<0,$$

то s_* – точка максимума функции $\varphi(s)$. Найдем его.

$$\varphi(s_*)=(4s)^{-s}(5kne)^{s}\Big|_{s=s*}=(5nk)^{-5nk/4}(5nke)^{5nk/4}=e^{5nk/4}.$$

Итак, докажем, что $e^{5nk/4}<4^{kn}$, это очевидно при $n\geq 1$, поскольку $e^{5/2}<4^{2}$. Таким образом, при α, удовлетворяющих условию $0<\alpha\leq\dfrac{5}{4M}$, для любых $n\geq 1$ справедливо неравенство $\max\limits_{\lambda\in[0,M]}|f(\lambda)|<s^{s}(kn\alpha e)^{-s}$, тогда $\|x-x_n\|<s^{s}(kn\alpha e)^{-s}\|z\|$. Общая оценка погрешности метода (2.3) при приближенной правой части y_δ, $\|y-y_\delta\|\leq\delta$, запишется в виде

$$\|x-x_{n,\delta}\|\leq\|x-x_n\|+\|x_n-x_{n,\delta}\|\leq s^{s}(kn\alpha e)^{-s}\|z\|+kn\alpha\delta.$$

Итак, доказана

Теорема 2.3. *Если точное решение x уравнения* (2.1) *истокопредставимо, то при условии* $0<\alpha\leq\dfrac{5}{4M}$ *для метода* (2.3) *справедлива оценка погрешности* $\|x-x_{n,\delta}\|\leq s^{s}(kn\alpha e)^{-s}\|z\|+kn\alpha\delta$.

Оптимизируем по *n* полученную оценку погрешности. Для этого найдем значение числа итераций *n*, при котором оценка становится минимальной. Обозначим $\xi(n)=s^{s}(kn\alpha e)^{-s}\|z\|+kn\alpha\delta$ и приравняем $\xi'(n)$ к нулю. Имеем $-sn^{-s-1}s^{s}(k\alpha e)^{-s}\|z\|+k\alpha\delta=0$. Отсюда, возведя обе части равенства в степень $-1/(s+1)$, получим $n_{\text{опт}}=s(k\alpha)^{-1}e^{-s/(s+1)}\delta^{-1/(s+1)}\|z\|^{1/(s+1)}$. Подставив полученное выражение для $n_{\text{опт}}$ в оценку погрешности, найдем ее оптимальное значение

$$\|x-x_{n,\delta}\|_{\text{опт}}\leq(s+1)e^{-s/(s+1)}\delta^{s/(s+1)}\|z\|^{1/(s+1)}.$$

Итак, доказана

Теорема 2.4. *Если точное решение x уравнения* (2.1) *истокопредставимо, то при условии* $0<\alpha\leq\dfrac{5}{4M}$ *оптимальная оценка погрешности для* *метода* (2.3) *имеет вид* $\|x - x_{n,\delta}\|_{\text{опт}} \le (s+1)e^{-s/(s+1)}\delta^{s/(s+1)}\|z\|^{1/(s+1)}$ *и достигается при* $n_{\text{опт}} = s(k\alpha)^{-1}e^{-s/(s+1)}\delta^{-1/(s+1)}\|z\|^{1/(s+1)}$.

Оптимальная оценка погрешности для метода (2.3) не зависит от параметра α, но от него зависит $n_{\text{опт}}$. Поэтому для уменьшения $n_{\text{опт}}$ и, значит, числа итераций для получения приближенного решения, следует брать α по возможности большим, удовлетворяющим условию $0 < \alpha \le \dfrac{5}{4M}$, и так, чтобы $n_{\text{опт}}$ было целым.

Сравнение явного итерационного метода (2.3) с методом простой итерации Ландвебера показывает, что по мажорантным оценкам погрешности эти методы одинаковы. Однако метод (2.3) имеет преимущество по сравнению с методом Ландвебера в следующем: выполнение одного шага итераций по методу (2.3) равносильно выполнению k шагов по методу Ландвебера.

Рассмотрим погрешность метода (2.3) при счете с округлениями. Пусть $x_{n,\delta}$ – точное значение, полученное по формуле (2.3), а z_n – значение, полученное по той же формуле с учетом вычислительных погрешностей γ_n, т. е.

$$z_{n+1} = (E-\alpha A)^k z_n + A^{-1}\left[E-(E-\alpha A)^k\right]y_\delta + \alpha\gamma_n,\ \ z_0 = 0. \qquad (2.5)$$

Обозначим $\varepsilon_n = z_n - x_{n,\delta}$ и вычтем из (2.5) равенство (2.3), получим $\varepsilon_{n+1} = (E-\alpha A)^k \varepsilon_n + \alpha\gamma_n$. Т. к. нулевые приближения равны нулю, то $\gamma_0 = 0$. По индукции получим $\varepsilon_n = \sum\limits_{i=0}^{n-1}(E-\alpha A)^{k(n-1-i)}\alpha\gamma_i$. В силу (2.4) и принадлежности нуля спектру оператора A имеем $\|E-\alpha A\| \le 1$, поэтому $\|\varepsilon_n\| \le n\alpha\gamma$, где $\gamma = \sup\limits_i |\gamma_i|$.

Таким образом, оценка погрешности метода (2.3) при счете с округлениями имеет вид

$$\|x - z_n\| \le \|x - x_{n,\delta}\| + \|x_{n,\delta} - z_n\| \le s^s (kn\alpha e)^{-s}\|z\| + kn\alpha\delta + n\alpha\gamma.$$

2.1.2. Сходимость метода в случае неединственного решения

Покажем, что метод (2.2) пригоден и тогда, когда $\lambda = 0$ – собственное значение оператора A (случай неединственного решения уравнения (2.1)). Обозначим через $N(A) = \{x \in H \mid Ax = 0\}$, $M(A)$ – ортогональное дополнение ядра $N(A)$ до H. Пусть $P(A)x$ – проекция $x \in H$ на $N(A)$, а $\Pi(A)x$ – проекция $x \in H$ на $M(A)$. Справедлива

Теорема 2.5. *Пусть* $A \geq 0,\ y \in H,\ 0 < \alpha < 2/\|A\|$. *Тогда для итерационного процесса* (2.2) *верны следующие утверждения*:

а) $Ax_n \to \Pi(A)y,\ \|Ax_n - y\| \to I(A,y) = \inf_{x \in H} \|Ax - y\|$;

б) последовательность x_n *сходится тогда и только тогда, когда уравнение* $Ax = \Pi(A)y$ *разрешимо. В последнем случае* $x_n \to P(A)x_0 + x^*$, *где* x^* *– минимальное решение уравнения* $Ax = y$.

Доказательство. Применим оператор A к (2.2) и получим $Ax_n = A(E-\alpha A)^k x_{n-1} + \left[E-(E-\alpha A)^k\right](P(A)y + \Pi(A)y)$, где $y = P(A)y + \Pi(A)y$. Т. к. $AP(A)y = 0$, то имеем $Ax_n = A(E-\alpha A)^k x_{n-1} + \left[E-(E-\alpha A)^k\right]\Pi(A)y$. Последнее равенство запишем в виде $v_n = (E-\alpha A)^k v_{n-1}$, где $Ax_n - \Pi(A)y = v_n$ и $v_n \in M(A)$. Отсюда $v_n = (E-\alpha A)^{kn} v_0$. Имеем $A \geq 0$ и A – положительно определен в $M(A)$, т. е. $(Ax,x) > 0$ для любого $x \in M(A)$. Т. к. $0 < \alpha < 2/\|A\|$, то $\|E - \alpha A\| < 1$, поэтому справедлива цепочка неравенств

$$\|v_n\| = \left\|(E-\alpha A)^{kn} v_0\right\| = \left\|\int_0^{\|A\|} (1-\alpha\lambda)^{kn} dE_\lambda v_0\right\| \leq \left\|\int_0^{\varepsilon_0} (1-\alpha\lambda)^{kn} dE_\lambda v_0\right\| +$$

$$+\left\|\int_{\varepsilon_0}^{\|A\|} (1-\alpha\lambda)^{kn} dE_\lambda v_0\right\| \leq \left\|\int_0^{\varepsilon_0} dE_\lambda v_0\right\| + q^{kn}(\varepsilon_0)\left\|\int_{\varepsilon_0}^{\|A\|} dE_\lambda v_0\right\| =$$

$$= \left\|E_{\varepsilon_0} v_0\right\| + q^{kn}(\varepsilon_0)\left\|v_0 - E_{\varepsilon_0} v_0\right\| < \varepsilon$$

при $\varepsilon_0 \to 0,\ n \to \infty$. (Здесь $|1-\alpha\lambda| \leq q(\varepsilon_0) < 1$ при $\lambda \in [\varepsilon_0, \|A\|]$). Следовательно, $v_n \to 0$, откуда $Ax_n \to \Pi(A)y$ и $\Pi(A)y \in A(H)$. Тогда получим, что $\|Ax_n - y\| \to \|\Pi(A)y - y\| = \|P(A)y\| = I(A,y)$ (по теореме 2.1 из [130]). Итак, утверждение а) доказано.

Докажем б). Пусть процесс (2.2) сходится. Покажем, что уравнение $Ax = \Pi(A)y$ разрешимо. Из сходимости $\{x_n\} \in H$ к $z \in H$ и из а) следует, что $Ax_n \to Az = \Pi(A)y$, следовательно, $\Pi(A)y \in A(H)$ и уравнение $\Pi(A)y = Ax$ разрешимо.

Пусть теперь $\Pi(A)y \in A(H)$ (уравнение $\Pi(A)y = Ax$ разрешимо), следовательно, $\Pi(A)y = Ax^*$, где x^*– минимальное решение уравнения $Ax = y$ (оно единственно в $M(A)$). Тогда (2.2) примет вид

$$x_n = (E-\alpha A)^k x_{n-1} + A^{-1}\left[E-(E-\alpha A)^k\right]\Pi(A)y = (E-\alpha A)^k x_{n-1} +$$

$$+A^{-1}\left[E-(E-\alpha A)^k\right]Ax^* = (E-\alpha A)^k x_{n-1} + \left[E-(E-\alpha A)^k\right]x^* =$$
$$= x_{n-1} + \left[E-(E-\alpha A)^k\right]\left(x^* - x_{n-1}\right).$$

Разобьем последнее равенство на два, т. к. $x_n = P(A)x_n + \Pi(A)x_n$. Тогда

$$P(A)x_n = P(A)x_{n-1} + P(A)\left[E-(E-\alpha A)^k\right]\left(x^* - x_{n-1}\right) = P(A)x_{n-1} +$$
$$+\left[E-(E-\alpha A)^k\right]P(A)\left(x^* - x_{n-1}\right) = P(A)x_{n-1} = P(A)x_0,$$

т. к. $AP(A)\left(x^* - x_{n-1}\right) = 0$;

$$\Pi(A)x_n = \Pi(A)x_{n-1} + \Pi(A)\left[E-(E-\alpha A)^k\right]\left(x^* - x_{n-1}\right) = \Pi(A)x_{n-1} -$$
$$-\left[E-(E-\alpha A)^k\right]\left(\Pi(A)x_{n-1} - \Pi(A)x^*\right) = \Pi(A)x_{n-1} - \left[E-(E-\alpha A)^k\right]\left(\Pi(A)x_{n-1} - x^*\right),$$

т. к. $x^* \in M(A)$ и, значит, $\Pi(A)x^* = x^*$. Обозначим $w_n = \Pi(A)x_n - x^*$, тогда $w_n = (E-\alpha A)^k w_{n-1}$, и, аналогично v_n, можно показать, что $w_n \to 0$, $n \to \infty$. Итак, $\Pi(A)x_n \to x^*$. Отсюда $x_n = P(A)x_n + \Pi(A)x_n \to P(A)x_0 + x^*$. *Теорема 2.5 доказана.*

Замечание 2.1. *Так как у нас* $x_0 = 0$*, то* $x_n \to x^*$*, т. е. процесс* (2.2) *сходится к нормальному решению, т. е. к решению с минимальной нормой.*

2.1.3. Сходимость метода в энергетической норме

Сходимость процессов (2.2) и (2.3) в норме пространства H рассмотрена в подразделах 2.1.1 и 2.1.2. Изучим сходимость метода итераций (2.3) в энергетической норме $\|x\|_A = \sqrt{(Ax, x)}$, где $x \in H$, в случае единственного решения уравнения (2.1). При этом, как обычно, число итераций n нужно выбирать в зависимости от уровня погрешности δ. Полагаем $x_{0,\delta} = 0$ и рассмотрим разность

$$x - x_{n,\delta} = (x - x_n) + (x_n - x_{n,\delta}). \qquad (2.6)$$

Запишем первое слагаемое в виде $x - x_n = A^{-1}(E-\alpha A)^{kn} y = (E-\alpha A)^{kn} x$.

Как было доказано в подразделе 2.1.1, $x - x_n$ бесконечно мало в норме пространства H при $n \to \infty$, но скорость сходимости при этом может быть сколь угодно малой, и для ее оценки делалось предположение об истокопредставимости точного решения. При использовании энергетической нормы нам это дополнительное предположение не потребуется.

Действительно, с помощью интегрального представления самосопряженного оператора имеем

$$\|x - x_n\|_A^2 = \left(A(E - \alpha A)^{kn} x, (E - \alpha A)^{kn} x\right) = \int_0^M \lambda(1 - \alpha\lambda)^{2kn}\, d(E_\lambda x, x),$$

где $M = \|A\|$, E_λ – соответствующая спектральная функция, E – единичный оператор. Для оценки интересующей нас нормы найдем максимум подынтегральной функции при $\lambda \in [0, M]$. Функция $f(\lambda) = \lambda(1 - \alpha\lambda)^{2kn}$ – частный случай при $s = 1$ функции, оцененной в подразделе 2.1.1. Поэтому при условии

$$0 < \alpha \le \frac{5}{4M} \tag{2.7}$$

$\max\limits_{\lambda \in [0, M]} |f(\lambda)| \le (2kn\alpha e)^{-1}$. Следовательно, при выполнении (2.7) справедлива оценка $\|x - x_n\|_A \le (2kn\alpha e)^{-1/2} \|x\|$.

Таким образом, переход к энергетической норме как бы заменяет предположение об истокообразной представимости порядка $s = 1/2$ точного решения.

Оценим второе слагаемое в (2.6). Как показано в подразделе 2.1.1, справедливо равенство $x_n - x_{n,\delta} = A^{-1}\left[E - (E - \alpha A)^{kn}\right](y - y_\delta)$. Воспользовавшись интегральным представлением самосопряженного оператора, получим

$$\|x_n - x_{n,\delta}\|_A^2 = \int_0^M \lambda^{-1}\left[1 - (1 - \alpha\lambda)^{kn}\right]^2 d(E_\lambda (y - y_\delta), y - y_\delta).$$

Обозначим через $g(\lambda)$ подынтегральную функцию и оценим ее сверху при условии (2.7). Покажем, что при любом $p \in N$ выполняется неравенство

$$g(\lambda) = \lambda^{-1}\left[1 - (1 - \alpha\lambda)^p\right]^2 \le (5/4)p\alpha, \quad p \ge 1. \tag{2.8}$$

При $p = 1$ $g(\lambda) = \alpha^2\lambda \le (5/4)\alpha$. При $p = 2$ $g(\lambda) \le (35/27)\alpha$. По индукции докажем, что

$$g(\lambda) = \lambda^{-1}\left[1 - (1 - \alpha\lambda)^p\right]^2 \le (35/54)p\alpha, \quad p \ge 2. \tag{2.9}$$

При $p = 2$ утверждение верно. Предположим, что оно справедливо при $p = l$, т. е. $\lambda^{-1}\left[1 - (1 - \alpha\lambda)^l\right]^2 \le (35/54)l\alpha,$ и покажем, что (2.9) выполняется при $p = l + 1.$ Рассмотрим интересующее нас выражение

$$\lambda^{-1}\left[1 - (1 - \alpha\lambda)^{l+1}\right]^2 = \lambda^{-1}\left[1 - 2(1 - \alpha\lambda)^{l+1} + (1 - \alpha\lambda)^{2(l+1)}\right] =$$

$$= \lambda^{-1}\left[1-(1-\alpha\lambda)^l\right]^2 + \lambda^{-1}\left\{2(1-\alpha\lambda)^l \alpha\lambda - (1-\alpha\lambda)^{2l}\left[1-(1-\alpha\lambda)^2\right]\right\} \le$$
$$\le (35/54) l\alpha + \alpha\left[2(1-\alpha\lambda)^l - (1-\alpha\lambda)^{2l}(2-\alpha\lambda)\right].$$

Чтобы доказать требуемое, достаточно убедиться, что

$$B \equiv 2(1-\alpha\lambda)^l - (1-\alpha\lambda)^{2l}(2-\alpha\lambda) \le 35/54. \qquad (2.10)$$

Рассмотрим три случая.

1. $1 \le \alpha\lambda \le 5/4$, l – нечетное ($l \ge 3$). Тогда $-1 < (1-\alpha\lambda)^l \le 0$. Преобразуем левую часть неравенства (2.10), тогда $B = (1-\alpha\lambda)^l \times \times\left[2-(1-\alpha\lambda)^l - (1-\alpha\lambda)^{l+1}\right]$. Т. к. $2-(1-\alpha\lambda)^l -$ $(1-\alpha\lambda)^{l+1} \ge 0$, то $B \le 0$ и тем более $B \le 35/54$.

2. $1 \le \alpha\lambda \le 5/4$, l – четное ($l \ge 2$). Тогда $0 \le (1-\alpha\lambda)^l < 1$. Требуется доказать неравенство (2.10), что равносильно $1-2(1-\alpha\lambda)^l + (1-\alpha\lambda)^{2l} + +(1-\alpha\lambda)^{2l+1} - 19/54 \ge 0$, что в свою очередь равносильно

$$1 + (1-\alpha\lambda)^{2l}\ (2-\alpha\lambda) - \left[2(1-\alpha\lambda)^l + 19/54\right] \ge 0. \qquad (2.11)$$

Имеем $-1/4 \le 1-\alpha\lambda \le 0$. Следовательно, $2(1-\alpha\lambda)^l + 19/54 < 1$, а поэтому неравенство (2.11) справедливо, и, значит, верно доказываемое неравенство (2.10).

3. $0 < \alpha\lambda < 1$, l – любое ($l \ge 2$). Тогда $0 < (1-\alpha\lambda)^l < 1$. Неравенство (2.10) равносильно $35/54 - 2(1-\alpha\lambda)^l + (1-\alpha\lambda)^{2l} + (1-\alpha\lambda)^{2l+1} \ge 0$, которое в свою очередь равносильно такому

$$4/27 + 2\left[1/2 - (1-\alpha\lambda)^l\right]^2 + (1-\alpha\lambda)^{2l+1} - (1-\alpha\lambda)^{2l} \ge 0. \qquad (2.12)$$

Т. к. $2\left[1/2-(1-\alpha\lambda)^l\right]^2 \ge 0$, то для доказательства справедливости (2.12) достаточно показать, что $\varphi_l(\lambda) \equiv 4/27 + (1-\alpha\lambda)^{2l+1} - (1-\alpha\lambda)^{2l} \ge 0$. Нетрудно убедиться, что $\min\limits_{0<\alpha\lambda<1} \varphi_l(\lambda) \ge 0$ для $l \ge 2$. Отсюда вытекает справедливость неравенства (2.12) и, следовательно, неравенства (2.10). Эти три рассмотренных случая исчерпывают индукцию, значит, неравенство (2.9) справедливо. Таким образом, $\left\|x_n - x_{n,\delta}\right\|_A^2 \le (35/54) kn\alpha\delta^2$, $kn \ge 2$.

Отсюда имеем $\left\|x_n - x_{n,\delta}\right\|_A \le \left[(5/4)kn\alpha\right]^{1/2}\delta$, $kn \ge 1$,

$$\left\|x_n - x_{n,\delta}\right\|_A \le \left[(35/54)kn\alpha\right]^{1/2}\delta, \quad kn \ge 2. \qquad (2.13)$$

Покажем, что порядок оценки для $\left\|x_{n,\delta}-x_n\right\|_A$ нельзя улучшить, т. е. показатель степени, с которым n входит в оценку, найден правильно. Найдем $g_n'(\lambda)$.

$$g_n'(\lambda)=-\lambda^{-2}\left[1-(1-\alpha\lambda)^{kn}\right]^2+2\lambda^{-1}\left[1-(1-\alpha\lambda)^{kn}\right]kn\alpha(1-\alpha\lambda)^{kn-1}=$$
$$=\lambda^{-2}\left[1-(1-\alpha\lambda)^{kn}\right]\left[-1+(1-\alpha\lambda)^{kn}+2kn\alpha\lambda(1-\alpha\lambda)^{kn-1}\right].$$

Если $1-(1-\alpha\lambda)^{kn}=0$, то $g_n(\lambda)=0$, и функция $g_n(\lambda)$ не будет достигать максимального значения. Значит, точка максимума определяется из уравнения $-1+(1-\alpha\lambda)^{kn}+2kn\alpha\lambda(1-\alpha\lambda)^{kn-1}=0$. Отсюда $1=(1-\alpha\lambda)^{kn-1}(1-\alpha\lambda+2kn\alpha\lambda)$.

Пусть $\alpha\lambda=a_n$, тогда последнее равенство перепишется в виде

$$\left(1-a_n\right)^{kn-1}(1-a_n+2kna_n)=1. \tag{2.14}$$

Т. к. $\left|1-a_n\right|<1$, то $\left|1-a_n\right|^{kn-1}<1$. Значит, если бы a_n не стремились к нулю при $n\to\infty$, а были бы лишь ограничены снизу, то равенство (2.14) не выполнялось бы. Таким образом, получаем, что $a_n\to 0$ при $n\to\infty$. Из (2.14) следует, что $\left(1-a_n\right)^{kn-1}=\dfrac{1}{1+(2kn-1)a_n}$, $\left(1-a_n\right)^{kn}=\dfrac{1-a_n}{1+(2kn-1)a_n}$, отсюда

$$1-(1-a_n)^{kn}=\frac{2kna_n}{1+(2kn-1)a_n}. \tag{2.15}$$

В левой части (2.15) стоит величина ограниченная, следовательно, и в правой части должна быть ограниченная величина. В знаменателе правой части стоит величина, ограниченная снизу, поэтому, для ограниченности величины $\dfrac{2kna_n}{1+(2kn-1)a_n}$, необходимо, чтобы a_n стремилось к нулю не медленнее, чем $1/n$, т. е. $a_n=b_n/n$, где $\{b_n\}$ – ограниченная числовая последовательность: $0<b_n\le B<\infty$. Подставим $a_n=b_n/n$ в выражение для $g_n(\lambda)$, получим

$$g_n(\lambda)=\frac{\left[1-(1-a_n)^{kn}\right]^2}{a_n}\alpha=\frac{\left(2kna_n\right)^2\alpha}{a_n\left[1+(2kn-1)a_n\right]^2}=\frac{4k^2nb_n\alpha}{\left[1+(2kn-1)b_n/n\right]^2}.$$

Покажем, что нуль не является предельной точкой для последовательности $\{b_n\}$. Предположим противное, что какая-то подпоследовательность $\{b_m\}$, где $m\in N_0\subset N$, последовательности $\{b_n\}$ стремится к нулю при $m\to\infty$, тогда $\dfrac{2kma_m}{1+(2km-1)a_m}=\dfrac{2kb_m}{1+(2km-1)\,b_m/m}\sim 2kb_m$. С другой стороны,

$$\left(1-b_m/m\right)^{km}=1-kb_m+\frac{k(km-1)}{2m}b_m{}^2-\frac{k(km-1)(km-2)}{6m^2}b_m{}^3+\dots\ .$$

Следовательно, $1-(1-b_m/m)^{km}\sim kb_m$. Т. к. из (2.15) следует, что

$$1-(1-b_m/m)^{km}=\frac{2kb_m}{1+(2km-1)\,b_m/m}, \qquad (2.16)$$

то $2kb_m$ должно быть эквивалентно kb_m, что неверно. Пришли к противоречию. Значит, b_m не стремится к нулю при $m\to\infty$, и 0 не является предельной точкой числовой последовательности $\{b_n\}$. Значит, $0<b\le b_n\le B<\infty$.

Из $g_n(\lambda)=\dfrac{4k^2nb_n\alpha}{[1+(2kn-1)\,b_n/n]^2}$ видно, что в оценку для $\|x_n-x_{n,\delta}\|_A$ n входит с показателем степени $1/2$. Значит, найденная оценка для $\|x_n-x_{n,\delta}\|_A$ верна по порядку.

Попытаемся уточнить константу $(35/54)^{1/2}$, фигурирующую в оценке $\|x_n-x_{n,\delta}\|_A$. Для этого найдем предельную точку числовой последовательности $\{b_n\}$. Покажем, что $\{b_n\}$ сходится. Т. к. $\{b_n\}$ – ограниченная числовая последовательность и пространство H гильбертово, то по лемме Больцано-Вейрштрасса [43, с. 105] из нее можно выделить сходящуюся подпоследовательность $\{b_m\}$ такую, что $b_m\to b^*$.

Перейдем к пределу в обеих частях равенства (2.16), получим

$$\lim_{m\to\infty}\left[1-\left(1-b_m/m\right)^{km}\right]=1-\lim_{m\to\infty}\left[\left(1-b_m/m\right)^m\right]^k=1-\lim_{m\to\infty}\left\{\left[\left(1-b_m/m\right)^{-m/b_m}\right]^{-b_m}\right\}^k=$$

$$=1-e^{-kb^*},\quad \lim_{m\to\infty}\frac{2kb_m}{1+(2km-1)\,b_m/m}=\frac{2kb^*}{1+2kb^*}.$$

Таким образом, если обозначить через $z=kb^*$, то получим следующее уравнение: $1-e^{-z}=\dfrac{2z}{1+2z}$, $e^{-z}=1-\dfrac{2z}{1+2z}$, $e^{-z}=\dfrac{1}{1+2z}$, $e^z=1+2z$. Это уравнение имеет два решения: $z_1=0$ и $z_2\approx1{,}256$. Т. е. $b_1^*=0$ и $b_2^*\approx1{,}256/k$ и т. к. нуль не является предельной точкой для последовательности $\{b_n\}$, то $b_m\to b_2^*\approx1{,}256/k$. Т. к. $\{b_m\}$ – произвольная подпоследовательность последовательности $\{b_n\}$, то и сама $\{b_n\}$ сходится к b_2^*.

А теперь вернемся к уточнению константы $(35/54)^{1/2}$ в оценке для $\|x_n - x_{n,\delta}\|_A$. Рассмотрим функцию $g_n(\lambda) = \dfrac{4k^2 n b_n \alpha}{\left[1+(2kn-1)b_n/n\right]^2}$. Отсюда $\max\limits_{0<a_n\le 5/4} \dfrac{g_n(\lambda)}{kn\alpha} \to \dfrac{4kb^*}{\left(1+2kb^*\right)^2} \approx 0{,}41$. Поэтому нельзя получить оценки лучшей, чем $\|x_{n,\delta} - x_n\|_A \le (0{,}41kn\alpha)^{1/2}\delta$. Таким образом, полученная нами константа $(35/54)^{1/2}$ завышена не более чем в 1,26 раза.

Поскольку $\|x - x_{n,\delta}\|_A \le \|x - x_n\|_A + \|x_n - x_{n,\delta}\|_A \le \|x - x_n\|_A + \left[(35/54)kn\alpha\right]^{1/2}\delta$, $kn \ge 2$ и $\|x - x_n\|_A \to 0, n\to\infty$, то для сходимости $\|x - x_{n,\delta}\|_A \to 0,\ n\to\infty$, достаточно, чтобы $\sqrt{n}\delta \to 0,\ n\to\infty,\ \delta\to 0$.

Таким образом, если в процессе (2.3) выбрать число итераций $n = n(\delta)$ зависящим от δ так, что $\sqrt{n}\delta \to 0,\ n\to\infty,\ \delta\to 0$, то получим регуляризованный метод, обеспечивающий сходимость к точному решению в энергетической норме.

Запишем теперь общую оценку погрешности для метода (2.3) при выполнении условия (2.7):

$$\|x - x_{n,\delta}\|_A \le (2kn\alpha e)^{-1/2}\|x\| + \left[(5/4)kn\alpha\right]^{1/2}\delta, \quad kn \ge 1,$$

$$\|x - x_{n,\delta}\|_A \le (2kn\alpha e)^{-1/2}\|x\| + \left[(35/54)kn\alpha\right]^{1/2}\delta, \quad kn \ge 2. \qquad (2.17)$$

Итак, доказана

Теорема 2.6. *Итерационный процесс* (2.3) *при условии* (2.7) *сходится в энергетической норме пространства* H, *если выбирать число итераций* n *из условия* $\sqrt{n}\delta \to 0,\ n\to\infty,\ \delta\to 0$. *Для процесса* (2.3) *справедлива оценка погрешности* (2.17).

Оптимизируем полученную оценку (2.17) по n, т. е. при заданном δ найдем такое значение числа итераций n, при котором оценка погрешности становится минимальной. Приравняв к нулю производную по n от правой части неравенства (2.17), получим

$$n_{\text{опт}} = (35/27)^{-1/2}(k\alpha)^{-1}e^{-1/2}\delta^{-1}\|x\|. \qquad (2.18)$$

Подставив $n_{\text{опт}}$ в оценку (2.17), получим ее оптимальное значение

$$\|x - x_{n,\delta}\|_A^{\text{опт}} \le (35/27)^{1/4}\left(2\delta\|x\|\right)^{1/2}e^{-1/4}. \qquad (2.19)$$

Из (2.19) вытекает, что оптимальная оценка погрешности не зависит от параметра α. Но $n_{\text{опт}}$ зависит от α, поэтому для уменьшения n и, значит, объема вычислительной работы следует брать α возможно большим, удовлетворяющим условию (2.7), и так, чтобы $n_{\text{опт}}$ было целым. Таким образом, доказана

Теорема 2.7. *В условиях предыдущей теоремы оптимальная оценка погрешности для итерационного процесса* (2.3) *имеет вид* (2.19) *и получается при* $n_{\text{опт}}$ *из* (2.18).

Рассмотрим вопрос о том, когда из сходимости в энергетической норме следует сходимость в обычной норме гильбертова пространства`H. Эти условия дает

Теорема 2.8. *Если выполнены условия* 1) $E_\varepsilon x_{n,\delta} = 0$, 2) $E_\varepsilon x = 0$, *где* $E_\varepsilon = \int\limits_0^\varepsilon dE_\lambda$, $\varepsilon -$ *фиксированное положительное число* $(0 < \varepsilon < \|A\|)$, *то из сходимости* $x_{n,\delta}$ *к решению* x *в энергетической норме следует сходимость в обычной норме гильбертова пространства*.

Доказательство. Т. к. по условию теоремы $E_\varepsilon x_{n,\delta} = 0$ и $E_\varepsilon x = 0$, то $E_\varepsilon(x_{n,\delta} - x) = 0$ и $\left(E_\varepsilon(x_{n,\delta} - x), x_{n,\delta} - x\right) = 0$, т. е. $\int\limits_0^\varepsilon d(E_\lambda\,(x_{n,\delta} - x), x_{n,\delta} - x) = 0$.

Следовательно, справедливо записать $\int\limits_0^\varepsilon \frac{1}{\lambda}\, d(E_\lambda\,(x_{n,\delta} - x), A(x_{n,\delta} - x)) = 0$.

Тогда получим, что

$$\|x_{n,\delta} - x\|^2 = \int\limits_0^M \frac{1}{\lambda}\, d(E_\lambda\,(x_{n,\delta} - x), A(x_{n,\delta} - x)) =$$

$$= \int\limits_0^\varepsilon \frac{1}{\lambda}\, d(E_\lambda\,(x_{n,\delta} - x), A(x_{n,\delta} - x)) + \int\limits_\varepsilon^M \frac{1}{\lambda}\, d(E_\lambda\,(x_{n,\delta} - x), A(x_{n,\delta} - x)) =$$

$$= \int\limits_\varepsilon^M \frac{1}{\lambda}\, d(E_\lambda\,(x_{n,\delta} - x), A(x_{n,\delta} - x)) \le \frac{1}{\varepsilon}\|x_{n,\delta} - x\|_A^2.$$

Теорема 2.8 доказана.

Замечание 2.2. *Т. к.* $x_{n,\delta} = A^{-1}\left[E - (E - \alpha A)^{kn}\right] y_\delta$, *то для того, чтобы* $x_{n,\delta}$ *удовлетворяло условию* $E_\varepsilon x_{n,\delta} = 0$, *достаточно потребовать, чтобы* $E_\varepsilon y_\delta = 0$. *Таким образом, если* $E_\varepsilon x = 0$ *и* $E_\varepsilon y_\delta = 0$, *то из сходимости метода итераций в энергетической норме следует его сходимость в обычной норме пространства H. Следовательно, для оценки погрешно-*

сти не потребуется предположения истокопредставимости точного решения.

2.1.4. Правило останова по невязке

Решается задача из подраздела 2.1.1. Для ее решения используется метод (2.3). Все результаты подраздела 2.1.1 получены в предположении, что точное решение x уравнения (2.1) истокопредставимо, т. е. $x = A^s z, s > 0$. Однако, поскольку сведения об элементе z и степени истокопредставимости s имеются не всегда, то на основании результатов подраздела 2.1.1 трудно определить число итераций n, обеспечивающих сходимость метода (2.3). Тем не менее, этот метод можно сделать вполне эффективным, если воспользоваться следующим правилом останова по невязке, аналогичным [20–21; 37; 90].

Определим момент m останова процесса (2.3) условием

$$\left.\begin{aligned} &\|Ax_{n,\delta} - y_\delta\| > \varepsilon, \quad (n < m),\\ &\|Ax_{m,\delta} - y_\delta\| \le \varepsilon, \end{aligned}\right\} \quad \varepsilon = b\delta, \quad b > 1. \tag{2.20}$$

Предполагаем, что при начальном приближении $x_{0,\delta}$ невязка достаточно велика, больше уровня останова ε, т. е. $\|Ax_{0,\delta} - y_\delta\| > \varepsilon.$ Покажем возможность применения правила (2.20) к методу (2.3). Метод (2.3) с остановом (2.20) является сходящимся, если $\lim\limits_{\delta\to 0}\left(\inf\limits_m \|x - x_{m,\delta}\|\right) = 0$. Рассмотрим семейство функций $g_n(\lambda) = \lambda^{-1}\left[1 - (1-\alpha\lambda)^{kn}\right]$ из подраздела 2.1.1. Нетрудно показать, что для $g_n(\lambda)$ выполняются условия

$$\sup_{0\le\lambda\le M} |g_n(\lambda)| \le kn\alpha, \quad n > 0,\ M = \|A\|,\ 0 < \alpha < 2/M, \tag{2.21}$$

$$\sup_{0\le\lambda\le M} |1 - \lambda g_n(\lambda)| \le 1,\ 0 < \alpha < 2/M, \tag{2.22}$$

$$1 - \lambda g_n(\lambda) \to 0,\ n \to \infty, \forall\lambda \in (0, M],\ 0 < \alpha < 2/M, \tag{2.23}$$

$$\sup_{0\le\lambda\le M} \lambda^s |1 - \lambda g_n(\lambda)| \le \left(\frac{s}{k\alpha e}\right)^s n^{-s},\ n > 0,\ 0 \le s < \infty,\ 0 < \alpha \le \frac{5}{4M}. \tag{2.24}$$

Справедлива

Лемма 2.1. *Пусть* $A = A^* \ge 0,\ \|A\| \le M$. *Тогда для любого* $w \in H$ $(E - Ag_n(A))w \to 0,\ n \to \infty.$

Доказательство. Воспользуемся интегральным представлением самосопряженного оператора $A=\int\limits_0^M \lambda\, dE_\lambda$, где E_λ – спектральная функция. Рассмотрим $(E-Ag_n(A))w = \int\limits_0^M (1-\lambda g_n(\lambda))\, dE_\lambda w = \int\limits_0^M (1-\alpha\lambda)^{kn}\, dE_\lambda w.$ Т. к. при $0<\alpha<2/\|A\|$, $\lambda\in[\varepsilon_0, M]$ имеем $|1-\alpha\lambda|\le q<1$, то

$$\left\|\int\limits_{\varepsilon_0}^M (1-\alpha\lambda)^{kn}\, dE_\lambda w\right\| \le q^{kn}\left\|\int\limits_{\varepsilon_0}^M dE_\lambda w\right\| \le q^{kn}\|w\|\to 0,\ n\to\infty.$$

В силу свойств спектральной функции $\left\|\int\limits_0^{\varepsilon_0} (1-\alpha\lambda)^{kn}\, dE_\lambda w\right\| \le \left\|\int\limits_0^{\varepsilon_0} dE_\lambda w\right\| \le$ $\le \left\|E_{\varepsilon_0} w\right\| \to 0, \varepsilon_0\to 0$. Итак, $(E-Ag_n(A))w\to 0,\ n\to\infty$. *Лемма 2.1 доказана.*

Имеет место

Лемма 2.2. *Пусть* $A=A^*\ge 0$, $\|A\|\le M$. *Тогда для любого* $v\in\overline{R(A)}$ *имеет место соотношение*

$$n^s\left\|A^s(E-Ag_n(A))v\right\|\to 0,\ n\to\infty,\ 0\le s<\infty. \quad (2.25)$$

Доказательство. Так как (2.24) верно, то

$$n^s\left\|A^s(E-Ag_n(A))\right\|\le n^s \sup_{0\le\lambda\le M} \lambda^s|1-\lambda g_n(\lambda)|\le\gamma_s,\ n>0,$$

где $\gamma_s=\left(\frac{s}{k\alpha e}\right)^s$. Воспользуемся теоремой Банаха – Штейнгауза [43, с. 151], по которой сходимость $B_n u\to Bu$ при $n\to\infty$ для $\forall u\in H$ имеет место тогда и только тогда, когда эта сходимость имеет место на некотором плотном в H подмножестве и $\|B_n\|$, $n=1,2,\ldots$ ограничены независящей от n постоянной. Здесь $\|B_n\|=n^s\left\|A^s(E-Ag_n(A))\right\|\le\gamma_s$, т. е. $\|B_n\|$ совокупно ограничены. В качестве плотного в $\overline{R(A)}$ подмножества возьмем $R(A)$. Положим $s_1=s+1$. Тогда для каждого $v=Aw\in R(A)$ имеем

$$n^s\left\|A^s(E-Ag_n(A))v\right\| = n^s\left\|A^{s+1}(E-Ag_n(A))w\right\|\le$$

$$\le n^s\left(\frac{s+1}{k\alpha e}\right)^{s+1} n^{-(s+1)}\|w\| = \gamma_{s_1} n^{-1}\|w\|\to 0,\ n\to\infty,$$

т. к. $s_1<\infty$. *Лемма 2.2 доказана.*

Справедлива

Лемма 2.3. *Пусть* $A = A^* \geq 0,\ \|A\| \leq M$. *Если для некоторых* $n_p < \bar{n} = const$ *и* $v_0 \in \overline{R(A)}$ *при* $p \to \infty$ *имеем* $w_p = A\left(E - Ag_{n_p}(A)\right)v_0 \to 0$, *то* $v_p = \left(E - Ag_{n_p}(A)\right)v_0 \to 0$.

Доказательство. В силу (2.22) последовательность v_p ограничена $\|v_p\| \leq \|v_0\|,\ p \in N$, поэтому в гильбертовом пространстве из этой последовательности можно извлечь слабо сходящуюся подпоследовательность. Пусть $v_p \dashrightarrow v\ \left(p \in N' \subseteq N\right)$, тогда $Av_p \dashrightarrow Av\ \left(p \in N'\right)$. Но по условию $w_p = Av_p \to 0,\ p \to \infty$, следовательно, $Av = 0$. Поскольку нуль не является собственным значением оператора A, то $v = 0$. Тогда

$$\|v_p\|^2 = \left(v_p, \left(E - Ag_{n_p}(A)\right)v_0\right) = \left(v_p, v_0\right) - \left(v_p, Ag_{n_p}(A)v_0\right) =$$
$$= \left(v_p, v_0\right) - \left(Av_p, g_{n_p}(A)v_0\right) = \left(v_p, v_0\right) - \left(w_p, g_{n_p}(A)v_0\right) \to \left(v, v_0\right) = 0,$$

т. к. $w_p \to 0,\ v = 0$ и по условию (2.21) $\left\|g_{n_p}(A)\right\| \leq \alpha k n_p < \alpha k \bar{n}$. Следовательно, $\|v_p\| \to 0$. Итак, всякая слабо сходящаяся подпоследовательность указанной выше ограниченной последовательности v_p стремится к нулю по норме. Следовательно, и вся последовательность $v_p \to 0,\ p \to \infty$. *Лемма 2.3 доказана.*

Используем доказанные леммы при доказательстве следующих теорем.

Теорема 2.9. *Пусть* $A = A^* \geq 0,\ \|A\| \leq M$ *и пусть момент останова* $m = m(\delta)$ *в методе* (2.3) *выбирается по правилу* (2.20). *Тогда* $x_{m,\delta} \to x$ *при* $\delta \to 0$.

Доказательство. Из подраздела 2.1.1 следует, что справедливо $x_{n,\delta} = A^{-1}\left[E - (E - \alpha A)^{kn}\right]y_\delta$. Тогда

$$x_{n,\delta} - x = g_n(A)(y_\delta - y) - \left(E - Ag_n(A)\right)x. \tag{2.26}$$

Отсюда

$$Ax_{n,\delta} - y_\delta = -A\left(E - Ag_n(A)\right)x - \left(E - Ag_n(A)\right)(y_\delta - y). \tag{2.27}$$

В силу лемм 2.1 и 2.2 имеем

$$\left\|\left(E - Ag_n(A)\right)x\right\| \to 0, \quad n \to \infty, \tag{2.28}$$

$$\sigma_n = n\left\|A\left(E - Ag_n(A)\right)x\right\| \to 0, \quad n \to \infty. \tag{2.29}$$

Кроме того, из (2.21) и (2.22) следует, что

$$\|g_n(A)(y_\delta - y)\| \le k\alpha n\delta, \tag{2.30}$$

$$\|E - Ag_n(A)\| \le 1. \tag{2.31}$$

Применим правило останова (2.20). Тогда $\|Ax_{m,\delta} - y_\delta\| \le b\delta,\ b > 1$ и из (2.27) и (2.31) получим

$$\|A(E - Ag_m(A))x\| \le \|Ax_{m,\delta} - y_\delta\| + \|(E - Ag_m(A))(y_\delta - y)\| \le (b+1)\delta. \tag{2.32}$$

Для любых $n < m$ справедливы неравенства $\|Ax_{n,\delta} - y_\delta\| > \varepsilon$, поэтому

$$\|A(E - Ag_n(A))x\| \ge \|Ax_{n,\delta} - y_\delta\| - \|(E - Ag_n(A))(y - y_\delta)\| \ge (b-1)\delta.$$

Итак, для любых $n < m$

$$\|A(E - Ag_n(A))x\| \ge (b-1)\delta. \tag{2.33}$$

Из (2.29) и (2.33) при $n = m - 1$ получаем $\dfrac{\sigma_{m-1}}{m-1} = \|A(E - Ag_{m-1}(A))x\| \ge$ $\ge (b-1)\delta$ или, что то же самое, $(m-1)\delta \le \dfrac{\sigma_{m-1}}{b-1} \to 0,\ \delta \to 0,$ (т. к. из (2.29) $\sigma_m \to 0,\ m \to \infty$). Если при этом $m \to \infty$ при $\delta \to 0$, то используя (2.26), получим

$$\|x_{m,\delta} - x\| \le \|(E - Ag_m(A))x\| + \|g_m(A)(y_\delta - y)\| \le$$
$$\le \|(E - Ag_m(A))x\| + k\alpha m\delta \to 0,\ m \to \infty,\ \delta \to 0,$$

т. к. как из (2.28) $\|(E - Ag_m(A))x\| \to 0,\ m \to \infty.$

Если же для некоторых δ_n последовательность $m(\delta_n)$ окажется ограниченной, то и в этом случае $x_{m(\delta_n),\delta_n} \to x,\ \delta_n \to 0.$ Действительно, из (2.32) выполняется $\|A(E - Ag_{m(\delta_n)}(A))x\| \le (b+1)\delta_n \to 0,\ \delta_n \to 0.$ Следовательно, имеем $A(E - Ag_{m(\delta_n)}(A))x \to 0,\ \delta_n \to 0$ и по лемме 2.3 получаем, что при $\delta_n \to 0$ $(E - Ag_{m(\delta_n)}(A))x \to 0.$ Отсюда

$$\|x_{m(\delta_n),\delta_n} - x\| \le \|(E - Ag_{m(\delta_n)}(A))x\| + k\alpha m(\delta_n)\delta_n \to 0,\ \delta_n \to 0.$$

Теорема 2.9 доказана.

Имеет место

Теорема 2.10. *Пусть выполнены условия теоремы* 2.9 *и пусть* $x = A^s z,\ s > 0$, *тогда справедливы оценки* $m(\delta) \le 1 + \dfrac{s+1}{k\alpha e}\left[\dfrac{\|z\|}{(b-1)\delta}\right]^{1/(s+1)}$,

$$\left\|x_{m(\delta),\delta}-x\right\|\le\left[(b+1)\delta\right]^{s/(s+1)}\|z\|^{1/(s+1)}+k\alpha\left\{1+\frac{s+1}{k\alpha e}\left[\frac{\|z\|}{(b-1)\delta}\right]^{1/(s+1)}\right\}\delta. \quad (2.34)$$

Доказательство. Имеем

$$\left\|A\left(E-Ag_{m-1}(A)\right)x\right\|=\left\|A^{s+1}\left(E-Ag_{m-1}(A)\right)z\right\|=$$

$$=\left\|\int_0^M\lambda^{s+1}(1-\alpha\lambda)^{k(m-1)}\,dE_\lambda z\right\|\le(s+1)^{s+1}\left[k(m-1)\alpha e\right]^{-(s+1)}\|z\|.$$

Воспользовавшись (2.33), получим $(b-1)\delta\le(s+1)^{s+1}\left[k(m-1)\alpha e\right]^{-(s+1)}\|z\|$, откуда $m\le1+\dfrac{s+1}{k\alpha e}\left[\dfrac{\|z\|}{(b-1)\delta}\right]^{1/(s+1)}$. При помощи неравенства моментов оценим

$$\left\|\left(E-Ag_m(A)\right)x\right\|=\left\|A^s\left(E-Ag_m(A)\right)z\right\|\le\left\|A^{s+1}\left(E-Ag_m(A)\right)z\right\|^{s/(s+1)}\times$$

$$\times\left\|\left(E-Ag_m(A)\right)z\right\|^{1/(s+1)}\le\left\|A\left(E-Ag_m(A)\right)x\right\|^{s/(s+1)}\|z\|^{1/(s+1)}\le$$

$$\le\left[(b+1)\delta\right]^{s/(s+1)}\|z\|^{1/(s+1)}$$

Поскольку соотношение (2.26) справедливо для любых n, то

$$\left\|x_{m,\delta}-x\right\|\le\left\|\left(E-Ag_m(A)\right)x\right\|+\left\|g_m(A)(y_\delta-y)\right\|\le\left[(b+1)\delta\right]^{s/(s+1)}\|z\|^{1/(s+1)}+$$

$$+km\alpha\delta\le\left[(b+1)\delta\right]^{s/(s+1)}\|z\|^{1/(s+1)}+k\alpha\left\{1+\frac{s+1}{k\alpha e}\left[\frac{\|z\|}{(b-1)\delta}\right]^{1/(s+1)}\right\}\delta.$$

Теорема 2.10 доказана.

Замечание 2.3. *Порядок оценки* (2.34) *есть* $O\left(\delta^{s/(s+1)}\right)$, *и, как следует из* [21], *он оптимален в классе задач с истокопредставимыми решениями* $x=A^sz,\ s>0$.

Замечание 2.4. *Хотя формулировка теоремы* 2.10 *дается с указаниями степени истокопредставимости* s *и истокопредставляющего элемента* z, *на практике их значение не потребуется, т. к. они не содержатся в правиле останова* (2.20). *Тем не менее, в теореме* 2.10 *утверждается, что будет автоматически выбрано количество итераций* m, *обеспечивающее оптимальный порядок погрешности. Но даже если истокопредставимость точного решения отсутствует, останов по невязке* (2.20), *как показывает теорема* 2.9, *обеспечивает сходимость метода, т. е. его регуляризующие свойства.*

2.1.5. Правило останова по соседним приближениям для уравнений с несамосопряженным оператором

Как известно из работы [59], уравнение (2.1) с действующим в гильбертовом пространстве H оператором, не обладающим свойством самосопряженности или положительной определенности, может быть сведено к решению уравнения $A^*Ax = A^*y$ уже с положительно определенным и самосопряженным оператором A^*A. Применение вышеописанных результатов для уравнения (2.1) приводит к аналогичным результатам для уравнений (2.1) уже с произвольным действующим в гильбертовом пространстве оператором A.

Решаем уравнение (2.1) с несамосопряженным оператором A. Используем явную схему метода итераций

$$x_{n+1} = \left(E - \alpha A^*A\right)^k x_n + \left(A^*A\right)^{-1}\left[E - \left(E - \alpha A^*A\right)^k\right]A^*y,$$

$$k \in N,\ x_0 \in H,\ 0 < \alpha \le \frac{5}{4\left\|A^*A\right\|}. \tag{2.35}$$

Здесь оператор $\left(A^*A\right)^{-1}$, фигурирующий в (2.35), не означает, что для рассматриваемой схемы (2.35) необходимо его знать – нужно заметить, что после раскрытия скобок во втором слагаемом он сокращается и весь оператор в квадратных скобках является полиномом от оператора A^*A:

$$C_k^1\alpha E - C_k^2\alpha^2 A^*A + C_k^3\alpha^3\left(A^*A\right)^2 - \ldots - (-1)^k\alpha^k\left(A^*A\right)^{k-1}.$$

В случае, когда правая часть y уравнения (2.1) известна приближенно, $\left\|y - y_\delta\right\| \le \delta$, метод (2.35) примет вид

$$z_{n+1} = \left(E - \alpha A^*A\right)^k z_n + \left(A^*A\right)^{-1}\left[E - \left(E - \alpha A^*A\right)^k\right]A^*y_\delta + \left(E - \alpha A^*A\right)^k u_n,$$

$$k \in N,\ z_0 \in H,\ 0 < \alpha \le \frac{5}{4\left\|A^*A\right\|}. \tag{2.36}$$

Здесь u_n –ошибки вычисления итераций, $\left\|u_n\right\| \le \beta$. Использовано равенство $A^*Ax = A^*y$. Обозначим $B = \left(A^*A\right)^{-1}\left[E - \left(E - \alpha A^*A\right)^k\right]A^*$, $C = \left(E - \alpha A^*A\right)^k$, тогда метод (2.36) запишется в виде $z_{n+1} = Cz_n + By_\delta + Cu_n$. Для простоты будем считать, что $\left\|A\right\| = 1$.

Определим момент m останова итерационного процесса условием, описанным в работах [18; 36; 92]

$$\left.\begin{aligned} &\left\|z_n - z_{n+1}\right\| > \varepsilon, \quad (n < m), \\ &\left\|z_m - z_{m+1}\right\| \le \varepsilon, \end{aligned}\right\} \tag{2.37}$$

где $\varepsilon-$заданное до начала вычислений положительное число (уровень останова). Аналогично работе [36] докажем, что метод (2.36) с правилом останова (2.37) сходится, и получим оценку для момента останова. Справедливы леммы

Лемма 2.4. *Пусть приближение* w_n *определяется равенствами*

$$w_0 = z_0, \ w_{n+1} = Cw_n + By + Cu_n, \ n \ge 0, \tag{2.38}$$

тогда справедливо неравенство

$$\sum_{k=0}^{n} \left\| w_k - w_{k+1} + Cu_k \right\|^2 \le \left\| w_0 - x \right\|^2 + \sum_{k=0}^{n-1} \left\| Cu_k \right\|^2. \tag{2.39}$$

Доказательство. Из (2.38) имеем $Cu_k = w_{k+1} - Cw_k - By$. Отсюда, используя равенство $A^* Ax = A^* y$, получим

$$u_k = C^{-1}w_{k+1} - w_k - C^{-1}By = C^{-1}w_{k+1} - w_k -$$
$$-\left(E - \alpha A^* A\right)^{-k}\left(A^* A\right)^{-1}\left[E - \left(E - \alpha A^* A\right)^k\right]A^* y = C^{-1}w_{k+1} - w_k -$$
$$-\left(E - \alpha A^* A\right)^{-k}\left(A^* A\right)^{-1}\left[E - \left(E - \alpha A^* A\right)^k\right]A^* Ax = C^{-1}w_{k+1} - w_k -$$
$$- C^{-1}(E - C)x = C^{-1}w_{k+1} - w_k - C^{-1}x + x = C^{-1}(w_{k+1} - x) - (w_k - x).$$

Обозначим $\Delta_k = w_k - x$, тогда $u_k = C^{-1}\Delta_{k+1} - \Delta_k$, откуда получим $Cu_k = \Delta_{k+1} - C\Delta_k$. Имеем

$$\sum_{k=0}^{n-1}\left\|Cu_k\right\|^2 = \sum_{k=0}^{n-1}(\Delta_{k+1} - C\Delta_k, \Delta_{k+1} - C\Delta_k) = \sum_{k=1}^{n}(\Delta_k, \Delta_k) + \sum_{k=0}^{n-1}(C\Delta_k, C\Delta_k) -$$
$$-2\sum_{k=0}^{n-1}(\Delta_{k+1}, C\Delta_k) = \sum_{k=1}^{n}(\Delta_k, \Delta_k) + \sum_{k=0}^{n-1}(C\Delta_k, C\Delta_k) - 2\sum_{k=0}^{n-1}\left(C^{\frac{1}{2}}\Delta_{k+1}, C^{\frac{1}{2}}\Delta_k\right). \tag{2.40}$$

Оценивая абсолютную величину последнего слагаемого правой части (2.40) по неравенству Коши – Буняковского, приходим к неравенству:

$$\sum_{k=0}^{n-1}\left\|Cu_k\right\|^2 \ge \sum_{k=1}^{n}(\Delta_k, \Delta_k) + \sum_{k=0}^{n-1}(C\Delta_k, C\Delta_k) -$$
$$-2\left\{\sum_{k=0}^{n-1}(C\Delta_k, \Delta_k)\right\}^{\frac{1}{2}}\left\{\sum_{k=1}^{n}(C\Delta_k, \Delta_k)\right\}^{\frac{1}{2}}, \ n \ge 1. \tag{2.41}$$

Покажем, что $(E - C)\Delta_k = w_k - w_{k+1} + Cu_k, \ k \ge 0.$ Имеем $Cu_k = \Delta_{k+1} - C\Delta_k$, $\Delta_k + Cu_k = \Delta_k + \Delta_{k+1} - C\Delta_k$, тогда $\Delta_k + Cu_k = (E - C)\Delta_k + \Delta_{k+1}$, $w_k - x + Cu_k = (E - C)\Delta_k + w_{k+1} - x$, отсюда справедливо, что

$$(E - C)\Delta_k = w_k - w_{k+1} + Cu_k, \ k \ge 0. \tag{2.42}$$

Запишем неравенство (2.41) в виде

$$\sum_{k=0}^{n-1}\|Cu_k\|^2 \ge \sum_{k=1}^{n}(\Delta_k,\Delta_k)+\sum_{k=0}^{n-1}(C\Delta_k,C\Delta_k)-2\left\{\sum_{k=0}^{n-1}(C\Delta_k,\Delta_k)\right\}^{\frac{1}{2}}\left\{\sum_{k=1}^{n}(C\Delta_k,\Delta_k)\right\}^{\frac{1}{2}}=$$

$$=-(\Delta_0,\Delta_0)+\sum_{k=0}^{n}(\Delta_k,\Delta_k)+\sum_{k=0}^{n}(C\Delta_k,C\Delta_k)-(C\Delta_n,C\Delta_n)-2\sum_{k=0}^{n}(C\Delta_k,\Delta_k)+$$

$$+2\sum_{k=0}^{n}(C\Delta_k,\Delta_k)-2\left\{\sum_{k=0}^{n-1}(C\Delta_k,\Delta_k)\right\}^{\frac{1}{2}}\left\{\sum_{k=1}^{n}(C\Delta_k,\Delta_k)\right\}^{\frac{1}{2}}=-(\Delta_0,\Delta_0)+$$

$$+2\sum_{k=0}^{n}(C\Delta_k,\Delta_k)+\sum_{k=0}^{n}((E-C)\Delta_k,(E-C)\Delta_k)-$$

$$-(C\Delta_n,C\Delta_n)-2\left\{\sum_{k=0}^{n-1}(C\Delta_k,\Delta_k)\right\}^{\frac{1}{2}}\left\{\sum_{k=1}^{n}(C\Delta_k,\Delta_k)\right\}^{\frac{1}{2}}=$$

$$=-(\Delta_0,\Delta_0)+\sum_{k=0}^{n}((E-C)\Delta_k,(E-C)\Delta_k)+\gamma_n,$$

где $\gamma_n=2\sum_{k=0}^{n}(C\Delta_k,\Delta_k)-(C\Delta_n,C\Delta_n)-2\left\{\sum_{k=0}^{n-1}(C\Delta_k,\Delta_k)\right\}^{\frac{1}{2}}\left\{\sum_{k=1}^{n}(C\Delta_k,\Delta_k)\right\}^{\frac{1}{2}}$.

Докажем, что $\gamma_n \ge 0$ при любых $\Delta_1,\Delta_2,\ldots,\Delta_n$. Для этого сначала докажем неравенство: $(C\Delta_n,C\Delta_n)\le(C\Delta_n,\Delta_n)$. Ему равносильно неравенство: $\|C\Delta_n\|^2\le\left\|C^{1/2}\Delta_n\right\|^2$. Т. к. $\|C\|=\left\|\left(E-\alpha A^*A\right)^k\right\|=\sup\limits_{\lambda}|1-\alpha\lambda|^k=1$, то имеем $\|C\Delta_n\|\le\left\|C^{1/2}\right\|\left\|C^{1/2}\Delta_n\right\|=\left\|C^{1/2}\Delta_n\right\|$. Поэтому $(C\Delta_n,C\Delta_n)\le(C\Delta_n,\Delta_n)$. Следовательно, $\gamma_n\ge 2\sum_{k=0}^{n}(C\Delta_k,\Delta_k)-(C\Delta_n,\Delta_n)-2\left\{\sum_{k=0}^{n-1}(C\Delta_k,\Delta_k)\right\}^{\frac{1}{2}}\left\{\sum_{k=1}^{n}(C\Delta_k,\Delta_k)\right\}^{\frac{1}{2}}$.

Покажем, что

$$2\sum_{k=0}^{n}(C\Delta_k,\Delta_k)-(C\Delta_n,\Delta_n)-2\left\{\sum_{k=0}^{n-1}(C\Delta_k,\Delta_k)\right\}^{\frac{1}{2}}\left\{\sum_{k=1}^{n}(C\Delta_k,\Delta_k)\right\}^{\frac{1}{2}}\ge 0. \quad (2.43)$$

В самом деле, неравенство (2.43) равносильно неравенству

$$2\sum_{k=0}^{n-1}(C\Delta_k,\Delta_k)+2(C\Delta_n,\Delta_n)-2\left\{\sum_{k=0}^{n-1}(C\Delta_k,\Delta_k)\right\}^{\frac{1}{2}}\times$$

$$\times\left\{\sum_{k=0}^{n-1}(C\Delta_k,\Delta_k)+(C\Delta_n,\Delta_n)-(C\Delta_0,\Delta_0)\right\}^{\frac{1}{2}}-(C\Delta_n,\Delta_n)\geq 0,$$

которое, в свою очередь, равносильно такому $2\sum_{k=0}^{n-1}(C\Delta_k,\Delta_k)+(C\Delta_n,\Delta_n)\geq$ $\geq 2\left\{\sum_{k=0}^{n-1}(C\Delta_k,\Delta_k)\right\}^{\frac{1}{2}}\left\{\sum_{k=0}^{n-1}(C\Delta_k,\Delta_k)+(C\Delta_n,\Delta_n)-(C\Delta_0,\Delta_0)\right\}^{\frac{1}{2}}$. Возведя обе части последнего неравенства в квадрат, получим

$$4\left\{\sum_{k=0}^{n-1}(C\Delta_k,\Delta_k)\right\}^2+4\sum_{k=0}^{n-1}(C\Delta_k,\Delta_k)(C\Delta_n,\Delta_n)+(C\Delta_n,\Delta_n)^2\geq$$
$$\geq 4\sum_{k=0}^{n-1}(C\Delta_k,\Delta_k)\left\{\sum_{k=0}^{n-1}(C\Delta_k,\Delta_k)+(C\Delta_n,\Delta_n)-(C\Delta_0,\Delta_0)\right\}.$$

Пришли к очевидному неравенству

$$4\sum_{k=0}^{n-1}(C\Delta_k,\Delta_k)(C\Delta_0,\Delta_0)+(C\Delta_n,\Delta_n)^2\geq 0,$$

поэтому неравенство (2.43) справедливо ввиду равносильности неравенств. (Здесь возведенное в квадрат неравенство на самом деле содержало лишь положительные члены.) Следовательно, $\gamma_n\geq 0$. Отсюда $\sum_{k=0}^{n-1}\|Cu_k\|^2\geq-(\Delta_0,\Delta_0)+\sum_{k=0}^{n}((E-C)\Delta_k,(E-C)\Delta_k)$. Используя равенство (2.42), получим $\sum_{k=0}^{n-1}\|Cu_k\|^2\geq-(\Delta_0,\Delta_0)+\sum_{k=0}^{n}\|w_k-w_{k+1}+Cu_k\|^2$, откуда выполняется

$$\sum_{k=0}^{n}\|w_k-w_{k+1}+Cu_k\|^2\leq\|w_0-x\|^2+\sum_{k=0}^{n-1}\|Cu_k\|^2.$$

Лемма 2.4 доказана.

Имеет место

Лемма 2.5. *При любом $w_0\in H$ и произвольной последовательности ошибок $\{u_n\}$, удовлетворяющих условию $\|u_n\|\leq\beta$, выполнено неравенство*

$$\varliminf_{n\to\infty}\|w_n-w_{n+1}\|\leq 2\|C\|\beta. \tag{2.44}$$

Доказательство. $\varliminf_{n\to\infty}\|w_n-w_{n+1}\|\leq\varliminf_{n\to\infty}\|w_n-w_{n+1}+Cu_n\|+\|C\|\beta\leq\|C\|\beta+$

$$+\overline{\lim_{n\to\infty}}\left\{\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\left\|w_k-w_{k+1}+Cu_k\right\|^2\right\}^{\frac{1}{2}}\le\overline{\lim_{n\to\infty}}\left\{\frac{1}{n}\|w_0-x\|^2+\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\left\|Cu_k\right\|^2\right\}^{\frac{1}{2}}+\|C\|\beta\le$$

$$\le\overline{\lim_{n\to\infty}}\left\{\frac{1}{n}\|w_0-x\|^2+\frac{1}{n}n\|C\|^2\beta^2\right\}^{\frac{1}{2}}+\|C\|\beta=2\|C\|\beta,\quad \text{т. к.}\quad \overline{\lim_{n\to\infty}}\frac{1}{n}\|w_0-x\|^2=0.$$

Отсюда следует (2.44). *Лемма 2.5 доказана.*

Обе леммы будут использованы при доказательстве следующей теоремы.

Теорема 2.11. *Пусть уровень останова* $\varepsilon=\varepsilon(\delta,\beta)$ *выбирается как функция от уровней* δ *и* β *норм погрешностей* $y-y_\delta$ *и* u_n. *Тогда справедливы следующие утверждения:*

а) если $\varepsilon(\delta,\beta)>2\|C\|\beta$, *то момент останова* m *определен при любом начальном приближении* $z_0\in H$ *и любых* y_δ *и* u_n, *удовлетворяющих условиям* $\|y-y_\delta\|\le\delta,\ \|u_n\|\le\beta$*;*

б) если $\varepsilon(\delta,\beta)>\|B\|\delta+2\|C\|\beta$, *то справедлива оценка*

$$m\le\frac{\|z_0-x\|^2}{\left(\varepsilon-\|B\|\delta-2\|C\|\beta\right)\left(\varepsilon-\|B\|\delta\right)};$$

в) если, кроме того, $\varepsilon(\delta,\beta)\to0,\ \delta,\beta\to0$ *и* $\varepsilon(\delta,\beta)\ge d\left(\|B\|\delta+\|C\|\beta^p\right)$, *где* $d>1,\quad p\in(0,1)$, *то* $\lim\limits_{\delta,\beta\to0}\|z_m-x\|=0.$

Доказательство. а) По индукции покажем, что

$$z_n=C^nz_0+C\sum_{k=0}^{n-1}C^k\left(C^{-1}By_\delta+u_{n-k-1}\right). \tag{2.45}$$

При $n=1$ из $z_n=Cz_{n-1}+By_\delta+Cu_{n-1}$ имеем $z_1=Cz_0+By_\delta+Cu_0$, из (2.45) получим то же самое, т. е. при n = 1 формула (2.45) верна. Предположим, что (2.45) верна при $n=p$, т. е. $z_p=C^pz_0+C\sum\limits_{k=0}^{p-1}C^k\left(C^{-1}By_\delta+u_{p-k-1}\right)$, и докажем ее справедливость при $n = p + 1$. Имеем

$$z_{p+1}=Cz_p+By_\delta+Cu_p=C\left[C^pz_0+C\sum_{k=0}^{p-1}C^k\left(C^{-1}By_\delta+u_{p-k-1}\right)\right]+By_\delta+Cu_p=$$

$$=C^{p+1}z_0+C^2\left(C^{-1}By_\delta+u_{p-1}+CC^{-1}By_\delta+Cu_{p-2}+\ldots+C^{p-1}C^{-1}By_\delta+C^{p-1}u_0\right)+$$

$$+By_\delta+Cu_p=C^{p+1}z_0+C\left(By_\delta+Cu_{p-1}+CBy_\delta+C^2u_{p-2}+\ldots+C^{p-1}By_\delta+\right.$$

$$\left.+C^pu_0+C^{-1}By_\delta+u_p\right)=C^{p+1}z_0+C\sum_{k=0}^{p}C^k\left(C^{-1}By_\delta+u_{p-k}\right).$$

Таким образом, справедливость (2.45) доказана. Отсюда

$$w_n = C^n w_0 + C\sum_{k=0}^{n-1} C^k \left(C^{-1}By + u_{n-k-1}\right) = C^n w_0 + \sum_{k=0}^{n-1} C^k By + C\sum_{k=0}^{n-1} C^k u_{n-k-1} =$$

$$= C^n w_0 + \left(E + C + C^2 + \ldots + C^{n-1}\right)By + C\sum_{k=0}^{n-1} C^k u_{n-k-1} = C^n w_0 + C\sum_{k=0}^{n-1} C^k u_{n-k-1} +$$

$$+\left(E - C^n\right)(E-C)^{-1}\left(A^* A\right)^{-1}(E-C)A^* y = C^n w_0 + A^{-1}\left(E - C^n\right)y + C\sum_{k=0}^{n-1} C^k u_{n-k-1}.$$

Учитывая, что $z_0 = w_0$, получим

$$z_n - z_{n+1} = C^n z_0 + A^{-1}\left(E - C^n\right)y_\delta + C\sum_{k=0}^{n-1} C^k u_{n-k-1} - C^{n+1} z_0 - A^{-1}\left(E - C^{n+1}\right)y_\delta -$$

$$- C\sum_{k=0}^{n} C^k u_{n-k} = C^n w_0 + A^{-1}\left(E - C^n\right)y - A^{-1}\left(E - C^n\right)y + A^{-1}\left(E - C^n\right)y_\delta +$$

$$+ C\sum_{k=0}^{n-1} C^k u_{n-k-1} - C^{n+1} w_0 - A^{-1}\left(E - C^{n+1}\right)y + A^{-1}\left(E - C^{n+1}\right)y - A^{-1}\left(E - C^{n+1}\right)y_\delta -$$

$$- C\sum_{k=0}^{n} C^k u_{n-k} = w_n - w_{n+1} - A^{-1}\left(E - C^n\right)(y - y_\delta) + A^{-1}\left(E - C^{n+1}\right)(y - y_\delta) =$$

$$= w_n - w_{n+1} + A^{-1}\left[(y - y_\delta) - C^{n+1}(y - y_\delta) - (y - y_\delta) + C^n (y - y_\delta)\right] =$$

$$= w_n - w_{n+1} + A^{-1}\left(C^n - C^{n+1}\right)(y - y_\delta) = w_n - w_{n+1} +$$

$$+ A^{-1}(E - C)C^n (y - y_\delta) = w_n - w_{n+1} + BC^n (y - y_\delta).$$

Следовательно,

$$\|z_n - z_{n+1}\| \le \|w_n - w_{n+1}\| + \left\|BC^n (y - y_\delta)\right\|. \tag{2.46}$$

Обозначим $\sigma = B(y - y_\delta)$, тогда при условии $0 < \alpha \le 5/4$, $\lambda \in [0,1]$ получим $\left\|BC^n (y - y_\delta)\right\| = \left\|C^n \sigma\right\| \to 0,\ n \to \infty$. Поэтому (лемма 2.5) $\varliminf_{n\to\infty} \|z_n - z_{n+1}\| = \varliminf_{n\to\infty} \|w_n - w_{n+1}\| \le 2\|C\|\beta$. Следовательно, условием $\varepsilon(\delta,\beta) > 2\|C\|\beta$ момент останова m определен при любом начальном приближении $z_0 \in H$ и любых y_δ, $\|y - y_\delta\| \le \delta$ и u_n, $\|u_n\| \le \beta$.

б) Рассмотрим последовательность (2.38) и определим момент останова m' условием

$$\left.\begin{aligned} &\|w_n - w_{n+1}\| > \varepsilon - \|B\|\delta, \quad (n < m'), \\ &\|w_{m'} - w_{m'+1}\| \le \varepsilon - \|B\|\delta. \end{aligned}\right\} \tag{2.47}$$

Из (2.46) следует, что $m \le m'$. Из леммы 2.4 при $n = m'$ получим $\sum_{k=0}^{m'} \|w_k - w_{k+1} + Cu_k\|^2 \le \|w_0 - x\|^2 + \sum_{k=0}^{m'-1} \|Cu_k\|^2$, поэтому справедливо записать: $\sum\limits_{k=0}^{m'-1} \left\| w_k - w_{k+1} + Cu_k \right\|^2 \le \|w_0 - x\|^2 + \sum\limits_{k=0}^{m'-1} \left\| Cu_k \right\|^2$. Отсюда получим неравенство $\sum\limits_{k=0}^{m'-1} \left(\|w_k - w_{k+1}\| - \|C\|\beta \right)^2 \le \|w_0 - x\|^2 + \sum\limits_{k=0}^{m'-1} \left\| Cu_k \right\|^2$. Т. к. по (2.47) при $n < m'$ имеем $\|w_n - w_{n+1}\| > \varepsilon - \|B\|\delta$, то $m'\left(\varepsilon - \|B\|\delta - \|C\|\beta\right)^2 \le \|w_0 - x\|^2 + m'\|C\|^2\beta^2$.

Учитывая, что $w_0 = z_0$ и $m \le m'$, из последнего неравенства получим

$$m \le m' \le \frac{\|z_0 - x\|^2}{\left(\varepsilon - \|B\|\delta - \|C\|\beta\right)^2 - \|C\|^2\beta^2} = \frac{\|z_0 - x\|^2}{\left(\varepsilon - \|B\|\delta - 2\|C\|\beta\right)\left(\varepsilon - \|B\|\delta\right)}.$$

в) Докажем, что

$$x = C^n x + \sum_{k=0}^{n-1} BC^k y. \tag{2.48}$$

Предположим, что (2.48) верна, тогда имеем

$$x - C^n x = \sum_{k=0}^{n-1} BC^k y, \quad \left(E - C^n\right)x = \sum_{k=0}^{n-1} BC^k y,$$

$$\left(E - C^n\right)x = B\left(E + C + C^2 + \ldots + C^{n-1}\right)y,$$

$$\left(E - C^n\right)x = A^{-1}(E - C)\left(E - C^n\right)(E - C)^{-1} y,$$

$$\left(E - C^n\right)x = \left(E - C^n\right)A^{-1}y, \quad \left(E - C^n\right)x = \left(E - C^n\right)x.$$

Следовательно, предположение верно и формула (2.48) доказана. Из (2.45) вычтем (2.48), получим

$$z_n - x = C^n(z_0 - x) + C\sum_{k=0}^{n-1} C^k\left[C^{-1}B(y_\delta - y) + u_{n-k-1}\right]. \tag{2.49}$$

Отсюда $\Delta_n = C^n\Delta_0 + C\sum\limits_{k=0}^{n-1} C^k\left[C^{-1}B(y_\delta - y) + u_{n-k-1}\right]$, где $\Delta_n = z_n - x$ и $\Delta_0 = z_0 - x$. Следовательно,

$$\|\Delta_n\| \le \left\|C^n\Delta_0\right\| + \left(\|B\|\delta + \|C\|\beta\right)n. \tag{2.50}$$

В частности, (2.50) справедлива и при $n = m$. Если $m \to \infty$ при $\varepsilon, \delta, \beta \to 0$, тогда, как показано ранее, $\left\|C^m\Delta_0\right\| \to 0,\ m \to \infty.$ Поэтому для доказательства $\|z_m - x\| \to 0,\ \delta \to 0,\ \beta \to 0$ достаточно показать, что $m\left(\|B\|\delta + \|C\|\beta\right) \to 0,$ $m \to \infty,\ \delta \to 0,\ \beta \to 0.$ Из (2.49)

$$z_n - z_{n+1} = (z_n - x) - (z_{n+1} - x) = C^n(z_0 - x) + C\sum_{k=0}^{n-1} C^k\left[C^{-1}B(y_\delta - y) + u_{n-k-1}\right] -$$

$$-C^{n+1}(z_0-x)-C\sum_{k=0}^{n}C^k\left[C^{-1}B(y_\delta-y)+u_{n-k}\right]=C^n(E-C)(z_0-x)+$$
$$+\sum_{k=0}^{n-1}C^kB(y_\delta-y)+C\sum_{k=0}^{n-1}C^ku_{n-k-1}-\sum_{k=0}^{n}C^kB(y_\delta-y)-C\sum_{k=0}^{n}C^ku_{n-k}=$$
$$=C^n(E-C)(z_0-x)-C^nB(y_\delta-y)+C\left(u_{n-1}+Cu_{n-2}+C^2u_{n-3}+\ldots+C^{n-1}u_0\right)-$$
$$-C\left(u_n+Cu_{n-1}+C^2u_{n-2}+\ldots+C^nu_0\right)=C^n(E-C)(z_0-x)-Cu_n-$$
$$-C^nB(y_\delta-y)+C\left[\left(u_{n-1}-Cu_{n-1}\right)+\left(Cu_{n-2}-C^2u_{n-2}\right)+\ldots+\left(C^{n-1}u_0-C^nu_0\right)\right].$$

Отсюда получим

$$z_n-z_{n+1}=C^n(E-C)(z_0-x)-C^nB(y_\delta-y)-Cu_n+C\sum_{k=0}^{n-1}C^k(E-C)u_{n-k-1}\,. \quad (2.51)$$

Нетрудно показать, что при $0<\alpha\le 5/4$

$$\left\|C^n(E-C)\right\|\le\frac{1}{n+1}. \quad (2.52)$$

Из (2.51) при $n=m-1$ получим

$$\left\|z_{m-1}-z_m\right\|\le\left\|C^{(m-1)/2}C^{(m-1)/2}(E-C)(z_0-x)\right\|+\left\|C^{m-1}B(y_\delta-y)\right\|+\left\|Cu_{m-1}\right\|+$$
$$+\left\|C\sum_{k=0}^{m-2}C^k(E-C)u_{m-k-2}\right\|\le\left\|C^{(m-1)/2}(E-C)\right\|\left\|C^{(m-1)/2}(z_0-x)\right\|+\|B\|\delta+\|C\|\beta+$$
$$+\|C\|\beta\sum_{k=0}^{m-2}\frac{1}{k+1}\le\frac{2}{m}\left\|C^{(m-1)/2}(z_0-x)\right\|+\|B\|\delta+\|C\|\beta(2+\ln m),$$

т. к. $\sum_{k=1}^{m-1}\frac{1}{k}\le 1+\ln m$ [28, с. 16]. Поскольку по условию теоремы $\varepsilon(\delta,\beta)\ge d\left(\|B\|\delta+\|C\|\beta^p\right)$, $d>1$, $p\in(0,1)$, то при всех достаточно малых δ,β выполняется неравенство $\varepsilon(\delta,\beta)>\|B\|\delta+2\|C\|\beta$, поэтому из б) получим $m\le\|z_0-x\|^2\left[\left(\varepsilon-\|B\|\delta-2\|C\|\beta\right)\left(\varepsilon-\|B\|\delta\right)\right]^{-1}$. Т. к. $\|z_{m-1}-z_m\|>\varepsilon$, то имеем $\varepsilon\le\frac{2}{m}\left\|C^{(m-1)/2}(z_0-x)\right\|+\|B\|\delta+\|C\|(2+\ln m)\beta$. Отсюда получим, что

$$m\le\frac{2\left\|C^{(m-1)/2}(z_0-x)\right\|}{\varepsilon-\|B\|\delta-\|C\|\beta\left\{2+\ln\left(\|z_0-x\|^2\left[\left(\varepsilon-\|B\|\delta-2\|C\|\beta\right)\left(\varepsilon-\|B\|\delta\right)\right]^{-1}\right)\right\}}.$$

Умножив обе части последнего неравенства на $\|B\|\delta+\|C\|\beta$, получим

$$m\left(\|B\|\delta+\|C\|\beta\right)\le\frac{2\left\|C^{(m-1)/2}(z_0-x)\right\|\left(\|B\|\delta+\|C\|\beta\right)}{\varepsilon-\|B\|\delta-\|C\|\beta\left\{2+\ln\left(\|z_0-x\|^2\left[\left(\varepsilon-\|B\|\delta-2\|C\|\beta\right)\left(\varepsilon-\|B\|\delta\right)\right]^{-1}\right)\right\}}.$$

При $m\to\infty$ множитель $\left\|C^{(m-1)/2}(z_0-x)\right\|\to 0$, и при $\delta,\beta\to 0$ дробь

$$\frac{2\left(\|B\|\delta+\|C\|\beta\right)}{\varepsilon-\|B\|\delta-\|C\|\beta\left[2+\ln\dfrac{\|z_0-x\|^2}{\left(\varepsilon-\|B\|\delta-2\|C\|\beta\right)\left(\varepsilon-\|B\|\delta\right)}\right]}$$

ограничена. Поэтому при $m\to\infty,\ \delta,\beta\to 0\quad m\left(\|B\|\delta+\|C\|\beta\right)\to 0$. Отсюда и из неравенства (2.50) при $m\to\infty$ выполняется

$$\lim_{\substack{\delta\to 0\\ \beta\to 0}}\|\Delta_m\|=\lim_{\substack{\delta\to 0\\ \beta\to 0}}\|z_m-x\|\le\lim_{\substack{\delta\to 0\\ \beta\to 0}}\left(\left\|C^m\Delta_0\right\|+m\left(\|B\|\delta+\|C\|\beta\right)\right)=0\,.$$

Теорема 2.11 доказана.

2.2. Оценка погрешностей в двухшаговой итерационной процедуре решения операторных уравнений первого рода

2.2.1. Сходимость метода в случае априорного выбора числа итераций

2.2.1.1. Сходимость при точной правой части уравнения

Решается задача из раздела 2.1. Предлагается новый явный двухшаговый итерационный метод

$$x_n = 2(E-\alpha A)x_{n-1} - (E-\alpha A)^2 x_{n-2} + \alpha^2 Ay, \quad x_0 = x_1 = 0. \qquad (2.53)$$

Пусть правая часть уравнения известна с некоторой точностью δ, т. е. известен y_δ, для которого $\|y-y_\delta\| \le \delta$. Поэтому вместо схемы (2.53) приходится рассматривать приближения

$$x_{n,\delta} = 2(E-\alpha A)x_{n-1,\delta} - (E-\alpha A)^2 x_{n-2,\delta} + \alpha^2 Ay_\delta, \; x_{0,\delta} = x_{1,\delta} = 0. \qquad (2.54)$$

Ниже, как обычно, под сходимостью метода (2.54) понимается утверждение о том, что приближения (2.54) сколь угодно близко подходят к точному решению уравнения при подходящем выборе n и достаточно малых δ. Иными словами, метод (2.54) является сходящимся, если

$$\lim_{\delta\to 0}\left(\inf_n \|x - x_{n,\delta}\|\right) = 0 .$$

Воспользовавшись интегральным представлением ограниченного положительного самосопряженного оператора A и формулой (2.53), по индукции при $M = \|A\|$ получим

$$x - x_n = \int_0^M \left[\lambda^{-1}(1-\alpha\lambda)^n + n\alpha(1-\alpha\lambda)^{n-1}\right] dE_\lambda y,$$

где E_λ – спектральная функция оператора A. Т. к. при $0 < \alpha < 2/M$ имеем $|1-\alpha\lambda| < 1$, то отсюда легко выводится сходимость итерационного процесса (2.53) при $n \to \infty$.

2.2.1.2. Сходимость при приближенной правой части уравнения

Итерационный процесс (2.54) является сходящимся, если нужным образом выбирать число итераций n в зависимости от уровня погрешности δ. Справедлива

Теорема 2.16. *Итерационный процесс* (2.54) *сходится при* $0 < \alpha \le \dfrac{5}{4M}$, *если выбирать число итераций* n *в зависимости от* δ *так, чтобы* $n\delta \to 0$, *при* $n \to \infty, \delta \to 0$.

Доказательство теоремы аналогично доказательству подобной теоремы из раздела 2.1. При этом легко показывается оценка $\left\|x_n - x_{n,\delta}\right\| \le \frac{5}{4}(n-1)\alpha\delta.$

2.2.1.3. Оценка погрешности двухшаговой итерационной процедуры

Скорость сходимости приближений (2.54) будем оценивать при дополнительном предположении о возможности истокообразного представления точного решения x уравнения (2.1), т. е. $x = A^s z,\ s > 0.$ Тогда $y = A^{s+1} z$, и, следовательно, получим

$$x - x_n = \int_0^M \lambda^s (1-\alpha\lambda)^{n-1} dE_\lambda z + \int_0^M \lambda^{s+1}(1-\alpha\lambda)^{n-1}(n-1)\alpha\, dE_\lambda z.$$

Для оценки $\left\|x - x_n\right\|$ найдем максимумы модулей подынтегральных функций $f_1(\lambda) = \lambda^s (1-\alpha\lambda)^{n-1}$ и $f_2(\lambda) = \lambda^{s+1}(1-\alpha\lambda)^{n-1}(n-1)\alpha$. В подразделе 2.1.1 показано, что $\left|f(\lambda)\right| = \left|\lambda^s (1-\alpha\lambda)^{kn}\right| \le s^s (kn\alpha e)^{-s}$ при условии $0 < \alpha \le \frac{5}{4M}$. Поэтому

$$\left|f_1(\lambda)\right| \le s^s \left[(n-1)\alpha e\right]^{-s}, \quad \left|f_2(\lambda)\right| \le (s+1)^{s+1}\left[(n-1)\alpha\right]^{-s} e^{-(s+1)}.$$

Отсюда $\left\|x - x_n\right\| \le s^s (s+2)\left[(n-1)\alpha e\right]^{-s}\left\|z\right\|$. Таким образом, общая оценка погрешности итерационной процедуры (2.54) запишется в виде

$$\left\|x - x_{n,\delta}\right\| \le \left\|x - x_n\right\| + \left\|x_n - x_{n,\delta}\right\| \le s^s (s+2)\left[(n-1)\alpha e\right]^{-s}\left\|z\right\| + \frac{5}{4}(n-1)\alpha\delta.$$

Для минимизации оценки погрешности вычислим правую часть в точке, в которой производная от нее равна нулю; в результате получим оценку $\left\|x - x_{n,\delta}\right\|_{\text{опт}} \le \left(\frac{5}{4}\right)^{s/(s+1)} (s+1)(s+2)^{1/(s+1)} e^{-s/(s+1)} \delta^{s/(s+1)} \left\|z\right\|^{1/(s+1)}$ и априорный момент останова $n_{\text{опт}} = 1 + \left(\frac{5}{4}\delta\right)^{-1/(s+1)} e^{-s/(s+1)} s(s+2)^{1/(s+1)} \alpha^{-1}\left\|z\right\|^{1/(s+1)}$.

Существенно, что порядок оптимальной оценки есть $O\left(\delta^{s/(s+1)}\right)$ и, как следует из работы [21], он оптимален в классе задач с истокопредставимыми решениями. Очевидно, что оптимальная оценка погрешности не зависит от параметра α, но от него зависит $n_{\text{опт}}$. Поэтому для уменьшения $n_{\text{опт}}$ и, значит, числа итераций для получения приближенного решения, следует брать α по возможности большим, удовлетворяющим условию $0<\alpha\le\frac{5}{4M}$, и так, чтобы $n_{\text{опт}}$ было целым.

Сравнение метода (2.54) с хорошо известным методом итераций Ландвебера показывает, что порядки их оптимальных оценок совпадают.

Приведем погрешность схемы (2.54) при счете с округлениями. Пусть $x_{n,\delta}$ – значение, полученное по формуле (2.54), а z_n – значение, полученное по той же формуле с учетом погрешностей вычисления γ_n, т. е. $z_n=2(E-\alpha A)z_{n-1}-(E-\alpha A)^2 z_{n-2}+\alpha^2 Ay_\delta+\alpha\gamma_n$, $z_0=z_1=0.$ Оценка погрешности итерационного метода (2.54) в этом случае имеет вид $\|x-z_n\|\le s^s(s+2)[(n-1)\alpha e]^{-s}\|z\|+\frac{5}{4}(n-1)\alpha\delta+\frac{(n-1)n}{2}\alpha\gamma$, где $\gamma=\sup\limits_i|\gamma_i|$.

2.2.2. Сходимость метода в энергетической норме

Изучим сходимость метода (2.54) в энергетической норме гильбертова пространства $\|x\|_A=\sqrt{(Ax,x)}$, где $x\in H$, в случае единственного решения уравнения (2.1). При этом, как обычно, число итераций n нужно выбирать в зависимости от уровня погрешности δ. Полагаем $x_{0,\delta}=0$ и рассмотрим разность $x-x_{n,\delta}=(x-x_n)+(x_n-x_{n,\delta})$. С помощью интегрального представления самосопряженного оператора A получим

$$\|x-x_n\|_A^2=\int_0^M\lambda(1-\alpha\lambda)^{2n-2}[1+(n-1)\alpha\lambda]^2\,d(E_\lambda x,x)\ ,$$

$$\|x_n-x_{n,\delta}\|_A^2=\int_0^M\lambda^{-1}\left[1-(1-\alpha\lambda)^n-n\alpha\lambda(1-\alpha\lambda)^{n-1}\right]^2 d\left(E_\lambda(y-y_\delta),y-y_\delta\right)\ ,$$

где $M=\|A\|$. Оценив подынтегральные функции, получим при условии $0<\alpha\le\frac{5}{4M}$ оценку погрешности для итерационного метода (2.54) в энергетической норме

$$\|x-x_{n,\delta}\|_A\le(e+1)^{1/2}(e+4)^{1/2}e^{-3/2}[(n-1)\alpha]^{-1/2}\|x\|+3^{1/2}(n-1)^{1/2}\alpha^{1/2}\delta,\ n\ge1.$$

Следовательно, если в процессе (2.54) выбирать число итераций $n=n(\delta)$, зависящим от δ так, чтобы $\sqrt{n-1}\,\delta\to0,\ n\to\infty,\ \delta\to0$, то получим метод, обеспечивающий сходимость к точному решению в энергетической норме. Итак, справедлива

Теорема 2.17. *При условии* $0<\alpha\le\dfrac{5}{4M}$ *метод* (2.54) *сходится в энергетической норме гильбертова пространства, если число итераций* n *выбирать из условия* $\sqrt{n-1}\,\delta\to 0,\ n\to\infty,\ \delta\to 0$. *Для метода* (2.54) *справедлива оценка погрешности*

$$\left\|x-x_{n,\delta}\right\|_A\le(e+1)^{1/2}(e+4)^{1/2}e^{-3/2}\left[(n-1)\alpha\right]^{-1/2}\|x\|+3^{1/2}(n-1)^{1/2}\alpha^{1/2}\delta,\ n\ge 1.$$

Для минимизации оценки погрешности метода (2.54) вычислим ее правую часть в точке, в которой производная от нее равна нулю; в результате получим

$$\left\|x-x_{n,\delta}\right\|_A^{\text{опт}}\le 2\cdot 3^{1/4}(e+1)^{1/4}(e+4)^{1/4}e^{-3/4}\delta^{1/2}\,\|x\|^{1/2},$$

$$n_{\text{опт}}=1+3^{-1/2}(\alpha\delta)^{-1}(e+1)^{1/2}(e+4)^{1/2}e^{-3/2}\|x\|.$$

Отметим тот факт, что для сходимости метода (2.54) в энергетической норме достаточно выбирать число итераций $n=n(\delta)$ так, чтобы $\sqrt{n-1}\,\delta\to 0,\ n\to\infty,\ \delta\to 0$. Однако $n_{\text{опт}}=O\left(\delta^{-1}\right)$, т. е. $n_{\text{опт}}$ относительно δ имеет порядок δ^{-1}, и такой порядок обеспечивает сходимость метода итераций (2.54).

Ответ на вопрос: когда из сходимости в энергетической норме следует сходимость в обычной норме гильбертова пространства H, дает

Теорема 2.18. *Если выполнены условия*: 1) $E_\varepsilon x_{n,\delta}=0$, 2) $E_\varepsilon x=0$, *где* $E_\varepsilon=\int\limits_0^\varepsilon dE_\lambda$, ε *– фиксированное положительное число* $\left(0<\varepsilon<\|A\|\right)$, *то из сходимости* $x_{n,\delta}$ *к* x *в энергетической норме следует сходимость в обычной норме гильбертова пространства.*

Замечание 2.5. *Т. к.* $x_{n,\delta}=A^{-1}\left[E-(E-\alpha A)^n-n\alpha A(E-\alpha A)^{n-1}\right]y_\delta$, *то для того, чтобы* $x_{n,\delta}$ *удовлетворяло условию* $E_\varepsilon x_{n,\delta}=0$, *достаточно потребовать, чтобы* $E_\varepsilon y_\delta=0$. *Таким образом, если решение* x *и приближенная правая часть* y_δ *таковы, что* $E_\varepsilon x=0$ *и* $E_\varepsilon y_\delta=0$, *то из сходимости* $x_{n,\delta}$ *к* x *в энергетической норме вытекает сходимость в исходной норме гильбертова пространства, и, следовательно, для сходимости приближений* (2.54) *в норме пространства* H *не требуется предположения истокопредставимости точного решения.*

Таким образом, использование энергетической нормы позволило получить априорную оценку погрешности и априорный момент останова

$n_{\text{опт}}$ для метода (2.54) без дополнительного требования истокообразной представимости точного решения.

Приведем погрешность схемы (2.54) при счете с округлениями. Пусть $x_{n,\delta}$ – точное значение, полученное по формуле (4), а z_n – значение, полученное по той же формуле с учетом погрешностей вычисления β_n, т. е. $z_n = 2(E-\alpha A)z_{n-1} - (E-\alpha A)^2 z_{n-2} + \alpha^2 Ay_\delta + \alpha\beta_n$, $z_0 = z_1 = 0.$ Если обозначим $\varepsilon_n = z_n - x_{n,\delta}$, то вычитая из последнего равенства (2.54), получим $\varepsilon_n = 2(E-\alpha A)\varepsilon_{n-1} - (E-\alpha A)^2\varepsilon_{n-2} + \alpha\beta_n$, $\varepsilon_0 = \varepsilon_1 = 0$, $\beta_0 = \beta_1 = 0.$ Нетрудно доказать, что

$$\varepsilon_n = \sum_{i=2}^{n} (n-i+1)(E-\alpha A)^{n-i}\alpha\beta_i.$$

Получим оценку погрешности метода (2.54) при счете с округлениями в энергетической норме гильбертова пространства. Имеем

$$\|\varepsilon_n\|_A^2 = (A\varepsilon_n, \varepsilon_n) = \left(A\sum_{i=2}^{n}(n-i+1)(E-\alpha A)^{n-i}\alpha\beta_i, \sum_{i=2}^{n}(n-i+1)(E-\alpha A)^{n-i}\alpha\beta_i \right) =$$

$$= \left(A\left[\sum_{i=2}^{n}(n-i+1)(E-\alpha A)^{n-i}\right]^2 \alpha^2\beta_i, \beta_i \right) =$$

$$= \alpha\int_0^M \alpha\lambda\left[\sum_{i=2}^{n}(n-i+1)(1-\alpha\lambda)^{n-i}\right]^2 d\left(E_\lambda\beta_i, \beta_i\right).$$

Т. к. $\alpha\lambda \in (0, 5/4]$, то $\|\varepsilon_n\|_A^2 \le \alpha\beta^2 \dfrac{5}{4}\left(\dfrac{(n-1)n}{2}\right)^2$, где $\beta = \sup\limits_i |\beta_i|$. Отсюда, имеем $\|\varepsilon_n\|_A = \|z_n - x_{n,\delta}\|_A \le \dfrac{(n-1)n}{4}(5\alpha)^{1/2}\beta$.

Таким образом, с учетом вычислительных погрешностей получим оценку погрешности трехслойной итерационной процедуры (2.54) в энергетической норме гильбертова пространства

$$\|x - z_n\|_A \le \|x - x_{n,\delta}\|_A + \|x_{n,\delta} - z_n\|_A \le$$

$$\le (e+1)^{1/2}(e+4)^{1/2}e^{-3/2}\left[(n-1)\alpha\right]^{-1/2}\|x\| +$$

$$+ 3^{1/2}(n-1)^{1/2}\alpha^{1/2}\delta + \frac{(n-1)n}{4}(5\alpha)^{1/2}\beta, \quad n \ge 1.$$

2.2.3. Правило останова по невязке

Априорный выбор числа итераций n в исходной норме гильбертова пространства (подраздел 2.2.1) получен в предположении, что имеется дополнительная информация на гладкость точного решения x уравнения (2.1) – его истокообразная представимость. Однако обычно сведения об истокообразности искомого решения неизвестны, и тем самым приведенные в подразделе 2.2.1 оценки погрешности оказываются неприменимыми. Тем не менее, метод (2.54) можно сделать вполне эффективным, если воспользоваться следующим правилом останова по невязке, аналогичным [20– 21; 37; 90]. Зададим $\varepsilon > 0$ и определим момент m останова итерационного процесса (2.54) условием (2.20).

Предполагаем, что при начальных приближениях $x_{0,\delta}$ и $x_{1,\delta}$ невязка достаточно велика, больше уровня останова ε. Покажем возможность применения правила (2.20) к методу (2.54). Рассмотрим семейство функций $g_n(\lambda) = \lambda^{-1}\left[1-(1-\alpha\lambda)^n - n\alpha\lambda(1-\alpha\lambda)^{n-1}\right]$. Нетрудно показать, что для $g_n(\lambda)$ выполняются условия

$$\sup_{0\le\lambda\le M} |g_n(\lambda)| \le \frac{5}{4}(n-1)\alpha, \quad n \ge 1,\ M = \|A\|,\ 0 < \alpha \le \frac{5}{4M}, \tag{2.55}$$

$$\sup_{0\le\lambda\le M} |1-\lambda g_n(\lambda)| \le 2,\ 0 < \alpha \le \frac{5}{4M}, \tag{2.56}$$

$$1-\lambda g_n(\lambda) \to 0,\ n \to \infty,\ \forall\lambda \in (0, M],\ 0 < \alpha < 2/M, \tag{2.57}$$

$$\sup_{0\le\lambda\le M} \lambda^s |1-\lambda g_n(\lambda)| \le (s+2)\left(\frac{s}{\alpha e}\right)^s (n-1)^{-s},\ n \ge 1,\ 0 \le s < \infty,\ 0 < \alpha \le \frac{5}{4M}. \tag{2.58}$$

Аналогично подобным леммам из подраздела 2.1.4 доказываются следующие леммы.

Лемма 2.6. *Пусть* $A = A^* \ge 0$, $\|A\| \le M$. *Тогда для любого* $w \in H$ $(E - Ag_n(A))w \to 0$, $n \to \infty$.

Лемма 2.7. *Пусть* $A = A^* \ge 0$, $\|A\| \le M$. *Тогда для любого* $v \in \overline{R(A)}$ *имеет место соотношение* $(n-1)^s \left\|A^s\left(E - Ag_n(A)\right)v\right\| \to 0$ *при* $n \to \infty$, $0 \le s < \infty$.

Лемма 2.8. *Пусть* $A = A^* \ge 0$, $\|A\| \le M$. *Если для некоторых* $n_k < \bar{n} = const$ *и* $v_0 \in \overline{R(A)}$ *при* $k \to \infty$ *имеем* $w_k = A\left(E - Ag_{n_k}(A)\right)v_0 \to 0$, *то* $v_k = \left(E - Ag_{n_k}(A)\right)v_0 \to 0$.

Леммы 2.6–2.8 использовались при доказательстве следующих теорем.

Теорема 2.19. *Пусть* $A = A^* \ge 0,\ \|A\| \le M$ *и пусть момент останова* $m = m(\delta)$ *в методе* (2.54) *выбирается по правилу* (2.20). *Тогда* $x_{m,\delta} \to x$ *при* $\delta \to 0$.

Теорема 2.20. *Пусть выполнены условия теоремы* 2.19 *и пусть* $x = A^s z,\ s > 0$. *Тогда справедливы оценки* $m(\delta) \le 2 + \frac{s+1}{\alpha e}\left[\frac{(s+3)\|z\|}{(b-2)\delta}\right]^{1/(s+1)}$,

$$\|x_{m(\delta),\delta} - x\| \le 2^{1/(s+1)}[(b+2)\delta]^{s/(s+1)}\|z\|^{1/(s+1)} +$$

$$\frac{5}{4}\alpha\left\{1 + \frac{s+1}{\alpha e}\left[\frac{(s+3)\|z\|}{(b-2)\delta}\right]^{1/(s+1)}\right\}\delta. \tag{2.59}$$

Доказательство теорем 2.19–2.20 аналогично доказательству подобных теорем из подраздела 2.1.4.

Замечание 2.6. *Порядок оценки* (2.59) *есть* $O\left(\delta^{s/(s+1)}\right)$ *и он оптимален в классе задач с истокопредставимыми решениями* $x = A^s z,\ s > 0$ [21].

Замечание 2.7. *Хотя формулировка теоремы* 2.20 *дается с указаниями степени истокопредставимости* s *и истокопредставляющего элемента* z, *на практике их значение не потребуется, т. к. они не содержатся в правиле останова* (2.20). *Тем не менее в теореме* 2.20 *утверждается, что будет автоматически выбрано количество итераций* m, *обеспечивающее оптимальный порядок погрешности. Но даже если истокопредставимость точного решения отсутствует, останов по невязке* (2.20), *как показывает теорема* 2.19, *обеспечивает сходимость метода, т. е. его регуляризующие свойства.*

2.3. Итерационный метод явного типа решения операторных уравнений в гильбертовом пространстве

2.3.1. Сходимость метода в случае априорного выбора числа итераций

2.3.1.1. Сходимость при точной правой части

Решается задача из раздела 2.1. Предлагается явная итерационная схема

$$x_{n+1} = \left(E - \alpha A^k\right)x_n + \alpha A^{k-1}y,\ x_0 = 0,\ k \in N. \tag{2.60}$$

В случае приближенной правой части уравнения (2.1) метод (2.60) примет вид

$$x_{n+1,\delta} = \left(E - \alpha A^k\right)x_{n,\delta} + \alpha A^{k-1}y_\delta,\ x_{0,\delta} = 0,\ k \in N. \tag{2.61}$$

Этот метод для решения некорректных задач впервые предложен в работе [87], а частные случаи этого метода изучались в работе [159] при ограниченном операторе A^{-1}, т. е. для корректной задачи. Как нетрудно увидеть, метод (2.61) обобщает явный метод простой итерации Ландвебера [158]. Последний получается из (2.61) при $k = 1$.

Воспользовавшись интегральным представлением положительно определенного самосопряженного оператора *A* и формулой (2.60), по индукции получим $x - x_n = \int_0^M \lambda^{-1}(1-\alpha\lambda^k)^n\,dE_\lambda y$, где $M = \|A\|$, E_λ – спектральная функция оператора *A*. Отсюда легко выводится сходимость процесса (2.60) при $n \to \infty$ для $0 < \alpha < 2/M^k$.

2.3.1.2. Сходимость при приближенной правой части

Итерационный процесс (2.61) является сходящимся, если нужным образом выбирать число итераций *n* в зависимости от уровня погрешности δ. Справедлива

Теорема 2.21. *Итерационный процесс* (2.61) *сходится при* $0<\alpha<2/M^k$, *если выбирать число итераций* n *в зависимости от* δ *так, чтобы* $n^{1/k}\delta \to 0$ *при* $n \to \infty, \delta \to 0$.

Доказательство теоремы 2.21 аналогично доказательству подобной теоремы из раздела 2.1. При этом, при условии $0 < \alpha \le 5/\left(4M^k\right)$ легко показываются оценки:

$$\left\|x_n - x_{n,\delta}\right\| \le \left(\frac{5}{4}\right)^{(k-1)/k} kn^{1/k}\alpha^{1/k}\delta,\ n \ge 1,$$

$$\left\|x_n - x_{n,\delta}\right\| \le kn^{1/k}\alpha^{1/k}\delta,\ n \ge 2.$$

2.3.1.3. Оценка погрешности

Скорость сходимости метода (2.61) будем оценивать при дополнительном предположении о возможности истокообразного представления точного решения x уравнения (2.1), т. е. $x = A^s z,\ s > 0$. Тогда $y = A^{s+1} z$ и, следовательно, получим $x - x_n = \int_0^M \lambda^s \left(1 - \alpha\lambda^k\right)^n dE_\lambda z$. Для оценки $\|x - x_n\|$ найдем максимум модуля подынтегральной функции $f(\lambda) = \lambda^s (1 - \alpha\lambda^k)^n$. Нетрудно показать, что при условии $0 < \alpha \le 5/\left(4M^k\right)$ справедливо неравенство $\|x - x_n\| \le s^{s/k} (kn\alpha e)^{-s/k} \|z\|,\ n \ge 1$. Таким образом, общая оценка погрешности метода итераций (2.61) запишется в виде

$$\|x - x_{n,\delta}\| \le s^{s/k} (kn\alpha e)^{-s/k} \|z\| + \left(\frac{5}{4}\right)^{(k-1)/k} k(n\alpha)^{1/k} \delta,\ n \ge 1, \tag{2.62}$$

$$\|x - x_{n,\delta}\| \le s^{s/k} (kn\alpha e)^{-s/k} \|z\| + k(n\alpha)^{1/k} \delta,\ n \ge 2. \tag{2.63}$$

Для минимизации оценки погрешности (2.63) вычислим ее правую часть в точке, в которой производная от нее равна нулю; в результате получим априорный момент останова

$$n_{\text{опт}} = s^{(s+k)/(s+1)} k^{-(s+k)/(s+1)} \alpha^{-1} e^{-s/(s+1)} \|z\|^{k/(s+1)} \delta^{-k/(s+1)}$$

и оптимальную оценку погрешности явного метода итераций (2.61)

$$\|x - x_{n,\delta}\|_{\text{опт}} \le (1+s)(s/k)^{s(1-k)/(k(s+1))} e^{-s/(k(s+1))} \|z\|^{1/(s+1)} \delta^{s/(s+1)},\ n \ge 2.$$

Приведем погрешность метода (2.61) при счете с округлениями. Пусть $x_{n,\delta}$ – точное значение, полученное по формуле (2.61), а z_n – значение, полученное по той же формуле с учетом погрешностей вычисления γ_n, т. е. $z_{n+1} = \left(E - \alpha A^k\right) z_n + \alpha A^{k-1} y_\delta + \alpha\gamma_n$, $z_0 = 0$. Оценка погрешности метода (2.61) в этом случае имеет вид

$$\|x - z_n\| \le \|x - x_{n,\delta}\| + \|x_{n,\delta} - z_n\| \le \left(\frac{s}{kn\alpha e}\right)^{s/k} \|z\| + k(n\alpha)^{1/k} \delta + \alpha(n-1)\gamma,\ n \ge 2,$$

где $\gamma = \sup_i |\gamma_i|$.

Очевидно, что оптимальная оценка погрешности не зависит от параметра α, но от него зависит $n_{\text{опт}}$. Поэтому для уменьшения $n_{\text{опт}}$ и, значит, числа итераций для получения приближенного решения, следует брать α по возможности большим, удовлетворяющим условию $0 < \alpha \le 5/\left(4M^k\right)$, и так, чтобы $n_{\text{опт}}$ было целым.

Оценку $\|x - x_{n,\delta}\|_{\text{опт}}$ можно оптимизировать по k. Для этого производную по k от $\varphi(k) = (s/k)^{\frac{s(1-k)}{k(s+1)}} e^{\frac{-s}{k(s+1)}}$ приравняем к нулю. Получим $(s/k)^{\frac{s(1-k)}{k(s+1)}} e^{\frac{-s}{k(s+1)}} \dfrac{s}{k^2(s+1)} \left(k - \ln\dfrac{s}{k}\right) = 0$. Отсюда видно, что оптимальное k должно удовлетворять равенству $k = \ln\dfrac{s}{k}$. Но k должно быть целым числом, поэтому, как показывают расчеты, для $s \le 5$ $k_{\text{опт}} = 1$, для $6 \le s \le 27$ $k_{\text{опт}} = 2$. Следовательно, при $6 \le s \le 27$ предпочтительно использовать метод (2.61) при $k = 2$, а при $s \le 5$ метод простой итерации Ландвебера.

2.3.2. Сходимость метода в случае неединственного решения

Пусть теперь 0 – собственное значение оператора A (т. е. уравнение (2.1) имеет неединственное решение). Положим $N(A) = \{x \in H \,|\, Ax = 0\}$, и пусть $M(A)$ – ортогональное дополнение ядра $N(A)$ до H. Пусть далее $P(A)x$ – проекция $x \in H$ на $N(A)$, а $\Pi(A)x$ – проекция $x \in H$ на $M(A)$. Справедлива

Теорема 2.22. *Пусть* $A \ge 0, y \in H, 0 < \alpha < 2/M^k$. *Тогда для итерационного процесса* (2.60) *верны следующие утверждения*:

а) $Ax_n \to \Pi(A)y$, $\|Ax_n - y\| \to I(A, y) = \inf\limits_{x \in H} \|Ax - y\|$;

б) *метод* (2.60) *сходится тогда и только тогда, когда уравнение* $Ax = \Pi(A)y$ *разрешимо. В последнем случае* $x_n \to P(A)x_0 + x^*$, *где* x^* – *минимальное решение уравнения.*

Доказательство теоремы аналогично доказательству подобной теоремы из раздела 2.1. Т. к. $x_0 = 0$, то $x_n \to x^*$, т. е. процесс (2.60) сходится к нормальному решению, т. е. к решению с минимальной нормой.

2.3.3. Сходимость метода в энергетической норме

Здесь и ниже предполагается, что решение уравнения (2.1) единственно. Изучим сходимость метода (2.61) в энергетической норме гильбертова пространства $\|x\|_A = \sqrt{(Ax, x)}$, где $x \in H$. При этом, как обычно, число итераций n нужно выбирать в зависимости от уровня погрешности δ. Полагаем $x_{0,\delta} = 0$ и рассмотрим разность $x - x_{n,\delta} = (x - x_n) + (x_n - x_{n,\delta})$. С помощью интегрального представления самосопряженного оператора A получим

$$\|x-x_n\|_A^2 = \int_0^M \lambda\left(1-\alpha\lambda^k\right)^{2n} d\left(E_\lambda x, x\right),$$

$$\|x_n - x_{n,\delta}\|_A^2 = \int_0^M \lambda^{-1}\left[1-\left(1-\alpha\lambda^k\right)^n\right]^2 d\left(E_\lambda (y-y_\delta), y-y_\delta\right),$$

где $M=\|A\|$. Оценив подынтегральные функции, получим при условии $0<\alpha\le 5/\left(4M^k\right)$ оценки погрешности для итерационного метода (2.69) в энергетической норме:

$$\|x-x_{n,\delta}\|_A \le (2kn\alpha e)^{-1/(2k)}\|x\| + \left(\frac{5}{4}\right)^{(2k-1)/(2k)} k(n\alpha)^{1/(2k)}\delta,\ n\ge 1,$$

$$\|x-x_{n,\delta}\|_A \le (2kn\alpha e)^{-1/(2k)}\|x\| + k(n\alpha)^{1/(2k)}\delta,\ n\ge 2.$$

Следовательно, если в процессе (2.61) выбирать число итераций $n=n(\delta)$, зависящим от δ так, чтобы $n^{1/(2k)}\delta\to 0,\ n\to\infty,\ \delta\to 0$, то получим метод, обеспечивающий сходимость к точному решению в энергетической норме. Итак, справедлива

Теорема 2.23. *При условии* $0<\alpha\le 5/\left(4M^k\right)$ *итерационный метод* (2.61) *сходится в энергетической норме гильбертова пространства, если число итераций n выбирать из условия* $n^{1/(2k)}\delta\to 0,\ n\to\infty,\ \delta\to 0$. *Для метода* (2.61) *справедливы оценки погрешности*

$$\|x-x_{n,\delta}\|_A \le (2kn\alpha e)^{-1/(2k)}\|x\| + \left(\frac{5}{4}\right)^{(2k-1)/(2k)} k(n\alpha)^{1/(2k)}\delta,\ n\ge 1, \quad (2.64)$$

$$\|x-x_{n,\delta}\|_A \le (2kn\alpha e)^{-1/(2k)}\|x\| + k(n\alpha)^{1/(2k)}\delta,\ n\ge 2. \quad (2.65)$$

Для минимизации оценки погрешности (2.65) вычислим ее правую часть в точке, в которой производная от нее равна нулю; в результате получим $\|x-x_{n,\delta}\|_A^{\text{опт}} \le 2\cdot 2^{-1/(4k)} k^{(2k-1)/(4k)} e^{-1/(4k)} \delta^{1/2}\|x\|^{1/2}$ и $n_{\text{опт}} = k^{-(2k+1)/2}(\alpha\delta^k)^{-1}(2e)^{-1/2}\|x\|^k$.

Отметим тот факт, что для сходимости метода (2.61) в энергетической норме достаточно выбирать число итераций $n=n(\delta)$ так, чтобы $n^{1/(2k)}\delta\to 0,\ n\to\infty,\ \delta\to 0$. Однако $n_{\text{опт}} = O\left(\delta^{-k}\right)$, т. е. $n_{\text{опт}}$ относительно δ имеет порядок δ^{-k}, и такой порядок обеспечивает сходимость метода итераций (2.61).

Таким образом, использование энергетической нормы позволило получить априорную оценку погрешности для метода (2.61) и априорный момент останова $n_{\text{опт}}$ без дополнительного требования истокообразной представимости точного решения, что делает метод (2.61) эффективным и тогда, когда нет сведений об истокопредставимости точного решения x уравнения (2.1).

Исследован вопрос о том, когда из сходимости метода (2.61) в энергетической норме следует его сходимость в обычной норме гильбертова пространства H. Эти условия дает

Теорема 2.24. *Если выполнены условия* 1) $E_\varepsilon x_{n,\delta}=0,$ 2) $E_\varepsilon x=0,$ *где* $E_\varepsilon=\int\limits_0^\varepsilon dE_\lambda,$ $\varepsilon-$ *фиксированное положительное число* $(0<\varepsilon<\|A\|),$ *то из сходимости* $x_{n,\delta}$ *к* x *в энергетической норме следует сходимость в обычной норме гильбертова пространства.*

Доказательство теоремы аналогично доказательству подобной теоремы из раздела 2.1.

2.3.4. Правило останова по невязке

Для получения априорного выбора числа итераций n потребовалось знание истокопредставимости точного решения x уравнения (2.1). Поскольку обычно сведения об истокопредставимости искомого решения неизвестны, то приведенные в подразделе 2.3.1 оценки погрешности оказываются неприменимыми. Тем не менее, метод (2.61) можно сделать вполне эффективным, если воспользоваться правилом останова по невязке (2.20).
Предполагаем, что при начальном приближении $x_{0,\delta}$ невязка достаточно велика, больше уровня останова ε, т. е. $\|Ax_{0,\delta}-y_\delta\|>\varepsilon.$ Покажем, что правило останова по невязке применимо к методу (2.61). Рассмотрим семейство функций $g_n(\lambda)=\lambda^{-1}\left[1-\left(1-\alpha\lambda^k\right)^n\right]$ из подраздела 2.3.1. Нетрудно показать, что для $g_n(\lambda)$ выполняются условия

$$\sup_{0\le\lambda\le M}|g_n(\lambda)|\le(5/4)^{(k-1)/k}k\alpha^{1/k}n^{1/k},\ n>0,\ M=\|A\|,\ 0<\alpha\le\frac{5}{4M^k},\tag{2.66}$$

$$\sup_{0\le\lambda\le M}|1-\lambda g_n(\lambda)|\le 1,\ 0<\alpha<2/M^k,\tag{2.67}$$

$$1-\lambda g_n(\lambda)\to 0,\ n\to\infty,\ \forall\lambda\in(0,M],\ 0<\alpha<2/M^k,\tag{2.68}$$

$$\sup_{0\le\lambda\le M}\lambda^s|1-\lambda g_n(\lambda)|\le\left(\frac{s}{k\alpha e}\right)^{s/k}n^{-s/k},\ n>0,\ 0\le s<\infty,\ 0<\alpha\le\frac{5}{4M^k}.\tag{2.69}$$

Аналогично леммам 2.1, 2.2 и 2.3 доказываются следующие леммы:

Лемма 2.9. *Пусть* $A=A^*\ge 0,\ \|A\|\le M.$ *Тогда для любого* $w\in H$ $\left(E-Ag_n(A)\right)w\to 0,\ n\to\infty.$

Лемма 2.10. *Пусть* $A = A^* \geq 0,\ \|A\| \leq M$. *Тогда для любого* $v \in \overline{R(A)}$ *имеет место соотношение* $n^{s/k}\left\|A^s\left(E - Ag_n(A)\right)v\right\| \to 0,\ n \to \infty,\ 0 \leq s < \infty.$

Лемма 2.11. *Пусть* $A = A^* \geq 0,\ \|A\| \leq M$. *Если для некоторых* $n_p < \bar{n} = const$ *и* $v_0 \in \overline{R(A)}$ *при* $p \to \infty$ *имеем* $w_p = A\left(E - Ag_{n_p}(A)\right)v_0 \to 0,$ *то* $v_p = \left(E - Ag_{n_p}(A)\right)v_0 \to 0.$

Леммы 2.9–2.11 использовались при доказательстве теорем:

Теорема 2.25. *Пусть* $A = A^* \geq 0,\ \|A\| \leq M$ *и пусть момент останова* $m = m(\delta)$ *в методе* (2.69) *выбирается по правилу* (2.20). *Тогда* $x_{m,\delta} \to x$ *при* $\delta \to 0$.

Теорема 2.26. *Пусть выполнены условия теоремы* 2.25 *и пусть* $x = A^s z,\ s > 0$, *тогда справедливы оценки* $m(\delta) \leq 1 + \dfrac{s+1}{k\alpha e}\left[\dfrac{\|z\|}{(b-1)\delta}\right]^{k/(s+1)}$,

$$\left\|x_{m(\delta),\delta} - x\right\| \leq \left[(b+1)\delta\right]^{s/(s+1)}\|z\|^{1/(s+1)} +$$

$$+ (5/4)^{(k-1)/k} k\alpha^{1/k}\left\{1 + \frac{s+1}{k\alpha e}\left[\frac{\|z\|}{(b-1)\delta}\right]^{k/(s+1)}\right\}^{1/k}\delta. \qquad (2.70)$$

Доказательство теорем 2.25–2.26 аналогично доказательству подобных теорем из подраздела 2.1.4.

Замечание 2.8. *Порядок оценки* (2.70) *есть* $O\left(\delta^{s/(s+1)}\right)$ *и, как следует из* [21], *он оптимален в классе задач с истокопредставимыми решениями* $x = A^s z,\ s > 0.$

Замечание 2.9. *Знания степени истокопредставимости* s *и истокопредставляющего элемента* z *на практике не потребуются, т. к. они не содержатся в правиле останова по малости невязки* (2.20).

2.3.5. Правило останова по соседним приближениям в итерационном методе для уравнений с несамосопряженным оператором

Решается задача из подраздела 2.1.5. Используем явную схему метода итераций

$$z_{n+1} = \left(E - \alpha\left(A^*A\right)^k\right)z_n + \alpha\left(A^*A\right)^{k-1}A^*y_\delta + \left(E - \alpha\left(A^*A\right)^k\right)u_n,$$

$$k \in N,\ z_0 \in H,\ 0 < \alpha \leq \frac{5}{4\left\|A^*A\right\|^k}. \qquad (2.71)$$

Здесь u_n – ошибки вычисления итераций, $\|u_n\| \le \beta$. Обозначим $C = E - \alpha\left(A^* A\right)^k$, $B = \alpha\left(A^* A\right)^{k-1} A^*$. Для простоты считаем, что $\|A\| = 1$. Метод (2.71) примет вид $z_{n+1} = Cz_n + By_\delta + Cu_n$. В работе [2–А] показано, что метод (2.71) с правилом останова (2.37) сходится, и получена оценка для момента останова. Справедливы леммы.

Лемма 2.12. *Пусть приближение* w_n *определяется равенствами* $w_0 = z_0$, $w_{n+1} = Cw_n + By + Cu_n$, $n \ge 0$, *тогда справедливо неравенство*

$$\sum_{k=0}^{n} \left\| w_k - w_{k+1} + Cu_k \right\|^2 \le \left\| w_0 - x \right\|^2 + \sum_{k=0}^{n-1} \left\| Cu_k \right\|^2 .$$

Лемма 2.13. *При любом* $w_0 \in H$ *и произвольной последовательности ошибок* $\{u_n\}$, *удовлетворяющих условию* $\|u_n\| \le \beta$, *выполнено неравенство*

$$\varliminf_{n \to \infty} \left\| w_n - w_{n+1} \right\| \le 2\|C\|\beta.$$

Леммы доказываются аналогично подобным леммам из подраздела 2.1.5.

Теорема 2.27. *Пусть уровень останова* $\varepsilon = \varepsilon(\delta, \beta)$ *выбирается как функция от уровней* δ *и* β *норм погрешностей* $y - y_\delta$ *и* u_n. *Тогда справедливы следующие утверждения:*

а) если $\varepsilon(\delta, \beta) > 2\|C\|\beta$, *то момент останова* m *определён при любом начальном приближении* $z_0 \in H$ *и любых* y_δ *и* u_n, *удовлетворяющих условиям* $\|y - y_\delta\| \le \delta$, $\|u_n\| \le \beta$;

б) если $\varepsilon(\delta, \beta) > \|B\|\delta + 2\|C\|\beta$, *то справедлива оценка*

$$m \le \frac{\|z_0 - x\|^2}{\left(\varepsilon - \|B\|\delta - 2\|C\|\beta\right)\left(\varepsilon - \|B\|\delta\right)};$$

в) если, кроме того, $\varepsilon(\delta, \beta) \to 0$, $\delta, \beta \to 0$ и $\varepsilon(\delta, \beta) \ge d\left(\|B\|\delta + \|C\|\beta^p\right)$, *где* $d > 1$, $p \in (0,1)$, *то* $\lim\limits_{\delta, \beta \to 0} \|z_m - x\| = 0$.

Доказательство теоремы 2.27 аналогично доказательству подобной теоремы из подраздела 2.1.5.

2.4. Сходимость в гильбертовом пространстве метода простой итерации с попеременно чередующимся шагом решения линейных уравнений

Как известно, погрешность метода итерации с постоянным [158] $x_{n+1,\delta} = x_{n,\delta} + \alpha\left(y_\delta - Ax_{n,\delta}\right)$, $x_{0,\delta} = 0$ или переменным [56] шагом зависит от суммы итерационных шагов, и притом так, что для сокращения числа итераций желательно, чтобы итерационные шаги были как можно большими. Однако на эти шаги накладываются ограничения сверху [55–56]. Возникла идея попытаться ослабить эти ограничения. Это удалось сделать, выбирая для шага два значения α и β попеременно, где β уже не обязано удовлетворять прежним требованиям.

2.4.1. Сходимость метода в случае априорного выбора числа итераций

Для решения уравнения $Ax = y$ из раздела 2.1 предлагается явная итерационная процедура с попеременно чередующимся шагом

$$x_{n+1} = x_n - \alpha_{n+1}(Ax_n - y), \quad x_0 = 0,$$
$$\alpha_{2n+1} = \alpha, \quad \alpha_{2n+2} = \beta, \quad n = 0,1,2,\ldots. \tag{2.72}$$

В случае приближенной правой части уравнения y_δ $\left(\|y - y_\delta\| \le \delta\right)$ соответствующие методу (2.72) итерации примут вид

$$x_{n+1,\delta} = x_{n,\delta} - \alpha_{n+1}(Ax_{n,\delta} - y_\delta), \quad x_{0,\delta} = 0,$$
$$\alpha_{2n+1} = \alpha, \quad \alpha_{2n+2} = \beta, \quad n = 0,1,2,\ldots. \tag{2.73}$$

Далее будем считать, что $\|A\| = 1$.

Методы (2.72)–(2.73) впервые были предложены в работе [71], в которой показана сходимость обоих методов в исходной норме гильбертова пространства. Для их сходимости в работе [71] требуется, чтобы при $0 < \alpha < 2,\ \beta > 0$ было

$$\left|(1-\alpha\lambda)(1-\beta\lambda)\right| < 1 \tag{2.74}$$

для любого $\lambda \in (0,1]$. Условие (2.74) равносильно совокупности двух условий

$$(\alpha+\beta)^2 < 8\alpha\beta, \tag{2.75}$$
$$\alpha\beta < \alpha + \beta. \tag{2.76}$$

Доказано, что итерационный процесс (2.73) сходится при условиях (2.75), (2.76) и $0 < \alpha < 2$, если выбирать число итераций n в зависимости от δ так, чтобы $n\delta \to 0$, при $n \to \infty, \delta \to 0$. В предположении, что точное решение x является истокообразно представимым с некоторым показателем $s > 0$, получена [71] при условиях $0 < \alpha < 2$, (2.75), $\frac{1}{16} + \alpha\beta < \alpha + \beta$,

$\alpha + \beta < \frac{3}{2}\alpha\beta$ следующая оценка погрешности метода итераций (2.73): $\|x - x_{n,\delta}\| \le s^s [n(\alpha+\beta)]^{-s} \|z\| + \frac{n}{2}(\alpha+\beta)\delta$. Оптимальная оценка погрешности для явного итерационного метода (2.73) имеет вид $\|x - x_{n,\delta}\|_{\text{опт}} \le$ $\le (1+s) 2^{-s/(s+1)} \delta^{s/(s+1)} \|z\|^{1/(s+1)}$ и достигается при

$$n_{\text{опт}} = 2^{-s/(s+1)} s \delta^{-1/(s+1)} \|z\|^{1/(s+1)} \left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)^{-1}. \qquad (2.77)$$

Сравним метод (2.73) с методом Ландвебера [158]. Оптимальная оценка погрешности метода (2.73) за счет неточности в правой части уравнения оказывается несколько хуже, чем аналогичная оценка для метода [158], и совпадает с ней лишь в пределе при $n \to \infty$.

Таким образом, метод (2.73) не дает преимущества в мажорантных оценках по сравнению с методом [158]. Но он дает выигрыш в следующем. В методе Ландвебера [158] на шаг α накладывается ограничение – неравенство $0 < \alpha \le 1{,}25$, а в этом же методе с переменным шагом [56] допускается более широкий диапазон $0 < \alpha_n < 2$. В методе (2.73) из условий (2.75) и (2.76) следует, что $0 < \frac{\alpha+\beta}{2} < 4$. Следовательно, выбирая α и β соответствующим образом, можно сделать $n_{\text{опт}}$ в методе (2.73) примерно втрое меньшим, чем для метода простой итерации Ландвебера, и вдвое меньшим, чем для того же метода с переменным шагом.

Поэтому, используя метод (2.73) для достижения оптимальной точности, достаточно сделать итераций соответственно в три или два раза меньше, чем методами простых итераций с постоянным [158] или переменным [56] шагом.

2.4.2. Правило останова по невязке

Априорный выбор числа итераций n получен в предположении, что точное решение x уравнения $Ax = y$ истокообразно представимо. Однако обычно сведения об истокообразности искомого решения неизвестны, и тем самым приведенные в подразделе 2.4.1 оценки погрешности оказываются неприменимыми. Тем не менее, метод (2.73) можно сделать вполне эффективным, если воспользоваться следующим правилом останова по невязке (2.20).

Предположим, что при начальном приближении невязка достаточно велика, а именно больше уровня останова, т. е. $\|Ax_{0,\delta} - y_\delta\| > \varepsilon$. Покажем возможность применения правила останова по невязке (2.20) к явному методу итераций (2.73). Рассмотрим для четных n семейство функций $g_n(\lambda)=\lambda^{-1}\left[1-(1-\alpha\lambda)^{n/2}(1-\beta\lambda)^{n/2}\right]$. Нетрудно показать, что при условиях (2.75), $\frac{1}{16}+\alpha\beta<\alpha+\beta$, $\alpha+\beta<\frac{3}{2}\alpha\beta$ и $0<\alpha<2$ для $g_n(\lambda)$ выполняются утверждения:

$$\sup_{0\le\lambda\le1}|g_n(\lambda)|\le\frac{n(\alpha+\beta)}{2},\quad n>0,$$

$$\sup_{0\le\lambda\le1}|1-\lambda g_n(\lambda)|\le1,\quad n>0,$$

$$1-\lambda g_n(\lambda)\to0,\ n\to\infty,\ \forall\lambda\in(0,1],$$

$$\sup_{0\le\lambda\le1}\lambda^s|1-\lambda g_n(\lambda)|\le s^s\left(n(\alpha+\beta)\right)^{-s},\ n>0,\ 0\le s<\infty.$$

Аналогично подобным леммам из подраздела 2.1.4 доказываются следующие леммы.

Лемма 2.13. *Пусть* $A=A^*\ge0$, $\|A\|\le1$. *Тогда для* $\forall w\in H$ $(E-Ag_n(A))w\to0,\ n\to\infty.$

Лемма 2.14. *Пусть* $A=A^*\ge0, \|A\|\le1$. *Тогда для* $\forall v\in\overline{R(A)}$ *имеет место соотношение* $n^s\left\|A^s(E-Ag_n(A))v\right\|\to0,\ n\to\infty,\ 0\le s<\infty.$

Лемма 2.15. *Пусть* $A=A^*\ge0, \|A\|\le1$. *Если для некоторых* $n_k<\bar{n}=const$ *и* $v_0\in\overline{R(A)}$ *при* $k\to\infty$ *имеем* $w_k=A(E-Ag_{n_k}(A))v_0\to0$, *то* $v_k=(E-Ag_{n_k}(A))v_0\to0$.

Леммы 2.13–2.15 использовались при доказательстве теорем:

Теорема 2.28. *Пусть* $A=A^*\ge0, \|A\|\le1$ *и пусть момент останова* $m=m(\delta)$ (*m – четное*) *в методе* (2.73) *выбирается по правилу* (2.20), *тогда* $x_{m,\delta}\to x$ *при* $\delta\to0$.

Теорема 2.29. *Пусть выполнены условия теоремы* 2.28 *и пусть* $x=A^sz,\ s>0$. *Тогда справедливы оценки* $m(\delta)\le2+\frac{s+1}{\alpha+\beta}\left[\frac{\|z\|}{(b-1)\delta}\right]^{1/(s+1)}$,

$$\left\|x_{m(\delta),\delta}-x\right\|\le\left[(b+1)\delta\right]^{s/(s+1)}\|z\|^{1/(s+1)}+\frac{\alpha+\beta}{2}\left\{2+\frac{s+1}{\alpha+\beta}\left[\frac{\|z\|}{(b-1)\delta}\right]^{1/(s+1)}\right\}\delta. \quad (2.78)$$

Доказательство теорем 2.28–2.29 аналогично доказательству подобных теорем из подраздела 2.1.4.

Замечание 2.10. *Порядок оценки* (2.78) *есть* $O\left(\delta^{\frac{s}{s+1}}\right)$ *и, как следует из работы* [21], *он оптимален в классе задач с истокопредставимыми решениями* $x = A^s z,\ s > 0$.

Замечание 2.11. *Хотя формулировка теоремы* 2.29 *дается с указаниями степени истокопредставимости* s *и истокопредставляющего элемента* z, *на практике их значение не потребуется, так как они не содержатся в правиле останова по невязке* (2.20).

2.4.3. Сходимость метода в случае неединственного решения

Пусть теперь 0 – собственное значение оператора A (т. е. уравнение (2.1) имеет неединственное решение). Положим $N(A) = \{x \in H \,|\, Ax = 0\}$, и пусть $M(A)$ – ортогональное дополнение ядра $N(A)$ до H. Пусть далее $P(A)x$ – проекция $x \in H$ на $N(A)$, а $\Pi(A)x$ – проекция $x \in H$ на $M(A)$. Справедлива

Теорема 2.30. *Пусть* $A = A^* \ge 0,\ \|A\| \le 1,\ y \in H,\ 0 < \alpha < 2,\ \alpha\beta < \alpha + \beta$, $(\alpha+\beta)^2 < 8\alpha\beta$, *тогда для процесса* (2.72) *верны следующие утверждения:*

а) $Ax_n \to \Pi(A)y, \|Ax_n - y\| \to I(A, y) = \inf\limits_{x \in H} \|Ax - y\|$;

б) *метод* (2.72) *сходится тогда и только тогда, когда уравнение* $Ax = \Pi(A)y$ *разрешимо; в последнем случае* $x_n \to P(A)x_0 + x^*$, *где* x^* – *минимальное решение операторного уравнения* (2.1).

Доказательство. Применив оператор A к (2.72), получим $Ax_n = A(E - \alpha_n A)x_{n-1} + \alpha_n Ay$, где $y = P(A)y + \Pi(A)y$. Т. к. $AP(A)y = 0$, то $Ax_n = A(E - \alpha_n A)x_{n-1} + \alpha_n A\Pi(A)y$. Отсюда

$$Ax_n - \Pi(A)y = A(E - \alpha_n A)x_{n-1} + \alpha_n A\Pi(A)y - \Pi(A)y =$$
$$= A(E - \alpha_n A)x_{n-1} - (E - \alpha_n A)\Pi(A)y = (E - \alpha_n A)(Ax_{n-1} - \Pi(A)y) =$$
$$= (E - \alpha_n A)(E - \alpha_{n-1} A)\ldots(E - \alpha_1 A)(Ax_0 - \Pi(A)y).$$

Обозначим $\nu_n = Ax_n - \Pi(A)y$, тогда $\nu_n = (E - \alpha_n A)(E - \alpha_{n-1}A)\ldots(E - \alpha_1 A)\nu_0$. Имеем $A \ge 0$ и A – положительно определен в $M(A)$, т. е. $(Ax, x) > 0$ для любого $x \in M(A)$. Т. к. $0 < \alpha < 2$, $(\alpha+\beta)^2 < 8\alpha\beta$ и $\alpha\beta < \alpha + \beta$, то $|1 - \alpha\lambda| < 1$ и $|(1-\alpha\lambda)(1-\beta\lambda)| < 1$. Воспользовавшись интегральным представлением самосопряженного оператора A, получим

$$\|\nu_n\| = \left\| \int_0^1 (1 - \alpha_1\lambda)(1 - \alpha_2\lambda)\ldots(1 - \alpha_n\lambda) dE_\lambda \nu_0 \right\| = \left\| \int_0^1 (1 - \alpha\lambda)^l (1 - \beta\lambda)^m dE_\lambda \nu_0 \right\|.$$

Здесь m, l – натуральные показатели, где $l+m=n.$ Считаем, что $l=m=\left[\frac{n}{2}\right]$ или $l=m+1$. Справедлива цепочка неравенств

$$\|\nu_n\| \le \left\| \int_0^{\varepsilon_0} (1-\alpha\lambda)^l (1-\beta\lambda)^m dE_\lambda \nu_0 \right\| + \left\| \int_{\varepsilon_0}^{1} (1-\alpha\lambda)^l (1-\beta\lambda)^m dE_\lambda \nu_0 \right\| \le$$
$$\le \left\| E_{\varepsilon_0}\nu_0 \right\| + q^{n/2}(\varepsilon_0)\left\|\nu_0 - E_{\varepsilon_0}\nu_0\right\| < \varepsilon,$$

при $\varepsilon_0 \to 0,\quad n\to\infty.$ Здесь $q=\max\limits_{\lambda\in[\varepsilon_0,1]}|(1-\alpha\lambda)(1-\beta\lambda)|<1.$ Следовательно, $\nu_n \to 0,$ откуда $Ax_n \to \Pi(A)y$ и $\Pi(A)y \in A(H)$. Таким образом, $\|Ax_n - y\| \to \|\Pi(A)y - y\| = \|P(A)y\| = I(A,y)$ (по теореме 2.1 из работы [130]). Итак, утверждение а) доказано.

Докажем б). Пусть процесс (2.72) сходится. Покажем, что уравнение $Ax=\Pi(A)y$ разрешимо. Из сходимости $\{x_n\}\in H$ к $z\in H$ и из а) следует, что $Ax_n \to Az = \Pi(A)y,$ следовательно, $\Pi(A)y\in A(H),$ и уравнение $\Pi(A)y = Ax$ разрешимо.

Пусть теперь $\Pi(A)y\in A(H)$ (уравнение $Ax=\Pi(A)y$ разрешимо), следовательно, $\Pi(A)y = Ax^*$, где x^* – минимальное решение уравнения $Ax=y$ (оно единственно в $M\ (A)$). Тогда метод (2.72) примет вид

$$x_n = (E-\alpha_n A)x_{n-1} + \alpha_n y = (E-\alpha_n A)x_{n-1} + \alpha_n \Pi(A)y = (E-\alpha_n A)x_{n-1} +$$
$$+\alpha_n Ax^* = x_{n-1} + \alpha_n A\left(x^* - x_{n-1}\right).$$

Разобьем последнее равенство на два, ибо $x_n = P(A)x_n + \Pi(A)x_n$. Тогда

$$P(A)x_n = P(A)x_{n-1} + \alpha_n P(A)A\left(x^* - x_{n-1}\right) = P(A)x_{n-1} = P(A)x_0,$$

так как $AP(A)\left(x^* - x_{n-1}\right) = 0.$

Кроме этого, $\Pi(A)x_n = \Pi(A)x_{n-1} + \alpha_n \Pi(A)A\left(x^* - x_{n-1}\right) = \Pi(A)x_{n-1} + \alpha_n A\left(\Pi(A)x^* - \Pi(A)x_{n-1}\right) = \Pi(A)x_{n-1} - \alpha_n A\left(\Pi(A)x_{n-1} - x^*\right),$ т. к. $x^*\in M(A)$ и, следовательно, $\Pi(A)x^* = x^*$. Обозначим $\omega_n = \Pi(A)x_{n-1} - x^*$, тогда

$$\Pi(A)x_n - x^* = \Pi(A)x_{n-1} - x^* - \alpha_n A\left(\Pi(A)x_{n-1} - x^*\right).$$

Отсюда имеем

$$\omega_n = \omega_{n-1} - \alpha_n A\omega_{n-1} = (E-\alpha_n A)\omega_{n-1} = (E-\alpha_n A)(E-\alpha_{n-1}A)\ldots(E-\alpha_1 A)\omega_0,$$

и, аналогично ν_n, можно показать, что $\omega_n \to 0,\ n\to\infty.$ Таким образом, $\Pi(A)x_n \to x^*$. Следовательно, $x_n = P(A)x_n + \Pi(A)x_n \to P(A)x_0 + x^*$. *Теорема 2.30 доказана.*

Замечание 2.12. *Так как у нас* $x_0 = 0$, *то* $x_n \to x^*$, *т .е. итерационный процесс* (2.72) *сходится к нормальному решению, т. е. к решению с минимальной нормой.*

Замечание 2.13. *Уравнение* $Ax = y$ *с действующим в гильбертовом пространстве H оператором, не обладающим свойством самосопряженности или положительности, может быть сведено к решению уравнения* $A^*Ax = A^*y$ *уже с положительным и самосопряженным оператором* A^*A. *Вышеописанные во второй главе результаты для операторного уравнения* (2.1) *аналогичны результатам для уравнений* $Ax = y$ *уже с произвольным действующим в гильбертовом пространстве оператором* A.

ГЛАВА 3
НЕЯВНЫЕ ИТЕРАЦИОННЫЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ОПЕРАТОРНЫХ УРАВНЕНИЙ С ПРИБЛИЖЕННОЙ ПРАВОЙ ЧАСТЬЮ

В данной главе изучаются неявные итерационные методы решения операторных уравнений первого рода в гильбертовом пространстве. Доказаны соответствующие теоремы о сходимости этих методов, получены оценки погрешности в случае априорного выбора числа итераций. Изучен случай неединственного решения. Доказана сходимость методов в энергетической норме гильбертова пространства. Обоснована возможность использования правила останова по невязке и правила останова по соседним приближениям, что делает предложенные методы эффективными и тогда, когда нет сведений об истокопредставимости точного решения. Дается сравнительная характеристика этих методов, показано их преимущество по сравнению с явными методами.

3.1. Регуляризация операторных уравнений при помощи неявного итерационного метода

3.1.1. Сходимость метода в случае априорного выбора числа итераций

В разделе предлагается регуляризатор некорректных задач, описываемых операторными уравнениями первого рода, в виде неявного итерационного процесса, который дает возможность сократить число итераций для достижения оптимальной точности по сравнению с ранее известными явными методами итераций решения уравнения $Ax = y$.

Рассматривается задача из раздела 2.1. Для ее решения используется метод, представляющий собой семейство итерационных схем, зависящих от параметра k:

$$\left(E+\alpha A^k\right)x_{n+1}=\left(E-\alpha A^k\right)x_n+2\alpha A^{k-1}y,\quad x_0=0,\quad k\in N. \qquad (3.1)$$

Предполагая существование единственного точного решения x уравнения $Ax = y$ при точной правой части y, ищем его приближение $x_{n,\delta}$ при приближенной правой части y_δ, $\|y-y_\delta\|\le\delta$. В этом случае метод итераций (3.1) примет вид

$$\left(E+\alpha A^k\right)x_{n+1,\delta}=\left(E-\alpha A^k\right)x_{n,\delta}+2\alpha A^{k-1}y_\delta,\quad x_{0,\delta}=0,\ k\in N. \qquad (3.2)$$

Ниже под сходимостью метода (3.2) понимается утверждение о том, что приближения (3.2) сколь угодно близко подходят к точному решению x операторного уравнения (2.1) при подходящем выборе n и достаточно малых δ, т. е. если $\lim\limits_{\delta\to 0}\left(\inf\limits_n\left(\|x-x_{n,\delta}\|\right)\right)=0$.

3.1.1.1. Сходимость метода при точной правой части уравнения

Теорема 3.1. *Итерационный метод* (3.1) *при условии* $\alpha > 0$ *сходится в исходной норме гильбертова пространства*.

Доказательство. По индукции нетрудно показать, что

$$x_n = A^{-1}\left[E - \left(E - \alpha A^k\right)^n \left(E + \alpha A^k\right)^{-n}\right] y.$$

Используя интегральное представление самосопряженного оператора $A = \int_0^M \lambda dE_\lambda$ ($M = \|A\|$, E_λ −спектральная функция), имеем

$$x - x_n = A^{-1}\left(E - \alpha A^k\right)^n \left(E + \alpha A^k\right)^{-n} y = \int_0^M \lambda^{-1}\left(\frac{1-\alpha\lambda^k}{1+\alpha\lambda^k}\right)^n dE_\lambda y =$$

$$= \int_0^\varepsilon \lambda^{-1}\left(\frac{1-\alpha\lambda^k}{1+\alpha\lambda^k}\right)^n dE_\lambda y + \int_\varepsilon^M \lambda^{-1}\left(\frac{1-\alpha\lambda^k}{1+\alpha\lambda^k}\right)^n dE_\lambda y\,.$$

Потребуем, чтобы при $\lambda \in (0, M]$ выполнялось

$$\alpha > 0\,. \tag{3.3}$$

Тогда $\left|\frac{1-\alpha\lambda^k}{1+\alpha\lambda^k}\right| \le q < 1$ и, следовательно, $\left\|\int_\varepsilon^M \lambda^{-1}\left(\frac{1-\alpha\lambda^k}{1+\alpha\lambda^k}\right)^n dE_\lambda y\right\| \le q^n \left\|\int_\varepsilon^M \lambda^{-1} dE_\lambda y\right\| =$

$= q^n \left\|\int_\varepsilon^M dE_\lambda x\right\| \le q^n \|x\| \to 0,\ n \to \infty\,.$

$\left\|\int_0^\varepsilon \lambda^{-1}\left(\frac{1-\alpha\lambda^k}{1+\alpha\lambda^k}\right)^n dE_\lambda y\right\| \le \left\|\int_0^\varepsilon dE_\lambda x\right\| = \|E_\varepsilon x\| \to 0,$ т. к. при $\varepsilon \to 0$ E_ε сильно стремится к нулю в силу свойств спектральной функции. Таким образом, доказано, что при условии (3.3) метод (3.1) сходится. *Теорема 3.1 доказана.*

3.1.1.2. Оценка скорости сходимости

Скорость убывания к нулю $\|x - x_n\|$ неизвестна и может быть сколь угодно малой. Для ее оценки предположим, что точное решение уравнения $Ax = y$ истокообразно представимо, т. е. $x = A^s z,\ s > 0$. Тогда имеем $x - x_n = \int_0^M \lambda^s \left(\frac{1-\alpha\lambda^k}{1+\alpha\lambda^k}\right)^n dE_\lambda z\,.$

Используя результаты из пункта 2.3.1.3, получим оценку для подынтегральной функции:

$$|f(\lambda)| = \left|\lambda^s \left(\frac{1-\alpha\lambda^k}{1+\alpha\lambda^k}\right)^n\right| \le \left|\lambda^s \left(1-\alpha\lambda^k\right)^n\right| \le s^{s/k} (kn\alpha e)^{-s/k}.$$

Отсюда $\|x - x_n\| \le s^{s/k} (kn\alpha e)^{-s/k} \|z\|$.

Но может оказаться, что локальный максимум внутри [0, M] не будет являться глобальным, поэтому будем учитывать значение функции $f(\lambda)$ на правом конце отрезка, т. е. в точке $\lambda = M$ (на левом конце отрезка $f(0) = 0$). Тогда справедливо

$$\|x - x_n\| \le \max\left\{ s^{s/k} (kn\alpha e)^{-s/k}, M^s \left|\left(\frac{1-\alpha M^k}{1+\alpha M^k}\right)^n\right| \right\} \|z\|.$$

3.1.1.3. Сходимость при приближенной правой части уравнения

Покажем, что при условии (3.3) метод (3.2) можно сделать сходящимся, если нужным образом выбрать число итераций n в зависимости от уровня погрешности δ приближенной правой части уравнения $Ax = y$. Рассмотрим разность $x - x_{n,\delta} = (x - x_n) + (x_n - x_{n,\delta})$. По доказанному $x - x_n \to 0$, $n \to \infty$. Убедимся, что $x_n - x_{n,\delta}$ можно сделать сходящимся к нулю. Воспользовавшись интегральным представлением самосопряженного оператора, имеем

$$x_n - x_{n,\delta} = A^{-1}\left[E - \left(E - \alpha A^k\right)^n \left(E + \alpha A^k\right)^{-n}\right](y - y_\delta) =$$

$$= \int_0^M \lambda^{-1}\left[1 - \left(\frac{1-\alpha\lambda^k}{1+\alpha\lambda^k}\right)^n\right] dE_\lambda (y - y_\delta).$$

Оценим при условии (3.3) сверху подынтегральную функцию $g_n(\lambda) = \lambda^{-1}\left[1 - \left(\frac{1-\alpha\lambda^k}{1+\alpha\lambda^k}\right)^n\right] \ge 0$.

При $n = 1$ $g_1(\lambda) = \dfrac{2\alpha\lambda^{k-1}}{1+\alpha\lambda^k}$. Нетрудно показать, что $\max\limits_{[0,M]} g_1(\lambda) \le 2\alpha^{1/k}$.

Покажем по индукции, что при $n \in N$

$$g_n(\lambda) = |g_n(\lambda)| \le 2kn^{1/k} \alpha^{1/k}. \tag{3.4}$$

При $n=1$ неравенство (3.4) проверено выше. В дальнейшем будем считать $n \geq 2$. Предположим, что (3.4) верно при $n=m$, т. е. $g_m(\lambda) \leq 2km^{1/k}\alpha^{1/k}$ и рассмотрим

$$g_{m+1}(\lambda)=\lambda^{-1}\left[1-\frac{\left(1-\alpha\lambda^k\right)^{m+1}}{\left(1+\alpha\lambda^k\right)^{m+1}}\right]=\lambda^{-1}\left[1-\frac{\left(1-\alpha\lambda^k\right)^{m}}{\left(1+\alpha\lambda^k\right)^{m}}\right]+\lambda^{-1}\left[1-\frac{\left(1-\alpha\lambda^k\right)^{m+1}}{\left(1+\alpha\lambda^k\right)^{m+1}}\right]-$$

$$-\lambda^{-1}\left[1-\frac{\left(1-\alpha\lambda^k\right)^{m}}{\left(1+\alpha\lambda^k\right)^{m}}\right]\leq 2km^{1/k}\alpha^{1/k}+\left(\frac{1-\alpha\lambda^k}{1+\alpha\lambda^k}\right)^m\cdot\frac{2\alpha\lambda^{k-1}}{1+\alpha\lambda^k}.$$

Поэтому

$$g_{m+1}(\lambda)\leq 2km^{1/k}\alpha^{1/k}+\left|\frac{\left(1-\alpha\lambda^k\right)^m\cdot 2\alpha\lambda^{k-1}}{\left(1+\alpha\lambda^k\right)^{m+1}}\right|\leq 2km^{1/k}\alpha^{1/k}+\left|2\alpha\lambda^{k-1}\left(1-\alpha\lambda^k\right)^m\right|.$$

Покажем, что

$$km^{1/k}\alpha^{1/k}+\left|\alpha\lambda^{k-1}\left(1-\alpha\lambda^k\right)^m\right|\leq k(m+1)^{1/k}\alpha^{1/k}, \qquad (3.5)$$

что равносильно неравенству $\left|\alpha^{(k-1)/k}\left(1-\alpha\lambda^k\right)^m\lambda^{k-1}\right|\leq\left(\sqrt[k]{m+1}-\sqrt[k]{m}\right)k$. Имеем

$$\sqrt[k]{m+1}=\sqrt[k]{m\left(1+\frac{1}{m}\right)}=\sqrt[k]{m}\left\{1+\frac{1}{km}+\frac{\frac{1}{k}\left(\frac{1}{k}-1\right)}{2!m^2}+\frac{\frac{1}{k}\left(\frac{1}{k}-1\right)\left(\frac{1}{k}-2\right)}{3!m^3}+\right.$$

$$+\frac{\frac{1}{k}\left(\frac{1}{k}-1\right)\left(\frac{1}{k}-2\right)\left(\frac{1}{k}-3\right)}{4!m^4}+\ldots+\frac{\frac{1}{k}\left(\frac{1}{k}-1\right)\ldots\left[\frac{1}{k}-(2p-2)\right]}{1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot(2p-1)\cdot m^{2p-1}}+$$

$$\left.+\frac{\frac{1}{k}\left(\frac{1}{k}-1\right)\ldots\left[\frac{1}{k}-(2p-2)\right]\cdot\left[\frac{1}{k}-(2p-1)\right]}{1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot(2p-1)\cdot 2p\cdot m^{2p}}+\ldots\right\}.$$

Покажем, что каждый положительный член ряда больше модуля следующего за ним отрицательного члена, т. е.

$$\frac{\frac{1}{k}\left(\frac{1}{k}-1\right)\ldots\left[\frac{1}{k}-(2p-2)\right]}{1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot(2p-1)\cdot m^{2p-1}}>\left|\frac{\frac{1}{k}\left(\frac{1}{k}-1\right)\ldots\left[\frac{1}{k}-(2p-2)\right]\cdot\left[\frac{1}{k}-(2p-1)\right]}{1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot(2p-1)\cdot 2p\cdot m^{2p}}\right|,$$

что равносильно $1 > \dfrac{\left|\frac{1}{k} - (2p-1)\right|}{2pm}$ или $\dfrac{2p-1-\frac{1}{k}}{2pm} < 1$, а это уже очевидно при $m \ge 1$. Следовательно, $\sqrt[k]{m+1} > \sqrt[k]{m}\left(1 + \dfrac{1}{km} - \dfrac{k-1}{2k^2m^2}\right)$.

Вернемся к доказательству неравенства (3.5). Поскольку (3.1.1.2) $\left|\left(1-\alpha\lambda^k\right)^m \lambda^{k-1}\right| \le (k-1)^{(k-1)/k} (km\alpha e)^{-(k-1)/k}$, то вместо (3.5) докажем более сильное неравенство

$$(k-1)^{(k-1)/k} (km\alpha e)^{-(k-1)/k} \alpha^{(k-1)/k} \le km^{1/k}\left(\frac{1}{km} - \frac{k-1}{2k^2m^2}\right). \qquad (3.6)$$

Преобразуем его: $\left(\dfrac{k-1}{k}\right)^{(k-1)/k} m^{-(k-1)/k} e^{-(k-1)/k} \le km^{1/k}\dfrac{1}{km}\left(1-\dfrac{k-1}{2km}\right)$.

Поскольку $\left(\dfrac{k-1}{k}\right)^{(k-1)/k} m^{-(k-1)/k} e^{-(k-1)/k} \le m^{-(k-1)/k} e^{-(k-1)/k}$, то докажем более сильное неравенство $m^{-(k-1)/k} e^{-(k-1)/k} \le m^{-(k-1)/k}\left(1-\dfrac{k-1}{2km}\right)$, что то же самое $1 \le e^{(k-1)/k}\left(1-\dfrac{k-1}{2km}\right)$, $m \ge 2$.

При $k = 1$ имеем $1 \le 1$, следовательно, последнее неравенство справедливо при $k = 1$. При $k \ge 2$ $1-\dfrac{k-1}{2km} \ge \dfrac{3}{4}$, отсюда $e^{(k-1)/k}\left(1-\dfrac{k-1}{2km}\right) \ge \dfrac{3}{4}e^{1/2} > 1$.

Значит, неравенство (3.6) выполняется, и тем более справедливо неравенство (3.5). Таким образом, для $n \ge 1$ справедлива оценка (3.4), т. е. $g_n(\lambda) \le 2kn^{1/k}\alpha^{1/k}$, $n \ge 1$. Отсюда $\left\|x_n - x_{n,\delta}\right\| \le 2kn^{1/k}\alpha^{1/k}\delta,\ n \ge 1$.

Поскольку $\left\|x - x_{n,\delta}\right\| \le \left\|x - x_n\right\| + \left\|x_n - x_{n,\delta}\right\| \le \left\|x - x_n\right\| + 2kn^{1/k}\alpha^{1/k}\delta$ и $\left\|x - x_n\right\| \to 0,\ n \to \infty$, то для сходимости метода (3.2) достаточно выбрать $n = n(\delta)$ так, чтобы $n^{1/k}\delta \to 0, n \to \infty, \delta \to 0$. Итак, доказана

Теорема 3.2. *При условии* (3.3) *метод* (3.2) *сходится, если число итераций n выбирать из требования* $n^{1/k}\delta \to 0, n \to \infty, \delta \to 0$.

3.1.1.4. Оценка погрешности метода и ее оптимизация

Запишем теперь общую оценку погрешности метода (3.2)

$$\|x - x_{n,\delta}\| \le \|x - x_n\| + \|x_n - x_{n,\delta}\| \le$$

$$\le \max\left\{ s^{s/k}(kn\alpha e)^{-s/k},\ M^s \left| \left(\frac{1-\alpha M^k}{1+\alpha M^k} \right)^n \right| \right\} \|z\| + 2kn^{1/k}\alpha^{1/k}\delta,\ n \ge 1.$$

Т. к. для достаточно больших n $\quad M^s \left| \left(\frac{1-\alpha M^k}{1+\alpha M^k} \right)^n \right| \le s^{s/k}(kn\alpha e)^{-s/k}$, то для

этих n справедлива оценка

$$\|x - x_{n,\delta}\| \le s^{s/k}(kn\alpha e)^{-s/k}\|z\| + 2kn^{1/k}\alpha^{1/k}\delta,\ n \ge 1. \qquad (3.7)$$

Следовательно, справедлива

Теорема 3.3. *Если решение x уравнения Ax = y истокообразно представимо, то при условии* (3.3) *для метода* (3.2) *справедлива оценка погрешности* (3.7).

Для минимизации оценки погрешности вычислим правую часть оценки (3.7) в точке, в которой производная от нее равна нулю: в результате получим априорный момент останова

$$n_{\text{опт}} = 2^{-k/(s+1)}\left(\frac{s}{k}\right)^{(s+k)/(s+1)} \alpha^{-1} e^{-s/(s+1)} \|z\|^{k/(s+1)} \delta^{-k/(s+1)}. \qquad (3.8)$$

Подставив $n_{\text{опт}}$ в оценку (3.7), имеем

$$\|x - x_{n,\delta}\|_{\text{опт}} \le (1+s)\cdot 2^{s/(s+1)}\left(\frac{s}{k}\right)^{s(1-k)/(k(s+1))} e^{-s/(k(s+1))}\delta^{s/(s+1)}\|z\|^{1/(s+1)}. \qquad (3.9)$$

Замечание 3.1. *Оценка погрешности* (3.9) *имеет порядок* $O\left(\delta^{s/(s+1)}\right)$ *и, как следует из* [21]*, он является оптимальным в классе задач с истокопредставимыми решениями* $x = A^s z,\ s > 0$.

Замечание 3.2. *Оптимальная оценка* (3.9) *не зависит от* α*, но от параметра* α *зависит* $n_{опт}$*, поэтому для уменьшения числа итераций для получения приближенного решения следует брать* $\alpha > 0$ *и таким, чтобы* $n_{опт} = 1$. *Для этого достаточно выбрать*

$$\alpha_{опт} = 2^{-k/(s+1)}\left(\frac{s}{k}\right)^{(s+k)/(s+1)} e^{-s/(s+1)}\|z\|^{k/(s+1)}\delta^{-k/(s+1)}. \qquad (3.10)$$

Сравнение метода (3.2) с широко известным методом итераций Ландвебера $x_{n+1,\delta} = x_{n,\delta} + \alpha(y_\delta - Ax_{n,\delta})$, $x_{0,\delta} = 0$ [158] показывает, что порядки их оптимальных оценок одинаковы. Достоинство явных методов в том, что они не требуют обращения оператора, им необходимы только вычисления значений оператора на последовательных приближениях. В этом смысле явный метод [158] предпочтительнее неявного метода (3.2). Однако неявный метод (3.2) обладает следующим важным достоинством. В явном методе [158] на шаг α накладывается ограничение сверху – неравенство $0 < \alpha \le \frac{5}{4\|A\|}$, что может привести на практике к необходимости большого числа вычислений. В неявном методе (3.2) ограничений сверху на $\alpha > 0$ нет. Это позволяет считать $\alpha > 0$ произвольно большим (независимо от $\|A\|$). В связи с чем оптимальную оценку для неявного метода (3.2) можно получить уже на первом шаге итераций.

Оценку $\|x - x_{n,\delta}\|_{\text{опт}}$ можно оптимизировать по k. Для этого производную по k от $\varphi(k) = (s/k)^{\frac{s(1-k)}{k(s+1)}} e^{\frac{-s}{k(s+1)}}$ приравняем к нулю. Получим $(s/k)^{\frac{s(1-k)}{k(s+1)}} e^{\frac{-s}{k(s+1)}} \cdot \frac{s}{k^2(s+1)} \cdot \left(k - \ln\frac{s}{k}\right) = 0$. Отсюда видно, что оптимальное k должно удовлетворять равенству $k = \ln\frac{s}{k}$. Но $k \in N,$ поэтому, как показывают расчеты, для $s \le 5$ $k_{\text{опт}} = 1$, для $6 \le s \le 27$ $k_{\text{опт}} = 2$.

3.1.1.5. Погрешность в счете

Рассмотрим погрешность метода при счете с округлениями. Пусть $x_{n,\delta}$ – точное значение, получаемое по формуле (3.3), а z_n – значение с учетом вычислительной погрешности, т. е.

$$z_{n+1} = \left(E + \alpha A^k\right)^{-1}\left[\left(E - \alpha A^k\right)z_n + 2\alpha A^{k-1} y_\delta\right] + \alpha\gamma_n, \quad z_0 = 0. \qquad (3.11)$$

Здесь γ_n – погрешность вычислений. Обозначим $\varepsilon_n = z_n - x_{n,\delta}$ и вычтем из формулы (3.11) равенство (3.2). Имеем

$$\varepsilon_{n+1} = \left(E + \alpha A^k\right)^{-1}\left(E - \alpha A^k\right)\varepsilon_n + \alpha\gamma_n, \quad \varepsilon_0 = 0.$$

Т. к. нулевые приближения равны нулю, то $\gamma_0 = 0$. По индукции нетрудно получить, что $\varepsilon_n = \sum\limits_{i=0}^{n-1}\left(E + \alpha A^k\right)^{-(n-1-i)}\left(E - \alpha A^k\right)^{n-1-i}\alpha\gamma_i$.

В силу условия (3.3) и того, что $0 \in Sp\,A,$ справедливо $\left\|\left(E + \alpha A^k\right)^{-1}\left(E - \alpha A^k\right)\right\| \le 1$, поэтому $\|\varepsilon_n\| \le n\alpha\gamma,\ \gamma = \sup\limits_i |\gamma_i|$.

Таким образом, с учетом вычислительной погрешности оценка погрешности неявного метода (3.2) запишется в виде

$$\|x-z_n\| \le \|x-x_{n,\delta}\| + \|x_{n,\delta}-z_n\| \le s^{s/k}(kn\alpha e)^{-s/k}\|z\| + 2kn^{1/k}\alpha^{1/k}\delta + n\alpha\gamma,\ n \ge 1.$$

3.1.2. Сходимость метода в случае неединственного решения

Пусть теперь 0 – собственное значение оператора A (т. е. уравнение (2.1) имеет неединственное решение). Обозначим через $N(A)=\{x\in H | Ax=0\}$, $M(A)$ – ортогональное дополнение ядра $N(A)$ до H. Пусть $P(A)x$ – проекция $x\in H$ на $N(A)$, а $\Pi(A)x$ – проекция $x\in H$ на $M(A)$. Справедлива

Теорема 3.4. *Пусть* $A\ge 0,\ y\in H,\ \alpha>0$*, тогда для итерационного метода* (3.1) *верны следующие утверждения:*

а) $Ax_n \to \Pi(A)y, \|Ax_n - y\| \to I(A,y) = \inf\limits_{x\in H}\|Ax-y\|$;

б) *итерационный метод* (3.1) *сходится тогда и только тогда, когда уравнение* $Ax=\Pi(A)y$ *разрешимо. В последнем случае* $x_n \to P(A)x_0 + x^*$, *где* x^* *– минимальное решение*.

Доказательство. Применим оператор A к методу (3.1), получим $A(E+\alpha A^k)x_n = A(E-\alpha A^k)x_{n-1} + 2\alpha A^k y$, где $y=P(A)y+\Pi(A)y$. Т. к. $AP(A)y=0$, то $(E+\alpha A^k)(Ax_n-\Pi(A)y)=(E-\alpha A^k)(Ax_{n-1}-\Pi(A)y)$. Обозначим $Ax_n-\Pi(A)y=v_n$, $v_n\in M(A)$, тогда $(E+\alpha A^k)v_n=(E-\alpha A^k)v_{n-1}$. Отсюда $v_n=(E+\alpha A^k)^{-1}(E-\alpha A^k)v_{n-1}$ и, значит, $v_n=(E+\alpha A^k)^{-n}(E-\alpha A^k)^n v_0$.

Имеем $A\ge 0$ и A – положительно определен в $M(A)$, т. е. $(Ax,x)>0$ $\forall x\in M(A)$. Т. к. $\alpha>0$, то $\left\|(E+\alpha A^k)^{-1}(E-\alpha A^k)\right\|\le 1$. Поэтому справедлива цепочка неравенств

$$\|v_n\| = \left\|(E+\alpha A^k)^{-n}(E-\alpha A^k)^n v_0\right\| = \left\|\int_0^{\|A\|}\left(\frac{1-\alpha\lambda^k}{1+\alpha\lambda^k}\right)^n dE_\lambda v_0\right\| \le$$

$$\le \left\|\int_0^{\varepsilon}\left(\frac{1-\alpha\lambda^k}{1+\alpha\lambda^k}\right)^n dE_\lambda v_0\right\| + \left\|\int_{\varepsilon}^{\|A\|}\left(\frac{1-\alpha\lambda^k}{1+\alpha\lambda^k}\right)^n dE_\lambda v_0\right\| \le$$

$$\le \left\|\int_0^{\varepsilon} dE_\lambda v_0\right\| + q^n(\varepsilon)\left\|\int_{\varepsilon}^{\|A\|} dE_\lambda v_0\right\| \le \|E_\varepsilon v_0\| + q^n(\varepsilon)\|v_0\| \to 0$$

при $\varepsilon\to 0,\ n\to\infty$. Здесь $\left|\dfrac{1-\alpha\lambda^k}{1+\alpha\lambda^k}\right| \le q(\varepsilon)<1$ при $\lambda\in[\varepsilon,\|A\|]$. Следовательно,

$v_n \to 0, n \to \infty$, откуда $Ax_n \to \Pi(A)y$ и $\Pi(A)y \in A(H)$. Отсюда $\|Ax_n - y\| \to$ $\to \|\Pi(A)y - y\| = \|P(A)y\| = I(A, y)$ [130]. Итак, утверждение а) доказано.

Докажем б). Пусть процесс (3.1) сходится. Покажем, что уравнение $Ax = \Pi(A)y$ разрешимо. Из сходимости $\{x_n\} \in H$ к $z \in H$ и из а) следует, что $Ax_n \to Az = \Pi(A)y$, следовательно, $\Pi(A)y \in A(H)$ и уравнение $\Pi(A)y = Ax$ разрешимо.

Пусть теперь $\Pi(A)y \in A(H)$ (уравнение $\Pi(A)y = Ax$ разрешимо), следовательно, $\Pi(A)y = Ax^*$, где x^* – минимальное решение уравнения $Ax = y$ (оно единственно в $M(A)$). Тогда (3.1) примет вид

$$\left(E + \alpha A^k\right)x_n = \left(E - \alpha A^k\right)x_{n-1} + 2\alpha A^{k-1}\Pi(A)y = \left(E - \alpha A^k\right)x_{n-1} + 2\alpha A^k x^* =$$
$$= \left(E + \alpha A^k\right)x_{n-1} - 2\alpha A^k x_{n-1} + 2\alpha A^k x^* = \left(E + \alpha A^k\right)x_{n-1} + 2\alpha A^k\left(x^* - x_{n-1}\right).$$

Отсюда $x_n = x_{n-1} + 2\alpha A^k\left(E + \alpha A^k\right)^{-1}(x^* - x_{n-1})$. Последнее равенство разобьем на два:

$$P(A)x_n = P(A)x_{n-1} + 2\alpha(E + \alpha A^k)^{-1}A^k P(A)(x^* - x_{n-1}) = P(A)x_{n-1} = P(A)x_0;$$

$$\Pi(A)x_n = \Pi(A)x_{n-1} + 2\alpha\left(E+\alpha A^k\right)^{-1} A^k\,\Pi(A)\left(x^* - x_{n-1}\right) =$$

$$= \Pi(A)x_{n-1} + 2\alpha\left(E+\alpha A^k\right)^{-1} A^k\left(\Pi(A)x^* - \Pi(A)x_{n-1}\right) =$$

$$= \Pi(A)x_{n-1} + 2\alpha\left(E+\alpha A^k\right)^{-1} A^k\left(x^* - \Pi(A)x_{n-1}\right),$$

т. к. $x^* \in M(A)$. Обозначим $\omega_n = \Pi(A)x_n - x^*$, тогда из равенства

$$\Pi(A)x_n - x^* = \Pi(A)x_{n-1} - x^* + 2\alpha\left(E + \alpha A^k\right)^{-1} A^k\left(x^* - \Pi(A)x_{n-1}\right)$$

получим

$$\omega_n = \omega_{n-1} - 2\alpha\left(E + \alpha A^k\right)^{-1} A^k \omega_{n-1} = \left(E + \alpha A^k\right)^{-1}\left(E - \alpha A^k\right)\omega_{n-1}$$

и, аналогично v_n, можно показать, что $\omega_n \to 0, n \to \infty$. Таким образом, $\Pi(A)x_n \to x^*$. Отсюда $x_n = P(A)x_n + \Pi(A)x_n \to P(A)x_0 + x^*$. *Теорема 3.4 доказана.*

Замечание 3.3. *Так как у нас* $x_0 = 0$*, то* $x_n \to x^*$*, т. е. итерационный метод* (3.1) *сходится к нормальному решению, т. е. к решению с минимальной нормой.*

3.1.3. Сходимость метода в энергетической норме

Ниже предполагается, что нуль не является собственным значением оператора A, следовательно, предположим, что уравнение $Ax = y$ имеет единственное решение. Однако нуль принадлежит спектру оператора A, поэтому задача отыскания решения уравнения $Ax = y$ неустойчива и, значит, некорректна. Сходимость процессов (3.1) и (3.2) в исходной норме пространства H была рассмотрена в подразделе 3.1.1. Там показано, что предложенный неявный метод (3.2) сходится при условии $\alpha > 0$, если число итераций n выбирать в зависимости от уровня погрешности δ так, чтобы $n^{1/k}\delta \to 0$ при $n \to \infty, \delta \to 0$. В предположении, что точное решение уравнения (2.1) истокообразно представимо, получены априорные оценки погрешности и априорный момент останова. В случае, когда нет сведений об истокообразной представимости точного решения, затруднительно получить априорные оценки погрешности и априорный момент останова. Тем не менее, метод итераций (3.2) можно сделать вполне эффективным, если воспользоваться энергетической нормой гильбертова пространства $\|x\|_A = \sqrt{(Ax, x)}$, где $x \in H$. Покажем сходимость метода (3.2) в энергетической норме и получим для него априорные оценки погрешности в энергетической норме. Рассмотрим разность

$$x - x_{n,\delta} = (x - x_n) + (x_n - x_{n,\delta}). \tag{3.12}$$

Запишем первое слагаемое в виде

$$x - x_n = A^{-1}\left(E + \alpha A^k\right)^{-n}\left(E - \alpha A^k\right)^n y = \left(E + \alpha A^k\right)^{-n}\left(E + \alpha A^k\right)^n x.$$

Как было показано в подразделе 3.1.1 $x - x_n$ бесконечно мало в исходной норме гильбертова пространства H при $n \to \infty$, но скорость сходимости при этом может быть сколь угодно малой, и для ее оценки делалось предположение об истокообразной представимости точного решения. При использовании энергетической нормы нам это дополнительное предположение не понадобится. Действительно, с помощью интегрального представления самосопряженного оператора $A = \int_0^M \lambda dE_\lambda$, где $M = \|A\|$ и E_λ – соответствующая спектральная функция, имеем

$$\|x - x_n\|_A^2 = \left(A\left(E + \alpha A^k\right)^{-n}\left(E - \alpha A^k\right)^n x,\ \left(E + \alpha A^k\right)^{-n}\left(E - \alpha A^k\right)^n x\right) =$$

$$= \int_0^M \lambda\left(\frac{1 - \alpha\lambda^k}{1 + \alpha\lambda^k}\right)^{2n} d(E_\lambda x, x).$$

Для оценки интересующей нас нормы найдем максимум подынтегральной функции $f(\lambda) = \lambda\left(\frac{1 - \alpha\lambda^k}{1 + \alpha\lambda^k}\right)^{2n}$ при $\lambda \in [0, M]$. Функция $f(\lambda)$ – частный случай при $s = 1$ функций, оцененных в подразделе 3.1.1. Там показано, что при условии (3.3) $\max\limits_{\lambda\in[0,M]}|f(\lambda)|\le(2kn\alpha e)^{-1/k}$. Следовательно, справедлива оценка $\|x-x_n\|_A\le(2kn\alpha e)^{-1/(2k)}\|x\|$.

Таким образом, переход к энергетической норме как бы заменяет предположение об истокообразной представимости порядка $s=\dfrac{1}{2}$ для точного решения.

Оценим второе слагаемое в (3.12). Как показано в подразделе 3.1.1 справедливо равенство $x_n-x_{n,\delta}=A^{-1}\left[E-\left(E+\alpha A^k\right)^{-n}\left(E-\alpha A^k\right)^n\right](y-y_\delta)$. Воспользовавшись интегральным представлением самосопряженного оператора, получим $\|x_n-x_{n,\delta}\|_A^2=\int\limits_0^M\lambda^{-1}\left[1-\left(\dfrac{1-\alpha\lambda^k}{1+\alpha\lambda^k}\right)^n\right]^2 d(E_\lambda(y-y_\delta),y-y_\delta)$.

Обозначим через $g(\lambda)=\lambda^{-1}\left[1-\left(\dfrac{1-\alpha\lambda^k}{1+\alpha\lambda^k}\right)^n\right]^2$ подынтегральную функцию, а через $g_1(\lambda)=\lambda^{-1}\left[1-\left(\dfrac{1-\alpha\lambda^k}{1+\alpha\lambda^k}\right)^n\right]$, тогда $g(\lambda)=g_1(\lambda)\left[1-\left(\dfrac{1-\alpha\lambda^k}{1+\alpha\lambda^k}\right)^n\right]$. Функция $g_1(\lambda)$ была оценена в подразделе 3.1.1. Там показано, что при условии (3.3) $g_1(\lambda)\le 2kn^{\frac{1}{k}}\alpha^{\frac{1}{k}}$.

При этом же условии имеем $\left|\dfrac{1-\alpha\lambda^k}{1+\alpha\lambda^k}\right|\le 1, \forall\lambda\in[0,M]$, поэтому $1-\left(\dfrac{1-\alpha\lambda^k}{1+\alpha\lambda^k}\right)^n\le 2$, откуда $g(\lambda)\le 4kn^{\frac{1}{k}}\alpha^{\frac{1}{k}}$. Таким образом, $\|x_n-x_{n,\delta}\|_A^2\le$ $\le 4kn^{\frac{1}{k}}\alpha^{\frac{1}{k}}\delta^2$, отсюда $\|x_n-x_{n,\delta}\|_A\le 2k^{\frac{1}{2}}(n\alpha)^{\frac{1}{2k}}\delta, n\ge 1$. Поскольку $\|x-x_{n,\delta}\|_A\le$ $\le\|x-x_n\|_A+\|x_n-x_{n,\delta}\|_A\le\|x-x_n\|_A+2k^{\frac{1}{2}}(n\alpha)^{\frac{1}{2k}}\delta$ и $\|x-x_n\|_A\to 0,\ n\to\infty$, то для сходимости $\|x-x_{n,\delta}\|_A\to 0, n\to\infty$, достаточно, чтобы $n^{\frac{1}{2k}}\delta\to 0$, $n\to\infty, \delta\to 0$. Итак, доказана

Теорема 3.5. *При условии* (3.3) *итерационный метод* (3.2) *сходится в энергетической норме гильбертова пространства, если число итераций* n *выбирать из условия* $n^{\frac{1}{2k}}\delta \to 0$ *при* $n \to \infty, \delta \to 0$.

Запишем теперь общую оценку погрешности для метода (3.2) в энергетической норме

$$\left\| x - x_{n,\delta} \right\|_A \le (2kn\alpha e)^{-\frac{1}{2k}} \|x\| + 2k^{\frac{1}{2}} (n\alpha)^{\frac{1}{2k}} \delta,\ n \ge 1. \qquad (3.12)$$

Оптимизируем оценку (3.12) по n. Для этого при заданном δ найдем такое значение числа итераций n, при котором оценка погрешности становится минимальной. Приравняв к нулю производную по n от правой части неравенства (3.12), получим

$$n_{\text{опт}} = 2^{-\frac{2k+1}{2}} k^{-\frac{k+1}{2}} \alpha^{-1} e^{-\frac{1}{2}} \delta^{-k} \|x\|^k. \qquad (3.13)$$

Подставив $n_{\text{опт}}$ в оценку (3.12), найдем ее оптимальное значение

$$\left\| x - x_{n,\delta} \right\|_A^{\text{опт}} \le 2^{\frac{6k-1}{4k}} k^{\frac{k-1}{4k}} e^{-\frac{1}{4k}} \delta^{\frac{1}{2}} \|x\|^{\frac{1}{2}}. \qquad (3.14)$$

Таким образом, справедлива

Теорема 3.6. *Оптимальная оценка погрешности для метода* (3.2) *при условии* (3.3) *в энергетической норме имеет вид* (3.14) *и получается при* $n_{опт}$ *из* (3.13).

Замечание 3.4. *Из неравенства* (3.14) *вытекает, что оптимальная оценка погрешности не зависит от параметра* α. *Но* $n_{опт}$ *зависит от* α, *поскольку на* α *нет ограничений сверху* $(\alpha > 0)$, *то за счет выбора* α *можно получить* $n_{опт} = 1$, *т. е. оптимальная оценка погрешности будет достигаться уже на первом шаге итераций. Для этого достаточно взять* $\alpha_{опт} = 2^{-\frac{2k+1}{2}} k^{-\frac{k+1}{2}} e^{-\frac{1}{2}} \delta^{-k} \|x\|^k$.

Рассмотрим вопрос о том, когда из сходимости в энергетической норме следует сходимость в обычной норме гильбертова пространства H. Очевидно, для этого достаточно, чтобы при фиксированном ε $(0 < \varepsilon < \|A\|)$, было $P_\varepsilon x = 0, P_\varepsilon x_{n,\delta} = 0$, где $P_\varepsilon = \int_0^\varepsilon dE_\lambda$. Для выполнения последнего из указанных условий должно выполняться условие $P_\varepsilon y_\delta = 0$, поскольку $x_{n,\delta} = A^{-1}\left[E - \left(E + \alpha A^k\right)^{-n}\left(E - \alpha A^k\right)^n\right] y_\delta$.

Таким образом, если решение x и приближенная правая часть y_δ таковы, что $P_\varepsilon x = 0$ и $P_\varepsilon y_\delta = 0$, то из сходимости $x_{n,\delta}$ к решению x в энергетической норме вытекает сходимость в исходной норме гильбертова пространства H, и, следовательно, для сходимости в исходной норме пространства H не требуется истокопредставимости точного решения.

3.1.4. Апостериорный выбор числа итераций в неявном методе решения некорректных задач

3.1.4.1. Правило останова по невязке

Априорный выбор числа итераций n в исходной норме гильбертова пространства (3.1.1) получен в предположении, что имеется дополнительная информация об истокопредставимости точного решения x уравнения (2.1). Однако обычно сведения об истокообразности искомого решения неизвестны, и тем самым приведенные в подразделе 3.1.1 оценки погрешности оказываются неприменимыми. Тем не менее метод (3.2) можно сделать вполне эффективным, если воспользоваться следующим правилом останова по невязке: зададим $\varepsilon > 0$ и определим момент m останова итерационного процесса (3.2) условием (2.20).

Предполагается, что при начальном приближении $x_{0,\delta}$ невязка достаточно велика, больше уровня останова ε, т. е. $\|Ax_{0,\delta} - y_\delta\| > \varepsilon$. Покажем, что правило останова по невязке (2.20) применимо к методу (3.2). Рассмотрим семейство функций $g_n(\lambda) = \lambda^{-1}\left[1 - \dfrac{(1-\alpha\lambda^k)^n}{(1+\alpha\lambda^k)^n}\right] \geq 0$. Нетрудно показать, что для $g_n(\lambda)$ при $\alpha > 0$ выполняются следующие условия:

$$\sup_{0\leq\lambda\leq M} |g_n(\lambda)| \leq 2k(n\alpha)^{1/k},\ n > 0,$$

$$\sup_{0\leq\lambda\leq M} |1 - \lambda g_n(\lambda)| \leq 1,\ n > 0,$$

$$1 - \lambda g_n(\lambda) \to 0,\ n \to \infty,\ \ \forall\lambda \in (0, M],$$

$$\sup_{0\leq\lambda\leq M} \lambda^s |1 - \lambda g_n(\lambda)| \leq \left(\frac{s}{kn\alpha e}\right)^{s/k},\ n > 0,\ \ 0 \leq s < \infty.$$

Аналогично подобным леммам из раздела 2.1 доказываются следующие леммы.

Лемма 3.1. *Пусть* $A = A^* \geq 0$, $\|A\| \leq M$. *Тогда для любого* $\omega \in H$ $(E - Ag_n(A))\omega \to 0,\ n \to \infty.$

Лемма 3.2. *Пусть* $A = A^* \geq 0,\ \|A\| \leq M$. *Тогда для* $\forall v \in \overline{R(A)}$ *имеет место соотношение* $n^{\frac{s}{k}} \left\| A^s (E - Ag_n(A))v \right\| \to 0,$ *при* $n \to \infty, 0 \leq s < \infty.$

Лемма 3.3. *Пусть* $A = A^* \geq 0,\ \|A\| \leq M$. *Если для некоторой последовательности* $n_p < \bar{n} = const$ *и* $v_0 \in \overline{R(A)}$ *при* $p \to \infty$ *имеем* $\omega_p = A\left(E - Ag_{n_p}(A)\right)\upsilon_0 \to 0,$ *то* $\upsilon_p = \left(E - Ag_{n_p}(A)\right)\upsilon_0 \to 0.$

Леммы 3.1–3.3 использовались при доказательстве теорем:

Теорема 3.7. *Пусть* $A = A^* \geq 0,\ \|A\| \leq M$ *и пусть момент останова* $m = m(\delta)$ *в методе* (3.2) *выбирается по правилу* (2.20). *Тогда* $x_{m,\delta} \to x$ *при* $\delta \to 0$.

Теорема 3.8. *Пусть выполнены условия теоремы* 3.7 *и пусть* $x = A^s z$, $s > 0$. *Тогда справедливы оценки* $m \leq 1 + \dfrac{s+1}{k\alpha e}\left[\dfrac{\|z\|}{(b-1)\delta}\right]^{\frac{k}{s+1}}$,

$$\left\| x_{m,\delta} - x \right\| \leq [(b+1)\delta]^{\frac{s}{s+1}} \|z\|^{\frac{1}{s+1}} + 2k\alpha^{\frac{1}{k}} \left\{ 1 + \frac{s+1}{k\alpha e}\left[\frac{\|z\|}{(b-1)\delta}\right]^{\frac{k}{s+1}} \right\}^{\frac{1}{k}} \delta. \quad (3.15)$$

Доказательство теорем 3.7–3.8 аналогично доказательству подобных теорем из раздела 2.1.

Замечание 3.4. *Порядок оценки* (3.15) *есть* $O\left(\delta^{\frac{s}{s+1}}\right)$ *и, как следует из* [21], *он оптимален в классе задач с истокопредставимыми решениями.*

Замечание 3.5. *В формулировке теоремы* 3.8 *предполагается, что точное решение истокопредставимо, но знание истокопредставимости не потребуется на практике, т. к. при останове по малости невязки автоматически делается число итераций нужное для получения оптимального по порядку решения.*

3.1.4.2. Правило останова по соседним приближениям в итерационном методе для уравнений с несамосопряженным оператором

Для решения уравнения $Ax = y$ с несамосопряженным оператором A используем метод

$$x_{n+1} = \left(E + \alpha\left(A^*A\right)^k\right)^{-1}\left[\left(E - \alpha\left(A^*A\right)^k\right)x_n + 2\alpha\left(A^*A\right)^{k-1}A^*y\right],\ x_0 \in H, k \in N. \quad (3.16)$$

В случае, когда правая часть уравнения задана приближенно $\|y - y_\delta\| \le \delta,$ метод итераций (3.16) примет вид

$$z_{n+1} = \left(E + \alpha\left(A^*A\right)^k\right)^{-1}\left[\left(E - \alpha\left(A^*A\right)^k\right)z_n + 2\alpha\left(A^*A\right)^{k-1}A^*y_\delta\right] +$$

$$+\left(E + \alpha\left(A^*A\right)^k\right)^{-1}\left(E - \alpha\left(A^*A\right)^k\right)u_n,\ z_0 \in H,\ k \in N, \tag{3.17}$$

где u_n – ошибки в вычислении итераций, причем $\|u_n\| \le \beta.$ Обозначим через $C = \left(E + \alpha\left(A^*A\right)^k\right)^{-1}\left(E - \alpha\left(A^*A\right)^k\right),\ B = 2\left(E + \alpha\left(A^*A\right)^k\right)^{-1}\alpha\left(A^*A\right)^{k-1}A^*.$ Тогда метод (3.17) примет вид $z_{n+1} = Cz_n + By_\delta + Cu_n.$ Определим момент m останова итерационной процедуры с помощью правила останова по разности соседних приближений (2.37). Покажем, что метод (3.17) с правилом останова (2.37) сходится.

Аналогично леммам подраздела 2.1.5 доказываются леммы.

Лемма 3.4. *Пусть приближение* ω_n *определяется условиями* $\omega_0 = z_0,$ $\omega_{n+1} = C\omega_n + By + Cu_n,\ n \ge 0.$ *Тогда справедливо неравенство*

$$\sum_{k=0}^{n}\|\omega_k - \omega_{k+1} + Cu_k\|^2 \le \|\omega_0 - x\|^2 + \sum_{k=0}^{n-1}\|Cu_k\|^2.$$

Лемма 3.5. *При* $\forall\omega_0 \in H$ *и произвольной последовательности ошибок* $\{u_n\},$ *удовлетворяющих условию* $\|u_n\| \le \beta,$ *выполнено* $\varliminf_{n\to\infty}\|\omega_n - \omega_{n+1}\| \le 2\|C\|\beta.$

Справедлива

Теорема 3.9. *Пусть уровень останова* $\varepsilon = \varepsilon(\delta,\beta)$ *выбирается как функция от уровней* δ *и* β *норм погрешностей* $y - y_\delta$ *и* u_n. *Тогда справедливы следующие утверждения:*

а) если $\varepsilon(\delta,\beta) > 2\|C\|\beta,$ *то момент останова* m *определен при любом начальном приближении* $z_0 \in H$ *и любых* y_δ *и* u_n, *удовлетворяющих условиям* $\|y - y_\delta\| \le \delta,\ \|u_n\| \le \beta$*;*

б) если $\varepsilon(\delta,\beta) > \|B\|\delta + 2\|C\|\beta,$ *то справедлива оценка*

$$m \le \frac{\|z_0 - x\|^2}{(\varepsilon - \|B\|\delta)(\varepsilon - \|B\|\delta - 2\|C\|\beta)};$$

в) если, кроме того, $\varepsilon(\delta,\beta) \to 0,\ \delta,\beta \to 0$ *и* $\varepsilon(\delta,\beta) \ge d\left(\|B\|\delta + \|C\|\beta^p\right),$ *где* $d > 1,\ p \in (0,1),$ *то* $\lim_{\delta,\beta\to 0}\|z_m - x\| = 0.$

Доказательство теоремы 3.9 аналогично доказательству подобной теоремы из раздела 2.1.

3.2. Итерационная процедура неявного типа решения операторных уравнений в гильбертовом пространстве

3.2.1. Оценки погрешности метода в случае априорного выбора числа итераций

Решается уравнение $Ax = y$ из раздела 2.1. Предлагается новая неявная итерационная процедура, представляющая собой семейство итерационных схем, зависящих от параметра k:

$$\left(E + \alpha A^k\right)x_{n+1} = x_n + \alpha A^{k-1}y,\ x_0 = 0,\ k \in N. \qquad (3.18)$$

В случае приближенной правой части y_δ $\left(\|y - y_\delta\| \le \delta\right)$ соответствующие методу (3.18) итерации примут вид

$$\left(E + \alpha A^k\right)x_{n+1,\delta} = x_{n,\delta} + \alpha A^{k-1}y_\delta,\ x_{0,\delta} = 0,\ k \in N. \qquad (3.19)$$

Воспользовавшись интегральным представлением положительно определенного самосопряженного оператора A и формулой (3.18), по индукции получим $x - x_n = \int\limits_0^M \lambda^{-1}(1+\alpha\lambda^k)^{-n}dE_\lambda y,$ где $M = \|A\|,$ $E_\lambda -$ спектральная функция оператора A. Отсюда легко выводится сходимость метода (3.18) при $n \to \infty$ для $\alpha > 0.$

Итерационный процесс (3.19) является сходящимся, если нужным образом выбирать число итераций n в зависимости от уровня погрешности δ. Справедлива

Теорема 3.10. *Итерационный процесс* (3.19) *сходится при* $\alpha > 0$, *если выбирать число итераций* n *в зависимости от* δ *так, чтобы* $n^{1/k}\delta \to 0$ *при* $n \to \infty, \delta \to 0.$

Доказательство теоремы аналогично доказательству подобной теоремы из раздела 3.1. При этом легко показывается оценка

$$\|x_n - x_{n,\delta}\| \le kn^{1/k}\alpha^{1/k}\delta,\ n \ge 1.$$

Скорость сходимости процедуры (3.19) будем оценивать при дополнительном предположении о возможности истокообразного представления точного решения x уравнения (2.1), т. е. $x = A^s z,\ s > 0.$ Тогда $y = A^{s+1}z$ и, следовательно, получим $x - x_n = \int\limits_0^M \lambda^s\left(1+\alpha\lambda^k\right)^{-n} dE_\lambda z$. Для оценки $\|x - x_n\|$ найдем максимум модуля подынтегральной функции $f(\lambda) = \lambda^s(1+\alpha\lambda^k)^{-n}$. Нетрудно показать, что при условии $\alpha > 0$ справедливо неравенство $\|x - x_n\| \le s^{s/k}\left(2kn\alpha\right)^{-s/k}\|z\|$. Таким образом, общая оценка погрешности итерационной процедуры (3.19) запишется в виде

$$\left\|x-x_{n,\delta}\right\| \le \left\|x-x_n\right\| + \left\|x_n - x_{n,\delta}\right\| \le s^{s/k}\left(2kn\alpha\right)^{-s/k}\left\|z\right\| + k\left(n\alpha\right)^{1/k}\delta,\ n \ge 1.$$

Для минимизации оценки погрешности вычислим ее правую часть в точке, в которой производная от нее равна нулю; в результате для процедуры (3.19) получим априорный момент останова

$$n_{\text{опт}} = 2^{-s/(s+1)}\left(\frac{s}{k}\right)^{(s+k)/(s+1)}\alpha^{-1}\left\|z\right\|^{k/(s+1)}\delta^{-k/(s+1)}$$

и оптимальную оценку погрешности

$$\left\|x-x_{n,\delta}\right\|_{\text{опт}} \le (1+s)\cdot 2^{-s/(k(s+1))}\left(\frac{s}{k}\right)^{s(1-k)/(k(s+1))}\delta^{s/(s+1)}\left\|z\right\|^{1/(s+1)}.$$

Приведем погрешность метода (3.19) при счете с округлениями. Пусть $x_{n,\delta}$ – точное значение, полученное по формуле (3.19), а z_n – значение, полученное по той же формуле с учетом погрешностей вычисления γ_n, т. е. $z_{n+1} = \left(E+\alpha A^k\right)^{-1}\left[z_n + \alpha A^{k-1}y_\delta\right] + \alpha\gamma_n$, $z_0 = 0$. Оценка погрешности метода (3.19) в этом случае имеет вид

$$\left\|x-z_n\right\| \le \left\|x-x_{n,\delta}\right\| + \left\|x_{n,\delta}-z_n\right\| \le \left(\frac{s}{2kn\alpha}\right)^{s/k}\left\|z\right\| + k\left(n\alpha\right)^{1/k}\delta + n\alpha\gamma,\ n \ge 1,$$

где $\gamma = \sup_i |\gamma_i|$.

Сравнение метода (3.19) с хорошо известным явным методом итераций [158] показывает, что порядки их оптимальных оценок совпадают. Достоинство явных методов в том, что они не требуют обращения оператора, им необходимы только вычисления значений оператора на последовательных приближениях. В этом смысле явный метод [158] предпочтительнее неявного метода (3.19). Однако неявный метод (3.19) обладает следующим важным достоинством. В явном методе (3.10) на шаг α накладывается ограничение сверху – неравенство $0 < \alpha \le \dfrac{5}{4\|A\|}$, что может на практике привести к необходимости большого числа итераций. В неявных методах никаких ограничений сверху на $\alpha > 0$ нет. Это позволяет считать $\alpha > 0$ произвольно большим (независимо от $\|A\|$). В связи с чем оптимальную оценку для метода (3.19) можно получить уже на первых шагах итераций. Для этого достаточно взять $\alpha_{\text{опт}} = 2^{-s/(s+1)}\left(\dfrac{s}{k}\right)^{(s+k)/(s+1)}\left\|z\right\|^{k/(s+1)}\delta^{-k/(s+1)}$.

3.2.2. Сходимость метода в случае неединственного решения

Пусть теперь 0 – собственное значение оператора A (т. е. уравнение

(2.1) имеет неединственное решение). Положим $N(A)=\{x\in H\,|\,Ax=0\}$, и пусть $M(A)$ – ортогональное дополнение ядра $N(A)$ до H. Пусть далее $P(A)x$ – проекция $x\in H$ на $N(A)$, а $\Pi(A)x$ – проекция $x\in H$ на $M(A)$. Справедлива

Теорема 3.11. Пусть $A\geq 0,\, y\in H,\, \alpha>0$. *Тогда для итерационного процесса* (3.18) *верны следующие утверждения:*

а) $Ax_n \to \Pi(A)y,\ \|Ax_n-y\|\to I(A,y)=\inf\limits_{x\in H}\|Ax-y\|$;

б) *метод* (3.18) *сходится тогда и только тогда, когда уравнение* $Ax=\Pi(A)y$ *разрешимо. В последнем случае* $x_n\to P(A)x_0+x^*$, *где* x^* – *минимальное решение уравнения.*

Доказательство теоремы аналогично доказательству подобной теоремы из раздела 3.1. Т. к. $x_0=0$, то $x_n\to x^*$, т. е. процесс (3.18) сходится к нормальному решению, т. е. к решению с минимальной нормой.

3.2.3. Сходимость метода в энергетической норме

Здесь и ниже предполагается, что решение уравнения (2.1) единственно. Изучим сходимость метода (3.19) в энергетической норме гильбертова пространства $\|x\|_A=\sqrt{(Ax,x)}$, где $x\in H$. При этом, как обычно, число итераций n нужно выбирать в зависимости от уровня погрешности δ. Полагаем $x_{0,\delta}=0$ и рассмотрим разность $x-x_{n,\delta}=(x-x_n)+(x_n-x_{n,\delta})$.

С помощью интегрального представления самосопряженного оператора A получим $\|x-x_n\|_A^2=\int\limits_0^M\lambda\dfrac{1}{\left(1+\alpha\lambda^k\right)^{2n}}\,d(E_\lambda x,x)$ и $\|x_n-x_{n,\delta}\|_A^2=$

$=\int\limits_0^M\lambda^{-1}\left[1-\dfrac{1}{\left(1+\alpha\lambda^k\right)^n}\right]^2 d\left(E_\lambda(y-y_\delta),y-y_\delta\right)$, где $M=\|A\|$. Оценив подынтегральные функции, получим при условии $\alpha>0$ оценку погрешности для неявного итерационного метода (3.19) в энергетической норме $\|x-x_{n,\delta}\|_A\leq(4kn\alpha)^{-1/(2k)}\|x\|+k^{1/2}(n\alpha)^{1/(2k)}\delta,\ n\geq 1$. Следовательно, если в процессе (3.19) выбирать число итераций $n=n(\delta)$, зависящим от δ так, чтобы $n^{1/(2k)}\delta\to 0,\ n\to\infty,\ \delta\to 0$, то получим метод, обеспечивающий сходимость к точному решению в энергетической норме. Справедлива

Теорема 3.12. *При условии* $\alpha>0$ *метод* (3.19) *сходится в энергетической норме гильбертова пространства, если число итераций* n *выбирать* *из условия* $n^{1/(2k)}\delta \to 0, n \to \infty, \delta \to 0$. *Для метода* (3.19) *справедлива оценка погрешности* $\|x - x_{n,\delta}\|_A \le (4kn\alpha)^{-1/(2k)}\|x\| + k^{1/2}(n\alpha)^{1/(2k)}\delta, n \ge 1$.

Для минимизации оценки погрешности вычислим ее правую часть в точке, в которой производная от нее равна нулю; в результате получим $\|x - x_{n,\delta}\|_A^{\text{опт}} \le 2^{(2k-1)/(2k)} k^{(k-1)/(4k)} \delta^{1/2} \|x\|^{1/2}$ и $n_{\text{опт}} = k^{-(k+1)/2} \times \times (2\alpha)^{-1}\delta^{-k}\|x\|^k$.

Отметим тот факт, что для сходимости метода (3.19) в энергетической норме достаточно выбирать число итераций $n = n(\delta)$ так, чтобы $n^{1/(2k)}\delta \to 0, n \to \infty, \delta \to 0$. Однако $n_{\text{опт}} = O(\delta^{-k})$, т. е. $n_{\text{опт}}$ относительно δ имеет порядок δ^{-k}, и такой порядок обеспечивает сходимость метода (3.19).

Таким образом, использование энергетической нормы позволило получить априорную оценку погрешности для метода (3.19) и априорный момент останова $n_{\text{опт}}$ без дополнительного требования истокообразной представимости точного решения, что делает метод (3.19) эффективным и тогда, когда нет сведений об истокопредставимости точного решения x уравнения $Ax = y$.

3.2.4. Правило останова по невязке

Решается уравнение $Ax = y$ из раздела 2.1. Зададим уровень останова ε и определим момент m останова условием (2.20). Предполагаем, что при начальном приближении $x_{0,\delta}$ невязка достаточно велика, больше уровня останова ε, т. е. $\|Ax_{0,\delta} - y_\delta\| > \varepsilon$. Покажем, что правило останова по невязке применимо к методу (3.19). Рассмотрим семейство функций $g_n(\lambda) = \lambda^{-1}\left[1 - \frac{1}{(1+\alpha\lambda^k)^n}\right] \ge 0$. Нетрудно показать, что при $\alpha > 0$ для $g_n(\lambda)$ выполняются следующие условия:

$$\sup_{0\le\lambda\le M} |g_n(\lambda)| \le k(n\alpha)^{1/k}, n > 0,$$

$$\sup_{0\le\lambda\le M} |1 - \lambda g_n(\lambda)| \le 1, n > 0,$$

$$1 - \lambda g_n(\lambda) \to 0,\ n \to \infty,\ \forall\lambda \in (0, M],$$

$$\sup_{0\le\lambda\le M} \lambda^s |1 - \lambda g_n(\lambda)| \le \left(\frac{s}{2kn\alpha}\right)^{s/k}, n > 0,\ 0 \le s < \infty.$$

Аналогично подобным леммам из раздела 2.1 доказываются следующие леммы.

Лемма 3.6. *Пусть* $A = A^* \geq 0,\ \|A\| \leq M$. *Тогда для любого* $\omega \in H$ $(E - Ag_n(A))\omega \to 0,\ n \to \infty$.

Лемма 3.7. *Пусть* $A = A^* \geq 0,\ \|A\| \leq M$. *Тогда для* $\forall v \in \overline{R(A)}$ *имеет место соотношение* $n^{\frac{s}{k}} \left\| A^s (E - Ag_n(A))v \right\| \to 0$, *при* $n \to \infty,\ 0 \leq s < \infty$.

Лемма 3.8. *Пусть* $A = A^* \geq 0,\ \|A\| \leq M$. *Если для некоторой последовательности* $n_p < \bar{n} = const$ *и* $v_0 \in \overline{R(A)}$ *при* $p \to \infty$ *имеем* $\omega_p = A\left(E - Ag_{n_p}(A)\right)\upsilon_0 \to 0$, *то* $\upsilon_p = \left(E - Ag_{n_p}(A)\right)\upsilon_0 \to 0$.

Леммы 3.6–3.8 использовались при доказательстве теорем:

Теорема 3.13. *Пусть* $A = A^* \geq 0,\ \|A\| \leq M$ *и пусть момент останова* $m = m(\delta)$ *в методе* (3.19) *выбирается по правилу* (2.20), *тогда* $x_{m,\delta} \to x$ *при* $\delta \to 0$.

Теорема 3.14. *Пусть выполнены условия теоремы* 3.13 *и пусть* $x = A^s z,\ s > 0$. *Тогда справедливы оценки* $m(\delta) \leq 1 + \frac{s+1}{2k\alpha}\left[\frac{\|z\|}{(b-1)\delta}\right]^{k/(s+1)}$,

$$\left\| x_{m(\delta),\delta} - x \right\| \leq \left[(b+1)\delta\right]^{s/(s+1)} \|z\|^{1/(s+1)} +$$
$$+ k\alpha^{1/k} \left\{ 1 + \frac{s+1}{2k\alpha}\left[\frac{\|z\|}{(b-1)\delta}\right]^{k/(s+1)} \right\}^{1/k} \delta. \tag{3.20}$$

Доказательство теорем 3.13–3.14 аналогично доказательству подобных теорем из раздела 2.1.

Замечание 3.6. *Порядок оценки* (3.20) *есть* $O\left(\delta^{\frac{s}{s+1}}\right)$ *и, как следует из* [21], *он оптимален в классе задач с истокопредставимыми решениями* $x = A^s z,\ s > 0$.

Замечание 3.7. *Сведения о степени истокопредставимости* s *и истокопредставляющем элементе* z *на практике не потребуются. Их знание необходимо только для получения оценок из теоремы* 3.14.

3.2.5. Правило останова по соседним приближениям для уравнений с несамосопряженным оператором

Решаем уравнение $Ax = y$ с несамосопряженным оператором A. Используем неявную схему метода итераций

$$z_{n+1} = \left(E + \alpha\left(A^*A\right)^k\right)^{-1}\left[z_n + \alpha\left(A^*A\right)^{k-1}A^*y_\delta\right] +$$
$$+\left(E + \alpha\left(A^*A\right)^k\right)^{-1}u_n,\ z_0 \in H,\ k \in N. \qquad (3.21)$$

Здесь u_n – ошибки вычисления итераций, $\|u_n\| \le \beta$. Обозначим $C = \left(E + \alpha\left(A^*A\right)^k\right)^{-1}$, $B = \left(E + \alpha\left(A^*A\right)^k\right)^{-1}\alpha\left(A^*A\right)^{k-1}A^*$. Тогда метод (3.21) примет вид $z_{n+1} = Cz_n + By_\delta + Cu_n$, $z_0 \in H$ при приближенной правой части y_δ $\left(\|y - y_\delta\| \le \delta\right)$ и $w_{n+1} = Cw_n + By + Cu_n$, $w_0 \in H$ при точной правой части y. Определим момент m останова итерационного процесса условием (2.37). Аналогично подобным леммам из подраздела 2.1.5 доказываются леммы.

Лемма 3.9. *Пусть приближение* w_n *определяется равенствами* $w_0 = z_0,$ $w_{n+1} = Cw_n + By + Cu_n$, $n \ge 0$, *тогда справедливо неравенство*

$$\sum_{k=0}^{n}\|w_k - w_{k+1} + Cu_k\|^2 \le \|w_0 - x\|^2 + \sum_{k=0}^{n-1}\|Cu_k\|^2.$$

Лемма 3.10. *При любом* $w_0 \in H$ *и произвольной последовательности ошибок* $\{u_n\}$, *удовлетворяющих условию* $\|u_n\| \le \beta$, *выполнено неравенство* $\varliminf_{n\to\infty}\|w_n - w_{n+1}\| \le 2\|C\|\beta.$

При использовании лемм 3.9–3.10 аналогично, как в подразделе 2.1.5, доказано, что метод итераций (3.21) с правилом останова по соседним приближениям (2.37) сходится, и получена оценка для момента останова. Справедлива

Теорема 3.15. *Пусть уровень останова* $\varepsilon = \varepsilon(\delta, \beta)$ *выбирается как функция от уровней* δ *и* β *норм погрешностей* $y - y_\delta$ *и* u_n. *Тогда справедливы следующие утверждения:*

а) если $\varepsilon(\delta, \beta) > 2\|C\|\beta$, *то момент останова* m *определен при любом начальном приближении* $z_0 \in H$ *и любых* y_δ *и* u_n, *удовлетворяющих условиям* $\|y - y_\delta\| \le \delta, \|u_n\| \le \beta$;

б) если $\varepsilon(\delta, \beta) > \|B\|\delta + 2\|C\|\beta$, *то справедлива оценка*

$$m \le \frac{\|z_0 - x\|^2}{\left(\varepsilon - \|B\|\delta - 2\|C\|\beta\right)\left(\varepsilon - \|B\|\delta\right)};$$

в) если, кроме того, $\varepsilon(\delta,\beta) \to 0,\ \ \delta,\beta \to 0$ *и* $\varepsilon(\delta,\beta) \ge d\left(\|B\|\delta + \|C\|\beta^p\right),$ *где* $d > 1,\ p \in (0,\ 1),$ *то* $\lim\limits_{\delta,\beta \to 0} \|z_m - x\| = 0.$

3.3. Итерационный метод неявного типа решения операторных уравнений первого рода в гильбертовом пространстве

3.3.1. Сходимость метода в случае априорного выбора числа итераций

Решается уравнение $Ax = y$ из раздела 2.1. Предлагается семейство неявных итерационных схем, зависящих от параметра k:

$$\left(E+\alpha^2 A^{2k}\right)x_{n+1}=\left(E-\alpha A^k\right)^2 x_n+2\alpha A^{k-1}y,\ x_0=0,\ k\in N. \qquad (3.22)$$

В случае приближенной правой части y_δ $\left(\|y-y_\delta\|\le\delta\right)$ соответствующие методу (3.22) итерации примут вид

$$\left(E+\alpha^2 A^{2k}\right)x_{n+1,\delta}=\left(E-\alpha A^k\right)^2 x_{n,\delta}+2\alpha A^{k-1}y_\delta,\ x_{0,\delta}=0,\ k\in N. \quad (3.23)$$

Ниже, как обычно, под сходимостью метода (3.23) понимается утверждение о том, что приближения (3.23) сколь угодно близко подходят к точному решению уравнения при подходящем выборе n и достаточно малых δ. Иными словами, метод итераций (3.23) является сходящимся, если $\lim\limits_{\delta\to 0}\left(\inf\limits_n\left\|x-x_{n,\delta}\right\|\right)=0$.

3.3.1.1. Сходимость при точной правой части

Воспользовавшись интегральным представлением положительно определенного самосопряженного оператора A и формулой (3.22), по индукции получим $x-x_n=\int\limits_0^M\lambda^{-1}\frac{\left(1-\alpha\lambda^k\right)^{2n}}{\left(1+\alpha^2\lambda^{2k}\right)^n}dE_\lambda y$, где $M=\|A\|$, E_λ – спектральная функция оператора A. Отсюда легко выводится сходимость процесса (3.22) при $n\to\infty$ для $\alpha>0$.

3.3.1.2. Сходимость при приближенной правой части

Итерационный процесс (3.23) является сходящимся, если нужным образом выбирать число итераций n в зависимости от уровня погрешности δ. Справедлива

Теорема 3.16. *Итерационный процесс* (3.23) *сходится при* $\alpha>0$, *если выбирать число итераций* n *в зависимости от* δ *так, чтобы* $n^{1/k}\delta\to 0$ *при* $n\to\infty,\delta\to 0$.

Доказательство теоремы аналогично доказательству подобной теоремы из раздела 3.1. При этом легко показать, что $\left\|x_n-x_{n,\delta}\right\|\le 2k(n\alpha)^{1/k}\delta,\ n\ge 1$.

3.3.1.3. Оценка погрешности метода

Скорость сходимости метода (3.23) будем оценивать при дополнительном предположении о возможности истокообразного представления точного решения x уравнения (2.1), т. е. $x = A^s z,\ s > 0.$ Тогда $y = A^{s+1} z$ и, следовательно, получим $x - x_n = \int_0^M \lambda^s \frac{\left(1-\alpha\lambda^k\right)^{2n}}{\left(1+\alpha^2\lambda^{2k}\right)^n} dE_\lambda z.$ Для оценки $\|x - x_n\|$ найдем максимум модуля подынтегральной функции $f(\lambda) = \lambda^s \frac{\left(1-\alpha\lambda^k\right)^{2n}}{\left(1+\alpha^2\lambda^{2k}\right)^n}.$

Нетрудно показать, что при условии $\alpha > 0$ справедливо неравенство $\|x - x_n\| \le s^{s/k}\left(2kn\alpha e\right)^{-s/k}\|z\|.$ Таким образом, общая оценка погрешности неявного итерационного метода (3.23) запишется в виде $\left\|x - x_{n,\delta}\right\| \le$ $\le \left\|x - x_n\right\| + \left\|x_n - x_{n,\delta}\right\| \le s^{s/k}\left(2kn\alpha e\right)^{-s/k}\|z\| + 2k(n\alpha)^{1/k}\delta,\ n \ge 1.$ Для минимизации оценки погрешности вычислим ее правую часть в точке, в которой производная от нее равна нулю; в результате получим априорный момент останова $n_{\text{опт}} = s^{\frac{s+k}{s+1}}\left(2k\right)^{-\frac{s+k}{s+1}}\alpha^{-1}e^{-\frac{s}{s+1}}\delta^{-\frac{k}{s+1}}\|z\|^{\frac{k}{s+1}}$ и оптимальную оценку погрешности

$$\left\|x - x_{n,\delta}\right\|_{\text{опт}} \le (1+s)\left(\frac{s}{k}\right)^{\frac{s(1-k)}{k(s+1)}} e^{-\frac{s}{k(s+1)}}\delta^{\frac{s}{s+1}}\|z\|^{\frac{1}{s+1}}. \qquad (3.24)$$

Замечание 3.8. *Оценка погрешности* (3.24) *имеет порядок* $O\left(\delta^{s/(s+1)}\right)$, *и, как следует из* [21], *он является оптимальным в классе задач с истокообразно представимыми решениями* $x = A^s z,\ s > 0.$

Замечание 3.9. *Оптимальная оценка* (3.24) *не зависит от* α, *но от параметра* α *зависит* $n_{опт}$, *поэтому для уменьшения числа итераций для получения приближенного решения следует брать* α, *удовлетворяющим условию* $\alpha > 0$ *и так, чтобы* $n_{опт} = 1.$ *Для этого достаточно выбрать* $\alpha_{опт} = s^{\frac{s+k}{s+1}}\left(2k\right)^{-\frac{s+k}{s+1}} e^{-\frac{s}{s+1}}\delta^{-\frac{k}{s+1}}\|z\|^{\frac{k}{s+1}}.$

Оценку $\left\|x - x_{n,\delta}\right\|_{\text{опт}}$ можно оптимизировать по k. Для этого производную по k от $\varphi(k) = (s/k)^{\frac{s(1-k)}{k(s+1)}} e^{\frac{-s}{k(s+1)}}$ приравняем к нулю. Получим, $(s/k)^{\frac{s(1-k)}{k(s+1)}} e^{\frac{-s}{k(s+1)}} \cdot \frac{s}{k^2(s+1)} \cdot \left(k - \ln\frac{s}{k}\right) = 0$. Отсюда видно, что оптимальное

k должно удовлетворять равенству $k = \ln \frac{s}{k}$. Но $k \in N$, поэтому, как показывают расчеты, для $s \le 5$ $k_{\text{опт}} = 1$, для $6 \le s \le 27$ $k_{\text{опт}} = 2$.

Приведем погрешность метода (3.23) при счете с округлениями. Пусть $x_{n,\delta}$ – точное значение, полученное по формуле (3.23), а z_n – значение, полученное по той же формуле с учетом погрешностей вычисления γ_n, т. е. $z_{n+1} = \left(E + \alpha^2 A^{2k}\right)^{-1}\left[\left(E - \alpha A^k\right)^2 z_n + 2\alpha A^{k-1} y_\delta\right] + \alpha\gamma_n,\ z_0 = 0.$

Оценка погрешности метода (3.23) в этом случае имеет вид

$$\|x - z_n\| \le \|x - x_{n,\delta}\| + \|x_{n,\delta} - z_n\| \le s^{s/k}(2kn\alpha e)^{-s/k}\|z\| + 2k(n\alpha)^{1/k}\delta + n\alpha\gamma, \quad n \ge 1,$$

где $\gamma = \sup\limits_i |\gamma_i|$.

3.3.2. Сходимость метода в случае неединственного решения

Пусть теперь 0 – собственное значение оператора A (т.е. уравнение $Ax = y$ имеет неединственное решение). Положим $N(A) = \{x \in H \,|\, Ax = 0\}$, и пусть $M(A)$ – ортогональное дополнение ядра $N(A)$ до H. Пусть далее $P(A)x$ – проекция $x \in H$ на $N(A)$, а $\Pi(A)x$ – проекция $x \in H$ на $M(A)$. Справедлива

Теорема 3.17. Пусть $A \ge 0, y \in H, \alpha > 0$. *Тогда для итерационного процесса* (3.22) *верны следующие утверждения:*

а) $Ax_n \to \Pi(A)y$, $\|Ax_n - y\| \to I(A, y) = \inf\limits_{x \in H}\|Ax - y\|$;

б) *метод* (3.22) *сходится тогда и только тогда, когда уравнение* $Ax = \Pi(A)y$ *разрешимо. В последнем случае* $x_n \to P(A)x_0 + x^*$, *где* x^* – *минимальное решение уравнения.*

Доказательство теоремы аналогично доказательству подобной теоремы из раздела 3.1. Т. к. $x_0 = 0$, то $x_n \to x^*$, т. е. процесс (3.22) сходится к нормальному решению, т. е. к решению с минимальной нормой.

3.3.3. Сходимость метода в энергетической норме

Здесь и ниже предполагается, что решение уравнения (2.1) единственно. Изучим сходимость метода (3.23) в энергетической норме гильбертова пространства $\|x\|_A = \sqrt{(Ax, x)}$, где $x \in H$. При этом, как обычно, число итераций n нужно выбирать в зависимости от уровня погрешности δ. Полагаем $x_{0,\delta} = 0$ и рассмотрим разность $x - x_{n,\delta} = (x - x_n) + (x_n - x_{n,\delta})$. С помощью интегрального представления самосопряженного оператора A получим $\|x-x_n\|_A^2 = \int\limits_0^M \lambda\left(1-\alpha\lambda^k\right)^{4n}\left(1+\alpha^2\lambda^{2k}\right)^{-2n} d\left(E_\lambda x, x\right)$ и $\|x_n - x_{n,\delta}\|_A^2 =$

$= \int\limits_0^M \lambda^{-1}\left[1-\dfrac{\left(1-\alpha\lambda^k\right)^{2n}}{\left(1+\alpha^2\lambda^{2k}\right)^n}\right]^2 d\left(E_\lambda\left(y-y_\delta\right), y-y_\delta\right)$, где $M=\|A\|$. Оценив подынтегральные функции, получим при условии $\alpha>0$ оценку погрешности для метода (3.23) в энергетической норме

$$\|x-x_{n,\delta}\|_A \le \left(4kn\alpha e\right)^{-1/(2k)}\|x\| + 2^{1/2}k^{1/2}\left(n\alpha\right)^{1/(2k)}\delta,\ \ n\ge 1.$$

Следовательно, если в процессе (3.23) выбирать число итераций $n=n(\delta)$, зависящим от δ так, чтобы $n^{1/(2k)}\delta\to 0,\ n\to\infty,\ \delta\to 0$, то получим метод, обеспечивающий сходимость к точному решению в энергетической норме. Итак, справедлива

Теорема 3.18. *При условии* $\alpha>0$ *итерационный метод* (3.23) *сходится в энергетической норме гильбертова пространства, если число итераций n выбирать из условия* $n^{1/(2k)}\delta\to 0,\ n\to\infty,\ \delta\to 0$. *Для итерационного метода* (3.23) *справедлива оценка погрешности* $\|x-x_{n,\delta}\|_A \le \left(4kn\alpha e\right)^{-1/(2k)}\|x\| + 2^{1/2}k^{1/2}\left(n\alpha\right)^{1/(2k)}\delta,\ \ n\ge 1$.

Для минимизации оценки погрешности вычислим ее правую часть в точке, в которой производная от нее равна нулю; в результате получим $\|x-x_{n,\delta}\|_A^{\text{опт}} \le 2^{(5k-2)/(4k)}k^{(k-1)/(4k)}e^{-1/(4k)}\delta^{1/2}\|x\|^{1/2}$ и $n_{\text{опт}} = 2^{-(k+2)/2}k^{-(k+1)/2}\alpha^{-1}e^{-1/2}\delta^{-k}\|x\|^k$.

Отметим тот факт, что для сходимости метода (3.23) в энергетической норме достаточно выбирать число итераций $n=n(\delta)$ так, чтобы $n^{1/(2k)}\delta\to 0, n\to\infty, \delta\to 0.$ Однако $n_{\text{опт}}=O\left(\delta^{-k}\right)$ т. е. $n_{\text{опт}}$ относительно δ имеет порядок δ^{-k}, и такой порядок обеспечивает сходимость метода итераций (3.23).

Таким образом, использование энергетической нормы позволило получить априорную оценку погрешности для метода (3.23) и априорный момент останова $n_{\text{опт}}$ без дополнительного требования истокообразной представимости точного решения, что делает метод (3.23) эффективным и тогда, когда нет сведений об истокопредставимости точного решения x уравнения $Ax = y$.

Рассмотрим вопрос о том, когда из сходимости в энергетической норме следует сходимость в обычной норме гильбертова пространства H.

Очевидно, для этого достаточно, чтобы при некотором фиксированном $\varepsilon, \left(0 < \varepsilon < \|A\|\right)$ было: $P_\varepsilon x = 0,\ P_\varepsilon x_{n,\delta} = 0$, где $P_\varepsilon = \int\limits_0^\varepsilon dE_\lambda$. Т. к.

$$x_{n,\delta} = A^{-1}\left[E - \left(E + \alpha^2 A^{2k}\right)^{-n}\left(E - \alpha A^k\right)^{2n}\right] y_\delta,$$

то для выполнения последнего из указанных условий должно выполняться условие $P_\varepsilon y_\delta = 0$. Таким образом, если решение x и приближенная правая часть y_δ таковы, что $P_\varepsilon x = 0$ и $P_\varepsilon y_\delta = 0$, то из сходимости $x_{n,\delta}$ к x в энергетической норме вытекает сходимость в исходной норме гильбертова пространства *H,* и, следовательно, для сходимости в исходной норме пространства *H* не требуется истокопредставимость точного решения.

3.3.4. Правило останова по невязке

Априорный выбор числа итераций n получен в предположении, что точное решение x уравнения $Ax = y$ истокообразно представимо. Однако обычно сведения об истокообразности искомого решения неизвестны, и тем самым приведенные в подразделе 3.3.1 оценки погрешности оказываются неприменимыми. Тем не менее метод (3.23) можно сделать вполне эффективным, если воспользоваться правилом останова по невязке (2.20).

Предположим, что при начальном приближении невязка достаточно велика, а именно больше уровня останова, т. е. $\left\|Ax_{0,\delta} - y_\delta\right\| > \varepsilon$. Покажем возможность применения правила (2.20) к методу (3.23). Рассмотрим семейство функций $g_n(\lambda) = \lambda^{-1}\left[1 - \dfrac{\left(1-\alpha\lambda^k\right)^{2n}}{\left(1+\alpha^2\lambda^{2k}\right)^n}\right] \ge 0$. Нетрудно показать, что при $\alpha > 0$ для $g_n(\lambda)$ выполняются следующие условия

$$\sup_{0\le\lambda\le M} \left|g_n(\lambda)\right| \le 2k(n\alpha)^{1/k},\ n > 0,$$

$$\sup_{0\le\lambda\le M} \left|1 - \lambda g_n(\lambda)\right| \le 1,\ n > 0,$$

$$1 - \lambda g_n(\lambda) \to 0,\ \ n \to \infty, \forall\lambda \in \left(0,\, M\right],$$

$$\sup_{0\le\lambda\le M} \lambda^s\left|1 - \lambda g_n(\lambda)\right| \le s^{s/k}(2kn\alpha e)^{-s/k},\ n > 0,\ 0 \le s < \infty.$$

Аналогично подобным леммам из раздела 2.1 доказываются следующие леммы.

Лемма 3.11. *Пусть* $A = A^* \ge 0,\ \ \|A\| \le M$. *Тогда для любого* $\omega \in H$ $(E - Ag_n(A))\omega \to 0,\ n \to \infty.$

Лемма 3.12. *Пусть* $A = A^* \geq 0,\ \|A\| \leq M$. *Тогда для* $\forall v \in \overline{R(A)}$ *имеет место соотношение* $n^{\frac{s}{k}} \left\| A^s (E - Ag_n(A)) v \right\| \to 0,$ *при* $n \to \infty, 0 \leq s < \infty.$

Лемма 3.13. *Пусть* $A = A^* \geq 0,\ \|A\| \leq M$. *Если для некоторой последовательности* $n_p < \bar{n} = const$ *и* $v_0 \in \overline{R(A)}$ *при* $p \to \infty$ *имеем* $\omega_p = A\left(E - Ag_{n_p}(A)\right)\upsilon_0 \to 0,$ *то* $\upsilon_p = \left(E - Ag_{n_p}(A)\right)\upsilon_0 \to 0.$

Леммы 3.11–3.13 использовались при доказательстве теорем:

Теорема 3.19. *Пусть* $A = A^* \geq 0,\ \|A\| \leq M$ *и пусть момент останова* $m = m(\delta)$ *в методе* (3.23) *выбирается по правилу* (2.20), *тогда* $x_{m,\delta} \to x$ *при* $\delta \to 0$.

Теорема 3.20. *Пусть выполнены условия теоремы* 3.19 *и пусть* $x = A^s z,\ s > 0$. *Тогда справедливы оценки* $m \leq 1 + \frac{s+1}{2k\alpha e}\left[\frac{\|z\|}{(b-1)\delta}\right]^{k/(s+1)}$,

$$\left\| x_{m,\delta} - x \right\| \leq \left[(b+1)\delta\right]^{s/(s+1)} \|z\|^{1/(s+1)} + 2k\alpha^{1/k}\left\{1 + \frac{s+1}{2k\alpha e}\left[\frac{\|z\|}{(b-1)\delta}\right]^{k/(s+1)}\right\}^{1/k} \delta. \quad (3.25)$$

Доказательство теорем 3.19–3.20 аналогично доказательству подобных теорем из раздела 2.1.

Замечание 3.10. *Порядок оценки* (3.25) *есть* $O\left(\delta^{\frac{s}{s+1}}\right)$, *и как следует из* [21], *он оптимален в классе задач с истокообразно представимыми решениями* $x = A^s z,\ s > 0$.

Замечание 3.11. *Хотя формулировка теоремы* 3.20 *дается с указаниями степени истокопредставимости* s *и истокопредставляющего элемента* z, *на практике их значение не потребуется, т. к. они не содержатся в правиле останова* (2.20). *И тем не менее в теореме* 3.20 *утверждается, что будет автоматически выбрано количество итераций* m, *обеспечивающее оптимальный порядок погрешности. Но даже если истокопредставимость точного решения отсутствует, останов по невязке* (2.20), *как показывает теорема* 3.19, *обеспечивает сходимость метода.*

3.3.5. Правило останова по соседним приближениям для уравнений с несамосопряженным оператором

Решаем уравнение $Ax = y$ с несамосопряженным оператором A. Используем неявную схему метода итераций

$$z_{n+1}=\left(E+\alpha^2\left(A^*A\right)^{2k}\right)^{-1}\left[\left(E-\alpha\left(A^*A\right)^k\right)^2 z_n+2\alpha\left(A^*A\right)^{k-1}A^*y_\delta\right]+$$

$$+\left(E-\alpha\left(A^*A\right)^k\right)^2\left(E+\alpha^2\left(A^*A\right)^{2k}\right)^{-1}u_n,\ z_0\in H,\ k\in N. \qquad (3.26)$$

Здесь u_n – ошибки вычисления итераций, $\|u_n\|\le\beta$. Обозначим $C=\left(E+\alpha^2\left(A^*A\right)^{2k}\right)^{-1}\left(E-\alpha\left(A^*A\right)^k\right)^2$, $B=\left(E+\alpha^2\left(A^*A\right)^{2k}\right)^{-1}2\alpha\left(A^*A\right)^{k-1}A^*$. Тогда метод (3.26) примет вид $z_{n+1}=Cz_n+By_\delta+Cu_n$, $z_0\in H$ при приближенной правой части y_δ $\left(\|y-y_\delta\|\le\delta\right)$ и $w_{n+1}=Cw_n+By+Cu_n$, $w_0\in H$ при точной правой части y. Определим момент m останова метода (3.26) условием (2.37).

Аналогично подобным леммам из раздела 2.1 доказываются леммы.

Лемма 3.14. *Пусть приближение* w_n *определяется равенствами* $w_0=z_0,$ $w_{n+1}=Cw_n+By+Cu_n$, $n\ge 0$, *тогда справедливо неравенство*

$$\sum_{k=0}^{n}\|w_k-w_{k+1}+Cu_k\|^2\le\|w_0-x\|^2+\sum_{k=0}^{n-1}\|Cu_k\|^2.$$

Лемма 3.15. *При любом* $w_0\in H$ *и произвольной последовательности ошибок* $\{u_n\}$, *удовлетворяющих условию* $\|u_n\|\le\beta$, *выполнено неравенство* $\varliminf_{n\to\infty}\|w_n-w_{n+1}\|\le 2\|C\|\beta.$

При использовании лемм 3.14–3.15 аналогично, как в разделе 2.1, доказано, что метод (3.26) с правилом останова (2.37) сходится, и получена оценка для момента останова. Справедлива

Теорема 3.21. *Пусть уровень останова* $\varepsilon=\varepsilon(\delta,\beta)$ *выбирается как функция от уровней* δ *и* β *норм погрешностей* $y-y_\delta$ *и* u_n. *Тогда справедливы следующие утверждения:*

а) если $\varepsilon(\delta,\beta)>2\|C\|\beta$, *то момент останова* m *определен при любом начальном приближении* $z_0\in H$ *и любых* y_δ *и* u_n, *удовлетворяющих условиям* $\|y-y_\delta\|\le\delta,\|u_n\|\le\beta$;

б) если $\varepsilon(\delta,\beta)>\|B\|\delta+2\|C\|\beta$, *то* $m\le\dfrac{\|z_0-x\|^2}{\left(\varepsilon-\|B\|\delta-2\|C\|\beta\right)\left(\varepsilon-\|B\|\delta\right)}$;

в) если, кроме того, $\varepsilon(\delta,\beta)\to 0$, $\delta,\beta\to 0$ *и* $\varepsilon(\delta,\beta)\ge d\left(\|B\|\delta+\|C\|\beta^p\right)$, *где* $d>1$, $p\in(0,\ 1)$, *то* $\lim\limits_{\delta,\beta\to 0}\|z_m-x\|=0.$

3.4. Регуляризация некорректных задач с неограниченным оператором при помощи итерационного метода неявного типа в гильбертовом пространстве

В разделе предлагается неявный итерационный метод решения некорректных задач, представляющий собой семейство итерационных схем, зависящих от параметра k. Для этого метода исследована сходимость в исходной и энергетической нормах гильбертова пространства, получены оценки погрешности и априорный момент останова, изучен случай неединственного решения, обоснована возможность применения правил останова в процессе вычислений.

В действительном гильбертовом пространстве H исследуется операторное уравнение первого рода $Ax = y$, где A – неограниченный линейный самосопряженный оператор, для которого нуль не является собственным значением, однако принадлежит спектру оператора A, и, следовательно, задача некорректна. Пусть $y \in R(A)$, т. е. предполагаем, что при точной правой части y уравнение $Ax = y$ имеет единственное решение x. Для нахождения этого решения предлагается итерационная процедура неявного типа

$$\left(A^{2k} + B\right)x_{n+1} = Bx_n + A^{2k-1}y,\ x_0 = 0,\ k \in N. \qquad (3.27)$$

Здесь B – ограниченный вспомогательный самосопряженный оператор, который выбирается для улучшения обусловленности. В качестве B возьмем оператор $B = bE,\ b > 0,\ E -$тождественный оператор.

В случае приближенной правой части y_δ $\left(\|y - y_\delta\| \le \delta\right)$ соответствующие методу (3.27) приближения примут вид

$$\left(A^{2k} + B\right)x_{n+1,\delta} = Bx_{n,\delta} + A^{2k-1}y_\delta,\ x_{0,\delta} = 0,\ k \in N. \qquad (3.28)$$

Ниже, как обычно, под сходимостью метода (3.28) понимается утверждение о том, что приближения (3.28) сколь угодно близко подходят к точному решению уравнения при подходящем выборе n и достаточно малых δ.

3.4.1. Сходимость и оценки погрешности метода в случае априорного выбора числа итераций

Воспользовавшись интегральным представлением неограниченного самосопряженного оператора A и формулой (3.27), по индукции получим

$x - x_n = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \lambda^{-1} \dfrac{b^n}{\left(\lambda^{2k} + b\right)^n} dE_\lambda y$, где $E_\lambda -$ спектральная функция оператора A.

Отсюда легко выводится сходимость процесса (3.27) при $n \to \infty$ для $b > 0$.

Итерационный процесс (3.28) является сходящимся, если нужным образом выбирать число итераций n в зависимости от уровня погрешности δ. Справедлива

Теорема 3.21. *Итерационный процесс* (3.28) *сходится при* $b>0$, *если выбирать число итераций* n *в зависимости от* δ *так, чтобы* $n^{1/(2k)}\delta\to 0$ *при* $n\to\infty, \delta\to 0.$

Доказательство теоремы аналогично доказательству подобной теоремы из раздела 3.1. При этом показывается оценка: $\left\|x_n - x_{n,\delta}\right\| \le 2k\left(\frac{n}{b}\right)^{1/(2k)}\delta,\ n\ge 1.$

Скорость сходимости метода (3.28) будем оценивать при дополнительном предположении о возможности истокообразного представления точного решения x уравнения $Ax = y$, т. е. $x = A^{2s}z,\ s>0.$ Тогда $y = A^{2s+1}z$ и, следовательно, получим $x - x_n = \int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{\lambda^{2s}b^n}{\left(\lambda^{2k}+b\right)^n}dE_\lambda z.$ Для оценки $\left\|x-x_n\right\|$ найдем максимум модуля подынтегральной функции $f(\lambda)=\frac{\lambda^{2s}b^n}{\left(\lambda^{2k}+b\right)^n}.$ Нетрудно показать, что при условии $b>0$ справедливо неравенство $\left\|x-x_n\right\|\le\left(\frac{bs}{2kn}\right)^{s/k}\left\|z\right\|.$ Таким образом, общая оценка погрешности метода итераций (3.28) запишется в виде

$$\left\|x-x_{n,\delta}\right\|\le\left\|x-x_n\right\|+\left\|x_n-x_{n,\delta}\right\|\le\left(\frac{bs}{2kn}\right)^{s/k}\left\|z\right\|+2k\left(\frac{n}{b}\right)^{1/(2k)}\delta,\ n\ge 1.$$

Для минимизации оценки погрешности вычислим ее правую часть в точке, в которой производная от нее равна нулю; в результате получим априорный момент останова $n_{\text{опт}} = 2^{-\frac{2s}{2s+1}}\left(\frac{s}{k}\right)^{\frac{2(s+k)}{2s+1}}b\delta^{-\frac{2k}{2s+1}}\left\|z\right\|^{\frac{2k}{2s+1}}$ и оптимальную оценку погрешности

$$\left\|x-x_{n,\delta}\right\|_{\text{опт}}\le(1+2s)\left(\frac{s}{k}\right)^{\frac{s(1-2k)}{k(2s+1)}}2^{-\frac{s}{k(2s+1)}}\delta^{\frac{2s}{2s+1}}\left\|z\right\|^{\frac{1}{2s+1}}. \qquad (3.29)$$

Замечание 3.12. *Оценка погрешности* (3.29) *имеет порядок* $O\left(\delta^{2s/(2s+1)}\right)$ *и, как следует из* [21], *он является оптимальным в классе задач с истокообразно представимыми решениями* $x = A^{2s}z,\ s>0.$

Замечание 3.13. *Оптимальная оценка* (3.29) *не зависит от итерационного параметра* b*, но от параметра* b *зависит* $n_{опт}$*, поэтому для уменьшения числа итераций для получения приближенного решения следует брать* b*, удовлетворяющим условию* $b > 0$*, и так, чтобы* $n_{опт} = 1$*. Для этого достаточно выбрать* $b_{опт} = 2^{\frac{2s}{2s+1}} \left(\frac{s}{k}\right)^{-\frac{2(s+k)}{2s+1}} \delta^{\frac{2k}{2s+1}} \|z\|^{-\frac{2k}{2s+1}}$.

Оценку $\|x - x_{n,\delta}\|_{\text{опт}}$ можно оптимизировать по k. Для этого производную по k от $\varphi(k) = (s/k)^{\frac{s(1-2k)}{k(2s+1)}} 2^{\frac{-s}{k(2s+1)}}$ приравняем к нулю. Получим $(s/k)^{\frac{s(1-2k)}{k(2s+1)}} 2^{\frac{-s}{k(2s+1)}} \cdot \dfrac{s}{k^2(2s+1)} \cdot \left(-\ln\dfrac{s}{k} - 1 + 2k + \ln 2\right) = 0$. Отсюда видно, что оптимальное k должно удовлетворять равенству $1 - 2k = \ln\dfrac{2k}{s}$ или $s = 2ke^{2k-1}$. Но $k \in N$, поэтому, как показывают расчеты, для $s \le 21$ $k_{\text{опт}} = 1$, для $22 \le s \le 214$ $k_{\text{опт}} = 2$.

Приведем погрешность метода (3.28) при счете с округлениями. Пусть $x_{n,\delta}$ – точное значение, полученное по формуле (3.28), а z_n – значение, полученное по той же формуле с учетом погрешностей вычисления γ_n, т. е. $z_{n+1} = \left(A^{2k} + B\right)^{-1}\left[Bz_n + A^{2k-1}y_\delta\right] + \dfrac{1}{b}\gamma_n, \quad z_0 = 0.$

Оценка погрешности метода (3.28) в этом случае имеет вид

$$\|x - z_n\| \le \|x - x_{n,\delta}\| + \|x_{n,\delta} - z_n\| \le \left(\frac{bs}{2kn}\right)^{s/k} \|z\| + 2k\left(\frac{n}{b}\right)^{1/(2k)} \delta + \frac{n}{b}\gamma, \quad n \ge 1,$$

где $\gamma = \sup\limits_i |\gamma_i|$.

Сравнение предлагаемого метода с хорошо известным явным методом итераций Ландвебера показывает, что порядки их оптимальных оценок совпадают. Достоинство явных методов в том, что они не требуют обращения оператора, им необходимы только вычисления значений оператора на последовательных приближениях. В этом смысле явный метод Ландвебера предпочтительнее предлагаемого неявного метода. Однако предложенный неявный метод обладает следующим важным достоинством. В явном методе (3.10) на шаг α накладывается ограничение сверху – неравенство $0 < \alpha \le \dfrac{5}{4\|A\|}$, что может на практике привести к необходимости большого числа итераций. В рассматриваемом неявном методе никаких ограничений сверху на $b > 0$ нет. В связи с чем оптимальную оценку для рассматриваемого неявного метода можно получить уже на первых шагах итераций. Более того, предложенный неявный метод, в отличии от метода Ландвебера и других явных и неявных методов, позволяет решать уравнения с неограниченным оператором и притом необязательно положительным.

3.4.2. Сходимость метода в случае неединственного решения

Пусть теперь 0 – собственное значение оператора A (т. е. уравнение $Ax = y$ имеет неединственное решение). Положим $N(A) = \{x \in H \,|\, Ax = 0\}$, и пусть $M(A)$ – ортогональное дополнение ядра $N(A)$ до H. Пусть далее $P(A)x$ – проекция $x \in H$ на $N(A)$, а $\Pi(A)x$ – проекция $x \in H$ на $M(A)$. Справедлива

Теорема 3.22. Пусть $A = A^* \ge 0$, $\|A\| \le M$, $y \in H, b > 0$. *Тогда для итерационного процесса* (3.27) *верны следующие утверждения:*

а) $Ax_n \to \Pi(A)y$, $\|Ax_n - y\| \to I(A, y) = \inf\limits_{x \in H} \|Ax - y\|$;

б) *метод* (3.27) *сходится тогда и только тогда, когда уравнение* $Ax = \Pi(A)y$ *разрешимо. В последнем случае* $x_n \to P(A)x_0 + x^*$, *где* x^* – *минимальное решение уравнения.*

Доказательство теоремы аналогично доказательству подобной теоремы из раздела 3.1. Т. к. $x_0 = 0$, то $x_n \to x^*$, т. е. процесс (3.27) сходится к нормальному решению, т. е. к решению с минимальной нормой.

3.4.3. Сходимость метода в энергетической норме

Здесь и ниже предполагается, что решение уравнения $Ax = y$ единственно. Изучим сходимость метода (3.28) в энергетической норме гильбертова пространства $\|x\|_A = \sqrt{(Ax, x)}$, где $x \in H$. При этом, как обычно, число итераций n нужно выбирать в зависимости от уровня погрешности δ. Полагаем $x_{0,\delta} = 0$ и рассмотрим разность $x - x_{n,\delta} = (x - x_n) + (x_n - x_{n,\delta})$. С помощью интегрального представления самосопряженного оператора A получим $\|x - x_n\|_A^2 = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \lambda \left(\dfrac{b}{\lambda^{2k} + b} \right)^{2n} d(E_\lambda x, x)$ и $\|x_n - x_{n,\delta}\|_A^2 =$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \lambda^{-1} \left[1 - \frac{b^n}{\left(\lambda^{2k} + b\right)^n} \right]^2 d\left(E_\lambda \left(y - y_\delta\right), y - y_\delta\right).$$ Оценив подынтегральные функции, получим при условии $b > 0$ оценку погрешности для неявного метода итераций (3.28) в энергетической норме

$$\left\| x - x_{n,\delta} \right\|_A \le \left(\frac{b}{8kn} \right)^{1/(4k)} \|x\| + (2k)^{1/2} \left(\frac{n}{b} \right)^{1/(4k)} \delta, \ n \ge 1.$$

Следовательно, если в процессе (3.28) выбирать число итераций $n = n(\delta)$, зависящим от δ так, чтобы $n^{1/(4k)}\delta \to 0, \ n \to \infty, \ \delta \to 0$, то получим метод, обеспечивающий сходимость к точному решению в энергетической норме. Справедлива

Теорема 3.23. *При условии* $b > 0$ *итерационный метод* (3.28) *сходится в энергетической норме гильбертова пространства, если число итераций* n *выбирать из условия* $n^{1/(4k)}\delta \to 0, \ n \to \infty, \ \delta \to 0$. *Для метода итераций* (3.28) *справедлива оценка погрешности* $\left\| x - x_{n,\delta} \right\|_A \le \left(\frac{b}{8kn} \right)^{1/(4k)} \|x\| + (2k)^{1/2} \left(\frac{n}{b} \right)^{1/(4k)} \delta, \ n \ge 1.$

Для минимизации оценки погрешности вычислим ее правую часть в точке, в которой производная от нее равна нулю; в результате получим $\left\| x - x_{n,\delta} \right\|_A^{\text{опт}} \le 2^{(10k-3)/(8k)} k^{(2k-1)/(8k)} \delta^{1/2} \|x\|^{1/2}$ и априорный момент останова $n_{\text{опт}} = 2^{-(2k+3)/2} k^{-(2k+1)/2} b \delta^{-2k} \|x\|^{2k}$.

Отметим тот факт, что для сходимости метода (3.28) в энергетической норме достаточно выбирать число итераций $n = n(\delta)$ так, чтобы $n^{1/(4k)}\delta \to 0, \ n \to \infty, \ \delta \to 0$. Однако $n_{\text{опт}} = O\left(\delta^{-2k}\right)$, т. е. $n_{\text{опт}}$ относительно δ имеет порядок δ^{-2k}, и такой порядок обеспечивает сходимость метода (3.28).

Таким образом, использование энергетической нормы позволило получить априорную оценку погрешности для метода (3.28) и априорный момент останова $n_{\text{опт}}$ без дополнительного требования истокообразной представимости точного решения, что делает метод (3.28) эффективным и тогда, когда нет сведений об истокопредставимости точного решения x уравнения (2.1).

Рассмотрим вопрос о том, когда из сходимости в энергетической норме следует сходимость в обычной норме гильбертова пространства H.

Очевидно, для этого достаточно, чтобы при некотором фиксированном $\varepsilon, \left(0<\varepsilon<\|A\|\right)$ было: $P_\varepsilon x=0,\ P_\varepsilon x_{n,\delta}=0,$ где $P_\varepsilon=\int\limits_0^\varepsilon dE_\lambda$. Т. к.

$$x_{n,\delta}=A^{-1}\left[E-B^n\left(A^{2k}+B\right)^{-n}\right]y_\delta,$$

то для выполнения последнего из указанных условий должно выполняться условие $P_\varepsilon y_\delta=0.$ Таким образом, если решение x и приближенная правая часть y_δ таковы, что $P_\varepsilon x=0$ и $P_\varepsilon y_\delta=0,$ то из сходимости $x_{n,\delta}$ к x в энергетической норме вытекает сходимость в исходной норме гильбертова пространства *H*.

3.4.4. Правило останова по невязке

Здесь A – ограниченный линейный самосопряженный оператор, для которого нуль не является собственным значением, однако принадлежит спектру оператора A. Априорный выбор числа итераций n получен в предположении, что точное решение x уравнения $Ax = y$ истокообразно представимо. Однако обычно сведения об истокообразности искомого решения неизвестны, и тем самым приведенные в разделе 3.4.1 оценки погрешности оказываются неприменимыми. Тем не менее, метод (3.28) можно сделать вполне эффективным, если воспользоваться следующим правилом останова по невязке: зададим уровень останова $\varepsilon>0$ и определим момент m останова итерационного процесса (3.28) условием

$$\left.\begin{aligned}&\left\|Ax_{n,\delta}-y_\delta\right\|>\varepsilon,\quad (n<m),\\ &\left\|Ax_{m,\delta}-y_\delta\right\|\le\varepsilon,\end{aligned}\right\}\quad \varepsilon=b_1\delta,\quad b_1>1. \tag{3.30}$$

Предположим, что при начальном приближении невязка достаточно велика, а именно больше уровня останова, т. е. $\left\|Ax_{0,\delta}-y_\delta\right\|>\varepsilon$. Покажем возможность применения правила (3.30) к методу (3.28). Рассмотрим семейство функций $g_n(\lambda)=\lambda^{-1}\left[1-\dfrac{b^n}{\left(\lambda^{2k}+b\right)^n}\right]\ge 0.$ Нетрудно показать, что при $b>0$ для $g_n(\lambda)$ выполняются следующие условия

$$\sup_{-M\le\lambda\le M}\left|g_n(\lambda)\right|\le 2k\left(\frac{n}{b}\right)^{1/(2\kappa)},\ n>0,$$

$$\sup_{-M\le\lambda\le M}\left|1-\lambda g_n(\lambda)\right|\le 1,\quad n>0,$$

$$1-\lambda g_n(\lambda)\to 0,\ n\to\infty,\ \forall\lambda\in\left[-M,M\right],$$

$$\sup_{-M\le\lambda\le M}\left|\lambda^{2s}(1-\lambda g_n(\lambda))\right|\le\left(\frac{bs}{2kn}\right)^{s/k},\quad kn>s,\ 0\le s<\infty.$$

Аналогично подобным леммам из раздела 2.1 доказываются следующие леммы.

Лемма 3.16. *Пусть A – ограниченный оператор, $A=A^*$. Тогда для $\forall w\in H\quad (E-Ag_n(A))w\to 0,\ n\to\infty$.*

Лемма 3.17. *Пусть A – ограниченный оператор, $A=A^*$. Тогда для $\forall \upsilon\in\overline{R(A)}$ имеет место соотношение*

$$n^{s/k}\left\|A^{2s}(E-Ag_n(A))v\right\|\to 0,\ n\to\infty,\ 0\le s<\infty.$$

Лемма 3.18. *Пусть A – ограниченный оператор, $A=A^*$. Если для некоторых $n_p<\bar{n}=const$ и $v_0\in\overline{R(A)}$ при $p\to\infty$ имеем $w_p=A(E-Ag_{n_p}(A))v_0\to 0$, то $v_p=(E-Ag_{n_p}(A))v_0\to 0$.*

Если A – ограниченный несамосопряженный оператор, то справедлива аналогичная лемме 3.18

Лемма 3.19. *Пусть A – ограниченный несамосопряженный оператор. Если для некоторых $n_p<\bar{n}=const$ и $v_0\in\overline{R(A)}$ при $p\to\infty$ имеем $w_p=A^*A(E-A^*Ag_{n_p}(A^*A))v_0\to 0$, то $v_p=(E-A^*Ag_{n_p}(A^*A))v_0\to 0$.*

Для доказательства леммы 3.19 следует перейти к оператору A^*A и использовать лемму 3.18.

Леммы 3.16–3.18 использовались при доказательстве теорем:

Теорема 3.24. *Пусть A – ограниченный оператор, $A=A^*$ и пусть момент останова $m=m(\delta)$ в методе* (3.28) *выбирается по правилу* (3.30), *тогда $x_{m(\delta),\delta}\to x$ при $\delta\to 0$.*

Теорема 3.25. *Пусть выполнены условия теоремы* 3.24, *оператор A – положителен, и пусть $x=A^{2s}z,\ s>0$. Тогда справедливы оценки*

$$m\le 1+\frac{(2s+1)b}{4k}\left[\frac{\|z\|}{(b_1-1)\delta}\right]^{2k/(2s+1)},$$

$$\left\|x_{m,\delta}-x\right\|\le\left[(b_1+1)\delta\right]^{2s/(2s+1)}\|z\|^{1/(2s+1)}+$$

$$+\frac{2k}{b^{1/(2k)}}\left\{1+\frac{(2s+1)b}{4k}\left[\frac{\|z\|}{(b_1-1)\delta}\right]^{2k/(2s+1)}\right\}^{1/(2k)}\delta. \qquad (3.31)$$

Доказательство теорем 3.24–3.25 аналогично доказательству подобных теорем из раздела 2.1.

Замечание 3.14. *Порядок оценки* (3.31) *есть* $O\left(\delta^{\frac{2s}{2s+1}}\right)$ *и, как следует из* [21], *он оптимален в классе задач с истокообразно представимыми решениями* $x = A^{2s}z,\ s > 0$.

Замечание 3.15. *Хотя формулировка теоремы* 3.25 *дается с указаниями степени истокопредставимости s и истокопредставляющего элемента z, на практике их значение не потребуется, т. к. они не содержатся в правиле останова* (3.30).

3.4.5. Правило останова по соседним приближениям

Решаем уравнение $Ax = y$ с несамосопряженным оператором A. Используем неявную схему метода итераций

$$z_{n+1} = \left(\left(A^*A\right)^{2k} + B\right)^{-1}\left[Bz_n + \left(A^*A\right)^{2k-1}A^*y_\delta\right] +$$
$$+\left(\left(A^*A\right)^{2k} + B\right)^{-1}Bu_n,\ z_0 \in H,\ k \in N. \qquad (3.32)$$

Здесь u_n – ошибки вычисления итераций, $\|u_n\| \le \beta$. Обозначим $C = \left(\left(A^*A\right)^{2k} + B\right)^{-1}B,\ D = \left(\left(A^*A\right)^{2k} + B\right)^{-1}\left(A^*A\right)^{2k-1}A^*$. Тогда метод итераций (3.32) примет вид $z_{n+1} = Cz_n + Dy_\delta + Cu_n,\ z_0 \in H$ при приближенной правой части y_δ $\left(\|y - y_\delta\| \le \delta\right)$ и $w_{n+1} = Cw_n + Dy + Cu_n,\ w_0 \in H$ при точной правой части y. Определим момент m останова итерационного процесса условием (2.37).

Аналогично подобным леммам из раздела 2.1 доказываются леммы

Лемма 3.20. *Пусть приближение* w_n *определяется равенствами* $w_0 = z_0,\ \ w_{n+1} = Cw_n + Dy + Cu_n,\ \ n \ge 0,$ *тогда справедливо неравенство*

$$\sum_{k=0}^{n}\|w_k - w_{k+1} + Cu_k\|^2 \le \|w_0 - x\|^2 + \sum_{k=0}^{n-1}\|Cu_k\|^2.$$

Лемма 3.21. *При любом* $w_0 \in H$ *и произвольной последовательности ошибок* $\{u_n\}$, *удовлетворяющих условию* $\|u_n\| \le \beta$, *выполнено неравенство* $\varliminf_{n\to\infty}\|w_n - w_{n+1}\| \le 2\|C\|\beta.$

При использовании лемм 3.20–3.21 аналогично, как в разделе 2.1, доказано, что метод (3.32) с правилом останова (2.37) сходится, и получена оценка для момента останова. Справедлива

Теорема 3.26. *Пусть уровень останова* $\varepsilon = \varepsilon(\delta, \beta)$ *выбирается как функция от уровней* δ *и* β *норм погрешностей* $y - y_\delta$ *и* u_n. *Тогда справедливы следующие утверждения:*

а) *если* $\varepsilon(\delta, \beta) > 2\|C\|\beta$, *то момент останова* m *определен при любом начальном приближении* $z_0 \in H$ *и любых* y_δ *и* u_n, *удовлетворяющих условиям* $\|y - y_\delta\| \le \delta$, $\|u_n\| \le \beta$;

б) *если* $\varepsilon(\delta, \beta) > \|D\|\delta + 2\|C\|\beta$, *то справедлива оценка*

$$m \le \frac{\|z_0 - x\|^2}{\left(\varepsilon - \|D\|\delta - 2\|C\|\beta\right)\left(\varepsilon - \|D\|\delta\right)};$$

в) *если, кроме того,* $\varepsilon(\delta, \beta) \to 0$, $\delta, \beta \to 0$ *и* $\varepsilon(\delta, \beta) \ge d\left(\|D\|\delta + \|C\|\beta^p\right)$, *где* $d > 1$, $p \in (0,1)$, *то* $\lim\limits_{\delta, \beta \to 0} \|z_m - x\| = 0$.

ГЛАВА 4
ЯВНЫЙ МЕТОД ИТЕРАЦИЙ РЕШЕНИЯ НЕКОРРЕКТНЫХ ЗАДАЧ С ПРИБЛИЖЕННЫМ ОПЕРАТОРОМ

В данной главе доказывается сходимость явного метода решения операторных уравнений первого рода с априорным и апостериорным выбором числа итераций в исходной норме гильбертова пространства в случае самосопряженного и несамосопряженного оператора, в предположении, что погрешности имеются не только в правой части уравнения, но и в операторе. Получены оценки погрешности явного метода, априорный момент останова и оценка для апостериорного момента останова.

4.1. Априорный выбор параметра регуляризации в явном методе решения некорректных задач с приближенным оператором

4.1.1. Постановка задачи

Пусть H и F – гильбертовы пространства и $A \in \mathcal{L}(H, F)$, т. е. A – линейный непрерывный оператор, действующий из H в F. Предполагается, что нуль принадлежит спектру оператора A, но не является его собственным значением. Решается уравнение

$$Ax = y. \tag{4.1}$$

Задача отыскания элемента $x \in H$ по элементу $y \in F$ является некорректной, так как сколь угодно малые возмущения в правой части y могут вызывать сколь угодно большие возмущения решения.

Предположим, что точное решение $x^* \in H$ уравнения (4.1) существует и является единственным. Будем искать его с помощью явного итерационного процесса

$$x_{n+1} = (E - \alpha A)^k x_n + A^{-1}\left[E - (E - \alpha A)^k\right] y, \ x_0 = 0, \ k \in N. \tag{4.2}$$

Считаем, что оператор A и правая часть y уравнения (4.1) заданы приближенно, т. е. вместо y известно приближение y_δ, $\|y - y_\delta\| \le \delta$, а вместо оператора A известен оператор A_η, $\|A - A_\eta\| \le \eta$. Предполагаем, что $0 \in Sp(A_\eta)$, $Sp(A_\eta) \subseteq [0, M]$. Тогда метод (4.2) примет вид

$$x_{n+1} = (E - \alpha A_\eta)^k x_n + A_\eta^{-1}\left[E - (E - \alpha A_\eta)^k\right] y_\delta, x_0 = 0, k \in N. \tag{4.3}$$

Случай приближенной правой части уравнения и точного оператора для рассматриваемого метода изучен в разделе 2.1. Там исследованы априорный и апостериорный выборы параметра регуляризации, изучен случай неединственного решения задачи, доказана сходимость метода в энергетической норме.

Докажем сходимость метода (4.3) в случае априорного выбора параметра регуляризации при решении уравнения $A_\eta x = y_\delta$ с приближенным оператором A_η и приближенной правой частью y_δ, получим априорные оценки погрешности. Подобные вопросы изучались в [21], но только для других методов.

4.1.2. Случай самосопряженных неотрицательных операторов

Пусть $H = F$, $A = A^* \geq 0$, $A_\eta = A_\eta^* \geq 0$, $Sp(A_\eta) \subseteq [0, M]$, $0 < \eta \leq \eta_0$. Итерационный метод (4.3) запишем в виде:

$$x_n = g_n(A_\eta) y_\delta, \tag{4.3^1}$$

где $g_n(\lambda) = \lambda^{-1}\left[1 - (1-\alpha\lambda)^{kn}\right]$. В разделе 2.1 получены условия для $g_n(\lambda)$:

$$\sup_{0 \leq \lambda \leq M} |g_n(\lambda)| \leq \gamma n, \gamma = k\alpha, 0 < \alpha < \frac{2}{M}, n > 0; \tag{4.4}$$

$$\begin{gathered} \sup_{0 \leq \lambda \leq M} \lambda^s |1 - \lambda g_n(\lambda)| \leq \gamma_s n^{-s},\ (n > 0),\ 0 < s < \infty, \\ \gamma_s = \left(\frac{s}{k\alpha e}\right)^s, \quad 0 < \alpha \leq \frac{5}{4M}. \end{gathered} \tag{4.5}$$

(Здесь s – степень истокообразной представимости точного решения $x^* = A^s z,\ s > 0,\ \|z\| \leq \rho$);

$$\sup_{0 \leq \lambda \leq M} |1 - \lambda g_n(\lambda)| \leq \gamma_0, \gamma_0 = 1, 0 < \alpha < \frac{2}{M}, n > 0. \tag{4.6}$$

Справедлива

Лемма 4.1. *Пусть* $A = A^* \geq 0$, $A_\eta = A_\eta^* \geq 0$, $\|A_\eta - A\| \leq \eta$, $Sp(A_\eta) \subseteq [0, M]$, $(0 < \eta \leq \eta_0)$, $0 < \alpha < \dfrac{2}{M}$ *и выполнено условие* (4.6). *Тогда* $\|G_{n\eta} v\| \to 0$ *при* $n \to \infty, \eta \to 0$ $\forall v \in H$, *где* $G_{n\eta} = E - A_\eta g_n(A_\eta)$.

Доказательство. Имеем

$$\|G_{n\eta} v\| = \|(E - A_\eta g_n(A_\eta))v\| = \left\|\int_0^M (1 - \lambda g_n(\lambda))\, dE_\lambda v\right\| =$$

$$= \left\|\int_0^M (1-\alpha\lambda)^{kn} dE_\lambda v\right\| \leq \left\|\int_0^\varepsilon (1-\alpha\lambda)^{kn} dE_\lambda v\right\| + \left\|\int_\varepsilon^M (1-\alpha\lambda)^{kn} dE_\lambda v\right\|.$$

$\left\|\int\limits_{\varepsilon}^{M}(1-\alpha\lambda)^{kn}dE_\lambda v\right\| \le q^{kn}(\varepsilon)\left\|\int\limits_{\varepsilon}^{M}dE_\lambda v\right\| \to 0,\ n\to\infty,$ т. к. для $\lambda\in[\varepsilon, M]$ $|1-\alpha\lambda|\le q(\varepsilon)<1$.

$\left\|\int\limits_{0}^{\varepsilon}(1-\alpha\lambda)^{kn}dE_\lambda v\right\| \le \left\|\int\limits_{0}^{\varepsilon}dE_\lambda v\right\| = \|E_\varepsilon v\| \to 0, \varepsilon\to 0$ в силу свойств спектральной функции. Следовательно, $\|G_{n\eta}v\|\to 0$ при $n\to\infty, \eta\to 0$. *Лемма 4.1 доказана.*

Условие сходимости для метода (4.3) дает

Теорема 4.1. *Пусть* $A=A^*\ge 0,\ A_\eta=A_\eta^*\ge 0,\ \|A_\eta - A\|\le\eta,\ Sp(A_\eta)\subseteq[0,M],$ $(0<\eta\le\eta_0),\ 0<\alpha<\dfrac{2}{M},\ y\in R(A),\ \|y-y_\delta\|\le\delta$ *и выполнены условия* (4.4), (4.6). *Выберем параметр* $n=n(\delta,\eta)$ *в приближении* (4.3) *так, чтобы* $(\delta+\eta)n(\delta,\eta)\to 0$ *при* $n(\delta,\eta)\to\infty, \delta\to 0, \eta\to 0$. *Тогда* $x_{n(\delta,\eta)}\to x^*$ *при* $\delta\to 0, \eta\to 0$.

Доказательство. Из (4.3[1]) имеем $x_n = g_n(A_\eta)y_\delta$. Тогда

$$x_n - x^* = g_n(A_\eta)y_\delta - x^* = -G_{n\eta}x^* + G_{n\eta}x^* + g_n(A_\eta)y_\delta - x^* =$$

$$= -G_{n\eta}x^* + (E - A_\eta g_n(A_\eta))x^* + g_n(A_\eta)y_\delta - x^* = -G_{n\eta}x^* + g_n(A_\eta)(y_\delta - A_\eta x^*).$$

Следовательно, $x_n - x^* = -G_{n\eta}x^* + g_n(A_\eta)(y_\delta - A_\eta x^*)$.

Т. к. по условию (4.4) $\|g_n(A_\eta)\|\le \sup\limits_{0\le\lambda\le M}|g_n(\lambda)|\le\gamma n$, то

$$\|y_\delta - A_\eta x^*\| \le \|y_\delta - y\| + \|y - A_\eta x^*\| = \|y_\delta - y\| + \|Ax^* - A_\eta x^*\| \le$$

$$\le \delta + \|A - A_\eta\|\|x^*\| \le \delta + \eta\|x^*\|.$$

Следовательно,

$$\|x_{n(\delta,\eta)} - x^*\| \le \|G_{n\eta}x^*\| + \|g_n(A_\eta)(y_\delta - A_\eta x^*)\| \le \|G_{n\eta}x^*\| + \gamma n\left(\delta + \eta\|x^*\|\right).$$

Из леммы 4.1 следует, что $\|G_{n\eta}x^*\|\to 0$ при $n\to\infty, \eta\to 0$, а по условию теоремы 4.1 $n(\delta+\eta)\to 0$ при $\delta\to 0, \eta\to 0$. Таким образом, $\|x_{n(\delta,\eta)} - x^*\|\to 0$, $\delta\to 0, \eta\to 0$. *Теорема 4.1 доказана.*

Теорема 4.2. *Пусть* $A=A^*\ge 0$, $A_\eta=A_\eta^*\ge 0$, $\|A_\eta - A\|\le\eta$, $Sp(A_\eta)\subseteq[0,M]$ $(0<\eta\le\eta_0)$, $0<\alpha\le\dfrac{5}{4M}$, $y\in R(A)$, $\|y_\delta - y\|\le\delta$ *и выполнены условия* (4.4), (4.5). *Если точное решение истокопредставимо, т. е.* $x^* = A^s z$, $s>0$, $\|z\|\le\rho$, *то справедлива оценка погрешности*

$$\left\| x_{n(\delta,\eta)} - x^* \right\| \le \gamma_0 c_s \eta^{\min(1,s)} \rho + \gamma_s n^{-s} \rho + \gamma n \left(\delta + \eta \left\| x^* \right\| \right), \; 0 < s < \infty .$$

Доказательство. Имеем, используя истокообразную представимость точного решения,

$$\left\| G_{n\eta} x^* \right\| = \left\| G_{n\eta} A^s z \right\| \le \left\| G_{n\eta} \left(A^s - A_\eta^s \right) z \right\| + \left\| G_{n\eta} A_\eta^s z \right\| \le \gamma_0 c_s \eta^{\min(1,s)} \rho + \gamma_s n^{-s} \rho,$$

т. к. по лемме 1.1 [21, с. 91] $\left\| A_\eta^s - A^s \right\| \le c_s \eta^{\min(1,s)}$, $c_s = \mathrm{const}$ ($c_s \le 2$ для $0 < s \le 1$). Тогда

$$\left\| x_{n(\delta,\eta)} - x^* \right\| \le \gamma_0 c_s \eta^{\min(1,s)} \rho + \gamma_s n^{-s} \rho + \gamma n \left(\delta + \eta \left\| x^* \right\| \right), \; 0 < s < \infty. \quad (4.7)$$

Теорема 4.2 доказана.

Если минимизировать правую часть оценки (4.7) по n, то получим значение априорного момента останова:

$$n_{\text{опт}} = \left[\frac{s \gamma_s \rho}{\gamma \left(\delta + \left\| x^* \right\| \eta \right)} \right]^{1/(s+1)} = d_s \rho^{1/(s+1)} \left[\delta + \eta \left\| x^* \right\| \right]^{-1/(s+1)}, \text{ где } d_s = \left(\frac{s \gamma_s}{\gamma} \right)^{1/(s+1)} .$$

Отсюда $n_{\text{опт}} = s(k\alpha)^{-1} e^{-s/(s+1)} \rho^{1/(s+1)} \left(\delta + \eta \left\| x^* \right\| \right)^{-1/(s+1)}$. Подставим $n_{\text{опт}}$ в оценку (4.7), получим

$$\left\| x_{n(\delta,\eta)} - x^* \right\|_{\text{опт}} \le \gamma_0 c_s \eta^{\min(1,s)} \rho + \gamma_s \rho \left(d_s \rho^{1/(s+1)} \right)^{-s} \left(\delta + \eta \left\| x^* \right\| \right)^{s/(s+1)} +$$

$$+ \gamma \left(\delta + \eta \left\| x^* \right\| \right) d_s \rho^{1/(s+1)} \left(\delta + \eta \left\| x^* \right\| \right)^{-1/(s+1)} =$$

$$= \gamma_0 c_s \eta^{\min(1,s)} \rho + \left(\delta + \eta \left\| x^* \right\| \right)^{s/(s+1)} \left(d_s^{-s} \gamma_s \rho^{1/(s+1)} + \gamma d_s \rho^{1/(s+1)} \right) =$$

$$= \gamma_0 c_s \eta^{\min(1,s)} \rho + \rho^{1/(s+1)} c_s' \left(\delta + \eta \left\| x^* \right\| \right)^{s/(s+1)},$$

где $c_s' = d_s^{-s} \gamma_s + \gamma d_s = \left(s^{1/(s+1)} + s^{-s/(s+1)} \right) \gamma^{s/(s+1)} \gamma_s^{1/(s+1)} = (1+s) e^{-s/(s+1)}$.

Отсюда $\left\| x_{n(\delta,\eta)} - x^* \right\|_{\text{опт}} \le c_s \eta^{\min(1,s)} \rho + (1+s) e^{-s/(s+1)} \rho^{1/(s+1)} \left(\delta + \eta \left\| x^* \right\| \right)^{s/(s+1)}$.

Замечание 4.1. *Оптимальная оценка погрешности не зависит от* α, *но* $n_{опт}$ *зависит от* α. *Следовательно, для уменьшения числа итераций при получении приближенного решения следует брать* α *возможно большим из условия* $0 < \alpha \le \frac{5}{4M}$ *и таким, чтобы* $n_{опт}$ *было целым.*

4.1.3. Случай несамосопряженных операторов

В случае несамосопряженной задачи итерационный метод (4.3) примет вид

$$x_{n+1}=(E-\alpha A_\eta^* A_\eta)^k x_n+\left(A_\eta^* A_\eta\right)^{-1}\left[E-(E-\alpha A_\eta^* A_\eta)^k\right]\ A_\eta^* y_\delta,\ x_0=0,\ k\in N. \quad (4.8)$$

Его можно записать так

$$x_n=g_n(A_\eta^* A_\eta)A_\eta^* y_\delta. \quad (4.9)$$

Из леммы 4.1 следует

Лемма 4.2. *Пусть* $A,\ A_\eta\in\mathcal{L}(H,F),\ \|A_\eta-A\|\le\eta,\ \|A_\eta\|^2\le M,\ 0<\alpha<\frac{2}{M}$ *и выполнено условие* (4.6). *Тогда*

$$\|K_{n\eta}v\|\to 0\ \text{ при }\ n\to\infty,\quad \eta\to 0,\ \forall v\in N(A)^\perp=\overline{R(A^*)}, \quad (4.10)$$

$$\|\tilde{K}_{n\eta}z\|\to 0\ \text{ при }\ n\to\infty,\quad \eta\to 0,\ \forall z\in N\left(A^*\right)^\perp=\overline{R(A)}, \quad (4.11)$$

где $K_{n\eta}=E-A_\eta^* A_\eta g_n\left(A_\eta^* A_\eta\right),\ \tilde{K}_{n\eta}=E-A_\eta A_\eta^* g_n\left(A_\eta A_\eta^*\right).$

Используем лемму 4.2 для доказательства следующей теоремы.

Теорема 4.3. *Пусть* $A,\ A_\eta\in\mathcal{L}(H,F),\ \|A-A_\eta\|\le\eta,\ \|A_\eta\|^2\le M,\ (0<\eta\le\eta_0),$ $0<\alpha\le\frac{5}{4M},\ y\in R(A),\ \|y_\delta-y\|\le\delta$ *и выполнены условия* (4.5), (4.6). *Выберем параметр* $n=n(\delta,\eta)$ *так, чтобы*

$$(\delta+\eta)^2 n(\delta,\eta)\to 0\ \text{ при }\ n(\delta,\eta)\to\infty,\delta\to 0,\ \eta\to 0. \quad (4.12)$$

Тогда $x_{n(\delta,\eta)}\to x^*$ *при* $\delta\to 0,\ \eta\to 0$.

Доказательство. Для погрешности приближения $x_{n(\delta,\eta)}$ имеем

$$x_{n(\delta,\eta)}-x^*=-K_{n\eta}x^*+g_n(A_\eta^* A_\eta)A_\eta^*\left(y_\delta-A_\eta x^*\right). \quad (4.13)$$

Здесь $\left\|g_n\left(A_\eta^* A_\eta\right)A_\eta^*\right\|=\left\|g_n\left(A_\eta^* A_\eta\right)\left(A_\eta^* A_\eta\right)^{1/2}\right\|\le\gamma_* n^{1/2}$, где (подраздел 2.1.3)

$\gamma_*=\sup\limits_{n>0}\left(n^{-1/2}\sup\limits_{0\le\lambda\le M}\lambda^{1/2}|g_n(\lambda)|\right)\le\left(\frac{5}{4}k\alpha\right)^{1/2}$. Поскольку

$$\left\|y_\delta-A_\eta x^*\right\|\le\|y_\delta-y\|+\left\|y-A_\eta x^*\right\|=\|y_\delta-y\|+\left\|Ax^*-A_\eta x^*\right\|\le\delta+\eta\left\|x^*\right\|,$$

то $\left\|g_n\left(A_\eta^* A_\eta\right)A_\eta^*\left(y_\delta-A_\eta x^*\right)\right\|\le\left(\frac{5}{4}k\alpha\right)^{1/2} n^{1/2}\left(\delta+\left\|x^*\right\|\eta\right)$. Поэтому

$$\left\|x_{n(\delta,\eta)}-x^*\right\|\le\left\|K_{n\eta}x^*\right\|+\left\|g_n\left(A_\eta^* A_\eta\right)A_\eta^*\left(y_\delta-A_\eta x^*\right)\right\|\le$$

$$\le\left\|K_{n\eta}x^*\right\|+\left(\frac{5}{4}k\alpha\right)^{1/2} n^{1/2}\left(\delta+\eta\left\|x^*\right\|\right).$$

Покажем, что $\left\|K_{n\eta}x^*\right\| \to 0$ при $n\to\infty, \eta\to 0$. Действительно,

$$\left\|K_{n\eta}x^*\right\| = \left\|(E - A_\eta^* A_\eta g_n(A_\eta^* A_\eta))x^*\right\| = \left\|\int_0^{\left\|A_\eta^* A_\eta\right\|}(1-\lambda g_n(\lambda))\,dE_\lambda x^*\right\| =$$

$$= \left\|\int_0^{\left\|A_\eta^* A_\eta\right\|}(1-\alpha\lambda)^{kn}\,dE_\lambda x^*\right\| \le \left\|\int_0^{\varepsilon}(1-\alpha\lambda)^{kn}\,dE_\lambda x^*\right\| + \left\|\int_\varepsilon^{\left\|A_\eta^* A_\eta\right\|}(1-\alpha\lambda)^{kn}\,dE_\lambda x^*\right\|.$$

Тогда $\left\|\int_\varepsilon^{\left\|A_\eta^* A_\eta\right\|}(1-\alpha\lambda)^{kn}\,dE_\lambda x^*\right\| \le q^{kn}(\varepsilon)\left\|\int_\varepsilon^{\left\|A_\eta^* A_\eta\right\|}dE_\lambda x^*\right\| \to 0,\ n\to\infty,$ т. к. для $\lambda\in\left[\varepsilon, \left\|A_\eta^* A_\eta\right\|\right]$ $|1-\alpha\lambda| \le q(\varepsilon) < 1$. $\left\|\int_0^{\varepsilon}(1-\alpha\lambda)^{kn}\,dE_\lambda x^*\right\| \le \left\|\int_0^{\varepsilon}dE_\lambda x^*\right\| = \left\|E_\varepsilon x^*\right\| \to 0,$ $\varepsilon\to 0$ в силу свойств спектральной функции.

Из условия (4.12) $n(\delta+\eta)^2 \to 0$ при $n\to\infty, \delta\to 0, \eta\to 0$. Отсюда $\left(\frac{5}{4}k\alpha\right)^{1/2} n^{1/2}\left(\delta+\eta\left\|x^*\right\|\right) \to 0,\ n\to\infty, \delta\to 0, \eta\to 0$. Таким образом, $\left\|x_{n(\delta,\eta)} - x^*\right\| \to 0,$ $n\to\infty, \delta\to 0, \eta\to 0$. *Теорема 4.3 доказана.*

Справедлива

Теорема 4.4. *Пусть* $A,\ A_\eta \in \mathscr{L}(H, F)$, $\left\|A - A_\eta\right\| \le \eta$, $\left\|A_\eta\right\|^2 \le M$, $(0<\eta\le\eta_0)$, $0<\alpha\le\dfrac{5}{4M}$, $y\in R(A)$, $\left\|y_\delta - y\right\| \le \delta$. *Если точное решение представимо в виде* $x^* = |A|^s z,\ \ s>0,\ \ \|z\|\le\rho,\ \ |A| = \left(A^*A\right)^{1/2}$ *и выполнены условия* (4.5), (4.6), *то справедлива оценка погрешности*

$$\left\|x_{n(\delta,\eta)} - x^*\right\| \le \gamma_0 c_s\left(1+|\ln\eta|\right)\eta^{\min(1,s)}\rho + \gamma_{s/2}n^{-s/2}\rho +$$
$$+\left(\frac{5}{4}k\alpha\right)^{1/2} n^{1/2}\left(\delta + \left\|x^*\right\|\eta\right), 0<s<\infty.$$

Доказательство. В случае истокопредставимого точного решения $x^* = |A|^s z = \left(A^*A\right)^{s/2} z$ из (4.5) получим $\sup\limits_{0\le\lambda\le M}\lambda^{s/2}\left|1-\lambda g_n(\lambda)\right| \le \gamma_{s/2}n^{-s/2}$,

где $\gamma_{s/2} = \left(\dfrac{s}{2k\alpha e}\right)^{s/2}$. Тогда

$$\left\|K_{n\eta}|A_\eta|^s z\right\| = \left\||A_\eta|^s\left[E - A_\eta^* A_\eta g_n\left(A_\eta^* A_\eta\right)\right]z\right\| =$$

$$= \left\|\left(A_\eta^* A_\eta\right)^{s/2}\left[E - A_\eta^* A_\eta g_n\left(A_\eta^* A_\eta\right)\right]z\right\| \le \gamma_{s/2} n^{-s/2}\rho.$$

Отсюда имеем $\left\|K_{n\eta}x^*\right\| = \left\|K_{n\eta}|A|^s z\right\| = \left\|K_{n\eta}\left(|A_\eta|^s - |A|^s\right)z\right\| + \left\|K_{n\eta}|A_\eta|^s z\right\| \le$

$\le \gamma_0 c_s\left(1+|\ln\eta|\right)\eta^{\min(1,s)}\rho + \gamma_{s/2} n^{-s/2}\rho$, т. к. из [21, с. 92] получим

$$\left||A_\eta|^s - |A|^s\right| \le c_s\left(1+|\ln\eta|\right)\eta^{\min(1,s)},\ c_s = \mathrm{const}\ \ (c_s \le 2\ \text{ для }\ 0 < s \le 1).$$

Из (4.13)

$$\left\|x_{n(\delta,\eta)} - x^*\right\| \le \left\|K_{n\eta}x^*\right\| + \gamma_* n^{1/2}\left(\delta + \left\|x^*\right\|\eta\right) = \left\|K_{n\eta}x^*\right\| +$$

$$+\left(\frac{5}{4}k\alpha\right)^{1/2} n^{1/2}\left(\delta + \left\|x^*\right\|\eta\right) \le \gamma_0 c_s\left(1+|\ln\eta|\right)\eta^{\min(1,s)}\rho +$$

$$+\gamma_{s/2} n^{-s/2}\rho + \left(\frac{5}{4}k\alpha\right)^{1/2} n^{1/2}\left(\delta + \left\|x^*\right\|\eta\right),\ 0 < s < \infty. \qquad (4.14)$$

Теорема 4.4 доказана.

Минимизируя правую часть (4.14) по n, получим значение априорного момента останова:

$$n_{\text{опт}} = \left(\frac{s\gamma_{s/2}}{\gamma_*}\right)^{2/(s+1)} \rho^{2/(s+1)}\left(\delta + \left\|x^*\right\|\eta\right)^{-2/(s+1)} =$$

$$= \left(\frac{5}{4}\right)^{-1/(s+1)} s^{(2+s)/(s+1)}(2e)^{-s/(s+1)}(k\alpha)^{-1}\rho^{2/(s+1)}\left(\delta + \left\|x^*\right\|\eta\right)^{-2/(s+1)}.$$

Подставив $n_{\text{опт}}$ в оценку (4.14), получим оптимальную оценку погрешности для метода итераций (4.8)

$$\left\|x_{n(\delta,\eta)} - x^*\right\|_{\text{опт}} \le \gamma_0 c_s\left(1+|\ln\eta|\right)\eta^{\min(1,s)}\rho + c_s''\rho^{1/(s+1)}\left(\delta + \left\|x^*\right\|\eta\right)^{s/(s+1)},\ \ 0 < s < \infty,$$

где $c_s'' = \left(s^{1/(s+1)} + s^{-s/(s+1)}\right)\gamma_*^{s/(s+1)}\gamma_{s/2}^{1/(s+1)} = \left(\dfrac{5}{4s}\right)^{s/(2(s+1))}(s+1)(2e)^{-s/(2(s+1))}$.

Таким образом,

$$\left\|x_{n(\delta,\eta)} - x^*\right\|_{\text{опт}} \le c_s\left(1+|\ln\eta|\right)\eta^{\min(1,s)}\rho +$$

$$+\left(\frac{5}{4s}\right)^{s/(2(s+1))}(s+1)(2e)^{-s/(2(s+1))}\rho^{1/(s+1)}\left(\delta + \left\|x^*\right\|\eta\right)^{s/(s+1)},\ \ 0 < s < \infty.$$

4.2. Апостериорный выбор параметра регуляризации в явном методе решения некорректных задач с приближенным оператором

4.2.1. Случай самосопряженной задачи

Рассматривается уравнение $Ax = y$ из подраздела 4.1.1. Для его решения используется итерационный метод (4.3).

Докажем сходимость метода (4.3) в случае апостериорного выбора параметра регуляризации для решения уравнения $A_\eta x = y_\delta$, где оператор A_η и правая часть уравнения заданы приближенно: $\|A_\eta - A\| \le \eta$, $\|y - y_\delta\| \le \delta$. Подобные вопросы изучались в работе [21], но только для других методов. Считаем, что нуль не является собственным значением оператора A_η, но принадлежит его спектру. Предположим, что уравнение $A_\eta x = y_\delta$ имеет единственное решение.

Зададим уровень останова $\varepsilon > 0$ и определим момент m останова итерационного процесса (4.3) условием

$$\left.\begin{aligned} &\|A_\eta x_{n(\delta,\eta)} - y_\delta\| > \varepsilon, (n < m),\\ &\|A_\eta x_{m(\delta,\eta)} - y_\delta\| \le \varepsilon, \end{aligned}\right\} \ \varepsilon = b\left(\delta + \|x^*\|\eta\right), b > 1. \tag{4.15}$$

Предположим, что при начальном приближении $x_{0(\delta,\eta)}$ невязка достаточно велика, больше уровня останова ε, т. е. $\|A_\eta x_{0(\delta,\eta)} - y_\delta\| > \varepsilon$. Покажем возможность применения правила (4.15) к методу (4.3).

Пусть $H = F$, $A = A^* \ge 0$, $A_\eta = A_\eta^* \ge 0$, $\sigma(A_\eta) \subseteq [0, M]$. Справедлива

Лемма 4.3. *Пусть* $A = A^* \ge 0$, $A_\eta = A_\eta^* \ge 0$, $\|A_\eta - A\| \le \eta$, $\|A_\eta\| \le M$ *и выполнено условие* (4.5). *Тогда для* $G_{n\eta} = E - A_\eta g_n(A_\eta)$ *справедливо соотношение для* $\forall \upsilon \in \overline{R(A)}$:

$$n\|A_\eta G_{n\eta}\upsilon\| \to 0 \ \textit{при} \ n \to \infty, \ \eta \to 0. \tag{4.16}$$

Доказательство. Воспользуемся теоремой Банаха – Штейнгауза. Здесь $\|B_n\| = n\|A_\eta G_{n\eta}\|$ и по условию (4.5) нормы $\|B_n\|$ ограничены в совокупности

$$n\|A_\eta G_{n\eta}\| = n\left\|A_\eta\left(E - A_\eta g_n(A_\eta)\right)\right\| = n \sup_{0 \le \lambda \le M} \lambda|1 - \lambda g_n(\lambda)| \le n\gamma_1 n^{-1} = \gamma_1, (n > 0, \eta > 0).$$

Для элементов вида $\upsilon = A\omega$, образующих в $\overline{R(A)}$ плотное подмножество, в силу (4.5) имеем

$$n\left\|A_\eta G_{n\eta}\upsilon\right\| = n\left\|A_\eta G_{n\eta}A\omega\right\| \le n\left\|A_\eta G_{n\eta}(A-A_\eta)\omega\right\| +$$
$$+ n\left\|A_\eta G_{n\eta}A_\eta\omega\right\| \le \left(\gamma_1\eta + n\sup_{0\le\lambda\le M}\lambda^2\left|1-\lambda g_n(\lambda)\right|\right)\left\|\omega\right\| \le$$
$$\le \left(\gamma_1\eta + n\gamma_2 n^{-2}\right)\left\|\omega\right\| = \left(\gamma_1\eta + \gamma_2 n^{-1}\right)\left\|\omega\right\| \to 0,\ \ n\to\infty, \eta\to 0.$$

По теореме Банаха – Штейнгауза $n\left\|A_\eta G_{n\eta}\upsilon\right\| \to 0$ при $n\to\infty, \eta\to 0$. *Лемма 4.3 доказана.*

Лемма 4.4. *Пусть* $A = A^* \ge 0$, $A_\eta = A_\eta^* \ge 0$, $\left\|A_\eta - A\right\| \le \eta$, $\left\|A_\eta\right\| \le M$, *и выполнены условия* (4.4), (4.6). *Если для некоторых* $\upsilon_0 \in \overline{R(A)}$, $n_p \le \bar{n} = const$ *и* $\eta_p \to 0$ *имеем* $A_{\eta_p}G_{n_p\eta_p}\upsilon_0 \to 0$ *при* $p\to\infty$, *то* $G_{n_p\eta_p}\upsilon_0 \to 0$.

Доказательство. В силу неравенства (4.6) последовательность $\upsilon_p = G_{n_p\eta_p}\upsilon_0$ ограничена, т. е. $\left\|\upsilon_p\right\| = \left\|G_{n_p\eta_p}\upsilon_0\right\| \le \gamma_0\left\|\upsilon_0\right\|$, $p\in N = \{1, 2, \ldots\}$. Поэтому в гильбертовом пространстве из этой последовательности можно извлечь слабо сходящуюся подпоследовательность $\upsilon_p \dashrightarrow \upsilon$, $(p\in N' \subseteq N)$. Тогда $A_{\eta_p}\upsilon_p \dashrightarrow A_{\eta_p}\upsilon$, $(p\in N')$. По условию $\omega_p = A_{\eta_p}\upsilon_p \to 0$, значит, $A_{\eta_p}\upsilon = 0$. Но т. к. нуль не является собственным значением оператора A_{η_p}, то $\upsilon = 0$. Теперь

$$\left\|\upsilon_p\right\|^2 = \left(\upsilon_p, G_{n_p\eta_p}\upsilon_0\right) = \left(\upsilon_p, \left(E - A_{\eta_p}g_{n_p}\left(A_{\eta_p}\right)\right)\upsilon_0\right) = \left(\upsilon_p, \upsilon_0\right) -$$
$$-\left(A_{\eta_p}\upsilon_p, g_{n_p}\left(A_{\eta_p}\right)\upsilon_0\right) = \left(\upsilon_p,\upsilon_0\right) - \left(\omega_p, g_{n_p}\left(A_{\eta_p}\right)\upsilon_0\right) \to (\upsilon,\upsilon_0) = (0,\upsilon_0) = 0, (p\in N'),$$

т. к. $\omega_p \to 0$, и по условию (4.4) $\left\|g_{n_p}\left(A_{\eta_p}\right)\right\| \le \gamma n_p \le \gamma\bar{n}$. Итак, любая слабо сходящаяся подпоследовательность ограниченной последовательности υ_p стремится к нулю по норме. Отсюда следует, что и вся последовательность $\upsilon_p \to 0$, $p\to\infty$ по норме. *Лемма 4.4 доказана.*

Используем доказанные леммы при доказательстве теорем:

Теорема 4.5. *Пусть* $H = F$, $A = A^* \ge 0$, $A_\eta = A_\eta^* \ge 0$, $\left\|A_\eta - A\right\| \le \eta$, $\left\|A_\eta\right\| \le M$, $(0 < \eta \le \eta_0)$, $y \in R(A)$, $\left\|y - y_\delta\right\| \le \delta$ *и выполнены условия* (4.4), (4.5), (4.6). *Пусть параметр* $m(\delta,\eta)$ *выбран по правилу* (4.15). *Тогда* $(\delta+\eta)m(\delta,\eta) \to 0$, $x_{m(\delta,\eta)} \to x^*$ *при* $\delta\to 0, \eta\to 0$.

Доказательство. Имеем $x_{n(\delta,\eta)} = g_n(A_\eta)y_\delta$, тогда

$$x_{n(\delta,\eta)} - x^* = -x^* + g_n(A_\eta)y_\delta = -G_{n\eta}x^* + G_{n\eta}x^* -$$
$$-x^* + g_n(A_\eta)y_\delta = -G_{n\eta}x^* + \big(E - A_\eta g_n(A_\eta)\big)x^* -$$
$$-x^* + g_n(A_\eta)y_\delta = -G_{n\eta}x^* + x^* - A_\eta g_n(A_\eta)x^* -$$
$$-x^* + g_n(A_\eta)y_\delta = -G_{n\eta}x^* + g_n(A_\eta)\big(y_\delta - A_\eta x^*\big).$$

Следовательно,

$$x_{n(\delta,\eta)} - x^* = -G_{n\eta}x^* + g_n(A_\eta)\big(y_\delta - A_\eta x^*\big). \qquad (4.17)$$

Отсюда

$$A_\eta x_{n(\delta,\eta)} - A_\eta x^* = -A_\eta G_{n\eta}x^* + A_\eta g_n(A_\eta)y_\delta - A_\eta g_n(A_\eta)A_\eta x^*;$$
$$A_\eta x_{n(\delta,\eta)} = A_\eta x^* - A_\eta G_{n\eta}x^* + A_\eta g_n(A_\eta)y_\delta - A_\eta g_n(A_\eta)A_\eta x^*;$$
$$A_\eta x_{n(\delta,\eta)} - y_\delta = -A_\eta G_{n\eta}x^* - y_\delta + \big(E - A_\eta g_n(A_\eta)\big)A_\eta x^* +$$
$$+A_\eta g_n(A_\eta)y_\delta = -A_\eta G_{n\eta}x^* + G_{n\eta}A_\eta x^* - \big(E - A_\eta g_n(A_\eta)\big)y_\delta =$$
$$= -A_\eta G_{n\eta}x^* + G_{n\eta}A_\eta x^* - G_{n\eta}y_\delta = -A_\eta G_{n\eta}x^* - G_{n\eta}\big(y_\delta - A_\eta x^*\big).$$

Итак,

$$A_\eta x_{n(\delta,\eta)} - y_\delta = -A_\eta G_{n\eta}x^* - G_{n\eta}\big(y_\delta - A_\eta x^*\big). \qquad (4.18)$$

Из леммы 4.1 следует, что

$$\left\|G_{n\eta}x^*\right\| \to 0,\ n \to \infty,\ \eta \to 0. \qquad (4.19)$$

Покажем, что

$$\left\|g_n(A_\eta)\big(y_\delta - A_\eta x^*\big)\right\| \le \gamma n\big(\delta + \|x^*\|\eta\big). \qquad (4.20)$$

По условию (4.4) $\left\|g_n(A_\eta)\right\| \le \sup\limits_{0\le\lambda\le M}|g_n(\lambda)| \le \gamma n$, а $\left\|y_\delta - A_\eta x^*\right\| \le \|y_\delta - y\| +$ $+\left\|y - A_\eta x^*\right\| = \|y_\delta - y\| + \left\|Ax^* - A_\eta x^*\right\| \le \delta + \left\|(A - A_\eta)x^*\right\| \le \delta + \|x^*\|\eta$, поэтому имеем $\left\|g_n(A_\eta)\big(y_\delta - A_\eta x^*\big)\right\| \le \gamma n\big(\delta + \|x^*\|\eta\big)$.

В силу леммы 4.3

$$\sigma_{n\eta} = n\left\|A_\eta G_{n\eta}x^*\right\| \to 0,\ n \to \infty,\ \eta \to 0. \qquad (4.21)$$

Применим правило (4.15), тогда $\left\|A_\eta x_{m(\delta,\eta)} - y_\delta\right\| \le b\big(\delta + \|x^*\|\eta\big),\ b > 1$ и из (4.6) и (4.18) получим

$$\left\|A_\eta G_{m\eta}x^*\right\| \le (b+1)\big(\delta + \|x^*\|\eta\big). \qquad (4.22)$$

Действительно, из (4.18)

$$\left\|A_\eta G_{m\eta}x^*\right\| \le \left\|A_\eta x_{m(\delta,\eta)} - y_\delta\right\| + \left\|G_{m\eta}\left(y_\delta - A_\eta x^*\right)\right\| \le$$
$$\le b\left(\delta + \left\|x^*\right\|\eta\right) + \left(\delta + \left\|x^*\right\|\eta\right) = (b+1)\left(\delta + \left\|x^*\right\|\eta\right).$$

Для $\forall n < m$ $\left\|A_\eta x_{n(\delta,\eta)} - y_\delta\right\| > \varepsilon,$ потому
$$\left\|A_\eta G_{n\eta}x^*\right\| \ge \left\|A_\eta x_{n(\delta,\eta)} - y_\delta\right\| - \left\|G_{n\eta}\left(y_\delta - A_\eta x^*\right)\right\| \ge (b-1)\left(\delta + \left\|x^*\right\|\eta\right).$$
Следовательно, для $\forall n < m$
$$\left\|A_\eta G_{n\eta}x^*\right\| \ge (b-1)\left(\delta + \left\|x^*\right\|\eta\right). \tag{4.23}$$

Из (4.23) и (4.21) при $n = m-1$ имеем $\dfrac{\sigma_{m-1,\eta}}{m-1} = \left\|A_\eta G_{m-1,\eta}x^*\right\| \ge$ $\ge (b-1)\left(\delta + \left\|x^*\right\|\eta\right)$ или $(m-1)\left(\delta + \left\|x^*\right\|\eta\right) \le \dfrac{\sigma_{m-1,\eta}}{b-1} \to 0, \delta \to 0, \eta \to 0$ (т. к. из (4.21) $\sigma_{m\eta} \to 0, m \to \infty, \eta \to 0$). Если при этом $m(\delta,\eta) \to \infty$ при $\delta \to 0,$ $\eta \to 0,$ то, используя (4.17), (4.19) и (4.20), получим
$$\left\|x_{m(\delta,\eta)} - x^*\right\| \le \left\|G_{m\eta}x^*\right\| + \left\|g_m(A_\eta)\left(y_\delta - A_\eta x^*\right)\right\| \le$$
$$\le \left\|G_{m\eta}x^*\right\| + \gamma m(\delta,\eta)\left(\delta + \left\|x^*\right\|\eta\right) \to 0, m \to \infty, \delta \to 0, \eta \to 0,$$
т. е. что $x_{m(\delta,\eta)} \to x^*$.

Если же для некоторых δ_n и η_n последовательность $m(\delta_n,\eta_n)$ окажется ограниченной, то и в этом случае $x_{m(\delta_n,\eta_n)} \to x^*, \delta_n \to 0, \eta_n \to 0.$ Действительно, из (4.22) выполняется:
$$\left\|A_{\eta_n} G_{m\eta_n} x^*\right\| \le (b+1)\left(\delta_n + \left\|x^*\right\|\eta_n\right) \to 0, \delta_n \to 0, \eta_n \to 0.$$

Следовательно, имеем $A_{\eta_n} G_{m\eta_n} x^* \to 0, \delta_n \to 0, \eta_n \to 0$ и по лемме 4.4 получаем, что при $\delta_n \to 0, \eta_n \to 0$ выполняется $G_{m\eta_n} x^* \to 0.$ Отсюда
$$\left\|x_{m(\delta_n,\eta_n)} - x^*\right\| \le \left\|G_{m\eta_n} x^*\right\| + \gamma m(\delta_n,\eta_n)\left(\delta_n + \left\|x^*\right\|\eta_n\right) \to 0,\ \delta_n \to 0, \eta_n \to 0.$$
Теорема 4.5 доказана.

Теорема 4.6. *Пусть выполнены условия теоремы* 4.5. *Если* $x^* = A^s z,$ $s > 0, \|z\| \le \rho,$ *то справедливы оценки*
$$m \le 1 + \frac{s+1}{k\alpha e}\frac{\rho^{1/(s+1)}}{\left[(b-1)\left(\delta + \left\|x^*\right\|\eta\right) - c_s\gamma_1\eta\rho\right]^{1/(s+1)}};$$

$$\left\|x_{m(\delta,\eta)}-x^*\right\|\le c_s\eta^{\min(1,s)}\rho+\left[c_s\gamma_1\eta\rho+(b+1)\left(\delta+\left\|x^*\right\|\eta\right)\right]^{s/(s+1)}\rho^{1/(s+1)}+$$

$$+k\alpha\left\{1+\frac{s+1}{k\alpha e}\frac{\rho^{1/(s+1)}}{\left[(b-1)\left(\delta+\left\|x^*\right\|\eta\right)-c_s\gamma_1\eta\rho\right]^{1/(s+1)}}\right\}\left(\delta+\left\|x^*\right\|\eta\right). \qquad (4.24)$$

Доказательство. Оценим заново $\left\|A_\eta G_{m-1,\eta}x^*\right\|$. В силу (4.5) и леммы 1.1 [21, с. 91]

$$\left\|A_\eta G_{m-1,\eta}x^*\right\|=\left\|A_\eta G_{m-1,\eta}A^s z\right\|\le\left\|A_\eta G_{m-1,\eta}\left(A^s-A_\eta^s\right)z\right\|+$$

$$+\left\|A_\eta^{s+1}G_{m-1,\eta}z\right\|\le\left(\beta_{m-1,s}\eta+\gamma_{s+1}(m-1)^{-(s+1)}\right)\rho,$$

где $\beta_{m-1,s}=c_s\sup\limits_{0\le\lambda\le M}\lambda\left(1-\lambda g_{m-1}(\lambda)\right)\le\left[k(m-1)\alpha e\right]^{-1}c_s=c_s\gamma_1(m-1)^{-1}$, $\beta_{m-1,s}\to 0$, $m\to\infty$. Здесь $c_s=\mathrm{const}$ ($c_s\le 2$ при $0<s\le 1$). Сопоставляя это с (4.23), получим $(b-1)\left(\delta+\left\|x^*\right\|\eta\right)\le\left(\beta_{m-1,s}\eta+\gamma_{s+1}(m-1)^{-(s+1)}\right)\rho$. Отсюда имеем $\gamma_{s+1}(m-1)^{-(s+1)}\rho\ge(b-1)\left(\delta+\left\|x^*\right\|\eta\right)-\beta_{m-1,s}\eta\rho$, тогда справедливо $(m-1)^{(s+1)}\le\dfrac{\gamma_{s+1}\rho}{\left[(b-1)\left(\delta+\left\|x^*\right\|\eta\right)-\beta_{m-1,s}\eta\rho\right]}$, и, следовательно,

$$m\le 1+\frac{s+1}{k\alpha e}\left[\frac{\rho}{(b-1)\left(\delta+\left\|x^*\right\|\eta\right)-\beta_{m-1,s}\eta\rho}\right]^{1/(s+1)}.$$

Поскольку $\beta_{m-1,s}=c_s\gamma_1\dfrac{1}{m-1}\le c_s\gamma_1$ (т. к. при $m>1$ $\dfrac{1}{m-1}\le 1$), то $(b-1)\left(\delta+\left\|x^*\right\|\eta\right)-\beta_{m-1,s}\eta\rho\ge(b-1)\left(\delta+\left\|x^*\right\|\eta\right)-c_s\gamma_1\eta\rho$, и, значит, получим следующую оценку для m: $m\le 1+\dfrac{s+1}{k\alpha e}\dfrac{\rho^{1/(s+1)}}{\left[(b-1)\left(\delta+\left\|x^*\right\|\eta\right)-c_s\gamma_1\eta\rho\right]^{1/(s+1)}}$.

Имеем $\left\|G_{m\eta}x^*\right\|=\left\|G_{m\eta}A^s z\right\|\le\left\|G_{m\eta}\left(A^s-A_\eta^s\right)z\right\|+\left\|G_{m\eta}A_\eta^s z\right\|$. По лемме 1.1 [21, с. 91] $\left\|G_{m\eta}\left(A^s-A_\eta^s\right)z\right\|\le c_s\eta^{\min(1,s)}\rho$, что дает в оценку $\left\|x_{m(\delta,\eta)}-x^*\right\|$ вклад $O\left((\delta+\eta)^{s/(s+1)}\right)$ [21, с. 111]. Норму $\left\|G_{m\eta}A_\eta^s z\right\|$ оценим с помощью неравенства моментов, леммы 1.1 [21, с. 91] и (4.22):

$$\left\|G_{m\eta}A_\eta^s z\right\| = \left\|A_\eta^s G_{m\eta} z\right\| = \left\|A_\eta^{s+1} G_{m\eta} z\right\|^{s/(s+1)} \left\|G_{m\eta} z\right\|^{1/(s+1)} \le$$

$$\le \left\|A_\eta G_{m\eta} A_\eta^s z\right\|^{s/(s+1)} \|z\|^{1/(s+1)} \le \left(\left\|A_\eta G_{m\eta}\left(A_\eta^s - A^s\right)z\right\| +\right.$$

$$\left. + \left\|A_\eta G_{m\eta} A^s z\right\|\right)^{s/(s+1)} \rho^{1/(s+1)} \le \left[\beta_{ms}\eta\rho + (b+1)\left(\delta + \left\|x^*\right\|\eta\right)\right]^{s/(s+1)} \rho^{1/(s+1)}.$$

Тогда

$$\left\|x_{m(\delta,\eta)} - x^*\right\| \le \left\|G_{m\eta}x^*\right\| + \left\|g_m(A_\eta)\left(y_\delta - A_\eta x^*\right)\right\| \le c_s \eta^{\min(1,s)}\rho + \left[\beta_{ms}\eta\rho + (b+1)\times\right.$$

$$\left.\times\left(\delta + \left\|x^*\right\|\eta\right)\right]^{s/(s+1)} \rho^{1/(s+1)} + \gamma m\left(\delta + \left\|x^*\right\|\eta\right) \le c_s\eta^{\min(1,s)}\rho +$$

$$+ \left[c_s\gamma_1\eta\rho + (b+1)\left(\delta + \left\|x^*\right\|\eta\right)\right]^{s/(s+1)} \rho^{1/(s+1)} +$$

$$+ k\alpha\left\{1 + \frac{s+1}{k\alpha e}\frac{\rho^{1/(s+1)}}{\left[(b-1)\left(\delta + \left\|x^*\right\|\eta\right) - c_s\gamma_1\eta\rho)\right]^{1/(s+1)}}\right\}\left(\delta + \left\|x^*\right\|\eta\right).$$

Теорема 4.6 доказана.

Замечание 4.2. *Порядок оценки* (4.24) *есть* $0\left(\left(\delta+\eta\right)^{\frac{s}{s+1}}\right)$ *и, как следует из* [21], *он оптимален в классе задач с истокопредставимыми решениями.*

Замечание 4.3. *Хотя формулировка теоремы* 4.6 *дается с указанием степени истокопредставимости s и истокопредставляющего элемента z, на практике их значения не потребуются, т. к. они не содержатся в правиле останова по малости невязки* (4.15).

4.2.2. Случай несамосопряженной задачи

В случае несамосопряженной задачи итерационный метод (4.3) примет вид (4.8). Нетрудно показать, что метод (4.8) с правилом останова (4.15) сходится, и получить оценку для момента останова и оценку погрешности метода (4.8). Справедливы

Лемма 4.5. *Пусть* $A, A_\eta \in \mathscr{L}(H, F)$, $\left\|A_\eta - A\right\| \le \eta$, $\left\|A_\eta\right\|^2 \le M$ *и выполнено условие* (4.5). *Тогда* $n^{1/2}\left\|A_\eta K_{n\eta} v\right\| \to 0$ *при* $n \to \infty, \eta \to 0$, $\forall v \in \overline{R(A^*)}$, *где* $K_{n\eta} = E - A_\eta^* A_\eta g_n\left(A_\eta^* A_\eta\right)$.

Доказательство. Воспользуемся теоремой Банаха – Штейнгауза. По условию (4.5) нормы операторов ограничены в совокупности [21, с. 109] $n^{1/2}\left\|A_\eta K_{n\eta}\right\| = n^{1/2}\left\|\left(A_\eta^* A_\eta\right)^{1/2} K_{n\eta}\right\| \le \gamma_{1/2}, \left(n > 0, \eta > 0\right)$.

Для элементов вида $v = A^* z$, образующих в $N(A)^{\perp} = \overline{R(A^*)}$ плотное подмножество, в силу (4.5) имеем

$$n^{1/2}\left\|A_\eta K_{n\eta} v\right\| = n^{1/2}\left\|A_\eta K_{n\eta} A^* z\right\| \le n^{1/2}\left\|A_\eta K_{n\eta}\left(A^* - A_\eta^*\right) z\right\| + n^{1/2}\left\|A_\eta K_{n\eta} A_\eta^* z\right\| \le$$

$$\le \left(\gamma_{1/2}\eta + n^{1/2} \sup_{0\le\lambda\le M} \lambda\left|1 - \lambda g_n(\lambda)\right|\right)\|z\| \le$$

$$\le \left(\gamma_{1/2}\eta + n^{1/2}\gamma_1 n^{-1}\right)\|z\| = \left(\gamma_{1/2}\eta + \gamma_1 n^{-1/2}\right)\|z\| \to 0,$$

при $n \to \infty, \eta \to 0$. Мы учли, что $A_\eta K_{n\eta} A_\eta^* = A_\eta A_\eta^*\left(E - A_\eta A_\eta^* g_n\left(A_\eta A_\eta^*\right)\right)$ (лемма 3.1 [21, с. 34]). По теореме Банаха – Штейнгауза $n^{1/2}\left\|A_\eta K_{n\eta} v\right\| \to 0,$ $n \to \infty, \eta \to 0.$ *Лемма 4.5 доказана.*

Лемма 4.6. *Пусть* $A, A_\eta \in \mathscr{L}(H, F),$ $\left\|A_\eta - A\right\| \le \eta, \left\|A_\eta\right\|^2 \le M$ *и выполнены условия* (4.4), (4.6). *Если для некоторого* $v_0 \in \overline{R(A^*)},$ $n_p \le \bar{n} = const$ *и* $\eta_p \to 0$ *имеем* $A_{\eta_p} K_{n_p\eta_p} v_0 \to 0$ *или* $A_{\eta_p}^* A_{\eta_p} K_{n_p\eta_p} v_0 \to 0$ *при* $p \to \infty$, *то* $K_{n_p\eta_p} v_0 \to 0$.

Доказательство. Ограничимся доказательством случая, когда $A_{\eta_p}^* A_{\eta_p} K_{n_p\eta_p} v_0 \to 0$. В силу (4.6) последовательность $v_p = K_{n_p\eta_p} v_0$ ограничена, т. е. $\left\|v_p\right\| = \left\|K_{n_p\eta_p} v_0\right\| \le \gamma_0\left\|v_0\right\|,$ $p \in N = \{1, 2, \ldots\}$. Поэтому из этой последовательности можно извлечь слабо сходящуюся подпоследовательность $v_p \dashrightarrow v, (p \in N' \subseteq N)$. Тогда имеем $A_{\eta_p}^* A_{\eta_p} v_p \dashrightarrow A_{\eta_p}^* A_{\eta_p} v,$ $(p \in N')$. По условию $w_p = A_{\eta_p}^* A_{\eta_p} v_p \to 0,$ значит, $A_{\eta_p}^* A_{\eta_p} v = 0$. Т. к. нуль не является собственным значением оператора A_{η_p}, то $v = 0$. Теперь

$$\left\|v_p\right\|^2 = \left(v_p,\, K_{n_p\eta_p} v_0\right) = \left(v_p, \left(E - A_{\eta_p}^* A_{\eta_p} g_{n_p}\left(A_{\eta_p}^* A_{\eta_p}\right)\right) v_0\right) =$$

$$= \left(v_p, v_0\right) - \left(v_p, A_{\eta_p}^* A_{\eta_p} g_{n_p}\left(A_{\eta_p}^* A_{\eta_p}\right) v_0\right) =$$

$$= \left(v_p, v_0\right) - \left(A_{\eta_p}^* A_{\eta_p} v_p, g_{n_p}\left(A_{\eta_p}^* A_{\eta_p}\right) v_0\right) =$$

$$= \left(v_p, v_0\right) - \left(A_{\eta_p}^* A_{\eta_p} K_{n_p\eta_p} v_0,\, g_{n_p}\left(A_{\eta_p}^* A_{\eta_p}\right) v_0\right) \to 0,$$

т. к. $w_p = A_{\eta_p}^* A_{\eta_p} K_{n_p\eta_p} v_0 \to 0, \left\|g_{n_p}\left(A_{\eta_p}^* A_{\eta_p}\right)\right\| \le \gamma n_p \le \gamma \bar{n}.$

Итак, любая слабо сходящаяся подпоследовательность ограниченной последовательности v_p стремится к нулю по норме. Отсюда следует, что и вся последовательность $v_p \to 0,\ p \to \infty$ по норме. *Лемма 4.6 доказана.*

Справедлива

Теорема 4.7. *Пусть* $A, A_\eta \in \mathscr{L}(H, F)$, $\|A_\eta - A\| \le \eta, \|A_\eta\|^2 \le M, (0 < \eta \le \eta_0)$, $y \in R(A)$, $\|y - y_\delta\| \le \delta$ *и выполнены условия* (4.5), (4.6). *Пусть параметр* $m(\delta, \eta)$ *выбран по правилу* (4.15). *Тогда* $(\delta + \eta)^2 m(\delta, \eta) \to 0$, $x_{m(\delta,\eta)} \to x^*$ *при* $\delta \to 0$, $\eta \to 0$.

Доказательство. Из (4.8) имеем $x_{n(\delta,\eta)} = g_n\left(A_\eta^* A_\eta\right) A_\eta^* y_\delta$. Тогда

$$x_{n(\delta,\eta)} - x^* = g_n\left(A_\eta^* A_\eta\right) A_\eta^* y_\delta - x^* = -K_{n\eta} x^* + K_{n\eta} x^* + g_n\left(A_\eta^* A_\eta\right) A_\eta^* y_\delta - x^* =$$

$$= -K_{n\eta} x^* + \left(E - A_\eta^* A_\eta g_n\left(A_\eta^* A_\eta\right)\right) x^* - x^* + g_n\left(A_\eta^* A_\eta\right) A_\eta^* y_\delta =$$

$$= -K_{n\eta} x^* + x^* - A_\eta^* A_\eta g_n\left(A_\eta^* A_\eta\right) x^* - x^* + g_n\left(A_\eta^* A_\eta\right) A_\eta^* y_\delta =$$

$$= -K_{n\eta} x^* + g_n\left(A_\eta^* A_\eta\right) A_\eta^* \left(y_\delta - A_\eta x^*\right).$$

Следовательно,

$$x_{n(\delta,\eta)} - x^* = -K_{n\eta} x^* + g_n\left(A_\eta^* A_\eta\right) A_\eta^* \left(y_\delta - A_\eta x^*\right). \tag{4.25}$$

Отсюда

$$A_\eta x_{n(\delta,\eta)} - A_\eta x^* = -A_\eta K_{n\eta} x^* + A_\eta g_n\left(A_\eta^* A_\eta\right) A_\eta^* y_\delta - A_\eta g_n\left(A_\eta^* A_\eta\right) A_\eta^* A_\eta x;$$

$$A_\eta x_{n(\delta,\eta)} = A_\eta x^* - A_\eta K_{n\eta} x^* + A_\eta g_n\left(A_\eta^* A_\eta\right) A_\eta^* y_\delta - A_\eta g_n\left(A_\eta^* A_\eta\right) A_\eta^* A_\eta x^*.$$

Следовательно,

$$A_\eta x_{n(\delta,\eta)} - y_\delta = A_\eta x^* - y_\delta - A_\eta K_{n\eta} x^* + A_\eta g_n\left(A_\eta^* A_\eta\right) A_\eta^* y_\delta -$$

$$- A_\eta g_n\left(A_\eta^* A_\eta\right) A_\eta^* A_\eta x^* = -A_\eta K_{n\eta} x^* + \left[E - A_\eta A_\eta^* g_n\left(A_\eta A_\eta^*\right)\right] A_\eta x^* -$$

$$- \left[E - A_\eta A_\eta^* g_n\left(A_\eta A_\eta^*\right)\right] y_\delta = -A_\eta K_{n\eta} x^* + \tilde{K}_{n\eta} A_\eta x^* - \tilde{K}_{n\eta} y_\delta =$$

$$= -A_\eta K_{n\eta} x^* - \tilde{K}_{n\eta}\left(y_\delta - A_\eta x^*\right),$$

где $K_{n\eta} = E - A_\eta^* A_\eta g_n\left(A_\eta^* A_\eta\right)$, $\tilde{K}_{n\eta} = E - A_\eta A_\eta^* g_n\left(A_\eta A_\eta^*\right)$ (лемма 3.1 [21, с. 34]). Итак,

$$A_\eta x_{n(\delta,\eta)} - y_\delta = -A_\eta K_{n\eta} x^* - \tilde{K}_{n\eta}\left(y_\delta - A_\eta x^*\right). \tag{4.26}$$

Аналогично доказательству теоремы 4.3 можно показать, что

$$\left\|K_{n\eta} x^*\right\| \to 0,\ n \to \infty,\ \eta \to 0. \tag{4.27}$$

Докажем, что

$$\left\|g_n\left(A_\eta^* A_\eta\right) A_\eta^* \left(y_\delta - A_\eta x^*\right)\right\| \le \gamma^* n^{1/2}\left(\delta + \left\|x^*\right\| \eta\right), \tag{4.28}$$

где $\gamma^* = \sup\limits_{n>0}\left(n^{-1/2} \sup\limits_{0\le\lambda\le M} \lambda^{1/2}|g_n(\lambda)|\right) < \infty$. Действительно, $\left\|g_n\left(A_\eta^* A_\eta\right)A_\eta^*\right\| \le$ $\le \sup\limits_{0\le\lambda\le M}\left|\lambda^{1/2} g_n(\lambda)\right| = \gamma^* n^{1/2}$, где (подраздел 2.1.3) $\gamma^* \le \left(\frac{5}{4}k\alpha\right)^{1/2}$. Отсюда $\left\|g_n\left(A_\eta^* A_\eta\right)A_\eta^*\left(y_\delta - A_\eta x^*\right)\right\| \le \gamma^* n^{1/2}\left(\delta + \|x^*\|\eta\right)$, т. к.

$$\left\|y_\delta - A_\eta x^*\right\| \le \|y_\delta - y\| + \left\|y - A_\eta x^*\right\| = \|y_\delta - y\| + \left\|Ax^* - A_\eta x^*\right\| \le$$
$$\le \delta + \left\|\left(A - A_\eta\right)x^*\right\| \le \delta + \|x^*\|\eta.$$

В силу леммы 4.5

$$\sigma_{n\eta} = n^{1/2}\left\|A_\eta K_{n\eta} x^*\right\| \to 0,\ n \to \infty,\ \eta \to 0. \tag{4.29}$$

Из (4.15) и (4.26) получим при $n = m(\delta, \eta)$

$$\left\|A_\eta K_{m\eta} x^*\right\| \le \left\|A_\eta x_{m(\delta,\eta)} - y_\delta\right\| + \left\|\tilde{K}_{m\eta}\left(y_\delta - A_\eta x^*\right)\right\| \le$$
$$\le b\left(\delta + \|x^*\|\eta\right) + \left(\delta + \|x^*\|\eta\right) = (b+1)\left(\delta + \|x^*\|\eta\right). \tag{4.30}$$

При $n < m(\delta, \eta)$ из (4.15) $\left\|A_\eta x_{n(\delta,\eta)} - y_\delta\right\| > b\left(\delta + \|x^*\|\eta\right)$, поэтому

$$\left\|A_\eta K_{n\eta} x^*\right\| \ge \left\|A_\eta x_{n(\delta,\eta)} - y_\delta\right\| - \left\|\tilde{K}_{n\eta}\left(y_\delta - A_\eta x^*\right)\right\| \ge (b-1)\left(\delta + \|x^*\|\eta\right). \tag{4.31}$$

Из формул (4.29) и (4.31) получим при $n = m-1$ $(b-1)\left(\delta + \|x^*\|\eta\right) \le$ $\le \left\|A_\eta K_{m-1,\eta} x^*\right\| = \frac{\sigma_{m-1,\eta}}{(m-1)^{1/2}}$. Отсюда $(m-1)^{1/2}\left(\delta + \|x^*\|\eta\right) \le \frac{\sigma_{m-1,\eta}}{b-1} \to 0,\ \ \delta \to 0,$ $\eta \to 0$. Если при этом $m(\delta, \eta) \to \infty$ при $\delta \to 0, \eta \to 0$, то в силу (4.25), (4.27), (4.28) $\left\|x_{m(\delta,\eta)} - x^*\right\| \le \left\|K_{m\eta} x^*\right\| + \left\|g_m\left(A_\eta^* A_\eta\right)A_\eta^*\left(y_\delta - A_\eta x^*\right)\right\| \le \left\|K_{m\eta} x^*\right\| +$ $+ \gamma^* m^{1/2}\left(\delta + \|x^*\|\eta\right) \to 0$, т. е. $x_{m(\delta,\eta)} \to x^*$.

Если же для некоторых δ_n и η_n последовательность $m(\delta_n, \eta_n)$ окажется ограниченной, то и в этом случае $x_{m(\delta_n,\eta_n)} \to x^*$, $\delta_n \to 0$, $\eta_n \to 0$.

Действительно, из (4.30) $\left\|A_\eta K_{m\eta} x^*\right\| \le (b+1)\left(\delta_n + \|x^*\|\eta_n\right) \to 0,\ \delta_n \to 0,$ $\eta_n \to 0$. Тогда по лемме 4.6 будет $\left\|K_{m\eta} x^*\right\| \to 0,\ \delta_n \to 0,\ \eta_n \to 0$. Отсюда

$\left\|x_{m(\delta_n,\eta_n)} - x^*\right\| \le \left\|K_{m\eta}x^*\right\| + \gamma^* m^{1/2}(\delta_n,\eta_n)\left(\delta_n + \left\|x^*\right\|\eta_n\right) \to 0,\ \delta_n \to 0,\ \eta_n \to 0.$

Теорема 4.7 доказана.

Теорема 4.8. *Пусть выполнены условия теоремы* 4.7. *Если* $x^* = |A|^s z$, $s > 0$, $\|z\| \le \rho$, $|A| = \left(A^* A\right)^{1/2}$, *то справедливы оценки*

$$m \le 1 + \frac{s+1}{2k\alpha e}\left[\frac{\rho}{(b-1)\left(\delta + \left\|x^*\right\|\eta\right) - c_s\gamma_{1/2}\eta\rho}\right]^{2/(s+1)};$$

$$\left\|x_{m(\delta,\eta)} - x^*\right\| \le c_s\left(1 + |\ln\eta|\right)\eta^{\min(1,s)}\rho + \left[c_s\gamma_{1/2}\eta\rho + (b+1)\left(\delta + \left\|x^*\right\|\eta\right)\right]^{s/(s+1)}\rho^{1/(s+1)} +$$

$$+\left(\frac{5}{4}k\alpha\right)^{1/2}\left\{1 + \frac{s+1}{2k\alpha e}\left[\frac{\rho}{(b-1)\left(\delta + \left\|x^*\right\|\eta\right) - c_s\gamma_{1/2}\eta\rho}\right]^{2/(s+1)}\right\}^{1/2}\left(\delta + \left\|x^*\right\|\eta\right). \quad (4.32)$$

Доказательство. Пусть $x^* = |A|^s z,\ s > 0, \|z\| \le \rho$. В силу (4.5) и леммы 1.2 [21, с. 93]

$$\left\|A_\eta K_{m-1,\eta}x^*\right\| = \left\|A_\eta K_{m-1,\eta}|A|^s z\right\| \le \left\|A_\eta K_{m-1,\eta}\left(|A|^s - \left|A_\eta\right|^s\right)z\right\| +$$

$$+\left\|A_\eta K_{m-1,\eta}\left|A_\eta\right|^s z\right\| \le \left(\xi_{m-1,s}\eta + \gamma_{(s+1)/2}(m-1)^{-(s+1)/2}\right)\rho, \quad (4.33)$$

где $\xi_{m-1,s} = c_s \sup\limits_{0\le\lambda\le M} \lambda^{1/2}\left(1 - \lambda g_{m-1}(\lambda)\right) \le c_s[2k(m-1)\alpha e]^{-1/2} = c_s\gamma_{1/2}(m-1)^{-1/2}$, $\xi_{m-1,s} \to 0, m \to \infty$. Сопоставляя это с (4.31), получим $(b-1)\left(\delta + \left\|x^*\right\|\eta\right) \le$ $\le\left(\xi_{m-1,s}\eta + \gamma_{(s+1)/2}(m-1)^{-(s+1)/2}\right)\rho$, отсюда имеем $\gamma_{(s+1)/2}(m-1)^{-(s+1)/2}\rho \ge$ $\ge (b-1)\left(\delta + \left\|x^*\right\|\eta\right) - \xi_{m-1,s}\rho\eta$. Тогда $(m-1)^{(s+1)/2} \le \dfrac{\gamma_{(s+1)/2}\,\rho}{(b-1)\left(\delta + \left\|x^*\right\|\eta\right) - \xi_{m-1,s}\eta\rho}$

и, следовательно, $m \le 1 + \dfrac{s+1}{2k\alpha e}\left[\dfrac{\rho}{(b-1)\left(\delta + \left\|x^*\right\|\eta\right) - \xi_{m-1,s}\rho\eta}\right]^{2/(s+1)}$.

Поскольку $\xi_{m-1,s} = c_s\gamma_{1/2}(m-1)^{-1/2} \le c_s\gamma_{1/2}$ (т. к. $\left(\dfrac{1}{m-1}\right)^{1/2} \le 1$ при $m > 1$), то $(b-1)\left(\delta + \left\|x^*\right\|\eta\right) - \xi_{m-1,s}\eta\rho \ge (b-1)\left(\delta + \left\|x^*\right\|\eta\right) - c_s\gamma_{1/2}\eta\rho$ и, следовательно, $m \le 1 + \frac{s+1}{2k\alpha e}\left[\frac{\rho}{(b-1)\left(\delta + \|x^*\|\eta\right) - c_s\gamma_{1/2}\eta\rho}\right]^{2/(s+1)}$. Имеем $\|K_{m\eta}x^*\| =$ $= \|K_{m\eta}|A|^s z\| \le \left\|K_{m\eta}\left(|A|^s - |A_\eta|^s\right)z\right\| + \|K_{m\eta}|A_\eta|^s z\|$. По лемме 1.2 [21, с. 93] $\left\|K_{m\eta}\left(|A|^s - |A_\eta|^s\right)z\right\| \le c_s(1 + |\ln\eta|)\eta^{\min(1,s)}\rho$, где $c_s = \text{const}$ ($c_s \le 2$ при $0 < s \le 1$), что дает вклад $O\left((\delta+\eta)^{s/(s+1)}\right)$ в оценку $\|x_{m(\delta,\eta)} - x^*\|$ [21, с. 111]. Член $\|K_{m\eta}|A_\eta|^s z\|$ оценим при помощи неравенства моментов, леммы 1.2 [21, с. 93] и неравенства (4.30):

$$\|K_{m\eta}|A_\eta|^s z\| = \||A_\eta|^s K_{m\eta} z\| \le \||A_\eta|^{s+1} K_{m\eta} z\|^{s/(s+1)} \|K_{m\eta} z\|^{1/(s+1)} \le$$

$$\le \|A_\eta K_{m\eta}|A_\eta|^s z\|^{s/(s+1)} \|z\|^{1/(s+1)} \le \left[\left\|A_\eta K_{m\eta}\left(|A_\eta|^s - |A|^s\right)z\right\| + \|A_\eta K_{m\eta} x^*\|\right]^{s/(s+1)} \times$$

$$\times \rho^{1/(s+1)} \le \left[\xi_{ms}\eta\rho + (b+1)\left(\delta + \|x^*\|\eta\right)\right]^{s/(s+1)} \rho^{1/(s+1)}.$$

В итоге получим оценку

$$\|x_{m(\delta,\eta)} - x^*\| \le \|K_{m\eta}x^*\| + \left\|g_m(A_\eta)A_\eta^*\left(y_\delta - A_\eta x^*\right)\right\| \le c_s(1 + |\ln\eta|)\eta^{\min(1,s)}\rho +$$

$$+ \left[\xi_{ms}\eta\rho + (b+1)\left(\delta + \|x^*\|\eta\right)\right]^{s/(s+1)} \rho^{1/(s+1)} + \gamma^* m^{1/2}\left(\delta + \|x^*\|\eta\right) \le c_s(1 + |\ln\eta|)\eta^{\min(1,s)}\rho +$$

$$+ \left[c_s\gamma_{1/2}\eta\rho + (b+1)\left(\delta + \|x^*\|\eta\right)\right]^{s/(s+1)} \rho^{1/(s+1)} + \left(\frac{5}{4}k\alpha\right)^{1/2} \times$$

$$\times \left\{1 + \frac{s+1}{2k\alpha e}\left[\frac{\rho}{(b-1)\left(\delta + \|x^*\|\eta\right) - c_s\gamma_{1/2}\eta\rho}\right]^{2/(s+1)}\right\}^{1/2} \left(\delta + \|x^*\|\eta\right).$$

Теорема 4.8 доказана.

Замечание 4.4. *Порядок оценки* (4.32) *есть* $O\left((\delta+\eta)^{s/(s+1)}\right)$ *и, как следует из* [21], *он оптимален в классе задач с истокообразно представимыми решениями.*

Замечание 4.5. *Знание порядка* $s > 0$ *и истокопредставляющего элемента* z, *используемое в теореме* 4.8, *на практике не потребуется. При останове по невязке автоматически делается нужное число итераций для получения оптимального по порядку решения.*

ГЛАВА 5
ИТЕРАЦИОННЫЙ ПРОЦЕСС НЕЯВНОГО ТИПА РЕШЕНИЯ НЕКОРРЕКТНЫХ ЗАДАЧ С ПРИБЛИЖЕННО ЗАДАННЫМ ОПЕРАТОРОМ

В данной главе для неявного итерационного метода решения операторных уравнений первого рода исследуются априорный и апостериорный выборы параметра регуляризации в исходной норме гильбертова пространства в случае самосопряженного и несамосопряженного операторов, в предположении, что погрешности имеются не только в правой части уравнения, но и в операторе. Сформулированы и доказаны теоремы о достаточных условиях сходимости метода, получены оценки погрешности, даются рекомендации на выбор в методе параметра регуляризации.

5.1. Априорный выбор числа итераций в неявном методе решения линейных уравнений с приближенным оператором

5.1.1. Постановка задачи

Пусть H и F – гильбертовы пространства и $A \in \mathfrak{L}(H,F)$, т. е. A – линейный непрерывный оператор, действующий из H в F. Предполагается, что нуль принадлежит спектру оператора A, но не является его собственным значением. Решается уравнение

$$Ax = y. \tag{5.1}$$

Задача отыскания элемента $x \in H$ по элементу $y \in F$ является некорректной, т. к. сколь угодно малые возмущения в правой части y могут вызывать сколь угодно большие возмущения решения.

Предположим, что точное решение $x^* \in H$ уравнения (5.1) существует и является единственным. Будем искать его с помощью неявного итерационного процесса

$$\left(E + \alpha A^k\right)x_{n+1} = \left(E - \alpha A^k\right)x_n + 2\alpha A^{k-1}y,\ x_0 = 0,\ k \in N. \tag{5.2}$$

Считаем, что оператор A и правая часть y уравнения (5.1) заданы приближенно, т. е. вместо y известно приближение y_δ, $\|y - y_\delta\| \le \delta$, а вместо оператора A известен оператор A_η, $\|A - A_\eta\| \le \eta$. Предполагаем, что $0 \in Sp(A_\eta)$, $Sp(A_\eta) \subseteq [0, M]$. Тогда метод (5.2) примет вид

$$\left(E + \alpha A_\eta^k\right)x_{n+1} = \left(E - \alpha A_\eta^k\right)x_n + 2\alpha A_\eta^{k-1}y_\delta,\ x_0 = 0,\ k \in N. \tag{5.3}$$

Случай приближенной правой части уравнения и точного оператора для рассматриваемого метода изучен в разделе 3.1. Там исследованы априорный и апостериорный выборы параметра регуляризации, изучен случай неединственного решения задачи, доказана сходимость метода в энергетической норме.

Исследуем сходимость метода (5.3) в случае априорного выбора параметра регуляризации при решении уравнения $A_\eta x = y_\delta$ с приближенным оператором A_η и приближенной правой частью y_δ, получим априорные оценки погрешности. Подобные вопросы изучались в [21], но только для других методов.

5.1.2. Случай самосопряженных неотрицательных операторов

Пусть $H = F$, $A = A^* \geq 0$, $A_\eta = A_\eta^* \geq 0$, $Sp(A_\eta) \subseteq [0, M]$, $0 < \eta \leq \eta_0$. Итерационный метод (5.3) запишем в виде $x_n = g_n(A_\eta) y_\delta$, где $g_n(\lambda) = \lambda^{-1}\left[1 - \left(\dfrac{1 - \alpha\lambda^k}{1 + \alpha\lambda^k}\right)^n\right]$. В разделе 3.1 при $\alpha > 0$ получены условия для функций $g_n(\lambda)$:

$$\sup_{0 \leq \lambda \leq M} |g_n(\lambda)| \leq \gamma n^{1/k}, \ \gamma = 2k\alpha^{1/k}, \ (n > 0), \tag{5.4}$$

$$\sup_{0 \leq \lambda \leq M} \lambda^s |1 - \lambda g_n(\lambda)| \leq \gamma_s n^{-s/k}, \ (n > 0), \ 0 < s < \infty, \ \gamma_s = \left(\frac{s}{k\alpha e}\right)^{s/k}, \tag{5.5}$$

(здесь s – степень истокопредставимости точного решения $x^* = A^s z$, $s > 0$, $\|z\| \leq \rho$);

$$\sup_{0 \leq \lambda \leq M} |1 - \lambda g_n(\lambda)| \leq \gamma_0, \ \gamma_0 = 1, \ (n > 0). \tag{5.6}$$

Справедлива

Лемма 5.1. *Пусть* $A = A^* \geq 0$, $A_\eta = A_\eta^* \geq 0$, $\|A_\eta - A\| \leq \eta$, $Sp(A_\eta) \subseteq [0, M]$, $(0 < \eta \leq \eta_0)$, $\alpha > 0$ *и выполнено условие* (5.6). *Тогда* $\|G_{n\eta} v\| \to 0$ *при* $n \to \infty$, $\eta \to 0$ $\forall v \in H$, *где* $G_{n\eta} = E - A_\eta g_n(A_\eta)$.

Доказательство леммы аналогично доказательству леммы 4.1 из пункта 4.1.2. Условие сходимости для метода (5.3) дает

Теорема 5.1. *Пусть* $A = A^* \geq 0$, $A_\eta = A_\eta^* \geq 0$, $\|A_\eta - A\| \leq \eta$, $Sp(A_\eta) \subseteq [0, M]$, $(0 < \eta \leq \eta_0)$, $\alpha > 0$, $y \in R(A)$, $\|y - y_\delta\| \leq \delta$ *и выполнены условия* (5.4), (5.6). *Выберем* $n = n(\delta, \eta)$ *в методе* (5.3) *так, чтобы* $(\delta + \eta) n^{1/k}(\delta, \eta) \to 0$ *при* $n(\delta, \eta) \to \infty$, $\delta \to 0$, $\eta \to 0$. *Тогда* $x_{n(\delta,\eta)} \to x^*$ *при* $\delta \to 0, \eta \to 0$.

Теорема 5.2. *Пусть* $A = A^* \geq 0$, $A_\eta = A_\eta^* \geq 0$, $\|A_\eta - A\| \leq \eta$, $Sp(A_\eta) \subseteq [0, M]$, $(0 < \eta \leq \eta_0)$, $\alpha > 0$, $y \in R(A)$, $\|y_\delta - y\| \leq \delta$ *и выполнены условия* (5.4), (5.5).

Если точное решение истокопредставимо, т. е. $x^* = A^s z$, $s > 0$, $\|z\| \le \rho$, *то справедлива оценка погрешности*

$$\left\|x_{n(\delta,\eta)} - x^*\right\| \le \gamma_0 c_s \eta^{\min(1,s)}\rho + \gamma_s n^{-s/k}\rho + \gamma n^{1/k}\left(\delta + \eta\left\|x^*\right\|\right),\ 0 < s < \infty. \quad (5.7)$$

Теоремы 5.1–5.2 доказываются аналогично как в пункте 4.1.2.

Если минимизировать правую часть оценки (5.7) по n, то найдем

$$n_{\text{опт}} = 2^{-k/(s+1)}\left(\frac{s}{k}\right)^{(s+k)/(s+1)} e^{-s/(s+1)}\alpha^{-1}\rho^{k/(s+1)}\left(\delta + \left\|x^*\right\|\eta\right)^{-k/(s+1)}.$$

Подставив $n_{\text{опт}}$ в (5.7), получим

$$\left\|x_{n(\delta,\eta)} - x^*\right\|_{\text{опт}} \le c_s\eta^{\min(1,s)}\rho + 2^{s/(s+1)}\left(\frac{s}{k}\right)^{s(1-k)/(k(s+1))} \times$$

$$\times (s+1)e^{-s/(k(s+1))}\left(\delta + \left\|x^*\right\|\eta\right)^{s/(s+1)}\rho^{1/(s+1)},\ (c_s \le 2 \text{ для } 0 < s \le 1).$$

Замечание 5.1. *Оптимальная оценка погрешности не зависит от* α, *но* $n_{опт}$ *от* α *зависит. Т. к. на* α *нет ограничений сверху* $(\alpha > 0)$, *то можно* α *выбрать так, чтобы* $n_{опт} = 1$. *Для этого достаточно взять*

$$\alpha_{опт} = 2^{-k/(s+1)}\left(\frac{s}{k}\right)^{(s+k)/(s+1)} e^{-s/(s+1)}\rho^{k/(s+1)}\left(\delta + \left\|x^*\right\|\eta\right)^{-k/(s+1)}.$$

5.1.3. Случай несамосопряженных операторов

В случае несамосопряженной задачи метод (5.3) примет вид

$$\left(E + \alpha\left(A_\eta^* A_\eta\right)^k\right)x_{n+1} = \left(E - \alpha\left(A_\eta^* A_\eta\right)^k\right)x_n + 2\alpha\left(A_\eta^* A_\eta\right)^{k-1}A_\eta^* y_\delta,\quad x_0 = 0,\quad k \in N. \quad (5.8)$$

Из леммы 5.1 следует

Лемма 5.2. *Пусть* A, $A_\eta \in \mathfrak{L}(H, F)$, $\left\|A_\eta - A\right\| \le \eta$, $\left\|A_\eta\right\|^2 \le M$, $\alpha > 0$ *и выполнено условие* (5.6). *Тогда*

$$\left\|K_{n\eta}v\right\| \to 0 \ \textit{при}\ n \to \infty, \eta \to 0,\ \forall v \in N(A)^\perp = \overline{R(A^*)},$$

$$\left\|\tilde{K}_{n\eta}z\right\| \to 0 \ \textit{при}\ n \to \infty, \eta \to 0,\ \forall z \in N\left(A^*\right)^\perp = \overline{R(A)},$$

где $K_{n\eta} = E - A_\eta^* A_\eta g_n\left(A_\eta^* A_\eta\right)$, $\tilde{K}_{n\eta} = E - A_\eta A_\eta^* g_n\left(A_\eta A_\eta^*\right)$.

Справедливы

Теорема 5.3. *Пусть* A, $A_\eta \in \mathfrak{L}(H, F)$, $\left\|A - A_\eta\right\| \le \eta$, $\left\|A_\eta\right\|^2 \le M$, $(0 < \eta \le \eta_0)$, $\alpha > 0$, $y \in R(A)$, $\left\|y_\delta - y\right\| \le \delta$ *и выполнены условия* (5.5), (5.6). *Выберем параметр* $n = n(\delta,\eta)$ *так, чтобы* $n^{1/k}(\delta + \eta)^2 \to 0$ *при* $n(\delta,\eta) \to \infty$, $\delta \to 0$, $\eta \to 0$. *Тогда* $x_{n(\delta,\eta)} \to x^*$ *при* $\delta \to 0$, $\eta \to 0$.

Теорема 5.4. *Пусть* $A,\ A_\eta \in \mathfrak{L}(H, F)$, $\|A - A_\eta\| \le \eta$, $\|A_\eta\|^2 \le M$, $(0 < \eta \le \eta_0)$, $\alpha > 0$, $y \in R(A)$, $\|y_\delta - y\| \le \delta$. *Если точное решение представимо в виде* $x^* = |A|^s z$, $s > 0$, $\|z\| \le \rho$, $|A| = \left(A^* A\right)^{1/2}$ *и выполнены условия* (5.5), (5.6), *то справедлива оценка погрешности*

$$\begin{aligned}\left\|x_{n(\delta,\eta)} - x^*\right\| &\le \gamma_0 c_s \left(1 + |\ln \eta|\right)\eta^{\min(1,s)}\rho + \gamma_{s/2} n^{-s/(2k)}\rho + \\ &+ 2k^{1/2}\alpha^{1/(2k)} n^{1/(2k)}\left(\delta + \left\|x^*\right\|\eta\right),\ 0 < s < \infty.\end{aligned} \tag{5.9}$$

Теоремы 5.3–5.4 доказываются аналогично как в пункте 4.1.3.

Минимизируя правую часть неравенства (5.9) по n, получим априорный момент останова:

$$n_{\text{опт}} = \left(\frac{s}{2}\right)^{(2k+s)/(s+1)} k^{-(s+k)/(s+1)} e^{-s/(s+1)}\, \alpha^{-1} \rho^{2k/(s+1)} \left(\delta + \left\|x^*\right\|\eta\right)^{-2k/(s+1)}.$$

Подставив $n_{\text{опт}}$ в оценку (5.9), получим оптимальную оценку погрешности для метода итераций (5.8)

$$\begin{aligned}\left\|x_{n(\delta,\eta)} - x^*\right\|_{\text{опт}} &\le c_s \left(1 + |\ln \eta|\right)\eta^{\min(1,s)}\, \rho + \left(\frac{s}{2}\right)^{s(1-2k)/(2k(s+1))} \times \\ &\times k^{s(k-1)/(2k(s+1))}(s+1)e^{-s/(2k(s+1))}\, \rho^{1/(s+1)}\left(\delta + \left\|x^*\right\|\eta\right)^{s/(s+1)},\ 0 < s < \infty.\end{aligned}$$

5.2. Апостериорный выбор числа итераций в неявном методе решения линейных уравнений с приближенным оператором

5.2.1. Случай самосопряженной задачи

Рассматривается уравнение $Ax = y$ из подраздела 5.1.1. Для его решения используется итерационный метод (5.3).

Докажем сходимость метода (5.3) в случае апостериорного выбора параметра регуляризации для решения уравнения $A_\eta x = y_\delta$, где оператор A_η и правая часть уравнения заданы приближенно: $\|A_\eta - A\| \le \eta$, $\|y - y_\delta\| \le \delta$. Считаем, что 0 не является собственным значением оператора A_η, но принадлежит его спектру. Предположим, что уравнение $A_\eta x = y_\delta$ имеет единственное решение.

Зададим уровень останова $\varepsilon > 0$ и определим момент m останова процесса (5.3) условием (4.15). Предположим, что при начальном приближении $x_{0(\delta,\eta)}$ невязка достаточно велика, больше уровня останова ε, т. е. $\|A_\eta x_{0(\delta,\eta)} - y_\delta\| > \varepsilon$. Покажем возможность применения правила (4.15) к методу итераций (5.3).

Пусть $H = F$, $A = A^* \ge 0$, $A_\eta = A_\eta^* \ge 0$, $\sigma(A_\eta) \subseteq [0, M]$. Справедливы

Лемма 5.3. *Пусть* $A = A^* \ge 0$, $A_\eta = A_\eta^* \ge 0$, $\|A_\eta - A\| \le \eta$, $\|A_\eta\| \le M$, $\alpha > 0$ *и выполнено условие* (5.5). *Тогда для* $G_{n\eta} = E - A_\eta g_n(A_\eta)$ *справедливо соотношение для* $\forall \upsilon \in \overline{R(A)}$: $n^{1/k} \|A_\eta G_{n\eta} \upsilon\| \to 0$ *при* $n \to \infty$, $\eta \to 0$.

Лемма 5.4. *Пусть* $A = A^* \ge 0$, $A_\eta = A_\eta^* \ge 0$, $\|A_\eta - A\| \le \eta$, $\|A_\eta\| \le M$, $\alpha > 0$ *и выполнены условия* (5.4), (5.6). *Если для некоторых* $\upsilon_0 \in \overline{R(A)}$, $n_p \le \bar{n} = const$ *и* $\eta_p \to 0$ *имеем* $A_{\eta_p} G_{n_p \eta_p} \upsilon_0 \to 0$ *при* $p \to \infty$, *то* $G_{n_p \eta_p} \upsilon_0 \to 0$.

Теорема 5.5. *Пусть* $H = F$, $A = A^* \ge 0$, $A_\eta = A_\eta^* \ge 0$, $\|A_\eta - A\| \le \eta$, $\|A_\eta\| \le M$, $(0 < \eta \le \eta_0)$, $y \in R(A)$, $\|y - y_\delta\| \le \delta$, $\alpha > 0$ *и выполнены условия* (5.4), (5.5), (5.6). *Пусть параметр* $m(\delta, \eta)$ *выбран по правилу останова* (4.15). *Тогда* $(\delta + \eta) m^{1/k}(\delta, \eta) \to 0$, $x_{m(\delta,\eta)} \to x^*$ *при* $\delta \to 0, \eta \to 0$.

Теорема 5.6. *Пусть выполнены условия теоремы* 5.5. *Если* $x^* = A^s z$, $s > 0, \|z\| \le \rho$, *то справедливы следующие оценки*

$$m \le 1 + \frac{s+1}{k\alpha e} \frac{\rho^{k/(s+1)}}{\left[(b-1)\left(\delta + \|x^*\| \eta\right) - c_s \gamma_1 \eta \rho\right]^{k/(s+1)}},$$

$$\left\|x_{m(\delta,\eta)}-x^*\right\| \le c_s\eta^{\min(1,s)}\rho+\left[c_s\gamma_1\eta\rho+(b+1)\left(\delta+\left\|x^*\right\|\eta\right)\right]^{s/(s+1)}\rho^{1/(s+1)}+$$

$$+2k\alpha^{1/k}\left\{1+\frac{s+1}{k\alpha e}\frac{\rho^{k/(s+1)}}{\left[(b-1)\left(\delta+\left\|x^*\right\|\eta\right)-c_s\gamma_1\eta\rho\right)\right]^{k/(s+1)}}\right\}^{1/k}\left(\delta+\left\|x^*\right\|\eta\right). \qquad (5.10)$$

Леммы 5.3–5.4 и теоремы 5.5–5.6 доказываются аналогично подобным леммам и теоремам из пункта 4.2.1.

Замечание 5.2. *Порядок оценки* (5.10) *есть* $O\left((\delta+\eta)^{s/(s+1)}\right)$ *и, как следует из* [21], *он оптимален в классе задач с истокообразно представимыми решениями.*

Замечание 5.3. *Хотя формулировка теоремы* 5.6 *дается с указанием степени истокопредставимости s и истокопредставляющего элемента z, на практике их значения не потребуются, так как они не содержатся в правиле останова* (4.15). *Знание истокопредставимости необходимо только для получения оценок в теореме* 5.6.

5.2.2. Случай несамосопряженной задачи

В случае несамосопряженной задачи итерационный метод (5.3) примет вид (5.8). Нетрудно показать, что метод (5.8) с правилом останова (4.15) сходится, и получить оценку для момента останова и оценку погрешности метода (5.8).

Справедливы

Лемма 5.5. *Пусть* $A, A_\eta \in \mathcal{L}(H, F)$, $\left\|A_\eta - A\right\| \le \eta, \left\|A_\eta\right\|^2 \le M$, $\alpha > 0$ *и выполнено условие* (5.5). *Тогда* $n^{1/(2k)}\left\|A_\eta K_{n\eta} v\right\| \to 0$ *при* $n \to \infty, \eta \to 0$, $\forall v \in \overline{R(A^*)}$, *где* $K_{n\eta} = E - A_\eta^* A_\eta g_n\left(A_\eta^* A_\eta\right)$.

Лемма 5.6. *Пусть* $A, A_\eta \in \mathcal{L}(H, F)$, $\left\|A_\eta - A\right\| \le \eta, \left\|A_\eta\right\|^2 \le M$, $\alpha > 0$ *и выполнены условия* (5.4), (5.6). *Если для некоторого* $v_0 \in \overline{R(A^*)}$, $n_p \le \overline{n} = const$ *и* $\eta_p \to 0$ *имеем* $A_{\eta_p} K_{n_p\eta_p} v_0 \to 0$ *или* $A_{\eta_p}^* A_{\eta_p} K_{n_p\eta_p} v_0 \to 0$ *при* $p \to \infty$, *то* $K_{n_p\eta_p} v_0 \to 0$.

Теорема 5.7. *Пусть* $A, A_\eta \in \mathcal{L}(H, F)$, $\left\|A_\eta - A\right\| \le \eta, \left\|A_\eta\right\|^2 \le M$, $\left(0<\eta\le\eta_0\right)$, $y \in R(A)$, $\left\|y - y_\delta\right\| \le \delta$, $\alpha > 0$ *и выполнены условия* (5.5), (5.6). *Пусть параметр* $m(\delta,\eta)$ *выбран по правилу* (4.15). *Тогда* $(\delta+\eta)^2 m^{1/k}(\delta,\eta) \to 0$, $x_{m(\delta,\eta)} \to x^*$ *при* $\delta \to 0$, $\eta \to 0$.

Теорема 5.8. *Пусть выполнены условия теоремы* 5.7. *Если* $x^* = |A|^s z$, $s > 0$, $\|z\| \le \rho$, $|A| = \left(A^* A\right)^{1/2}$, *то справедливы оценки*

$$m \le 1 + \frac{s+1}{2k\alpha e}\left[\frac{\rho}{(b-1)\left(\delta + \|x^*\|\eta\right) - c_s \gamma_{1/2}\eta\rho}\right]^{(2k)/(s+1)};$$

$$\left\|x_{m(\delta,\eta)} - x^*\right\| \le c_s\left(1 + |\ln\eta|\right)\eta^{\min(1,s)}\rho + \left[c_s\gamma_{1/2}\eta\rho + (b+1)\left(\delta + \|x^*\|\eta\right)\right]^{s/(s+1)}\rho^{1/(s+1)} +$$

$$+ 2k^{1/2}\alpha^{1/(2k)}\left\{1 + \frac{s+1}{2k\alpha e}\times\left[\frac{\rho}{(b-1)\left(\delta + \|x^*\|\eta\right) - c_s\gamma_{1/2}\eta\rho}\right]^{(2k)/(s+1)}\right\}^{1/(2k)}\left(\delta + \|x^*\|\eta\right). \quad (5.11)$$

Леммы 5.5–5.6 и теоремы 5.7–5.8 доказываются аналогично подобным леммам и теоремам из пункта 4.2.2.

Замечание 5.4. *Порядок оценки* (5.11) *есть* $O\left((\delta + \eta)^{s/(s+1)}\right)$ *и, как следует из* [21], *он оптимален в классе задач с истокообразно представимыми решениями.*

Замечание 5.5. *Знание порядка* $s > 0$ *и истокопредставляющего элемента* z, *используемое в теореме* 5.8, *на практике не потребуется. При останове по невязке автоматически делается нужное число итераций для получения оптимального по порядку решения.*

ГЛАВА 6
ТЕОРЕМА М. А. КРАСНОСЕЛЬСКОГО И ПОСТРОЕНИЕ ИТЕРАЦИОННЫХ СХЕМ РЕШЕНИЯ НЕКОРРЕКТНЫХ УРАВНЕНИЙ ПЕРВОГО РОДА

В данной главе в гильбертовом пространстве исследуются методы последовательных приближений к точным решениям некорректных операторных уравнений первого и второго рода с самосопряженным оператором. Получены условия сходимости этих последовательных приближений и выяснена скорость их сходимости к точным решениям в исходной и в «ослабленных» нормах как на всем пространстве, так и на некоторых подпространствах плотно вложенных в исходное; проведен анализ поведения невязок и поправок при построении этих последовательных приближений; наконец, изучено поведение соответствующих ошибок в случаях, когда правые части заданы приближенно и когда сами вычисления производятся с некоторыми ошибками.

Метод последовательных приближений – один из основных методов приближенного решения линейных операторных уравнений второго рода $x = Bx + f$ в гильбертовом и банаховом пространствах. Основные теоремы о сходимости этого метода, скорости сходимости, оценках погрешности и т. д. сводятся к исследованию свойств ряда Неймана $\sum_{n=0}^{\infty} B^n$ для соответствующего оператора B и изложены во многих учебниках, монографиях и статьях, из которых отметим [43; 59]. При этом основная часть этих результатов относится к так называемому некритическому случаю, когда спектральный радиус $\rho(B)$ этого линейного оператора строго меньше 1 – это условие является необходимым и достаточным для сходимости ряда Неймана в пространстве операторов. Однако позднее обнаружилось, что ряд Неймана может сходиться (но уже не по норме операторов, а только сильно) и в случаях, когда спектральный радиус $\rho(B)$ соответствующего оператора равен 1. Одним из первых результатов в этом направлении был получен М. А. Красносельским [58–59], которым было показано, что для уравнения $x = Bx + f$ с самосопряженным оператором B в гильбертовом пространстве при условии $\rho(B) = \|B\| = 1$ и дополнительном предположении, что –1 не является собственным значением B, последовательные приближения сходятся к одному из решений рассматриваемого уравнения, если только это уравнение разрешимо. Эта теорема не является тривиальной, т. к. при сделанных предположениях уравнение $x = Bx + f$, вообще говоря, относится к классу некорректных (ill-posed).

Первая цель настоящей главы – показать, как упомянутая выше теорема М. А. Красносельского о сходимости последовательных приближений для уравнений с самосопряженными операторами с некоторыми естественными дополнениями содержит в себе основные результаты об итерационных методах приближенного решения некорректных линейных уравнений второго рода с самосопряженным оператором B в гильбертовом пространстве H.

Для приближенного построения решений операторных уравнений первого рода $Ax = y$ метод последовательных приближений также широко используется. Основная схема использования метода последовательных приближений здесь основывается на переходе от исходного уравнения $Ax = y$ к эквивалентному (или почти эквивалентному) уравнению второго рода $x = Bx + f$. Один из основных методов такого перехода основан на использовании в качестве оператора B функций $f(A)$ от оператора A. Методы такого типа изучались многими авторами [59], однако основные результаты здесь получены для случая корректных уравнений $Ax = y$, иными словами, при дополнительном предположении, что $0 \notin SpA$.

Вторая цель настоящей главы – исследовать возможности применения метода последовательных приближений для отыскания приближенных решений уравнения $Ax = y$ именно в случае, когда это уравнение некорректно, т. е. когда $0 \in SpA$. При этом мы ограничимся случаем, когда оператор A, как и построенный по нему оператор $B = f(A)$, являются самосопряженными операторами в гильбертовом пространстве H. Тем самым основным инструментом исследования некорректных линейных операторных уравнений первого рода снова окажется упомянутая выше теорема М. А. Красносельского.

Следует отметить, что теория некорректных линейных операторных уравнений с самосопряженным оператором в гильбертовом пространстве развивалась независимо с разных точек зрения и с разной степенью подробности многими авторами. Здесь достаточно отметить монографии [1–А; 2–А; 3–А; 11; 21; 41; 64; 111; 126–127; 129; 137; 151; 182; 187–188].

Третья цель шестой главы работы – показать, как известные ранее частные результаты этих работ укладываются в общую схему, а также сформулировать ряд новых утверждений.

6.1. Уравнения второго рода

6.1.1. Сходимость последовательных приближений

Пусть H – гильбертово пространство, B – самосопряженный оператор, $f \in H$. Рассмотрим уравнение

$$x = Bx + f. \tag{6.1}$$

Для нахождения решений этого уравнения естественно использовать метод последовательных приближений

$$x_{n+1} = Bx_n + f \ \ (x_0 \in H, n = 0, 1, 2, ...). \qquad (6.2)$$

Действительно, если определенная равенством (6.2) последовательность (x_n) сходится, то ее предел будет решением уравнения (6.1).

Анализ сходимости последовательных приближений (6.2) исследован с достаточной полнотой в случае, когда $\rho(B) < 1$. Последнее неравенство (для любого непрерывного линейного и не обязательно самосопряженного оператора *B*) эквивалентно сходимости ряда Неймана и равенству

$$(E - B)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} B^n.$$

Поэтому ниже нас будет интересовать только «критический» случай, когда $\rho(B) = 1$. Для самосопряженного оператора это означает, что $\|B\| = 1$ и что $SpB \cap \{-1, 1\} \neq \varnothing$. В случае $1 \notin SpB$ уравнение (6.1) остается однозначно разрешимым при любом $f \in H$, хотя вопрос о сходимости к соответствующему решению последовательных приближений (6.2) остается открытым. В случае же $1 \in SpB$ уравнение (6.1) оказывается разрешимым для одних правых частей $f \in H$ (и в этом случае решение оказывается неединственным) и неразрешимым при других правых частях $f \in H$.

В работе [58] М. А. Красносельским был дан полный ответ об условиях сходимости последовательных приближений в описанном выше критическом случае. В приводимой ниже модификации теоремы М. А. Красносельского приведено также и утверждение о том, к какому из решений сходятся последовательные приближения в случаях, когда уравнение (6.1) разрешимо неоднозначно.

Теорема 6.1. *Пусть B – самосопряженный оператор с* $\rho(B) = 1$ *в гильбертовом пространстве H, причем* –1 *не является* его *собственным значением.*

Пусть уравнение (6.1) *разрешимо. Тогда последовательные приближения* (6.2) *при любом начальном условии* $x_0 \in H$ *сходятся к одному из решений уравнения* (6.1).

Более точно, приближения (6.2) *сходятся к решению* x_* *уравнения* (6.1)*, для которого* $Px_* = Px_0$*, где P – ортопроектор на множество собственных векторов оператора B, отвечающих собственному значению* 1.

Доказательство. Приведем простую схему доказательства этой теоремы ([58–59]). Из (6.1) и (6.2) очевидным образом вытекают равенства

$$x_n = B^n x_0 + (E + B + \ldots + B^{n-1}) f \ \ (n = 0, 1, 2, \ldots), \qquad (6.3)$$

$$x_* = B^n x_* + (E + B + \ldots + B^{n-1}) f \ \ (n = 0, 1, 2, \ldots), \qquad (6.4)$$

откуда

$$x_n - x_* = B^n(x_0 - x_*). \tag{6.5}$$

Отсюда, в силу теорем о спектральном разложении самосопряженных операторов в гильбертовом пространстве (например, [43; 133])

$$\|x_n - x_*\|^2 = \int\limits_{SpB} |\lambda|^{2n} (dE_\lambda(x_0 - x_*), x_0 - x_*), \tag{6.6}$$

где E_λ – спектральная мера для оператора B. Последовательность $|\lambda|^{2n}$ сходится к нулю всюду на $(-1,1) \cap SpB$. Точка -1 (если она входит в SpB) в условиях теоремы 6.1 имеет нулевую спектральную меру. Точка 1 (опять таки, если она входит в SpB) может иметь положительную меру, однако лишь в случае, когда $Px_* \neq Px_0$. Тем самым утверждение теоремы 6.1 следует из теоремы Лебега о предельном переходе под знаком интеграла. *Теорема 6.1 доказана.*

Отметим, что сходимость последовательных приближений в общем случае может быть сколь угодно плохой. Это непосредственно видно из равенства (6.6). Без труда приводятся и соответствующие примеры.

6.1.2. Сходимость невязок и поправок

Рассмотрим теперь вопрос о поведении невязок $x_n - Bx_n - f$ для приближений (6.2). Очевидно

$$x_n - Bx_n - f = x_n - x_{n+1},$$

т. е. невязки в рассматриваемом случае совпадают с взятыми с обратным знаком поправками. Из (6.3) вытекает

$$x_n - Bx_n - f = B^n(x_0 - Bx_0 - f). \tag{6.7}$$

Из этого равенства, снова в силу спектральной теоремы для самосопряженных операторов, вытекают равенства

$$\|x_n - Bx_n - f\|^2 = \int\limits_{SpB} |\lambda|^{2n} (dE_\lambda(x_0 - Bx_0 - f), x_0 - Bx_0 - f). \tag{6.8}$$

К этому неравенству снова можно применить теоремы Лебега о предельном переходе. В результате получаем следующее утверждение:

Теорема 6.2. *Пусть B – самосопряженный оператор с* $\rho(B) = 1$ *в гильбертовом пространстве H, не имеющий* -1 *собственным значением. Пусть* $Pf = 0$*, где P – ортопроектор на множество собственных векторов оператора B, отвечающих собственному значению* 1. *Тогда невязки* $x_n - Bx_n - f$ *для последовательных приближений* (6.2) *при любом начальном условии* $x_0 \in H$ *сходятся к нулю.*

Отметим, что условие $Pf = 0$ в этой теореме необходимо, но в общем случае не достаточно для разрешимости уравнения (6.1). Таким образом, невязки для последовательных приближений могут сходиться к нулю и в том случае, когда исходное уравнение вообще не имеет решений.

Из теоремы 6.2 следует, что скорость сходимости невязок и поправок к нулю в рассматриваемом случае определяется свойствами первой невязки $x_0 - Bx_0 - f$.

6.1.3. Сходимость ошибок, невязок и поправок на специальных подпространствах

Как показывают простые примеры и равенства (6.6), (6.8) скорость сходимости последовательных приближений к точному решению и невязок к нулю существенно зависит от начального приближения x_0 и правой части f уравнения (6.1). Оценить эти скорости сходимости можно более точно для функций f из некоторых (обычно незамкнутых!) подпространств $\widetilde{H}$ пространства H. Среди таких подпространств наиболее простыми являются подпространства истокообразно представимых функций. Эти подпространства определяются при помощи некоторой определенной на SpB оператора B функции $\theta(\lambda)$ как множество $\theta(B)H$ элементов вида

$$x = \theta(B)h \left(= \int\limits_{SpB} \theta(\lambda)dE_\lambda h \right) (h \in H). \tag{6.9}$$

Множество $\theta(B)H$ превращается в нормированное линейное пространство, если на его элементах норму определить равенством

$$\|x\|_{\theta(B)H} = \inf\left\{ \|h\| : h \in H, \theta(B)h = x \right\}. \tag{6.10}$$

Нетрудно проверить, что с этой нормой (но не с первоначальной!) пространство $\theta(B)H$ является банаховым.

Формула (6.6) при $x_0 - x_* \in \theta(B)H$ переписывается в виде

$$\|x_n - x_*\|^2 = \int\limits_{SpB} |\lambda|^{2n} |\theta(\lambda)|^2 (dE_\lambda h, h). \tag{6.11}$$

Из нее, в силу спектральной теоремы для самосопряженных операторов, следует неравенство

$$\|x_n - x_*\| \le \gamma_n \|x_0 - x_*\|_{\theta(B)H} \quad (x_0 - x_* \in \theta(B)H), \tag{6.12}$$

где

$$\gamma_n = \max_{\lambda \in SpB} |\lambda|^n |\theta(\lambda)|. \tag{6.13}$$

Если $\gamma_n \to 0$ при $n \to \infty$, то (6.12) дает квалифицированную оценку скорости сходимости приближений (6.2) к решению уравнения (6.1) сразу для всех функций x_0 и f, для которых $x_0 - x_* \in \theta(B)H$. Последнее условие трудно проверяемо, т. к. x_* неизвестно. Однако оно выполняется, если $x_0 - Bx_0 - f \in \tilde{\theta}(B)H$, где функции θ и $\tilde{\theta}$ связаны равенством $\theta(\lambda) = (1-\lambda)\tilde{\theta}(\lambda)$. В результате вместо (6.12) мы имеем оценку

$$\|x_n - x_*\| \le \tilde{\gamma}_n \|x_0 - Bx_0 - f\|_{\tilde{\theta}(B)H} \ (x_0 - Bx_0 - f \in \tilde{\theta}(B)H), \tag{6.14}$$

где

$$\tilde{\gamma}_n = \max_{\lambda \in SpB} |\lambda|^n \left|\tilde{\theta}(\lambda)\right|. \tag{6.15}$$

Аналогично, формула (6.8) при $(E-B)x_0 - f \in \theta(B)H$ приводит к оценке

$$\|x_n - Bx_n - f\| \le \gamma_n \|h\| \ \ (x_0 - Bx_0 - f = \theta(B)h,\ h \in H), \tag{6.16}$$

где последовательность (γ_n) снова определяется равенством (6.13).

Справедливы

Теорема 6.3. *Пусть B – самосопряженный оператор с* $\rho(B) = 1$ *в гильбертовом пространстве H, не имеющий* –1 *собственным значением. Если* θ *– определенная на спектре SpB функция с* $\theta(\pm 1) = 0$*, то* $\gamma_n \to 0$ *и, следовательно, при* $x_0 - x_* \in \theta(B)H$ *скорость сходимости приближений* (6.2) *к соответствующему решению* x_* *уравнения* (6.1) *оценивается неравенством* (6.12). *Более того, если* $\theta(\lambda) = (1-\lambda)\tilde{\theta}(\lambda)$ с $\tilde{\theta}(\pm 1) = 0$*, то* $\tilde{\gamma}_n \to 0$ *и, следовательно, при* $x_0 - Bx_0 - f \in \tilde{\theta}(B)H$ *скорость сходимости приближений* (6.2) *к соответствующему решению* x_* *уравнения* (6.1) *оценивается неравенством* (6.14).

Теорема 6.4. *Пусть B – самосопряженный оператор с* $\rho(B) = 1$ *в гильбертовом пространстве H, не имеющий* –1 *собственным значением. Если* θ *– определенная на спектре SpB функция с* $\theta(\pm 1) = 0$*, то* $\gamma_n \to 0$ *и, следовательно, при* $x_0 - Bx_0 - f \in \theta(B)H$ *скорость сходимости невязок для приближений* (6.2) *к нулю оценивается неравенством* (6.16).

Обе теоремы вытекают из следующей леммы.

Лемма 6.1. *Пусть функция* $\upsilon(\lambda) : [-1, 1] \to R$ *удовлетворяет условию* $\upsilon(\pm 1) = 0$. *Тогда* $\lim\limits_{n\to\infty} \max\limits_{-1\le\lambda\le 1} |\lambda|^n |\upsilon(\lambda)| = 0.$

Доказательство. Пусть задано $0 < \varepsilon < 1$. Тогда существует такое $\delta > 0$, что при $1 - \delta < |\lambda| \le 1$ справедливо неравенство $|\upsilon(\lambda)| < \varepsilon$. На множестве $\{\lambda : |\lambda| \le 1 - \delta\}$ выполняется неравенство $|\lambda|^n |\upsilon(\lambda)| \le c(1-\delta)^n$, где $c = \max\limits_{-1\le\lambda\le 1} |\upsilon(\lambda)|$, и, значит, $|\lambda|^n |\upsilon(\lambda)| < \varepsilon$ при $n > \dfrac{\ln(c^{-1}\varepsilon)}{\ln(1-\delta)}$. Но при $\lambda \in \{\lambda : 1 - \delta < |\lambda| \le 1\}$ также справедливо неравенство $|\lambda|^n |\upsilon(\lambda)| < \varepsilon$ и, значит, это неравенство верно при всех $\lambda \in [-1,1]$. Т. к. ε произвольно, а n не зависит от λ, то $|\lambda|^n |\upsilon(\lambda)| \to 0$ при $n \to \infty$ равномерно по $\lambda \in [-1,1]$. *Лемма 6.1 доказана.*

Отметим, что условия теорем 6.3 и 6.4 содержат начальное приближение x_0. Если, как это обычно делается $x_0 = 0$, то условия теорем 6.3 и 6.4 сводятся к предположениям о самом решении x_* или о заданной правой части *f*. Последнее справедливо и в том случае, когда x_0 берется ненулевым, но «достаточно хорошим» (в примерах «достаточно гладким»).

Наконец, отметим также, что по существу утверждения теорем 6.3 и 6.4 означают сходимость к нулю по норме последовательности операторов $B^n\theta(B)$ или сходимость к нулю последовательности операторов $B^nT\theta(B)$, где T – квазиобратный (возможно неограниченный) оператор для оператора $(E-B)$ $((E-B)T(E-B) = E-B)$.

6.1.4. Сходимость методов в энергетических нормах

В ряде задач при исследовании последовательных приближений достаточно установить их сходимость в норме, более слабой, чем исходная норма гильбертова пространства *X*. Примером таких норм может служить:

$$\|x\|_0 = \|Tx\|, \tag{6.17}$$

где T – некоторый оператор с $KerT = 0$. При этом наиболее простым оказывается случай, когда оператор T перестановочен с оператором *B* (*TB* = *BT*). Среди таких операторов наиболее простыми являются операторы вида

$$T_\pi = \pi(B), \tag{6.18}$$

где $\pi(\lambda)$ – некоторая ограниченная функция, для которой элементы $SpB \cap \{\lambda : \pi(\lambda) = 0\}$ не являются собственными значениями. В этом случае (6.17) является нормой, т. к. из $Tx = 0$ очевидным образом следует, что $x = 0$. Нормы такого типа иногда называют энергетическими. Отметим, что пространство *H* с нормой (6.17) является неполным, если функция $\pi^{-1}(\lambda)$ является неограниченной на спектре *SpB*.

Напомним вытекающее из (6.3), (6.4) равенство (6.5):

$$x_n - x_* = B^n(x_0 - x_*);$$

здесь x_n – последовательные приближения $x_{n+1} = Bx_n + f$ с $x_0 \in H$ – начальное приближение к решению уравнения (6.1), x_* – точное решение уравнения (6.1).

Из этого равенства для нормы (6.17) с *T*, определенным равенством (6.18) имеем равенство

$$\|x_n - x_*\|_\pi = \left\|\pi(B)B^n(x_0 - x_*)\right\|,$$

и, далее,

$$\|x_n - x_*\|_\pi^2 = \int\limits_{SpB} |\pi(\lambda)|^2 |\lambda|^{2n} (dE_\lambda(x_0 - x_*), x_0 - x_*),$$

откуда,

$$\|x_n - x_*\|_\pi \le \beta_n \|x_0 - x_*\|, \tag{6.19}$$

где

$$\beta_n = \max_{\lambda \in SpB} |\pi(\lambda)| |\lambda|^n. \tag{6.20}$$

Применяя лемму 6.1, приходим к следующему утверждению, дополняющему теорему 6.1.

Теорема 6.5. *Пусть B – самосопряженный оператор с* $\rho(B)=1$ *в гильбертовом пространстве H, не имеющий* –1 *собственным значением. Пусть* $\pi(\pm 1) = 0$ *и уравнение* (6.1) *разрешимо. Тогда последовательные приближения* (6.2) *при любом начальном условии* $x_0 \in H$ *сходятся в норме* (6.17) *к решению* x_* *уравнения* (6.1)*, для которого* $Px_* = Px_0$*, где P – ортопроектор на множество собственных векторов оператора B, отвечающих собственному значению* 1. *При этом эта сходимость равномерна относительно* $x_0 - x_* \in H$ *на каждом ограниченном шаре*.

Подчеркнем, что в условиях теоремы 6.5 отсутствует требование об истокообразной представимости точного решения или правой части уравнения (6.1). Отметим еще, что в условиях теоремы 6.5 последовательность приближений (6.2) в случае неразрешимости уравнения (6.1) может быть в норме (6.17) фундаментальной. Иными словами, она может оказаться сходящейся в пополнении H_π пространства H по норме (6.17), причем этот предел окажется обобщенным решением уравнения (6.1).

Аналогично теореме 6.5 доказывается нижеследующая теорема 6.6; при этом вместо равенства (6.5) используется также вытекающее из (6.3), (6.4) равенство (6.7):

$$x_n - Bx_n - f = B^n(x_0 - Bx_0 - f);$$

здесь x_n – последовательные приближения $x_{n+1} = Bx_n + f$ с $x_0 \in H$, x_0 – начальное приближение к решению уравнения (6.1) (само решение может и не существовать).

Теорема 6.6. *Пусть B – самосопряженный оператор с* $\rho(B)=1$ *в гильбертовом пространстве H, не имеющий* –1 *собственным значением. Пусть Pf* = 0*, где P – ортопроектор на множество собственных векторов оператора B, отвечающих собственному значению* 1. *Тогда невязки*

$x_n - Bx_n - f$ *для последовательных приближений* (6.2) *при любом начальном условии* $x_0 \in H$ *сходятся в норме* (6.17) *к нулю. При этом эта сходимость равномерна относительно* $x_0 - Bx_0 - f \in H$ *на каждом ограниченном шаре.*

6.1.5. Сходимость при ошибках в вычислениях

Пусть теперь снова для самосопряженного оператора B выполнены условия теоремы 6.1. Пусть уравнение (6.1) разрешимо. В этом случае последовательные приближения (6.2) сходятся к одному из решений x_* уравнения (6.1). Рассмотрим теперь вместо точных последовательных приближений (6.2) приближения для случая, когда правая часть уравнения (6.1) задана приближенно или когда при вычислениях этих приближений на каждом шаге делается ошибка. Оба варианта таких приближений достаточно хорошо описываются равенствами

$$\tilde{x}_{n+1} = B\tilde{x}_n + f_n \ (n = 0, 1, 2, \ldots) \tag{6.21}$$

в предположении, что $\|f_n - f\| \le \delta_n$ ($n = 0, 1, 2, \ldots$), где (δ_n) – некоторая последовательность малых положительных чисел, ограниченная числом δ. Из этих равенств и из (6.3) немедленно вытекает

$$\tilde{x}_n = x_n + B^{n-1}(f_0 - f) + \ldots + B(f_{n-2} - f) + (f_{n-1} - f)$$

и, следовательно,

$$\|\tilde{x}_n - x_n\| \le \|B^{n-1}\| \|f_0 - f\| + \ldots + \|B\| \|f_{n-2} - f\| + \|f_{n-1} - f\| \le \delta_0 + \ldots + \delta_{n-2} + \delta_{n-1}.$$

Таким образом,

$$\|\tilde{x}_n - x_*\| \le \|x_n - x_*\| + \|\tilde{x}_n - x_n\|,$$

и, значит,

$$\|\tilde{x}_n - x_*\| \le \|x_n - x_*\| + (\delta_0 + \ldots + \delta_{n-2} + \delta_{n-1}), \tag{6.22}$$

где x_* – точное решение уравнения (6.1).

Из неравенств (6.22) сходимость $\tilde{x}_n$ к x_* не вытекает, т. к. правая часть в (6.22) при $n \to \infty$ не стремится к нулю (и, более того, обычно стремится к бесконечности). Однако во многих случаях из этих неравенств вытекает, что, с одной стороны, при достаточно больших, но не слишком больших, номерах n приближения (6.21) находятся достаточно близко к точному решению x_* уравнения (6.1). Более того, эти приближения для достаточно малых в естественном смысле последовательностей (δ_n) «подходят» к точному решению x_* сколь угодно близко!

В условиях теоремы 6.1 при каждом начальном приближении $x_0 \in H$ точные приближения x_n сходятся к x_*, или, иными словами, для некоторой стремящейся к нулю последовательности неотрицательных чисел μ_n справедливо неравенство

$$\|x_n - x_*\| \le \mu_n.$$

Напомним еще, что в условиях теоремы 6.1 последовательность (μ_n) существенно зависит от начального условия $x_0 \in H$ и правой части $f \in H$. Однако теорема 6.3 позволяет описать и некоторые множества начальных условий $x_0 \in H$ и правых частей $f \in H$, для элементов которых последовательность (μ_n) может быть выбранной, независящей от $x_0 \in H$ и $f \in H$.

Положим

$$\Delta_0 = 0,\ \ \Delta_n = \delta_0 + \ldots + \delta_{n-2} + \delta_{n-1} (n = 1, 2, \ldots).$$

Тогда неравенство (6.22) переписывается в виде

$$\|\tilde{x}_n - x_*\| \le \mu_n + \Delta_n \ \ (n = 0, 1, 2, \ldots). \tag{6.23}$$

Для оценки «малости» последовательности (δ_n) удобнее всего предположить, что эта последовательность (δ_n) принадлежит некоторому банаховому пространству L (с монотонной в обычном смысле нормой) и эту «малость» оценивать нормой $\|(\delta_n)\|_L$. При этом, числа $\delta_0 + \ldots + \delta_{n-2} + \delta_{n-1}$ (n = 1, 2, …) можно рассматривать как значения на последовательности (δ_n) линейных функционалов σ_n (n = 0,1,2,…), порождаемых последовательностью (1,1,…,1,0,…), первые n элементов которой равны 1, а остальные нулю. По определению норм функционалов σ_n, справедливы неравенства

$$\delta_0 + \ldots + \delta_{n-2} + \delta_{n-1} \le \|\sigma_n\|\delta \ \ (\delta = \|(\delta_n)\|_L, n = 0,1,2,\ldots). \tag{6.24}$$

Из неравенств (6.23) и (6.24) вытекают оценки

$$\|\tilde{x}_n - x_*\| \le \mu_n + \|\sigma_n\|\delta \ \ (\delta = \|(\delta_n)\|_L, n = 0,1,2,\ldots). \tag{6.25}$$

Последовательность $(\|\sigma_n\|)$ является возрастающей; приводимые ниже примеры показывают, что она может быть как неограниченной, так и ограниченной.

Особенности поведения последовательности $(\mu_n + \|\sigma_n\|\delta)$ нам удобно сформулировать в виде нижеследующего утверждения. При этом для дальнейшего нам удобно будет рассмотреть более общую последовательность $(\mu_n + c\|\sigma_n\|\delta)$, где c – некоторое положительное число.

Лемма 6.2. *Пусть последовательность (μ_n) стремится к нулю, а последовательность $(\|\sigma_n\|)$ неубывающая. Тогда*

$$\lim_{n\to\infty, \|\sigma_n\|\delta\to 0} (\mu_n + c\|\sigma_n\|\delta) = 0. \tag{6.26}$$

Более точно, пусть задано $\varepsilon > 0$. Тогда существует такое $N(\varepsilon)$, что при любых N_-, N_+, для которых $N(\varepsilon) \le N_- < N_+$ существует такое $\delta(N_-, N_+)$, что при $0 < \delta < \delta(N_-, N_+)$ справедливы неравенства

$$\mu_n + c\|\sigma_n\|\delta < \varepsilon, n \in [N_-, N_+]. \tag{6.27}$$

Иначе говоря, при заданном $\varepsilon > 0$ *при достаточно малых* $\delta > 0$ *выполняется неравенство* $\mu_n + c\|\sigma_n\|\delta < \varepsilon$ *на сколь угодно далеких и сколь угодно больших промежутках изменения* n.

Доказательство. Равенство (6.26) очевидно. Пусть теперь задано $\varepsilon > 0$. Чтобы установить неравенство (6.27), заметим сначала, что при любом t, $0 < t < \varepsilon$, при $n > N(t)$ выполняется неравенство $\mu_n < t$. Далее, при этом же самом t выберем произвольные числа N_-, N_+, для которых $N(\varepsilon) \le N_- < N_+$ и затем число $\delta(N_-, N_+)$ таким образом, чтобы при $n \in [N_-, N_+]$ выполнялось неравенство $\|\sigma_n\| < \dfrac{\varepsilon - t}{c\delta}$. Тогда при $\delta \le \delta(N_-, N_+)$ и $n \in [N_-, N_+]$ $\mu_n + c\|\sigma_n\|\delta < t + \dfrac{\varepsilon - t}{c\delta} \cdot c\delta = \varepsilon$. *Лемма 6.2 доказана.*

Соотношение (6.26) леммы 6.2 иногда записывается в виде

$$\lim_{\delta \to 0} \min_{\nu \le n < \infty} \left\{ \mu_n + c\|\sigma_n\|\delta \right\} = 0 \quad (\nu \in N). \tag{6.28}$$

Однако без дополнительного предположения о сходимости последовательности (μ_n) к нулю, это соотношение слабее (6.26).

Сделаем еще важное замечание. Неравенства (6.25) оказываются полезными лишь в тех случаях, когда при увеличении n правая часть $\mu_n + \|\sigma_n\|\delta$ уменьшается. Факт уменьшения на одном шаге этой правой части эквивалентен неравенству $\delta < \dfrac{\mu_n - \mu_{n+1}}{\|\sigma_{n+1}\| - \|\sigma_n\|}$. Тем самым, проведенные рассуждения показывают, что последовательное вычисление приближений (6.21) оказывается полезным при $n \in [0, N]$ лишь в случае, если

$$\delta < \frac{\mu_n - \mu_{n+1}}{c\left(\|\sigma_{n+1}\| - \|\sigma_n\|\right)} \quad (n = 0, 1, \dots, N). \tag{6.29}$$

При выполнении этого соотношения будем говорить, что соответствующий итерационный метод квазисходится.

Еще раз отметим, что в случае квазисходимости итерационного метода (6.21) речь не идет об обычной сходимости соответствующих приближений к точному решению. Можно лишь утверждать, что при достаточно малых δ эти приближения оказываются близкими к точному решению, а затем, как правило, от него удаляются; при этом эти приближения оказываются тем ближе к точному решению, чем меньше δ. Более того, если δ не является достаточно малым, то использование приближений (6.21) окажется бесполезным – эти приближения могут удаляться от точного решения.

Из проведенных рассуждений и леммы 6.2 вытекает

Теорема 6.7. *Пусть выполнены условия теоремы* 6.1 *и пусть приближения* (6.2) *вычисляются с ошибками, не превышающими* $\delta_n > 0$ *на каждом шаге* n = 0,1,2,…, *причем* $(\delta_n) \in L$, *где* L – *некоторое банахово пространство последовательностей с монотонной нормой. Тогда приближения* (6.21) *«сходятся» в описанном выше смысле к соответствующему решению* x_* *уравнения* (6.1), *т.е. справедливо соотношение*

$$\lim_{n\to\infty, \|\sigma_n\|\delta\to 0} \|\tilde{x}_n - x_*\| = 0. \tag{6.30}$$

Отметим еще, что в упомянутом выше «парадоксальном случае» $\mu_n = 0$ оказывается, что начальное приближение x_0 совпадает с решением x_*. Именно в этом случае рассуждения о последовательности $(\mu_n + n\delta)$, приведенные выше, вырождаются и оценка (6.25) делается бесполезной. Однако она и должна быть таковой – если начальное приближение совпадает с точным решением x_*, то уточнять это приближение какими-либо итерационными процедурами бессмысленно.

Приведем теперь формулы для норм $\|\sigma_n\|$ функционалов σ_n (n = 0,1,…) для классических пространств, упомянутых выше. Для пространств l_p $(1 \le p \le \infty)$ имеют место равенства

$$\|\sigma_n\| = n^{\frac{1}{p'}} \quad \left(\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1,\ n = 0,1,2,\ldots\right).$$

В этом равенстве следует отметить два частных случая, когда $p = \infty$ и $p = 1$. В первом из них условие $(\delta_n) \in l_\infty$ означает, что при вычислениях делаются ошибки, не превышающие числа $\delta = \|(\delta_n)\|_{l_\infty}$; при этом $\|\sigma_n\| = n$ при всех n = 0,1,2,… . Отметим также, что предположение, что $\delta_n \to 0$ (или, иначе, $(\delta_n) \in l_\infty^{\mathrm{o}} = c_0 \subset l_\infty$) не приводит к уточнению поведения последовательности норм (σ_n), обе последовательности норм для пространств c_0 и l_∞ совпадают. Во втором случае, когда $(\delta_n) \in l_1$, последовательность норм $(\|\sigma_n\|)$ оказывается ограниченной!

Для пространств $\mathbf{m}(\omega)$ последовательностей, ограниченных с весом ω $(\omega = (\omega_0, \omega_1, \omega_2, \ldots),\ \omega_k > 0,\ k = 0, 1, 2, \ldots)$, справедливы формулы $\|\sigma_n\| = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{\omega_k}$ $(n = 0,1,2,\ldots)$. В частном случае, когда $\omega = (1, 2^\nu, \ldots, (k-1)^\nu, \ldots)$ справедливы равенства $\|\sigma_n\| = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{k^\nu}$ $(n = 0,1,2,\ldots)$. В этом равенстве следует также отметить частный случай, когда $\nu > 1$. В этом случае, последовательность норм $(\|\sigma_n\|)$, как и в случае пространства l_1, также оказывается ограниченной: $\|\sigma_n\|_{\mathrm{m}(\omega)} \le \zeta(\nu)$ $(n = 0,1,2,\ldots)$; здесь $\zeta(\cdot)$ – функция Римана.

6.1.6. Основной пример

В качестве примера здесь можно рассмотреть в пространстве $H = L_2(\Omega)$, где Ω – некоторое замкнутое множество отрезка [–1,1] с $1 \in \Omega$ (или $-1 \in \Omega$), уравнение

$$x(t) = tx(t) + f(t).$$

Это уравнение разрешимо в H, если и только если $(1-t)^{-1} f(t) \in L_2(\Omega)$. Последовательные приближения (6.2) в этом случае имеют вид

$$x_{n+1}(t) = tx_n(t) + f(t)$$

или, что то же самое,

$$x_n(t) = t^n x_0(t) + (1 + t + t^2 + \ldots + t^{n-1}) f(t)..$$

Они сходятся в H (при любом $x_0(t) \in L_2(\Omega)$) к функции $(1-t)^{-1} f(t)$, которая по предположению о разрешимости уравнения принадлежит $L_2(\Omega)$. Уравнение в этом примере не является корректным. Аналогичная ситуация имеет место и в случае, если $H = L_2(\Omega, \sigma)$, где σ – некоторая мера на Ω, причем $\sigma(\{-1\}) = 0$.

Пример этот носит достаточно общий характер – известно, что каждый самосопряженный оператор с простым спектром подобен оператору умножения на независимую переменную в пространстве $L_2(\Omega, \sigma)$ при подходящем выборе меры σ. Для самосопряженных операторов B с непростым спектром также верно аналогичное утверждение, однако здесь в качестве Ω приходится брать топологически сложно устроенное дизъюнктное объединение отрезков [–1,1].

6.2. Уравнения первого рода

6.2.1. Принцип сведения

Пусть A – самосопряженный оператор в гильбертовом пространстве H. Рассматривается линейное уравнение

$$Ax = y, \tag{6.31}$$

где $y \in H$. Нас будет интересовать случай, когда 0 является точкой спектра SpA оператора A.

Пусть $\phi(\lambda)$ – некоторая вещественная и аналитическая на спектре оператора A функция, принимающая в нулевой точке значение 1; тогда

$$\phi(\lambda) = 1 - \lambda\psi(\lambda),$$

где $\psi(\lambda)$ тоже вещественная и аналитическая на SpA функция. Простейшими примерами таких функций могут служить полиномы или рациональные функции.

Для каждой функции $\phi(\lambda)$ описанного вида определен оператор $\phi(A)$; он также является самосопряженным. Определен также и оператор $\psi(A)$. Очевидно равенство

$$x - \phi(A)x = \psi(A)Ax.$$

Из этого уравнения вытекает, что каждое решение x уравнения (6.31) является решением уравнения

$$x = \phi(A)x + \psi(A)y. \tag{6.32}$$

Обратное тоже верно, однако при дополнительном предположении, что 0 не является собственным значением оператора $\psi(A)$. Действительно, (6.32) можно переписать в виде

$$\psi(A)(Ax - y) = 0,$$

откуда следует, что x является и решением уравнения (6.31). Предположение, что 0 не является собственным значением оператора $\psi(A)$ эквивалентно тому, что 1 не является собственным значением оператора $\phi(A)$. Последнее, очевидно, означает, что решение уравнения (6.32), если оно существует, единственно. Таким образом, если уравнение (6.31) имеет единственное решение x_*, то оно является единственным решением уравнения (6.32), и, наоборот, если уравнение (6.32) имеет единственное решение, то оно будет и единственным решением уравнения (6.31). Отметим, что в общем случае (без предположения, что 0 не является собственным значением оператора A) в случае разрешимости уравнения (6.31) решение x_* уравнения (6.32) не обязательно является решением уравнения (6.31), однако решением уравнения (6.31) в этом случае обязательно является элемент $x + \phi(A)(\xi - x)$, где ξ – произвольное решение уравнения (6.31).

Итак, вместо анализа свойств разрешимости уравнения (6.31) можно исследовать уравнение (6.32). Однако последнее уравнение имеет вид $x = Bx + f$ с $B = \phi(A)$, $f = \psi(A)y$, и для его исследования естественно использовать отмеченную выше теорему М. А. Красносельского. Условия последней будут выполнены, если $\|\phi(A)\| = 1$ и -1 не является собственным значением оператора $\varphi(A)$. Т. к. по теореме Данфорда [133] $Sp\varphi(A) = \varphi(SpA)$, и оператор $\phi(A)$ является самосопряженным, то равенство $\|\phi(A)\| = 1$ эквивалентно неравенству

$$|\phi(\lambda)| \le 1 \quad (\lambda \in SpA) \tag{6.33}$$

(напомним, что $\phi(0) = 1$ и потому (6.33) означает $\|\phi(A)\| = 1$). Второе условие означает, что никакой корень уравнения $\phi(\lambda) + 1 = 0$ не является собственным значением оператора A. Итак, верна

Теорема 6.8. *Пусть A – самосопряженный оператор в гильбертовом пространстве H и его область значений не является замкнутой. Пусть* $\phi(\lambda)$ *– аналитическая в окрестности SpA функция, для которой*

а) $\phi(\lambda) = 1 - \lambda\psi(\lambda)$;

б) $|\phi(\lambda)| \le 1 \quad (\lambda \in SpA)$;

в) нули функции $\phi(\lambda) + 1$ *не являются собственными значениями оператора A.*

Тогда, если уравнение (6.31) *разрешимо, то приближения*

$$x_{n+1} = \phi(A)x_n + \psi(A)y \quad (n = 0, 1, 2, \ldots) \tag{6.34}$$

сходятся к одному из решений уравнения (6.31).

Естественно возникает вопрос о скорости сходимости приближений (6.34). Из теоремы 6.1 вытекает, что в общем случае эта скорость может быть сколь угодно медленной. Для полноты приведем здесь вычисления из раздела 6.1, модифицированные непосредственно для уравнения (6.32). Из (6.34), очевидно, вытекает

$$x_n = \phi^n(A)x_0 + (E + \phi(A) + \phi^2(A) \ldots + \phi^{n-1}(A))\psi(A)y \quad (n = 0, 1, 2, \ldots), \tag{6.35}$$

а из (6.32) –

$$x_* = \phi^n(A)x_* + (E + \phi(A) + \phi^2(A) \ldots + \phi^{n-1}(A))\psi(A)y \quad (n = 0, 1, 2, \ldots). \tag{6.36}$$

Вычитая (6.36) из (6.35), получим

$$x_n - x_* = \phi^n(A)(x_0 - x_*) \quad (n = 0, 1, 2, \ldots) \tag{6.37}$$

и, далее,

$$\|x_n - x_*\|^2 = \int\limits_{SpA} |\phi(\lambda)|^{2n} (dE_\lambda(x_0 - x_*), x_0 - x_*). \tag{6.38}$$

Из формулы (6.38) вытекает сходимость приближений x_n к x_* в силу теоремы Лебега о предельном переходе под знаком интеграла для сходящейся почти всегда к нулю последовательности. Из этой формулы следует, как уже отмечалось, что эта сходимость может оказаться сколь угодно медленной и существенно зависит от свойств «гладкости» начальной ошибки $x_0 - x_*$, а эти последние – от свойств «гладкости» правой части y и свойств «некорректности» оператора A. Однако следует также отметить, что эта сходимость тем быстрее, чем «меньше» функция $\phi(\lambda)$ на $Sp(A)$.

6.2.2. Сходимость невязок и поправок

Рассмотрим теперь вопрос о поведении невязок $Ax_n - y$ и поправок $x_{n+1} - x_n = \phi(A)x_n + \psi(A)y - x_n$ для приближений (6.34).

Из (6.35) следует

$$Ax_n = \phi^n(A)Ax_0 + (E + \phi(A) + \phi^2(A)\ldots + \phi^{n-1}(A))A\psi(A)y =$$
$$= \phi^n(A)Ax_0 + (E + \phi(A) + \phi^2(A)\ldots + \phi^{n-1}(A))(E - \phi(A))y =$$
$$= \phi^n(A)Ax_0 + (E - \phi^n(A))y,$$

и, значит,

$$Ax_n - y = \phi^n(A)(Ax_0 - y). \tag{6.39}$$

Из этого равенства вытекает, что

$$\|Ax_n - y\|^2 = \int\limits_{SpA} |\phi(\lambda)|^{2n} (dE_\lambda(Ax_0 - y), Ax_0 - y). \tag{6.40}$$

Аналогично, из (6.35) для поправок $x_{n+1} - x_n$ имеем

$$x_{n+1} - x_n = \phi^n(A)(\phi(A) - E)x_0 + \phi^n(A)\psi(A)y = \phi^n(A)(\phi(A)x_0 + \psi(A)y - x_0)$$

или

$$x_{n+1} - x_n = \varphi^n(A)(x_1 - x_0). \tag{6.41}$$

Отсюда

$$\|x_{n+1} - x_n\|^2 = \int\limits_{SpA} |\phi(\lambda)|^{2n} (dE_\lambda(x_1 - x_0), x_1 - x_0). \tag{6.42}$$

В результате из (6.40) и (6.42) получаем следующее утверждение:

Теорема 6.9. *Пусть выполнены условия теоремы* 6.8. *Пусть* $Py = 0$, *где* P *– ортопроектор на множество собственных векторов оператора* $\phi(A)$, *отвечающих собственному значению* 1. *Тогда невязки* $Ax_n - y$ *и поправки* $x_{n+1} - x_n$ *для последовательных приближений* (6.34) *при любом начальном условии* $x_0 \in H$ *сходятся к нулю.*

Здесь снова следует отметить, что невязки и поправки стремятся к нулю без предположения о разрешимости уравнения (6.31).

6.2.3. Сходимость на подпространствах

Как показывают равенства (6.38), (6.40), (6.42) скорость сходимости последовательных приближений (6.32) к точному решению уравнения (6.31), соответственно, скорость сходимости к нулю невязок и поправок существенно зависит от правой части y уравнения (6.31) и начального условия x_0. Однако скорости этих сходимостей могут быть уточнены, если правые части y уравнения и, соответственно, начальные условия x_0 берутся из некоторых подпространств $\tilde{H}$ пространства H. Среди таких подпространств наиболее простыми являются упоминавшиеся выше подпространства истокообразно представимых функций. Рассмотрим случаи, когда правые части y уравнения и, соответственно, начальные условия x_0 лежат в пространствах $\theta(A)H$, которые определяются по оператору A точно также как определялись пространства $\theta(B)H$ при помощи некоторой определенной на SpA функции $\theta(\lambda)$ как множество элементов вида

$x = \int\limits_{SpA} \theta(\lambda) dE_\lambda h \; (h \in H)$ с нормой $\|x\|_{\theta(A)H} = \inf\left\{ \|h\| : h \in H, \theta(A)h = x \right\}$.

Как и для пространств $\theta(B)H$ для пространств $\theta(A)H$ будем предполагать, что нули функции $\theta(\lambda)$ не являются собственными значениями оператора A.

В предположении, что для $y \in \theta(A)H$ существует $h \in H$, для которого $x = \theta(A)h$, имеем

$$\|x_n - x_*\|^2 = \int\limits_{SpA} |\phi(\lambda)|^{2n} |\theta(\lambda)|^2 (dE_\lambda h, h). \tag{6.43}$$

Отсюда

$$\|x_n - x_*\| \le \gamma_n \|x_0 - x_*\|_{\theta(A)H} \quad (x_0 - x_* \in \theta(A)H), \tag{6.44}$$

где $\gamma_n = \max\limits_{\lambda \in SpA} |\phi(\lambda)|^n |\theta(\lambda)|$.

Если $\gamma_n \to 0$ при $n \to \infty$, то (6.44) дает квалифицированную оценку скорости сходимости приближений (6.34) к решению уравнения (6.31) сразу для всех функций x_0 и y, для которых $x_0 - x_* \in \theta(A)H$. Условие $x_0 - x_* \in \theta(A)H$ трудно проверяемо, т. к. x_* неизвестно. Однако оно выполняется, если $Ax_0 - y \in \tilde{\theta}(A)H$, где функции θ и $\tilde{\theta}$ связаны равенством $\theta(\lambda) = \lambda\tilde{\theta}(\lambda)$. В результате вместо (6.44) мы имеем оценку

$$\|x_n - x_*\| \le \tilde{\gamma}_n \|Ax_0 - y\|_{\tilde{\theta}(A)H} \quad (Ax_0 - y \in \tilde{\theta}(A)H), \tag{6.45}$$

где $\tilde{\gamma}_n = \max\limits_{\lambda \in SpA} |\varphi(\lambda)|^n |\tilde{\theta}(\lambda)|$.

Естественно, для доказательства $\gamma_n \to 0$ при $n \to \infty$ и $\tilde{\gamma}_n \to 0$ при $n \to \infty$ нам понадобится аналог леммы 6.1:

Лемма 6.2. *Пусть функция* $\phi(\lambda): SpA \to R$ *удовлетворяет условиям теоремы* 6.8 *и функция* $\theta(\lambda): SpA \to R$ *такова, что из* $|\phi(\lambda)| = 1$ *следует, что* $\theta(\lambda) = 0$. *Тогда* $\lim\limits_{n\to\infty} \max\limits_{\lambda\in SpA} |\phi(\lambda)|^n |\theta(\lambda)| = 0.$

Доказательство этой леммы полностью аналогично доказательству леммы 6.1.

Из вышесказанного и леммы 6.2 вытекает

Теорема 6.10. *Пусть выполнены условия теоремы* 6.8. *Тогда:*

а) если $\theta -$*определенная на спектре SpA функция, для которой из* $|\phi(\lambda)| = 1$ *вытекает* $\theta(\lambda) = 0$, *то* $\gamma_n \to 0$ *и, следовательно, при* $x_0 - x_* \in \theta(A)H$ *скорость сходимости приближений* (6.34) *к соответствующему решению* x_* *уравнения* (6.31) *оценивается неравенством* (6.44);

б) если $\theta -$*определенная на спектре SpA функция, для которой из* $|\phi(\lambda)| = 1$ *вытекает* $\tilde{\theta}(\lambda) = 0$, *где* $\tilde{\theta}(\lambda) = \lambda^{-1}\theta(\lambda)$, *то* $\tilde{\gamma}_n \to 0$ *и, следовательно, при* $Ax_0 - y \in \tilde{\theta}(A)H$ *скорость сходимости приближений* (6.34) *к соответствующему решению* x_* *уравнения* (6.31) *оценивается неравенством* (6.45).

Формулы (6.40) и (6.42), в свою очередь, приводят к оценкам

$$\|Ax_n - y\| \le \gamma_n \|Ax_0 - y\|_{\theta(A)H} \quad (Ax_0 - y \in \theta(A)H), \tag{6.46}$$

$$\|x_{n+1} - x_n\| \le \gamma_n \|x_1 - x_0\|_{\theta(A)H} \quad (x_1 - x_0 \in \theta(A)H), \tag{6.47}$$

где последовательность (γ_n) снова определяется равенством $\gamma_n = \max\limits_{\lambda\in SpA} |\varphi(\lambda)|^n |\theta(\lambda)|$. Из этих замечаний и снова леммы 6.2 вытекает

Теорема 6.11. *Пусть выполнены условия теоремы* 6.8 *и пусть* $\theta -$ *определенная на спектре SpA функция, для которой из* $|\phi(\lambda)| = 1$ *вытекает* $\theta(\lambda) = 0$. *Тогда* $\gamma_n \to 0$ *и, следовательно, при* $Ax_0 - y \in \theta(A)H$ *скорость сходимости невязок для приближений* (6.34) *к нулю оценивается неравенством* (6.46) *и при* $x_1 - x_0 \in \theta(A)H$ *скорость сходимости поправок для приближений* (6.34) *к нулю оценивается неравенством* (6.47).

6.2.4. Сходимость в энергетических нормах

Продолжим изучение поведения последовательных приближений $x_{n+1} = \phi(A)x_n + \psi(A)y$ для линейного операторного уравнения $Ax = y$

с действующим в гильбертовом пространстве H самосопряженным оператором A в случае, когда 0 является точкой спектра оператора A. В ряде задач при исследовании последовательных приближений достаточно установить их сходимость в норме, более слабой, чем исходная норма гильбертова пространства H. Как и выше будем рассматривать нормы

$$\|x\|_0 = \|Tx\|, \tag{6.48}$$

где $T-$ некоторый оператор с $KerT = 0$ и такой, что $TA = AT$. Повторяя рассуждения подраздела 6.1.4, ограничимся операторами вида

$$T_\pi = \pi(A), \tag{6.49}$$

где $\pi-$некоторая функция, положительная на SpA, нули которой не являются собственными значениями оператора A. В этом случае (6.48) является нормой, так как из $Tx = 0$ очевидным образом следует, что $x = 0$.

Напомним [31–А; 32–А], что справедливы равенства

$$x_n = \phi^n(A)x_0 + (E + \phi(A) + \phi^2(A)\ldots + \phi^{n-1}(A))\psi(A)y,$$

$$x_* = \phi^n(A)x_* + (E + \phi(A) + \phi^2(A)\ldots + \phi^{n-1}(A))\psi(A)y.$$

Отсюда

$$x_n - x_* = \phi^n(A)(x_0 - x_*) \quad (n = 0, 1, 2, \ldots). \tag{6.50}$$

Здесь $x_n -$последовательные приближения $x_{n+1} = \phi(A)x_n + \psi(A)y$ с $x_0 \in H$, $x_* -$точное решение уравнения $Ax = y$.

Из равенства (6.50) для нормы (6.48) (с T, определенным равенством (6.49)) следует равенство

$$\|x_n - x_*\|_{\pi(A)H} = \left\|\pi(A)\varphi^n(A)(x_0 - x_*)\right\|,$$

и, далее,

$$\|x_n - x_*\|^2_{\pi(A)H} = \int\limits_{SpA} |\pi(\lambda)|^2 |\phi(\lambda)|^{2n} (dE_\lambda(x_0 - x_*), x_0 - x_*),$$

откуда,

$$\|x_n - x_*\|_{\pi(A)H} \le \beta_n \|x_0 - x_*\|,$$

где $\beta_n = \max\limits_{\lambda \in SpA} |\pi(\lambda)||\phi(\lambda)|^n$.

Повторяя рассуждения из подраздела 6.1.4, приходим к следующему утверждению, дополняющему теорему М. А. Красносельского.

Теорема 6.12. *Пусть выполнены условия теоремы* 6.8. *Пусть* $\pi(\pm 1) = 0$ *и уравнение* $Ax = y$ *разрешимо. Тогда последовательные приближения* $x_{n+1} = \phi(A)x_n + \psi(A)y$ *при любом начальном условии* $x_0 \in H$ *сходятся в норме* (6.48) *к решению* x_* *уравнения* $Ax = y$, *для которого* $Px_* = Px_0$, *где* $P-$*ортопроектор на множество собственных векторов* *оператора A, отвечающих собственному значению* 0. *При этом эта сходимость равномерна относительно* $x_0 - x_* \in H$ *на каждом ограниченном шаре.*

Достаточно показать, что $\beta_n \to 0$ при $n \to \infty$. Но этот факт вытекает непосредственно из леммы 6.2, в которой функцию θ следует заменить на функцию π.

Подчеркнем, что в условиях теоремы 6.12 отсутствует требование об истокообразной представимости точного решения или правой части уравнения (6.31).

Теорема 6.12 является аналогом теоремы 6.5. Описанные выше построения позволяют сформулировать и аналоги теоремы 6.6 о сходимости к нулю невязок и поправок в нормах (6.48) при соответствующем выборе функций π для уравнений первого рода (6.31). Ограничимся здесь только соответствующей формулировкой.

Теорема 6.13. *Пусть выполнены условия теоремы* 6.8. *Пусть* $\pi(\pm 1) = 0$ *и* $Py = 0$, *где* P *– ортопроектор на множество собственных векторов оператора A, отвечающих собственному значению* 0. *Тогда невязки* $Ax_n - y$ *и поправки* $x_{n+1} - x_n$ *для последовательных приближений* (6.34) *при любом начальном условии* $x_0 \in H$ *сходятся в норме* (6.48) *к нулю. К тому же эта сходимость равномерна относительно* $Ax_0 - y \in H$ *и, соответственно,* $x_1 - x_0$ *на каждом ограниченном шаре.*

6.2.5. Сходимость приближений при неточных данных и в присутствии ошибок

Пусть теперь снова для самосопряженного оператора A выполнены условия теоремы 6.8, причем $\|\phi(A)\| = 1$ и, следовательно, $\rho(\phi(A)) = 1$. Пусть уравнение (6.31) разрешимо. В этом случае последовательные приближения (6.34) сходятся к одному из решений x_* уравнения (6.31). Рассмотрим теперь вместо точных приближений (6.34) приближения для случая, когда правая часть уравнения (6.31) вычисляется на каждом шаге n с ошибкой, не превышающей δ_n. В этих случаях новые приближения $\tilde{x}_n$ записываются в виде

$$\tilde{x}_{n+1} = \phi(A)\tilde{x}_n + \psi(A)y_n \quad (n = 0, 1, 2, \ldots) \tag{6.51}$$

с приближенной правой частью y_n, $\|y_n - y\| \le \delta_n$.

Из равенств (6.34), как нетрудно видеть, вытекают справедливые при всех $n = 0, 1, 2, \ldots$ равенства

$$\tilde{x}_n = \phi^n(A)x_0 + (\psi(A)y_{n-1} + \phi(A)\psi(A)y_{n-2} + \ldots + \phi^{n-1}(A)\psi(A)y_0).$$

Отсюда и из (6.34)

$$\tilde{x}_n - x_n = \psi(A)(y_{n-1} - y) + \phi(A)\psi(A)(y_{n-2} - y) + \ldots + \phi^{n-1}(A)\psi(A)(y_0 - y),$$

и, в силу $\|\phi(A)\| = 1$,

$$\|\tilde{x}_n - x_n\| \le \|\psi(A)\| \|y_{n-1} - y\| + \|\psi(A)\| \|y_{n-2} - y\| + \ldots + \|\psi(A)\| \|y_0 - y\|,$$

и, наконец,

$$\|\tilde{x}_n - x_n\| \le \|\psi(A)\| (\delta_0 + \delta_1 + \ldots + \delta_{n-1}) \quad (n = 0, 1, 2, \ldots).$$

Так как $\|\tilde{x}_n - x_*\| \le \|x_n - x_*\| + \|\tilde{x}_n - x_n\|$, то из последнего неравенства вытекает

$$\|\tilde{x}_n - x_*\| \le \|x_n - x_*\| + \|\psi(A)\| (\delta_0 + \delta_1 + \ldots + \delta_{n-1}) \; (n = 0, 1, 2, \ldots). \quad (6.52)$$

Положим

$$c = \max_{\lambda \in SpA} |\psi(\lambda)|. \quad (6.53)$$

Из спектральной теоремы для самосопряженных операторов вытекает, что это число совпадает с $\|\psi(A)\|$. Поэтому из (6.52) и (6.53) вытекает аналогичная (6.25) оценка

$$\|\tilde{x}_n - x_*\| \le \|x_n - x_*\| + c(\delta_0 + \delta_1 + \ldots + \delta_{n-1}) \quad (n = 0, 1, 2, \ldots). \quad (6.54)$$

К правой части этого неравенства можно применить лемму 6.2. Из нее вытекают соотношения (6.26) и (6.28) и, следовательно, и аналог теоремы 6.7.

Иными словами, справедлива

Теорема 6.14. *Пусть выполнены условия теоремы* 6.8 *и пусть приближения* (6.34) *на каждом шаге* $n = 0, 1, 2, \ldots$ *вычисляются с ошибками, не превышающими* $\delta_n > 0$, *причем* $(\delta_n) \in L$, *где* $L -$ *некоторое банахово пространство последовательностей с монотонной нормой. Тогда приближения* (6.51) *«квазисходятся» в описанном выше смысле к соответствующему решению* x_* *уравнения* (6.31), *т. е. справедливо соотношение*

$$\lim_{n \to \infty, \|\sigma_n\| \delta \to 0} \|\tilde{x}_n - x_*\| = 0. \quad (6.55)$$

6.2.6. Пример

В качестве примера здесь можно рассмотреть в пространстве $H = L_2(\Omega)$, где Ω – некоторое ограниченное замкнутое множество прямой R с $0 \in \Omega$, уравнение

$$tx(t) = y(t).$$

Это уравнение разрешимо в H, если и только если $t^{-1} y(t) \in L_2(\Omega)$. Последовательные приближения (6.51) в этом случае имеют вид

$$x_{n+1}(t) = \phi(t) x_n(t) + \psi(t) y(t)$$

или, что то же самое,

$$x_n(t) = \phi^n(t) x_0(t) + (1 + \phi(t) + \phi^2(t) + \ldots + \phi^{n-1}(t)) \psi(t) y(t).$$

При выполнении условий сходимости соответствующих теорем этого раздела эти последовательные приближения сходятся в H (при любом $x_0(t) \in L_2(\Omega)$) к функции $t^{-1}y(t)$, которая по предположению о разрешимости уравнения принадлежит $L_2(\Omega)$. Уравнение в этом примере не является корректным. Как и для уравнений второго рода, аналогичная ситуация имеет место и в случае, если $H = L_2(\Omega, \sigma)$, где $\sigma -$некоторая мера на Ω, причем $\sigma\left(\{-1\}\right) = 0$.

Как было отмечено в подразделе 6.1.6 пример носит достаточно общий характер.

6.3. Частные итерационные методы для уравнений первого рода

6.3.1. Явные итерационные схемы

Выбирая различные, удовлетворяющие условиям а), б), с) теоремы 6.8, функции $\phi(\lambda)$ и $\psi(\lambda)$, получим разнообразные итерационные схемы приближенного построения решений уравнения (6.31). Мы ограничимся здесь несколькими примерами ([2–А; 11; 21, 137; 151; 153; 182], где они исследованы с другой точки зрения).

Рассмотрим прежде всего ([2–А]) итерационный метод (6.34), соответствующий полиному

$$\phi(\lambda) = (1-\alpha\lambda)^k \tag{6.56}$$

(k – натуральное число, $\alpha > 0$). Для него

$$\psi(\lambda) = \frac{1-(1-\alpha\lambda)^k}{\lambda} \tag{6.57}$$

и, далее, условие б) теоремы 6.8 выполняется, если $SpA \subseteq \left[0, \frac{2}{\alpha}\right]$, а условие с), если $\lambda = \frac{2}{\alpha}$ – не является собственным значением оператора A. Соответственно, итерации (6.34) имеют вид

$$x_{n+1} = (E-\alpha A)^k x_n + A^{-1}\left[E-(E-\alpha A)^k\right]y \quad (n = 0,1,2,\ldots). \tag{6.58}$$

Для этого метода наиболее удобно в качестве функции $\theta(\lambda)$ брать функцию $\theta(\lambda) = \lambda^s$ (s – некоторое положительное число). Эта функция удовлетворяет условиям теоремы 6.10, если $SpA \subseteq [0, M]$, где $M < \frac{2}{\alpha}$. Последовательность (γ_n), определенная равенством $\gamma_n = \max\limits_{\lambda \in SpA} |\phi(\lambda)|^n |\theta(\lambda)|$, будет определяться при $M \le \frac{1}{\alpha}$ равенством

$$\gamma_n = \left[\frac{s}{\alpha(s+kn)}\right]^s \left[\frac{kn}{s+kn}\right]^{kn} \quad (n = 0,1,2,\ldots)$$

и при $\frac{1}{\alpha} < M < \frac{2}{\alpha}$ равенством

$$\gamma_n = \max\left\{\left[\frac{s}{\alpha(s+kn)}\right]^s \left[\frac{kn}{s+kn}\right]^{kn}, M^s(1-\alpha M)^{kn}\right\} \quad (n = 0,1,2,\ldots).$$

В обоих случаях, как нетрудно видеть справедливо соотношение

$$\gamma_n \sim \left(\frac{s}{e\alpha k}\right)^s \frac{1}{n^s}. \tag{6.59}$$

Рассмотрим теперь [2–А] итерационный метод (6.34), соответствующий полиному

$$\phi(\lambda) = (1 - \alpha\lambda^k) \tag{6.60}$$

(k – натуральное число, $\alpha > 0$). Для него

$$\psi(\lambda) = \alpha\lambda^{k-1}. \tag{6.61}$$

Условие б) теоремы 6.8 при k четном выполняется, если $SpA \subseteq \left[-\left(\frac{2}{\alpha}\right)^{\frac{1}{k}}, \left(\frac{2}{\alpha}\right)^{\frac{1}{k}}\right]$ и при k нечетном, если $SpA \subseteq \left[0, \left(\frac{2}{\alpha}\right)^{\frac{1}{k}}\right]$. Далее, условие с) выполнено, если $\lambda = \pm\left(\frac{2}{\alpha}\right)^{\frac{1}{k}}$ в первом случае и $\lambda = \left(\frac{2}{\alpha}\right)^{\frac{1}{k}}$ во втором не являются собственным значением оператора A. Соответственно, итерации (6.34) имеют вид

$$x_{n+1} = \left(E - \alpha A^k\right)x_n + \alpha A^{k-1}y \quad (n = 0,1,2,\ldots). \tag{6.62}$$

Для этого метода также наиболее удобно в качестве функции $\theta(\lambda)$ брать функцию $\theta(\lambda) = \lambda^s$ (s – некоторое положительное число). Условия теоремы 6.10 выполняются, если $SpA \subseteq [-M, M]$ при четном k и $SpA \subseteq [0, M]$ при нечетном k, где $M < \left(\frac{2}{\alpha}\right)^{\frac{1}{k}}$. Последовательность (γ_n), определенная равенством $\gamma_n = \max\limits_{\lambda \in SpA} |\phi(\lambda)|^n |\theta(\lambda)|$, будет определяться при $M \le \left(\frac{1}{\alpha}\right)^{\frac{1}{k}}$ равенством

$$\gamma_n = \left[\frac{s}{\alpha(s+kn)}\right]^{\frac{s}{k}} \left[\frac{kn}{s+kn}\right]^n \quad (n = 0,1,2,\ldots)$$

и при $\left(\frac{1}{\alpha}\right)^{\frac{1}{k}} < M < \left(\frac{2}{\alpha}\right)^{\frac{1}{k}}$ равенством

$$\gamma_n = \max\left\{\left[\frac{s}{\alpha(s+kn)}\right]^{\frac{s}{k}} \left[\frac{kn}{s+kn}\right]^n, M^s\left(1 - \alpha M^k\right)^n\right\} \quad (n = 0,1,2,\ldots).$$

В обоих случаях, как нетрудно видеть справедливо соотношение

$$\gamma_n \sim \left(\frac{s}{e\alpha k}\right)^{\frac{s}{k}} \frac{1}{n^{s/k}}. \tag{6.63}$$

Сравнение равенств (6.59) и (6.63) показывает, что при $\theta(\lambda)=\lambda^s$ метод (6.58) сходится лучше метода (6.62).

6.3.2. Неявные итерационные схемы

Рассмотрим сначала случай $\varphi(\lambda)=\dfrac{1}{1+\alpha\lambda^k}\ (\alpha>0)$ и, соответственно, $\psi(\lambda)=\dfrac{\alpha\lambda^{k-1}}{1+\alpha\lambda^k}$. В этом случае мы имеем дело с неявным методом итераций, описываемых формулами

$$\left(E+\alpha A^k\right)x_{n+1}=x_n+\alpha A^{k-1}y \quad (n=0,1,2,\ldots). \tag{6.64}$$

Условие б) теоремы 6.8 при k четном выполняется при $SpA\subseteq(-\infty,+\infty)$ (т. е., всегда) и при k нечетном, если $SpA\subseteq[0,+\infty)$. Далее, условие с) выполнено всегда.

Для применения теоремы 6.10 рассмотрим снова случай $\theta(\lambda)=\lambda^s$; здесь $s-$любое положительное число, если $SpA\subseteq[0,+\infty)$ и рациональное положительное число с четным знаменателем, если $SpA\cap(-\infty,0)\neq\varnothing$. Несложные вычисления показывают, что $\gamma_n=1$ при $n\le\frac{s}{k}$ и при $n>\frac{s}{k}$

$$\gamma_n=\left[\frac{s}{(nk-s)\alpha}\right]^{\frac{s}{k}}\left[\frac{nk-s}{nk}\right]^n \sim \left(\frac{s}{e\alpha k}\right)^{\frac{s}{k}}\frac{1}{n^{s/k}}. \tag{6.65}$$

Подобным образом исследуется и случай $\varphi(\lambda)=\dfrac{1-\alpha\lambda^k}{1+\alpha\lambda^k}$ (α – положительное число) и, соответственно, $\psi(\lambda)=\dfrac{2\alpha\lambda^{k-1}}{1+\alpha\lambda^k}$. Итерационный метод (6.34) при этом совпадает с неявным методом итераций, определяемым равенствами

$$\left(E+\alpha A^k\right)x_{n+1}=\left(E-\alpha A^k\right)x_n+2\alpha A^{k-1}y \quad (n=0,1,2,\ldots). \tag{6.66}$$

Условие б) теоремы 6.8 при k четном выполняется при $SpA\subseteq(-\infty,+\infty)$ (т. е., всегда) и при k нечетном, если $SpA\subseteq[0,+\infty)$. Далее, условие с) также выполнено всегда.

Для применения теоремы 6.10 рассмотрим снова случай $\theta(\lambda)=\lambda^s$; здесь s – любое положительное число, если $SpA\subseteq[0,+\infty)$ и рациональное положительное число с четным знаменателем, если $SpA\cap(-\infty,0)\neq\varnothing$. Вычисления постоянных γ_n приводят к довольно громоздким формулам. Поэтому мы ограничимся выяснением их асимптотического поведения при $n\to\infty$. В самом деле, $\gamma_n=\max\limits_{\lambda\in SpA}\lambda^s\left(1-\alpha\lambda^k\right)^n\left(1+\alpha\lambda^k\right)^{-n}$. Производная функции $\xi(\lambda)=\lambda^s\left(1-\alpha\lambda^k\right)^n\left(1+\alpha\lambda^k\right)^{-n}$ определяется равенством

$$\xi'(\lambda)=\lambda^{s-1}\left(1-\alpha\lambda^k\right)^{n-1}\left(1+\alpha\lambda^k\right)^{-n-1}\left(\left(s-s\alpha^2\lambda^{2k}\right)-2kn\alpha\lambda^k\right).$$

При больших n эта производная обращается в нуль в точке $\lambda=\lambda_n$, для которой $s\left(\alpha\lambda^k\right)^2+2kn\left(\alpha\lambda^k\right)-s=0$, откуда

$$\alpha\lambda^k=\sqrt{\left(\frac{nk}{s}\right)^2+1}-\frac{nk}{s}=\frac{1}{\sqrt{\left(\frac{nk}{s}\right)^2+1}+\frac{nk}{s}}\sim\frac{s}{2k}\cdot\frac{1}{n}. \qquad (6.67)$$

Отсюда, при $\lambda=\lambda_n$,

$$\gamma_n=\lambda^s\left(\frac{1-\alpha\lambda^k}{1+\alpha\lambda^k}\right)^n\sim\left(\frac{s}{2e\alpha k}\right)^{\frac{s}{k}}\frac{1}{n^{s/k}}. \qquad (6.68)$$

Наконец, рассмотрим еще случай, когда $\phi(\lambda)=\dfrac{\left(1-\alpha\lambda^k\right)^2}{1+\alpha^2\lambda^{2k}}$, $\alpha>0$, и, соответственно, $\psi(\lambda)=\dfrac{2\alpha\lambda^{k-1}}{1+\alpha^2\lambda^{2k}}$. В этом случае получим следующий итерационный метод

$$\left(E+\alpha^2A^{2k}\right)x_{n+1}=\left(E-\alpha A^k\right)^2x_n+2\alpha A^{k-1}y \quad (n=0,1,2,\ldots). \qquad (6.69)$$

При нечетном k получаем, что условия теоремы 6.8 выполнены, если $SpA\subseteq[0,+\infty)$, а при четном k получаем, что условия теоремы 6.8 выполнены всегда.

Для применения теоремы 6.10 рассмотрим снова случай $\theta(\lambda)=\lambda^s$; здесь s – любое положительное число. Вычисления постоянных γ_n здесь сводится к анализу корней некоторого кубического уравнения. Однако асимптотика поведения этих корней определяется достаточно просто; оказывается, что для $\lambda = \lambda_n$ справедливо соотношение $\lambda \sim \left(\frac{s}{2\alpha k}\right)^{\frac{1}{k}} \frac{1}{n^{1/k}}$, и поэтому

$$\gamma_n \sim \left(\frac{s}{2e\alpha k}\right)^{\frac{s}{k}} \frac{1}{n^{s/k}}. \tag{6.70}$$

Сравнение соотношений (6.65), (6.68), (6.70) показывает, что скорость сходимости всех трех рассмотренных в этом подразделе методов одинакова.

ГЛАВА 7
РЕГУЛЯРИЗАЦИЯ НЕКОРРЕКТНЫХ ЗАДАЧ В БАНАХОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ

Практически отсутствуют работы, в которых исследуется сходимость итерационных методов решения некорректных задач в банаховом пространстве. В данной главе изучены некоторые свойства предложенной явной схемы итераций решения некорректных задач с линейным непрерывным оператором: доказана сходимость приближений с априорным выбором параметра регуляризации в банаховом пространстве, получены оценка погрешности и априорный момент останова.

7.1 Постановка задачи

В банаховом пространстве E исследуется уравнение первого рода

$$Ax = y, \tag{7.1}$$

где A – линейный непрерывный оператор, действующий в пространстве E. Нуль принадлежит спектру оператора A, но не является его собственным значением, следовательно, задача (7.1) некорректна и имеет единственное решение. Приведем уравнение (7.1) к виду, удобному для итераций. Для этого уравнение $Ax - y = 0$ умножим на параметр $(-\alpha)$ и к обеим частям уравнения добавим x, получим $x - \alpha(Ax - y) = x$; $x = (I - \alpha A)x + \alpha y$, где I – единичный оператор. Обозначим $B = I - \alpha A,\ f = \alpha y.$ Тогда уравнение (7.1) запишется в виде

$$x = Bx + f. \tag{7.2}$$

Для отыскания решения уравнения (7.2) используем итерационный процесс

$$x_{n+1} = Bx_n + f,\ (n = 0,1,2,...). \tag{7.3}$$

Однако на практике часто точная правая часть уравнения (7.2) неизвестна, а вместо нее известно δ – приближение $f_\delta :\| f - f_\delta \| \le \delta$. Тогда метод (7.3) примет вид

$$x_{n+1,\delta} = Bx_{n,\delta} + f_\delta,\ (n = 0,1,2,...). \tag{7.4}$$

7.2 Сходимость метода при точной правой части уравнения

Изложение материала раздела 7.2 аналогично [59]. Изучим уравнение

$$x = Bx. \tag{7.5}$$

Рассмотрим последовательность

$$x_n = Bx_{n-1}. \tag{7.6}$$

Справедлива

Теорема 7.1. *Пусть оператор B преобразует в себя замкнутое множество* $M \subset E$ *и является оператором сжатия:* $\| Bx - By \| \le q \| x - y \|$, $(x, y \in M,\ 0 < q < 1)$. *Тогда итерационный процесс* (7.6) *при любом начальном приближении* $x_0 \in M$ *сходится к единственному решению* x^* *уравнения* (7.5).

Верно неравенство

$$\left\| x_n - x^* \right\| \le \frac{q^n}{1-q} \left\| x_0 - Bx_0 \right\|, \ (n = 1, 2, \ldots). \tag{7.7}$$

Теорема 7.1 и неравенство (7.7) вытекают из принципа сжимающих отображений [75; 112]. Уравнение (7.5) имеет, очевидно, решение $x^* = 0$.

Оценка (7.7) не может быть улучшена в общем случае, однако при дополнительных предположениях можно гарантировать более быструю сходимость.

Вернемся к уравнению (7.2). Если $\left\| B \right\| < 1$, то из теоремы 7.1 следует, что последовательные приближения (7.3) сходятся. Докажем более точное утверждение.

Теорема 7.2. *Пусть спектральный радиус* $\rho(B)$ *оператора B удовлетворяет неравенству* $\rho(B) < 1$. *Тогда последовательные приближения* (7.3) *сходятся к решению* x^* *уравнения* (7.2) *и для каждого* ε, $0 < \varepsilon < 1 - \rho(B)$, *справедлива оценка*

$$\| x_n - x^* \| \le c(\varepsilon) \left[\rho(B) + \varepsilon \right]^n \| x_0 - Bx_0 - f \|.$$

Доказательство. Введем в банаховом пространстве E такую эквивалентную норму $\| \cdot \|_*$, при которой норма линейного оператора B сколь угодно близка к его спектральному радиусу, т. е.

$$m(\varepsilon) \| x \| \le \| x \|_* \le M(\varepsilon) \| x \|, \ (x \in E), \tag{7.8}$$

$$\| Bx \|_* \le \left[\rho(B) + \varepsilon \right] \| x \|_*, \ (x \in E). \tag{7.9}$$

Покажем, как построить такую эквивалентную норму (7.8), (7.9). Известно, что спектральный радиус $\rho(B) = \lim\limits_{n \to \infty} \sqrt[n]{\| B^n \|}$ и $\rho(B) \le \| B \|$. Определим такое n, что $\sqrt[n]{\| B^n \|} \le \rho(B) + \varepsilon$, где $\varepsilon > 0$ – заданное число. Положим

$$\| x \|_* = [\rho(B)+\varepsilon]^{n-1} \| x \| + [\rho(B)+\varepsilon]^{n-2} \| Bx \| + \ldots + \| B^{n-1} x \| .$$

Очевидно,

$$[\rho(B)+\varepsilon]^{n-1} \| x \| \le \| x \|_* \le \left\{ [\rho(B)+\varepsilon]^{n-1} + [\rho(B)+\varepsilon]^{n-2} \| B \| + \ldots + \| B^{n-1} \| \right\} \| x \|,$$

т. е. нормы $\| \cdot \|$ и $\| \cdot \|_*$ эквивалентны. $\| B \|_* = \sup\limits_{\|x\|_* \le 1} \| Bx \|_* \le \rho(B)+\varepsilon$ [59, с. 16]. Т. к. в любой норме $\rho(B) \le \| B \|_*$, то $\rho(B) \le \| B \|_* \le \rho(B)+\varepsilon$. Таким образом, норму $\| \cdot \|_*$ из (7.8), (7.9) можно построить.

Из (7.9) вытекает, что уравнение (7.2) можно рассматривать как уравнение (7.5) со сжимающим оператором. Поэтому приближения (7.3) сходятся к x^*. Из неравенств (7.9) и (7.7) вытекает оценка $\left\| x_n - x^* \right\|_* \le \dfrac{[\rho(B)+\varepsilon]^n}{1-\rho(B)-\varepsilon} \left\| x_0 - Bx_0 - f \right\|_*$. Из этой оценки и из (7.8) следует

$$\left\| x_n - x^* \right\| \le c(\varepsilon) [\rho(B)+\varepsilon]^n \left\| x_0 - Bx_0 - f \right\|,$$

где $c(\varepsilon) = \dfrac{1}{m(\varepsilon)[1-\rho(B)-\varepsilon]}$. *Теорема 7.2 доказана.*

7.3. Сходимость метода при приближенной правой части уравнения

Покажем, что итерационный метод (7.4) можно сделать сходящимся, если разумным образом согласовывать число итераций n с уровнем погрешности δ.

Ниже, под сходимостью метода (7.4) понимается утверждение о том, что приближения (7.4) сколь угодно близко подходят к точному решению операторного уравнения (7.2) при подходящем выборе n и достаточно малых δ. Иными словами, метод (7.4) сходится, если $\lim\limits_{\delta\to 0}\left(\inf\limits_{n}\left\|x^{*}-x_{n,\delta}\right\|\right)=0$.

Рассмотрим $\left\|x^{*}-x_{n,\delta}\right\|\le\left\|x^{*}-x_{n}\right\|+\left\|x_{n}-x_{n,\delta}\right\|$. В разделе 7.2 показано, что $\left\|x^{*}-x_{n}\right\|\to 0,\ n\to\infty$. Докажем, что $\left\|x_{n}-x_{n,\delta}\right\|\to 0$.

Из формулы (7.3) при $x_0=f$ получаем $x_1=Bf+f$, $x_2=B(Bf+f)+f=$ $=B^2f+Bf+f$. Предположим, что при $n=k$ $x_k=B^kf+B^{k-1}f+\ldots+$ $+Bf+f$ и, используя (7.3), найдем

$$x_{k+1}=Bx_k+f=B(B^kf+B^{k-1}f+\ldots+Bf+f)+f=$$
$$=B^{k+1}f+B^kf+\ldots+Bf+f.$$

Итак, по индукции доказано, что $x_n=B^nf+B^{n-1}f+\ldots+Bf+f$. Аналогично имеем, что $x_{n,\delta}=B^nf_\delta+B^{n-1}f_\delta+\ldots+Bf_\delta+f_\delta$. Отсюда

$$\left\|x_n-x_{n,\delta}\right\|=B^n(f-f_\delta)+B^{n-1}(f-f_\delta)+\ldots+B(f-f_\delta)+(f-f_\delta). \quad (7.10)$$

Пусть $\rho(B)<1$ и для $\forall\varepsilon$ выполняется $0<\varepsilon<1-\rho(B)$, тогда $\|B\|_*\le\rho(B)+\varepsilon<1$ и

$$\left\|x_n-x_{n,\delta}\right\|_*\le\left\|B^n(f-f_\delta)\right\|_*+\left\|B^{n-1}(f-f_\delta)\right\|_*+\ldots+\left\|B(f-f_\delta)\right\|_*+$$
$$+\left\|f-f_\delta\right\|_*\le(n+1)\left\|f-f_\delta\right\|_*\le M(\varepsilon)(n+1)\delta,$$

т. к. $\left\|f-f_\delta\right\|\le\delta$. Следовательно, $\left\|x_n-x_{n,\delta}\right\|\le d(\varepsilon)(n+1)\delta$, где $d(\varepsilon)=\dfrac{M(\varepsilon)}{m(\varepsilon)}$.

$$\left\|x^{*}-x_{n,\delta}\right\|\le c(\varepsilon)\left[\rho(B)+\varepsilon\right]^n\left\|x_0-Bx_0-f\right\|+d(\varepsilon)(n+1)\delta. \quad (7.11)$$

Из оценки (7.11) следует, что если выбирать n зависящим от δ так, чтобы $n\delta\to 0$ при $n\to\infty,\ \delta\to 0,$ то метод итерации (7.4) сходится.

Итак, доказана

Теорема 7.3. *Пусть выполняются условия* $\rho(B)<1$ *и для каждого* ε $0<\varepsilon<1-\rho(B)$. *Тогда последовательные приближения* (7.4) *сходятся* *к решению* x^* *уравнения* (7.2), *если число итераций n выбирать в зависимости от* δ *так, чтобы* $n\delta \to 0$ при $n \to \infty, \delta \to 0$.

Оценку погрешности (7.11) можно уточнить, если воспользоваться неравенством (7.9), по которому $\|B(f - f_\delta)\|_* \le [\rho(B) + \varepsilon]\|f - f_\delta\|_*$. Из (7.10)

$$\|x_n - x_{n,\delta}\|_* = \left\|B^n(f - f_\delta)\right\|_* + \left\|B^{n-1}(f - f_\delta)\right\|_* + \ldots + \|B(f - f_\delta)\|_* + \|f - f_\delta\|_* \le$$

$$\le \left\{[\rho(B) + \varepsilon]^n + [\rho(B) + \varepsilon]^{n-1} + \ldots + [\rho(B) + \varepsilon] + 1\right\}\|f - f_\delta\|_* =$$

$$= \frac{1 - [\rho(B) + \varepsilon]^{n+1}}{1 - \rho(B) - \varepsilon}\|f - f_\delta\|_* \le \frac{1 - [\rho(B) + \varepsilon]^{n+1}}{1 - \rho(B) - \varepsilon} M(\varepsilon)\delta = k(\varepsilon)\left\{1 - [\rho(B) + \varepsilon]^{n+1}\right\}\delta,$$

где $k(\varepsilon) = \dfrac{M(\varepsilon)}{1 - \rho(B) - \varepsilon}$.

Поэтому $\left\|x_n - x_{n,\delta}\right\| \le l(\varepsilon)\left\{1 - [\rho(B) + \varepsilon]^{n+1}\right\}\delta$ и, следовательно,

$$\left\|x^* - x_{n,\delta}\right\| \le c(\varepsilon)[\rho(B) + \varepsilon]^n \|x_0 - Bx_0 - f\| + l(\varepsilon)\left\{1 - [\rho(B) + \varepsilon]^{n+1}\right\}\delta, \quad (7.12)$$

где $l(\varepsilon) = \dfrac{k(\varepsilon)}{m(\varepsilon)}$.

Таким образом, доказана

Теорема 7.4. *Пусть спектральный радиус* $\rho(B)$ *оператора B удовлетворяет условию* $\rho(B) < 1$. *Тогда при любом* ε, $0 < \varepsilon < 1 - \rho(B)$ *для итерационного процесса* (7.4) *справедлива оценка погрешности* (7.12).

Оптимизируем по n оценку погрешности (7.11). Для ее минимизации производную по n от правой части неравенства (7.11) приравняем к нулю. Получим $c(\varepsilon)[\rho(B) + \varepsilon]^n \|x_0 - Bx_0 - f\| \ln[\rho(B) + \varepsilon] + d(\varepsilon)\delta = 0$;

$$[\rho(B) + \varepsilon]^n = \frac{-d(\varepsilon)\delta}{c(\varepsilon)\|x_0 - Bx_0 - f\| \ln[\rho(B) + \varepsilon]}. \quad (7.13)$$

Т. к. по условию теоремы 7.4 $0 < \varepsilon < 1 - \rho(B)$, то $\rho(B) + \varepsilon < 1$ и, следовательно, $\ln[\rho(B) + \varepsilon] < 0$, значит, правая часть равенства (7.13) положительна. Из (7.13) получаем априорный момент останова итераций

$$n_{\text{опт}} = \log_{[\rho(B)+\varepsilon]} \frac{-d(\varepsilon)\delta}{c(\varepsilon)\|x_0 - Bx_0 - f\| \ln[\rho(B) + \varepsilon]}.$$

Подставим $n_{\text{опт}}$ в (7.11), тогда оптимальная оценка погрешности для приближений (7.4) примет вид

$$\left\|x^* - x_{n,\delta}\right\|_{\text{опт}} \le c(\varepsilon)\left\|x_0 - Bx_0 - f\right\|\left[\rho(B)+\varepsilon\right]^{\log_{[\rho(B)+\varepsilon]}\frac{-d(\varepsilon)\delta}{c(\varepsilon)\|x_0 - Bx_0 - f\|\ln[\rho(B)+\varepsilon]}} +$$

$$+d(\varepsilon)\left\{\log_{[\rho(B)+\varepsilon]}\frac{-d(\varepsilon)\delta}{c(\varepsilon)\left\|x_0 - Bx_0 - f\right\|\ln\left[\rho(B)+\varepsilon\right]} + 1\right\}\delta =$$

$$= \frac{-d(\varepsilon)\delta}{\ln\left[\rho(B)+\varepsilon\right]} + d(\varepsilon)\left\{\log_{[\rho(B)+\varepsilon]}\frac{-d(\varepsilon)\delta}{c(\varepsilon)\left\|x_0 - Bx_0 - f\right\|\ln\left[\rho(B)+\varepsilon\right]} + 1\right\}\delta.$$

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Агеев, А. Л. Регуляризующие алгоритмы выделения разрывов в некорректных задачах / А. Л. Агеев, Т. В. Антонова // Журнал вычислительной математики и математической физики. – 2008. – Т. 48, № 8. – С. 1362–1370.

2. Андреев, Б. А. Расчеты пространственного распределения потенциальных полей и их использование в разведочной геофизике / Б. А. Андреев // Известия АН СССР. Серия : География и геофизика. – 1947. – № 1. – С. 79–92.

3. Антипин, А. С. Регуляризованный экстраградиентный метод решения параметрической многокритериальной задачи равновесного программирования / А. С. Антипин, Л. А. Артемьева, Ф. П. Васильев // Журнал вычислительной математики и математической физики. – 2010. – Т. 50, № 12. – С. 2083–2098.

4. Антохин, Ю. Т. О некоторых задачах аналитической теории уравнений первого рода / Ю. Т. Антохин // Дифференциальные уравнения. – 1966. – Т. 2, № 2. – С. 226–240.

5. Антохин, Ю. Т. О некоторых некорректных задачах теории уравнений с частными производными / Ю. Т. Антохин // Дифференциальные уравнения. – 1966. – Т. 2, № 2. – С. 241–250.

6. Апарцин, А. С. К построению сходящихся итерационных процессов в гильбертовом пострaнстве / А. С. Апарцин // Труды по прикладной математике и кибернетике. – Иркутск, 1972. – С. 7–14.

7. Апарцин, А. С. О сходимости численных методов решения билинейного уравнения Вольтерра I рода / А. С. Апарцин // Журнал вычислительной математики и математической физики. – 2007. – Т. 47, № 8. – С. 1378–1386.

8. Бакушинский, А. Б. Один общий прием построения регуляризующих алгоритмов для линейного некорректного уравнения в гильбертовом пространстве / А. Б. Бакушинский // Журнал вычислительной математики и математической физики. – 1967. – Т. 7, № 3. – С. 672–677.

9. Бакушинский, А. Б. О решении некоторых интегральных уравнений I рода методом последовательных приближений / А. Б. Бакушинский, В. Н. Страхов // Журнал вычислительной математики и математической физики. – 1968. – Т. 8, № 1. – С. 181–185.

10. Бакушинский, А. Б. Оптимальные и квазиоптимальные методы решения линейных задач, порожденные регуляризующими алгоритмами / А. Б. Бакушинский // Известия высших учебных заведений. Математика. – 1978. – № 11. – С. 6–10.

11. Бакушинский, А. Б. Итеративные методы решения некорректных задач / А. Б. Бакушинский, А. В. Гончарский. – М. : Наука, 1989. – 128 с.

12. Бакушинский, А. Б. Итерационные методы решения некорректных операторных уравнений с гладкими операторами / А. Б. Бакушинский, М. Ю. Кокурин. – М. : Едиториал УРСС, 2002. – 192 с.

13. Бакушинский, А. Б. Об одном классе разностных схем решения некорректной задачи Коши в банаховом пространстве / А. Б. Бакушинский, М. М. Кокурин, М. Ю. Кокурин // Журнал вычислительной математики и математической физики. – 2012. – Т. 52, № 3. – С. 483–498.

14. Бакушинский, А. Б. Итерационные методы стохастической аппроксимации для решения нерегулярных нелинейных операторных уравнений / А. Б. Бакушинский, М. Ю. Кокурин // Журнал вычислительной математики и математической физики. – 2015. – Т. 55, № 10. – С. 1637–1645.

15. Бакушинский, А. Б. Экономичный численный метод решения коэффициентной обратной задачи для волнового уравнения в трехмерном пространстве / А. Б. Бакушинский, А. С. Леонов // Журнал вычислительной математики и математической физики. – 2018. – Т. 58, № 4. – С. 561–574.

16. Вабищевич, П. Н. Вычислительная идентификация правой части параболического уравнения / П. Н. Вабищевич, В. И. Васильев, М. В. Васильева // Журнал вычислительной математики и математической физики. – 2015. – Т. 55, № 6. – С. 1020–1027.

17. Вабищевич, П. Н. Вычислительная идентификация зависимости от времени правой части гиперболического уравнения / П. Н. Вабищевич // Журнал вычислительной математики и математической физики. – 2019. – Т. 59, № 9. – С. 1537–1545.

18. Вайникко, Г. М. Оценки погрешности метода последовательных приближений для некорректных задач / Г. М. Вайникко // Автоматика и телемеханика. – 1980. – № 3. – С. 84–92.

19. Вайникко, Г. М. Принцип невязки для класса регуляризационных методов для самосопряженных задач / Г. М. Вайникко // Численное решение краевых задач и интегральных уравнений : тез. докл. науч. конф., 21–23 окт. 1981 г., Тарту / Тартус. ун-т. – Тарту, 1981. – С. 73–75.

20. Вайникко, Г. М. Методы решения линейных некорректно поставленных задач в гильбертовых пространствах : учеб. пособие / Г. М. Вайникко. – Тарту : Тартус. ун-т, 1982. – 110 с.

21. Вайникко, Г. М. Итерационные процедуры в некорректных задачах : монография / Г. М. Вайникко, А. Ю. Веретенников. – М. : Наука, 1986. – 181 с.

22. Васин, В. В. Итерационные методы решения некорректных задач с априорной информацией в гильбертовых пространствах / В. В. Васин // Журнал вычислительной математики и математической физики. – 1988. – Т. 28, № 7. – С. 971–980.

23. Васин, В. В. Об одном алгоритме решения уравнения Фредгольма-Стильтьеса / В. В. Васин, Т. И. Сережникова // Известия высших учебных заведений. Математика. – 2001. – № 4 (467). – С. 3–10.

24. Верлань, А. Ф. Интегральные уравнения : методы, алгоритмы, программы : справочник / А. Ф. Верлань, В.С. Сизиков. – Киев : Навук. думка, 1986. – 544 с.

25. Волков, В. В. О тихоновских решениях приближенных систем линейных алгебраических уравнений при конечных возмущениях их матриц / В. В. Волков, В. И. Ерохин // Журнал вычислительной математики и математической физики. – 2010. – Т. 50, № 4. – С. 618–635.

26. Глушак, А. В. Численное решение линейной обратной задачи для уравнения Эйлера – Дарбу / А. В. Глушак, Т. Т. Каракеев // Журнал вычислительной математики и математической физики. – 2006. – Т. 46, № 5. – С. 848–857.

27. Голузин, Г. М. Обобщенная формула Carleman's и ее приложения к аналитическому продолжению функций / Г. М. Голузин, В. И. Крылов // Математический сборник. – 1933. – № 40. – С. 144–149.

28. Градштейн, И. С. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений : справ. пособие / И. С. Градштейн, И. М. Рыжик. – М. : ФИЗМАТЛИТ, 1971. – 1108 с.

29. Гурса, Э. Курс математического анализа : в 3 т. (с илл.) / Э. Гурса. – М.-Л. : Гос. техн.-теорет. изд-во, 1933. – Т. 3 : в 2 ч., ч. 1. Бесконечно близкие интегралы. Уравнения с частными производными. – 276 с.

30. Денисов, А. М. Введение в теорию обратных задач : учеб. пособие / А. М. Денисов. – М. : Моск. гос. ун-т, 1994. – 208 с.

31. Денисов, А. М. Численный метод решения обратной задачи для модели популяции / А. М. Денисов, А. С. Макеев // Журнал вычислительной математики и математической физики. – 2006. – Т. 46, № 3. – С. 490–500.

32. Денисов, А. М. Обратная задача для математических моделей возбуждения сердца / А. М. Денисов, В. В. Калинин // Журнал вычислительной математики и математической физики. – 2010. – Т. 50, № 3. – С. 539–543.

33. Денисов, А. М. Обратная задача для уравнения диффузии с переопределением в виде внешнего объемного потенциала / А. М. Денисов // Журнал вычислительной математики и математической физики. – 2011. – Т. 51, № 9. – С. 1695–1702.

34. Денисов, А. М. Существование решения обратной коэффициентной задачи для квазилинейного гиперболического уравнения / А. М. Денисов // Журнал вычислительной математики и математической физики. – 2019. – Т. 59, № 4. – С. 587–596.

35. Емелин, И. В. Спурт-метод построения последовательных приближений / И. В. Емелин, М. А. Красносельский, Н. П. Панских // Доклады Академии наук. – 1974. – Т. 219, № 3. – С. 535–538.

36. Емелин, И. В. Правило останова в итерационных процедурах решения некорректных задач / И. В. Емелин, М. А. Красносельский // Автоматика и телемеханика. – 1978. – № 12. – С. 59–63.

37. Емелин, И. В. К теории некорректных задач / И. В. Емелин, М. А. Красносельский // Доклады Академии наук. – 1979. – Т. 244, № 4. – С. 805–808.

38. Иванов, В. К. О некорректно поставленных задачах / В. К. Иванов // Математический сборник. – 1963. – Т. 61 (103), № 2. – С. 211–223.

39. Иванов, В. К. О приближенном решении операторных уравнений первого рода / В. К. Иванов // Журнал вычислительной математики и математической физики. – 1966. – Т. 6, № 6. – С. 1089–1094.

40. Иванов, В. К. Теория приближенных методов и ее применение к численному решению сингулярных интегральных уравнений / В. К. Иванов. – Киев : Наукова думка, 1968. – 288 с.

41. Иванов, В. К. Теория линейных некорректных задач и ее приложения / В. К. Иванов, В. В. Васин, В. П. Танана. – М. : Наука, 1978. – 206 с.

42. Кабанихин, С. И. Алгоритм восстановления источника возмущений в системе нелинейных уравнений мелкой воды / С. И. Кабанихин, О. И. Криворотько // Журнал вычислительной математики и математической физики. – 2018. – Т. 58, № 8. – С. 138–147.

43. Канторович, Л. В. Функциональный анализ в нормированных пространствах : монография / Л. В. Канторович, Г. П. Акилов. – М. : Физматгиз, 1959. – 684 с.

44. Кожух, И. Г. Сходимость в гильбертовом пространстве неявного метода итераций решения уравнений I рода / И. Г. Кожух, В. Ф. Савчук // Веснік Брэсцкага ўніверсітэта. Серыя прыродазнаўчых навук. – 1999. – № 6. – С. 22–26.

45. Кожух, И. Г. К вопросу о регуляризации некорректно поставленных задач / И. Г. Кожух, В. Ф. Савчук // «Mathematica» system in teaching and research : тр. Междунар. семинара, Седльце, 28–30 янв. 1999 г. / Univ. of Sedlce, Poland. – Брест, 1999. – С. 20–23.

46. Кокурин, М. Ю. Об устойчивой аппроксимации решений нерегулярных нелинейных операторных уравнений в гильбертовом пространстве в условиях больших помех / М. Ю. Кокурин // Журнал вычислительной математики и математической физики. – 2007. – Т. 47, № 1. – С. 3–10.

47. Кокурин, М. Ю. Об обратной коэффициентной задаче для волнового уравнения в ограниченной области / М. Ю. Кокурин, С. К. Пайме-

ров // Журнал вычислительной математики и математической физики. – 2008. – Т. 48, № 1. – С. 115–126.

48. Кокурин, М. Ю. О выпуклости функционала Тихонова и итеративно регуляризованных методах решения нерегулярных нелинейных операторных уравнений / М. Ю. Кокурин // Журнал вычислительной математики и математической физики. – 2010. – Т. 50, № 4. – С. 651–664.

49. Кокурин, М. Ю. Конечномерные линейные аппроксимации решений нерегулярных нелинейных уравнений общего вида и уравнений с квадратичными операторами / М. Ю. Кокурин // Журнал вычислительной математики и математической физики. – 2010. – Т. 50, № 11. – С. 1883–1892.

50. Кокурин, М. М. Необходимые и достаточные условия степенной сходимости метода квазиобращения и разностных методов решения некорректной задачи Коши в условиях точных данных / М. М. Кокурин // Журнал вычислительной математики и математической физики. – 2015. – Т. 55, № 12. – С. 2027–2041.

51. Кокурин, М. Ю. Итеративно регуляризованные методы для нерегулярных нелинейных операторных уравнений с нормально разрешимой производной в решении/ М. Ю. Кокурин // Журнал вычислительной математики и математической физики. – 2016. – Т. 56, № 9. – С. 1543–1555.

52. Кокурин, М. Ю. Оценки скорости сходимости в схеме Тихонова для решения некорректных невыпуклых экстремальных задач / М. Ю. Кокурин // Журнал вычислительной математики и математической физики. – 2017. – Т. 57, № 7. – С. 1103–1112.

53. Кокурин, М. Ю. О решении некорректных невыпуклых экстремальных задач с точностью, пропорциональной погрешности в исходных данных / М. Ю. Кокурин // Журнал вычислительной математики и математической физики. – 2018. – Т. 58, № 11. – С. 1815–1828.

54. Коннов, И. В. О сходимости метода регуляризации для вариационных неравенств / И. В. Коннов // Журнал вычислительной математики и математической физики. – 2006. – Т. 46, № 4. – С. 568–575.

55. Константинова, Я. В. Оценки погрешности в методе итераций для уравнений I-го рода / Я. В. Константинова, О. А. Лисковец // Вестник Белорусского университета. Серия I. – 1973. – № 1. – С. 9–15.

56. Константинова, Я. В. Градиентный метод с переменным шагом для уравнений I-го рода / Я. В. Константинова, О. А. Лисковец // Известия АН БССР. Серия физико-математических наук. – 1974. – № 2. – С. 45–49.

57. Константинова, Я. В. Метод итераций неявного типа для уравнений I-ого рода и его сравнение с явным методом / Я. В. Константинова // Вестник Белорусского университета. Серия I. – 1979. – № 1. – С. 63–65.

58. Красносельский, М. А. О решении методом последовательных приближений уравнений с самосопряженными операторами / М. А. Красносельский // Успехи математических наук. – 1960. – Т. 15, Вып. 3. – С.161–165.

59. Приближенное решение операторных уравнений / М. А. Красносельский, Г. М. Вайникко, П. П. Забрейко [и др.]. – М. : Наука, 1969. – 456 с.

60. Красносельский, М. А. Геометрические методы нелинейного анализа / М. А. Красносельский, П. П. Забрейко. – М. : Наука, 1975. – 346 с.

61. Крылов, В. И. Вычислительные методы высшей математики : учеб. пособие : в 2 т. / В. И. Крылов, В. В. Бобков, П. И. Монастырный. – Минск : Выш. шк., 1972. – Т. 1. – 585 с.

62. Крылов, В. И. Вычислительные методы высшей математики : учеб. пособие : в 2 т. / В. И. Крылов, В. В. Бобков, П. И. Монастырный. – Минск : Выш. шк., 1975. – Т. 2. – 672 с.

63. Крянев, А. С. Итерационный метод решения некорректных задач / А. С. Крянев // Журнал вычислительной математики и математической физики. – 1974. – Т. 14, № 1. – С. 25–35.

64. Лаврентьев, М. М. О некоторых некорректных задачах математической физики / М. М. Лаврентьев. – Новосибирск : Изд-во СО АН СССР, – 1962. – 96 с.

65. Лебедева, Е. В. О приближении конечно-интервальных уравнений кусочно-постоянными функциями / Е. В. Лебедева, С. Г. Солодкий // Журнал вычислительной математики и математической физики. – 2008. – Т. 48, № 5. – С. 731–745

66. Леонов, А. С. О сходимости по полным вариациям регуляризующих алгоритмов решения некорректно поставленных задач / А. С. Леонов // Журнал вычислительной математики и математической физики. – 2007. – Т. 47, № 5. – С. 767–783.

67. Леонов, А. С. Может ли априорная оценка точности приближенного решения некорректной задачи быть сравнимой с ошибкой данных? / А. С. Леонов // Журнал вычислительной математики и математической физики. – 2014. – Т. 54, № 4. – С. 562–568.

68. Леонов, А. С. Локально экстраоптимальные регуляризующие алгоритмы и апостериорные оценки точности для некорректных задач с разрывными решениями / А. С. Леонов // Журнал вычислительной математики и математической физики. – 2016. – Т. 56, № 1. – С. 3–15.

69. Лисковец, О. А. Об одном итеративном методе решения уравнений I-го рода / О. А. Лисковец, В. Ф. Савчук // Вопросы прикладной математики : сб. науч. ст. / СО АН СССР. – Иркутск, 1975. – С. 159–166.

70. Лисковец, О. А. Сходимость в энергетической норме итеративного метода для уравнений I-го рода / О. А. Лисковец, В. Ф. Савчук // Известия АН БССР. Серия физико-математических наук. – 1976. – № 2. – С. 19–23.

71. Лисковец, О. А. Метод простых итераций с попеременно чередующимся шагом для уравнений I-го рода / О. А. Лисковец, В. Ф. Савчук // Доклады АН БССР. – 1977. – Т. 21, № 1. – С. 9–12.

72. Лисковец, О. А. Вариационные методы решения неустойчивых задач / О. А. Лисковец. – Минск : Наука и техника, 1981. – 342 с.

73. Лисковец, О. А. Теория и методы решений некорректных задач / О. А. Лисковец // Итоги науки и техники. Серия : Математический анализ. – 1982. – Т. 20. – С. 116–178.

74. Лисковец, О. А. Правило останова итераций в неявных итеративных методах для уравнений I рода / О. А. Лисковец, В. Ф. Савчук // Изв. АН БССР. Серия физико-математических наук. – 1991. – № 2. – С 3–8.

75. Люстерник, Л. А. Элементы функционального анализа / Л. А. Люстерник, В. И. Соболев. – М. : Наука, 1965. – 520 с.

76. Малкин, И. Г. Определение толщины однородного материального слоя, покрывающего сферу или плоскость, по заданному потенциалу его (К решению обратной гравиметрической задачи) / И. Г. Малкин // Труды Физико-математического института им. В. А. Стеклова. – 1932. – Т. 2, № 4. – С. 17–26.

77. Маловичко, А. К. Методы аналитического продолжения аномалий силы тяжести и их приложения к задачам гравиразведки / А. К. Маловичко. – М. : Гостоптехиздат, 1956. – 158 с.

78. Морозов, В. А. О выборе параметра при решении функциональных уравнений методом регуляризации / В. А. Морозов // Доклады Академии наук. – 1967. – Т. 176, № 6. – С. 1225–1228.

79. Морозов, В. А. О регуляризующих семействах операторов / В. А. Морозов // Вычислительные методы и программирование : сб. работ / Вычисл. центр Моск. ун-та. – М. : Моск. гос. ун-т, 1967. – С. 63–95.

80. Морозов, В. А. Линейные и нелинейные некорректные задачи / В. А. Морозов // Итоги науки и техники. Серия : Математический анализ. – 1973. – Т. 11. – С. 129–178.

81. Морозов, В. А. Регулярные методы решения некорректно поставленных задач / В. А. Морозов. – М. : Моск. гос. ун-т, 1974. – 320 с.

82. Морозов, В. А. О проблеме регуляризации сдвигом вырожденных систем линейных алгебраических уравнений / В. А. Морозов, Э. М. Мухамадиев, А. Б. Назимов // Журнал вычислительной математики и математической физики. – 2007. – Т. 47, № 12. – С. 1971–1978.

83. Оганесян, С. М. Регуляризующий итерационный процесс, основанный на параметрическом функционале А. Н. Тихонова / С. М. Огане-

сян, В. Ч. Старостенко // Доклады Академии наук. – 1978. – Т. 238, № 2. – С. 277–280.

84. Положий, Г. Н. Об одном методе решения интегральных уравнений / Г. Н. Положий // Известия АН СССР. Серия математических наук. – 1959. – Т. 23, № 2. – С. 295–312.

85. Рязанцева, И. П. Непрерывный метод регуляризации первого порядка по А. С. Антипину для монотонных вариационных неравенств в банаховом пространстве / И. П. Рязанцева // Журнал вычислительной математики и математической физики. – 2006. – Т. 46, № 7. – С. 1184–1194.

86. Рязанцева, И. П. Методы регуляризации первого порядка для аккретивных включений в банаховом пространстве / И. П. Рязанцева // Журнал вычислительной математики и математической физики. – 2014. – Т. 54, № 11. – С. 1711–1723.

87. Савчук, В. Ф. Некоторые итеративные методы решения уравнений I рода / В. Ф. Савчук // Известия АН БССР. Серия физико-математических наук. – 1976. – № 5. – С. 23–27.

88. Савчук, В. Ф. Сходимость в энергетической норме неявного метода решения уравнений I рода / В. Ф. Савчук // II респ. конф. молодых ученых ИФМ Лит. ССР : тез. докл. науч. конф., г. Вильнюс, 15–17 апр. 1976 г. / ИФМ Лит. ССР. – Вильнюс, 1976. – С. 53–54.

89. Савчук, В. Ф. Сходимость одного метода решений линейных уравнений в гильбертовом пространстве / В. Ф. Савчук // Известия АН БССР. Серия физико-математических наук. – 1981. – № 4. – С. 53–58.

90. Савчук, В. Ф. Правило останова по невязке для метода простых итераций с попеременно чередующимся шагом / В. Ф. Савчук // Известия АН БССР. Серия физико-математических наук. – 1986. – № 6. – С. 109–111.

91. Савчук, В. Ф. Оценки погрешностей в неявном итеративном методе решения уравнений I рода / В. Ф. Савчук ; Брест. педин-т. – Брест, 1986. – 11 с. – Деп. в ВИНИТИ № 5960-В87 // Известия вузов. Математика. – 1988. – № 1. – С. 89.

92. Савчук, В. Ф. Правило останова по соседним приближениям в итеративных методах решения линейных уравнений / В. Ф. Савчук ; Брест. педин-т. – Брест, 1990. – 16 с. – Деп. в ВИНИТИ № 2430-В90 // Известия вузов. Математика. – 1990. – № 10. – С. 87.

93. Савчук, В. Ф. Регуляризация линейных уравнений в гильбертовом пространстве / В. Ф. Савчук // Известия АН БССР. Серия физико-математических наук. – 1993. – № 3. – С. 110–112.

94. Савчук, В. Ф. Выбор правила останова в неявной итерационной схеме решения линейного уравнения I рода / В. Ф. Савчук ; Брест.

педин-т. – Брест, 1994. – 6 с. – Деп. в ВИНИТИ № 199442-Д94 // Известия вузов. Математика. – 1994. – № 5. – С. 87.

95. Савчук, В. Ф. Апостериорный выбор числа итераций в неявном итеративном методе решения линейных уравнений / В. Ф. Савчук ; Брест. гос. ун-т. – Брест, 1997. – 14 с. – Деп. в ВИНИТИ № 358–В97 // Известия вузов. Математика. – 1997. – № 4. – С. 87.

96. Савчук, В. Ф. Правило останова итераций в итеративном методе решения линейных уравнений / В. Ф. Савчук, О. В. Матысик ; Брест. гос. ун-т. – Брест, 1997. – 7 с. – Деп. в ВИНИТИ № 1699–В97 // Весці АН Беларусі. Серыя фізіка-матэматычных навук. – 1997. – № 4. – С. 130.

97. Савчук, В. Ф. О применении итеративных методов к решению обратных задач теории потенциала / В. Ф. Савчук // Веснік Брэсцкага ўніверсітэта. Серыя прыродазнаўчых навук. – 1999. – № 2. – С. 30–36.

98. Савчук, В. Ф. Неявный метод решения некорректных задач в случае приближенно заданного оператора / В. Ф. Савчук // Дифференциальные уравнения и системы компьютерной алгебры : тр. Междунар. матем. конф., г. Брест, 19–22 сент. 2000 г. / Брест. гос. ун-т ; редкол.: Н. И. Юрчук [и др.]. – Брест, 2001. – С. 116–120.

99. Савчук, В. Ф. Регуляризация операторных уравнений при помощи градиентного метода с переменным шагом / В. Ф. Савчук // Вучоныя запіскі Брэсцкага дзяржаўнага ўніверсітэта імя А. С. Пушкіна : зб. навук. пр. : у 2 т. 2 ч. / Брэсц. дзярж. ун-т. – Брест, 2005. – Т. 1, ч. 2. – С. 19–29.

100. Савчук, В. Ф. Априорные оценки погрешности в неявном методе итераций решения некорректных задач / В. Ф. Савчук // Веснік Брэсцкага ўніверсітэта. Серыя прыродазнаўчых навук. – 2007. – № 1 (28). – С. 22–26.

101. Сарв, Л. Э. О решении нелинейных некорректных задач α – методами / Л. Э. Сарв // Численное решение краевых задач и интегральных уравнений : тез. докл. науч. конф., г. Тарту, 21–23 окт. 1981 г. / Тартус. ун-т. – Тарту, 1981. – С. 73–75.

102. Советникова, С. Ю. О регуляризации уравнения I рода с оператором кратного интегрирования / С. Ю. Советникова, Г. В. Хромова // Журнал вычислительной математики и математической физики. – 2007. – Т. 47, № 4. – С. 578–586.

103. Соловьев, О. А. Об аналитическом продолжении потенциальных полей с помощью итерационных процессов / О. А. Соловьев // Известия Академии наук. Серия : Физика Земли. – 1967. – № 4. – С. 92–93.

104. Солодкий, С. Г. Об оптимальном порядке точности приближенного решения интегрального уравнения Симма / С. Г. Солодкий, Е. В. Семенова // Журнал вычислительной математики и математической физики. – 2012. – Т. 52, № 3. – С. 472–482.

105. Страхов, В. Н. О решении некорректных задач магнито- и гравиметрии, представляемых интегральными уравнениями типа свертки / В. Н. Страхов // Известия Академии наук. Серия : Физика Земли. – 1967. – № 4. – С. 36–54.

106. Страхов, В. Н. Некоторые применения функционально-аналитических методов в математической теории интерпретации гравитационных и магнитных аномалий : автореф. дис. ... д-ра физ.-мат. наук : 01.01.07 / Страхов Владимир Николаевич. – М., 1972. – 78 с.

107. Страхов, В. Н. К вопросу о скорости сходимости в методе простой итерации / В. Н. Страхов // Журнал вычислительной математики и математической физики. – 1973. – Т. 13, № 6. – С. 1602–1606.

108. Стукалов, А. С. Экстрапроксимальный метод решения равновесных задач в гильбертовом пространстве / А. С. Стукалов // Журнал вычислительной математики и математической физики. – 2006. – Т. 46, № 5. – С. 781–798.

109. Тихонов, А. Н. Об устойчивости обратных задач / А. Н. Тихонов // Доклады Академии наук. – 1943. – Т. 39, № 5. – С. 195–198.

110. Тихонов, А. Н. О решении некорректно поставленных задач и методе регуляризации / А. Н. Тихонов // Доклады Академии наук. – 1963. – Т. 151, № 3. – С. 501–504.

111. Тихонов, А. Н. Методы решения некорректных задач / А. Н. Тихонов, В. Я. Арсенин. – 2-е изд. – М. : Наука, 1979. – 288 с.

112. Фихтенгольц, Г. М. Основы математического анализа : в 2 т. / Г. М. Фихтенгольц. – М. : Наука, 1968. – Т. 1. – 440 с.

113. Фридман, В. М. Метод последовательных приближений для интегрального уравнения Фредгольма 1-го рода / В. М. Фридман // Успехи математических наук. – 1956. – Т. 11, № 1(67). – С. 233–234.

114. Фридман, В. М. О сходимости методов типа наискорейшего спуска / В. М. Фридман // Успехи математических наук. – 1962. – Т. 17, № 3(105). – С. 201–204.

115. Халилов, З. И. Основы функционального анализа / З. И. Халилов. – Изд. 2, испр. и доп. – М. : Ленанд :URSS, 2018. – 256 с.

116. Хромов, А. А. О нахождении приближений к непрерывным решениям уравнений I рода / А. А. Хромов, Г. В. Хромова // Журнал вычислительной математики и математической физики. – 2009. – Т. 49, № 2. – С. 225–231.

117. Хромов, А. П. Регуляризация одного класса интегральных уравнений I рода с ядрами, разрывными на диагоналях / А. П. Хромов, Г. В. Хромова // Журнал вычислительной математики и математической физики. – 2012. – Т. 52, № 8. – С. 1363–1372.

118. Хромова, Г. В. К вопросу о приближенном решении интегральных уравнений I рода / Г. М. Хромова // Дифференциальные уравнения и вычислительная математика : межвузовский науч. сб. / Сарат. ун-т. – 1975. – Вып. 2. – С. 93–103.

119. Хромова, Г. В. Об одном способе построения методов регуляризации уравнений I рода / Г. В. Хромова // Журнал вычислительной математики и математической физики. – 2000. – Т. 40, № 7. – С. 997–1002.

120. Хромова, Г. В. Об оценках погрешности приближенных решений уравнений первого рода / Г. В. Хромова // Доклады Академии наук. – 2001. – Т. 378, № 5. – С. 605–609.

121. Хромова, Г. В. О конструировании методов регуляризации в пространствах дифференцируемых функций / Г. В. Хромова, Е. В. Шишкова // Журнал вычислительной математики и математической физики. – 2006. – Т. 46, № 11. – С. 1915–1922.

122. Хромова, Г. В. О сходимости метода Лаврентьева / Г. В. Хромова // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. – 2014. – Т. 49, № 6. – С. 958–965.

123. Хромова, Г. В. О равномерных приближениях к решению интегрального уравнения Абеля / Г. В. Хромова // Журнал вычислительной математики и математической физики. – 2015. – Т. 55, № 10. – С. 1703–1712.

124. Хромова, Г. В. Регуляризация интегрального уравнения Абеля с возмущением / Г. В. Хромова // Журнал вычислительной математики и математической физики. – 2018. – Т. 58, № 6. – С. 945–950.

125. Чистяков, В. Ф. О регуляризации дифференциально-алгебраических уравнений / В. Ф. Чистяков // Журнал вычислительной математики и математической физики. – 2011. – Т. 51, № 12. – С. 2181–2193.

126. Akhiezer, N. I. Theory of linear operators in Hilbert space / N. I. Akhiezer, I. M. Glazman. – New York : Dover Publications, 1993. – 218 p.

127. Axelsson, O. Iterative solution methods / O. Axelsson. – Cambridge : Cambridge University Press, 1994. – 654 p.

128. Bakushinsky, A. B. Iterative Methods for Approximate Solution of Inverse Problems / A. B. Bakushinsky, M. M. Kokurin. – Dordrecht: Springer, 2005. – 324 p.

129. Bakushinsky, A. B. Iterative methods for ill-posed problems / A. B. Bakushinsky, M. Yu. Kokurin, A. B. Smirnova. – Berlin : De Gruyter, 2011. – 136 p.

130. Bialy, H. Iterative Behandlung Linearer Funktionsgleichungen / H. Bialy // Archive for Rational Mechanics and Analysis. – 1959. – Vol. 4, № 2. – P. 166–176.

131. Carleman, T. Les fonctions quasi analytiques / T. Carleman. – Paris : Gauthier-Villars, 1926. – 115 p.

132. Cohen, A. Adaptive wavelet Galerkin methods for linear inverse problems / A. Cohen, M. Hoffmann, M. Reiss / Journal of the Society for Industrial and Applied Mathematics on Numerical Analysis. – 2004. – Vol. 42, № 4. – P. 97–106.

133. Danford, N. Linear operators. Spectral theory / N. Danford, D. Shwartz. – New York : Interscience Publishers, 1958. – 1923 p.

134. Donoho, D.L. Nonlinear solution of linear inverse problems by wavelet vaguelettedecomposition / D.L. Donoho / Applied and Computational Harmonic Analysis. – 1995. – Vol. 2, № 2. – P. 101–126.

135. Engl, H. W. Regularization of inverse problems. Mathematics and its Applications / H. W. Engl, M. Hanke, A. Neubauer. – Dordrecht : Kluwer Acad. Publ, 1996. – 375p.

136. Fenyo, S. Theorie und praxis der linearen Integralgleichungen / S. Fenyo, H. W. Stolle. – Birkhauser Verlag Basel : Math. Reihe Bd. 77, 1984. – 708 p.

137. Gilyazov, S. F. Regularization of ill-posed problems by iteration methods / S. F. Gilyazov, N. L. Gol’dman. – Dordrecht : Kluwer Acad. Publ., 2000. – 340 p.

138. Gourion, D. The inverse problem of emission tomography / D. Gourion, D. Noll / Inverse Problems. – 2002. – Vol. 18, № 5. – P. 1435–1460.

139. Groetsch, G. W. Sequential regularization of ill-posed problems involving unbounded operations / G. W. Groetsch // Commentationes Mathematicae Universitatis Carolinae. – 1977. – Vol. 18, № 3. – P. 489–498.

140. Hadamard, J. Sur les problèmes aux dérivées partielies et leur signification physique / J. Hadamard // Bulletin University Princeton. – 1902. – Vol. 13. – P. 49–52.

141. Hadamard, J. Le problème de Cauchy et les équations aux dérivées partielles linéaires hyperboliques / J. Hadamard. – Paris : Hermann et cie, 1932. – 542 p.

142. Hofmann, B. Some results and a conjecture on the degree of ill-posed ness for integration operators with weights / B. Hofmann, L. Wolfersdorf // Inverse Problems. – 2005. – Vol. 21, № 2. – P. 427–433.

143. Hämarik, U. On the choice of the regularization parameter in case of the approximately given noise level of data / U. Hämarik, T. Raus // Numerical Mathematics and Advanced Applications (Springer). – 2004. – Vol. 36. – P. 400–409.

144. Hämarik, U. Use of extrapolation in regularization methods / U. Hämarik, R. Palm, T. Raus // Journal of Inverse and Ill-Posed Problems. – 2007. – Vol. 15. – P. 277–294.

145. Hämarik, U. On minimization strategies for choice of the regularization parameter in ill-posed problems / U. Hämarik, R. Palm, T. Raus // Numeri-

cal Functional Analysis and Optimization. – 2009. – Vol. 30, № 9. – P. 924–950.

146. Hämarik, U. Extrapolation of Tikhonov regularization method / U. Hämarik, R. Palm, T. Raus // Mathematical Modelling and Analysis. – 2010. – Vol. 15. – P. 55–68.

147. Hämarik, U. Comparison of parameter choices in regularization algorithms in case of different information about noise level / U. Hämarik, R. Palm, T. Raus // Calcolo. – 2011. – Vol. 48, №1. – P. 47–59.

148. Hämarik, U. A family of rules for parameter choice in Tikhonov regularization of ill-posed problems with inexact noise level / U. Hämarik, R. Palm, T. Raus // Journal of Computational and Applied Mathematics. – 2012. – Vol. 236. – P. 2146–2157.

149. Hämarik, U. A family of rules for the choice of the regularization parameter in the Lavrentiev method in the case of rough estimate of the noise level of the data / U. Hämarik, R. Palm, T. Raus // Journal of Inverse and Ill-Posed Problems. – 2012. – Vol. 20. – P. 831–854.

150. Janno, J. On Lavrentiev regularization for ill-posed problems in Hilbert scales / J. Janno, U. Tautenhahn // Numerical Functional Analysis and Optimization. – 2003. – Vol. 24. – P. 531–555.

151. Kabanikhin, S. I. Inverse and ill-posed problems. Theory and applications / S. I. Kabanikhin. – Berlin : De Gruyter, 2011. – 459 p.

152. Kaltenbacher, B. Iterative regularization methods for nonlinear ill-posed problems / B. Kaltenbacher, A. Neubauer, O. Scherzer. – Berlin : Walter de Gruyter, 2008. – 322 p.

153. Kilmer, M. E. Choosing regularization parameters in iterative methods for ill-posed problems / M. E. Kilmer, D. P. O’Leary // Journal of the Society for Industrial and Applied Mathematics on Matrix Analysis and Applications. – 2001. – Vol. 22, № 4. – P.1204–1221.

154. Klann, E. Regularization of Linear Ill-Posed Problems in Two Steps : Combination of Data Smoothing and Reconstruction Methods : PhD thesis : 01.01.07 / Klann Esther. – Bremen : University of Bremen, 2005. – 79 p.

155. Klann, E. Two-step regularization methods for linear inverse problems / E. Klann, P. Maaß, R. Ramlau // Journal of Inverse and Ill-Posed Problems. – 2006. – Vol. 14, № 6. – P. 583–607.

156. Kokurin, M. Yu. Stable iteratively regularized gradient method for nonlinear irregular equations under large noise / M. Yu. Kokurin // Inverse Problems. – 2006. – Vol. 22, № 1. – P. 197–207.

157. Koliha, J. J. Metrics, Norms, and Integrals / J. J. Koliha. – Melbourne : World Scientific Publ., 1974. – 428 p.

158. Landweber, L. An iteration formula for Fredholm integral equations of the first kind / L. Landweber // American Journal of Mathematics. – 1951. – Vol. 73. – P. 615–624.

159. Lipfert, W. Iterative Losung der linearen Gleichung *Ax* = *y* unter Verwendung einer Noherung fur inversen Operator von *A* / W. Lipfert // Wissenschaftliche Zeitschrift der Technischen Universität Dresden. – 1970. – Vol. 19. – P. 399–404.

160. Lyashko, S. I. Generalized optimal control of linear systems with distributions parameters / S. I. Lyashko. – Dordrecht etc. : Kluwer Acad. Publ., 2002. – 453 p.

161. Math´e, P. Optimal discretization of inverse problems in Hilbert scales. egularization and self-regularization of projection methods / P. Math´e, S. V. Pereverzev // Journal of the Society for Industrial and Applied Mathematics on Numerical Analysis. – 2001. – Vol. 38, № 6. – P. 1999–2021.

162. Nair, M. T. Convergence rates for Lavrentiev-type regularization in Hilbert scales / M. T. Nair, U. Tautenhahn // Journal of Computational Methods in Applied Mathematics. – 2008. – Vol. 8. – P. 279–293.

163. Natterer, F. Error bounds for Tikhonov regularization in Hilbert scales / F. Natterer // Journal of Analysis and Applications. – 1984. – Vol. 18. – P. 29–37.

164. Nussbaum, M. The Degree of Ill-Posedness in Stochastic and Deterministic Models / M. Nussbaum, S. Pereverzev. – Berlin : Weierstraß-Institut, 1999. – 223 p.

165. Nguyen, B. Regularization for unconstrained vector optimization of convex functionals in Banach spaces / B. Nguyen // Journal of Computational Mathematics and Mathematical Physics. – 2006. – Vol. 46, № 3. – P. 372–378.

166. Nguyen, B. Tikhonov regularization for general nonlinear constrained optimization problem / B. Nguyen // Journal of Computational Mathematics and Mathematical Physics. – 2007. – Vol. 47, № 10. – P. 1651–1656.

167. Nguyen, B. Regularization extragradient method for lipschitz continuous mappings and inverse strongly-monotone mappings in Hilbert spaces / B. Nguyen // Journal of Computational Mathematics and Mathematical Physics. – 2008. – Vol. 48, № 11. – P. 1927–1935.

168. Ngyuen, B. Regularization methods for a class of variational inequalities in Banach spaces / B. Nguyen, T. H. P. Nguyen // Journal of Computational Mathematics and Mathematical Physics. – 2012. – Vol. 52, № 11. – P. 1487–1496.

169. Nguyen, B. A regularized parameter choice in regularization for a common solution of a finite system of ill-posed equations involving Lipschitz continuous and accretive mappings / B. Nguyen, D. D. Nguyen // Journal of

Computational Mathematics and Mathematical Physics. – 2014. – Vol. 54, № 3. – P. 397–406.

170. Nguyen, B. Tikhonov regularization for mathematical programs with generalized complementarity constraints / B. Nguyen, T. T. H. Nguyen // Journal of Computational Mathematics and Mathematical Physics. – 2015. – Vol. 55, № 4. – P. 564–571.

171. Palm, R. Numerical comparison of regularization algorithms for solving ill-posed problems : PhD thesis : 01.01.07 / Palm Rasmus. – Tartu : University of Tartu, 2010. – 74 p.

172. Pereverzev, S. V. On the adaptive selection of the parameter in the regularization of ill-posed problems / S. V. Pereverzev, E. Schock / Journal of the Society for Industrial and Applied Mathematics on Numerical Analysis. – 2005. – Vol. 43. – P. 2060–2076.

173. Phillips, D. L. A technique for the numerical solution of certain integral equations of the first kind / D. L. Phillips // Journal of the Association for Computing Machinery. – 1962. – Vol. 9, № 1. – P. 84–97.

174. Ramlau, R. Regularization of Sobolev embedding operators and applications to medical imaging and meteorological data / R. Ramlau, G. Teschke // Sampling Theory in Signal and Image Processing. – 2004. – Vol. 3, № 3. – P. 87–93.

175. Ramlau, R. TIGRA – an iterative algorithm for regularizing nonlinear ill-posed problems / R. Ramlau / Inverse Problems. – 2003. – Vol. 19, № 2. – P. 433–465.

176. Raus, T. On the discrepancy principle for solution of ill-posed problems / T. Raus / Journal Acta et Commentationes Universitatis Tartuensis de Mathematica. – 1984. – Vol. 672. – P. 16–26.

177. Raus, T. An a posteriori choice of the regularization parameter in case of approximately given error bound of data / T. Raus / Journal Acta et Commentationes Universitatis Tartuensis de Mathematica. – 1990. – Vol. 913. – P. 73–87.

178. Raus, T. About regularization parameter choice in case of approximately given error bounds of data / T. Raus / Journal Acta et Commentationes Universitatis Tartuensis de Mathematica. – 1992. – Vol. 937. – P. 77–89.

179. Raus, T. On the quasioptimal regularization parameter choices for solving ill-posed problems / T. Raus, U. Hamarik // Journal of Inverse and Ill-Posed Problems. – 2007. – Vol. 15. – P. 419–439.

180. Raus, T. On numerical realization of quasioptimal parameter choices in (iterated) Tikhonov and Lavrentiev regularization / T. Raus, U. Hamarik // Mathematical Modelling and Analysis. – 2009. – Vol. 14. – P. 99–108.

181. Raus, T. New rule for choice of the regularization parameter in (iterated) Tikhonov method / T. Raus, U. Hamarik // Mathematical Modelling and Analysis. – 2009. – Vol. 14. – P. 187–198.

182. Samarsky, A. A. Numerical Methods for Solving Inverse Problems of Mathematical Physics / A. A. Samarsky, P. N. Vabishchevitch. – Berlin : De Gruyter, 2007. – 480 p.

183. Solodky, S. G. Error bounds of a fully discrete projection method for Summs integral equation / S. G. Solodky, E. V. Lebedeva // Journal of Computational Methods in Applied Mathematics (CMAM). – 2006. – Vol. 6, № 1. – P. 87–93.

184. Solodky, S. G. Error bounds of a fully discrete projection method for Summs integral equation / S. G. Solodky, E. V. Lebedeva // Journal of Computational Methods in Applied Mathematics (CMAM). – 2007. – Vol. 7, № 3. – P. 255–263.

185. Tautenhahn, U. The use of monotonicity for choosing the regularization parameter in ill-posed problems / U. Tautenhahn, U. Hämarik // Inverse Problems. – 1999. – Vol. 15 – P.1487–1505.

186. Vaĭnikko, G. M. Projection methods and self-regularization in ill-posed problems / G. M. Vaĭnikko, U. A. Hämarik // Izvestiya Vysshikh Uchebnykh Zavedenii. Matematika. – 1985. – № 10. – P. 3–17.

187. Vasin, V. V. Ill-posed Problems with a Priori Information / V. V. Vasin, A. L. Ageev. – Utrecht : VSP, 1995. – 239 p.

188. Vogel, C. R. Computational Methods for Inverse Problems / C. R. Vogel. – Philadelphia : SIAM, 2002. – 183 p.

189. Zaanen, A. Linear Analysis / A. Zaanen. – Amsterdam : North Holland Publ., 1959. – 600 p.

СПИСОК ПУБЛИКАЦИЙ АВТОРА

Монографии

1–А. Савчук, В. Ф. Регуляризация операторных уравнений в гильбертовом пространстве / В. Ф. Савчук, О. В. Матысик. – Брест : Брест. гос. ун-т, 2008. – 196 с.

2–А. Матысик, О. В. Явные и неявные итерационные процедуры решения некорректно поставленных задач / О. В. Матысик. – Брест : Брест. гос. ун-т, 2014. – 213 с.

3–А. Матысик, О. В. Итерационная регуляризация некорректных задач / О. В. Матысик. – Saarbrücken : LAP LAMBERT Acad. Publ., 2015. – 188 с.

Статьи в рецензируемых научных изданиях

4–А. Матысик О. В. О регуляризации операторных уравнений в гильбертовом пространстве / О. В. Матысик // Доклады НАН Беларуси. – 2005. – Т. 49, № 3. – С. 38–43.

5–А. Савчук, В. Ф. Об одном итеративном методе решения операторных уравнений / В. Ф. Савчук, О. В. Матысик // Доклады НАН Беларуси. – 2005. – Т. 49, № 4. – С. 38–42.

6–А. Савчук, В. Ф. Неявная итерационная процедура решения операторных уравнений в гильбертовом пространстве / В. Ф. Савчук, О. В. Матысик // Доклады НАН Беларуси. – 2006. – Т. 50, № 5. – С. 37–42.

7–А. Матысик, О. В. Об одной двухшаговой итерационной процедуре решения операторных уравнений в гильбертовом пространстве / О. В. Матысик // Веснік Гродзенскага ўніверсітэта. Серыя 2 : Матэматыка. Фізіка. Інфарматыка, вылічальная тэхніка і кіраванне. Біялогія. – 2006. – № 2 (41). – С. 16–21.

8–А. Савчук, В. Ф. Сходимость в гильбертовом пространстве неявного итерационного метода решения операторных уравнений / В. Ф. Савчук, О. В. Матысик // Доклады НАН Беларуси. – 2007. – Т. 51, № 4. – С. 7–12.

9–А. Матысик, О. В. Об одной неявной итерационной процедуре решения некорректных задач в гильбертовом пространстве / О. В. Матысик, В. Ф. Савчук // Веснік Гродзенскага ўніверсітэта. Серыя 2 : Матэматыка. Фізіка. Інфарматыка, вылічальная тэхніка і кіраванне. Біялогія. – 2007. – № 3 (57). – С. 44–51.

10–А. Матысик, О. В. Априорные оценки погрешностей итерационной процедуры решения некорректных задач в энергетической норме гильбертова пространства / О. В. Матысик // Веснік Брэсцкага ўніверсітэта. Серыя прыродазнаўчых навук. – 2007. – № 1 (28). – С. 7–13.

11–А. Матысик, О. В. Об априорном выборе момента останова в итерационном методе решения линейных уравнений / О. В. Матысик, В. Ф. Савчук // Веснік Брэсцкага ўніверсітэта. Серыя прыродазнаўчых навук. – 2007. – № 2 (29). – С. 8–14.

12–А. Матысик, О. В. Сходимость в гильбертовом пространстве метода простой итерации с попеременно чередующимся шагом решения операторных уравнений / О. В. Матысик, В. Ф. Савчук // Доклады НАН Беларуси. – 2008. – Т. 52, № 1. – С. 33–37.

13–А. Матысик, О. В. Об одном двухшаговом итерационном методе решения операторных уравнений в гильбертовом пространстве / О. В. Матысик, В. Ф. Савчук // Доклады НАН Беларуси. – 2008. – Т. 52, № 5. – С. 5–10.

14–А. Матысик, О. В. Сходимость итерационного метода с переменным шагом решения некорректных задач в энергетической норме гильбертова пространства / О. В. Матысик // Веснік Брэсцкага ўніверсітэта. Серыя прыродазнаўчых навук. – 2008. – № 1 (30). – С. 8–14.

15–А. Матысик, О. В. Сходимость в гильбертовом пространстве неявной итерационной процедуры решения линейных уравнений / О. В. Матысик, В. Ф. Савчук // Веснік Брэсцкага ўніверсітэта. Серыя прыродазнаўчых навук. – 2008. – № 1 (30). – С. 15–21.

16–А. Матысик, О. В. Об апостериорном выборе числа итераций в неявной итерационной процедуре для решения уравнений I рода / О. В. Матысик, В. Ф. Савчук // Веснік Брэсцкага ўніверсітэта. Серыя прыродазнаўчых навук. – 2008. – № 2 (31). – С. 11–18.

17–А. Матысик, О. В. Итерационная процедура неявного типа решения операторных уравнений в гильбертовом пространстве / О. В. Матысик, В. Ф. Савчук // Доклады НАН Беларуси. – 2009. – Т. 53, № 6. – С. 39–44.

18–А. Матысик, О. В. Правило останова по невязке в неявной итерационной процедуре для линейных операторных уравнений I рода / О. В. Матысик // Веснік Брэсцкага ўніверсітэта. Серыя прыродазнаўчых навук. – 2009. – № 2 (33). – С. 19–24.

18–А. Матысик, О. В. Сходимость в банаховом пространстве метода итераций решения некорректных задач / О. В. Матысик, В. Ф. Савчук // Веснік Гродзенскага ўніверсітэта. Серыя 2 : Матэматыка. Фізіка. Інфарматыка, вылічальная тэхніка і кіраванне. Біялогія. – 2009. – № 2 (82). – С. 40–44.

20–А. Савчук, В. Ф. Итерационный метод явного типа решения операторных уравнений в гильбертовом пространстве / В. Ф. Савчук, О. В. Матысик // Доклады НАН Беларуси. – Т. 54, № 5. – 2010. – С. 24–29.

21–А. Матысик, О. В. О сходимости неявного итерационного метода решения некорректных задач с правилом останова по соседним приближениям / О. В. Матысик, В. Ф. Савчук // Веснік Брэсцкага ўніверсітэта. Серыя 4 : Фізіка. Матэматыка. – 2010. – № 1. – С. 112–117.

22–А. Матысик, О. В. Итерационный метод неявного типа решения некорректных задач в гильбертовом пространстве / О. В. Матысик, В. Ф. Савчук // Веснік Гродзенскага ўніверсітэта. Серыя 2 : Матэматыка. Фізіка. Інфарматыка, вылічальная тэхніка і кіраванне. – 2011. – № 1 (107). – С. 36–42.

23–А. Матысик, О. В. Априорный выбор параметра регуляризации в явном методе итераций решения некорректных задач с приближенным оператором / О. В. Матысик, В. Ф. Савчук // Доклады НАН Беларуси. – 2012. – Т. 56, № 1. – С. 10–15.

24–А. Матысик, О. В. Итерационный метод неявного типа решения операторных уравнений первого рода в гильбертовом пространстве / О. В. Матысик // Доклады НАН Беларуси. – 2012. – Т. 56, № 6. – С. 28–33.

25–А. Матысик, О. В. Априорный выбор параметра регуляризации в итерационном методе явного типа решения линейных уравнений с приближенным оператором / О. В. Матысик, В. Ф. Савчук // Веснік Гродзенскага ўніверсітэта. Серыя 2 : Матэматыка. Фізіка. Інфарматыка, вылічальная тэхніка і кіраванне. – 2012. – № 1 (126). – С. 24–31.

26–А. Матысик, О. В. Апостериорный выбор параметра регуляризации в методе итераций явного типа решения линейных уравнений с приближенным оператором / О. В. Матысик // Доклады НАН Беларуси. – 2013. – Т. 57, № 1. – С. 11–16.

27–А. Матысик, О. В. Апостериорный выбор параметра регуляризации в методе итераций решения линейных уравнений с приближенным оператором / О. В. Матысик, В. Ф. Савчук // Веснік Гродзенскага ўніверсітэта. Серыя 2 : Матэматыка. Фізіка. Інфарматыка, вылічальная тэхніка і кіраванне. – 2013. – № 1 (148). – С. 44–53.

28–А. Матысик, О. В. Регуляризация некорректных задач с приближенным оператором при помощи неявного метода с априорным выбором числа итераций / О. В. Матысик // Веснік Гродзенскага ўніверсітэта. Серыя 2 : Матэматыка. Фізіка. Інфарматыка, вылічальная тэхніка і кіраванне. – 2013. – № 2 (151). – С. 25–29.

29–А. Матысик, О. В. Апостериорный выбор числа итераций в неявном методе решения линейных уравнений с приближенно заданным оператором / О. В. Матысик // Веснік Гродзенскага ўніверсітэта. Серыя 2 : Матэматыка. Фізіка. Інфарматыка, вылічальная тэхніка і кіраванне. – 2013. – № 3 (159). – С. 12–22.

30–А. Matysik, O. V. Implicit iteration method of solving linear equations with approximating right-hand member and approximately specified operator / O. V. Matysik // Journal of Computational and Applied Mathematics. – 2014. – № 2 (116). – P. 89–95.

31–А. Забрейко, П. П. Теорема М. А. Красносельского и некорректные линейные задачи с самосопряженным оператором / П. П. Забрейко, О. В. Матысик // Доклады НАН Беларуси. – 2014. – Т. 58, № 5. – С. 12–17.

32–А. Забрейко, П. П. Теорема Красносельского и итерационные процедуры решения некорректных задач с самосопряженными операторами / П. П. Забрейко, О. В. Матысик // Доклады НАН Беларуси. – 2014. – Т. 58, № 6. – С. 9–14.

33–А. Матысик, О. В. Случай несамосопряженной задачи с апостериорным выбором параметра регуляризации для неявного метода итераций решения линейных уравнений с приближенным оператором / О. В. Матысик // Труды Института математики НАН Беларуси. – 2014. – Т. 22, № 1. – С. 115–121.

34–А. Матысик, О. В. Регуляризация некорректных задач с неограниченным оператором при помощи неявной итерационной процедуры / О. В. Матысик // Веснік Гродзенскага ўніверсітэта. Серыя 2 : Матэматыка. Фізіка. Інфарматыка, вылічальная тэхніка і кіраванне. – 2014. – № 2 (173). – С. 58–63.

35–А. Matysik, O. V. M. A. Krasnosel’skii theorem and iterative methods for solving ill-posed linear problems with a self-adjoint operator / O. V. Matysik, P. P. Zabreiko // Journal Computational Methods in Applied Mathematics (De Gruyter). – 2015. – Vol. 15, № 3. – P. 373–389.

36–А. Матысик, О. В. Неявный метод решения самосопряженной некорректной задачи с приближенным оператором и апостериорным выбором параметра регуляризации / О. В. Матысик // Весці НАН Беларусі. Серыя фізіка-матэматычных навук. – 2015. – № 4. – С. 18–24.

37–А. Матысик, О. В. Неявный итерационный метод решения несамосопряженной некорректной задачи с приближенным оператором и приближенно заданной правой частью / О. В. Матысик // Веснік Гродзенскага ўніверсітэта. Серыя 2 : Матэматыка. Фізіка. Інфарматыка, вылічальная тэхніка і кіраванне. – 2015. – № 3 (199). – С. 76–82.

38–А. Matysik, O. V. Regularization of ill-posed problems in Hilbert space by means of the implicit iteration process / O. V. Matysik // Journal of Computational and Applied Mathematics. – 2015. – № 2 (119). – P. 33–41.

39–А. Матысик, О. В. Априорный выбор параметра регуляризации в методе простых итераций с попеременно чередующимся шагом решения линейных некорректных уравнений / О. В. Матысик // Известия Смоленского государственного университета. – 2015. – № 2/1. – С. 211–220.

40–А. Матысик, О. В. Итерационная регуляризация некорректных уравнений первого рода / О. В. Матысик // Труды Нижегородского государственного технического университета имени Р. Е. Алексеева. – 2015. – № 4 (111). – С. 52–61.

41–А. Matysik, O.V. Simple-iteration method with alternating step size for solving operator equations in Hilbert space / O. V. Matysik, M. M. Van Hulle // Journal of Computational & Applied Mathematics (Elsevier). – 2016. – № 300. – P. 290–299.

42–А. Матысик, О. В. Метод итераций неявного типа решения операторных уравнений в гильбертовом пространстве / О. В. Матысик // Труды Нижегородского государственного технического университета имени Р. Е. Алексеева. – 2016. – № 2 (113). – С. 47–54.

43–А. Матысик, О. В. Неявный метод решения операторных уравнений с приближенным оператором в случае априорного выбора параметра регуляризации / О. В. Матысик, В. Ф. Савчук // Веснік Гродзенскага ўніверсітэта. Серыя 2 : Матэматыка. Фізіка. Інфарматыка, вылічальная тэхніка і кіраванне. – 2018. – Т. 8, № 3. – С. 39–45.

44–А. Матысик, О. В. Метод итерации решения некорректных уравнений с приближенным оператором в случае априорного выбора параметра регуляризации / О. В. Матысик, В. Ф. Савчук // Весці НАН Беларусі. Серыя фізіка-матэматычных навук. – 2018. – Т. 54, № 4. – С. 408–416.

45–А. Матысик, О. В. Метод неявного типа решения операторных уравнений с приближенным оператором в случае апостериорного выбора параметра регуляризации / О. В. Матысик, В. Ф. Савчук // Веснік Гродзенскага ўніверсітэта. Серыя 2 : Матэматыка. Фізіка. Інфарматыка, вылічальная тэхніка і кіраванне. – 2019. – Т. 9, № 3. – С. 55–66.

46–А. Matysik, O.V. Alternating step size method for solving ill-posed linear operator equations in energetic space / O.V. Matysik, M. M. Van Hulle // Journal of Computational & Applied Mathematics (Elsevier). – 2022. – № 416. – P. 1–12.

Статьи в научных журналах и в сборниках научных трудов

47–А. Матысик, О. В. Априорный выбор числа итераций в неявном итерационном методе решения линейных операторных уравнений / О. В. Матысик, В. Ф. Савчук // Вучоныя запіскі Брэсцкага дзяржаўнага ўніверсітэта імя А. С. Пушкіна : зб. навук. пр. / Брэсц. дзярж. ун-т. – Брест, 2007. – Т. 3, ч. 2. – С. 16–23.

48–А. Матысик, О. В. Об одной итерационной процедуре для решения некорректных задач / О. В. Матысик, В. Ф. Савчук // Вучоныя запіскі Брэсцкага дзяржаўнага ўніверсітэта імя А. С. Пушкіна : зб. навук. пр. / Брэсц. дзярж. ун-т. – Брест, 2008. – Т. 4, ч. 2. – С. 5–12.

49–А. Савчук, В. Ф. Об одном методе итераций с переменным шагом решения некорректных задач в гильбертовом пространстве / В. Ф. Савчук, О. В. Матысик // Вучоныя запіскі Брэсцкага дзяржаўнага ўніверсітэта імя А. С. Пушкіна : зб. навук. пр. / Брэсц. дзярж. ун-т.– Брест, 2009. – Вып. 5, ч. 2. – С. 17–28.

50–А. Савчук, В. Ф. К вопросу о регуляризации операторных уравнений при помощи неявного итерационного метода / В. Ф. Савчук, О. В. Матысик // Вучоныя запіскі Брэсцкага дзяржаўнага ўніверсітэта імя А. С. Пушкіна : зб. навук. пр. / Брэсц. дзярж. ун-т. – Брест, 2010. – Вып. 6, ч. 2. – С. 17–23.

51–А. Матысик, О. В. Априорный выбор числа итераций в итерационной процедуре неявного типа решения линейных уравнений / О. В. Матысик, Н. А. Дерачиц // Вестник Брестского технического университета. Серия : Физика, математика, информатика. – 2010. – № 5 (65). – С. 68–71.

52–А. Матысик, О. В. О приближенном решении операторных уравнений I рода / О. В. Матысик, В. Ф. Савчук // Веснік Брэсцкага ўніверсітэта. Серыя 4 : Фізіка. Матэматыка. – 2011. – № 1. – С. 93–101.

53–А. Матысик, О. В. Неявная итерационная процедура и ее применение для решения модельной некорректной задачи в гильбертовом пространстве / О. В. Матысик, В. И. Басин // Веснік Брэсцкага ўніверсітэта. Серыя 4 : Фізіка. Матэматыка. – 2011. – № 2. – С. 83–92.

54–А. Савчук, В. Ф. Об одном итерационном методе решения некорректных задач с самосопряженными операторами / В. Ф. Савчук, О. В. Матысик // Веснік Брэсцкага ўніверсітэта. Серыя 4 : Фізіка. Матэматыка. – 2011. – № 2. – С. 93–98.

55–А. Матысик, О. В. Сходимость неявной итерационной процедуры решения некорректных задач в гильбертовом пространстве / О. В. Матысик, Н. А. Дерачиц // Вестник Брестского технического университета. Серия : Физика, математика, информатика. – 2011. – № 5 (71). – С. 73–76.

56–А. Матысик, О. В. Апостериорный выбор числа итераций в неявном методе решения некорректных задач / О. В. Матысик, Н. А. Дерачиц // Вучоныя запіскі Брэсцкага дзяржаўнага ўніверсітэта імя А. С. Пушкіна : зб. навук. пр. / Брэсц. дзярж. ун-т. – Брест, 2011. – Вып. 7, ч. 2. – С. 7–14.

57–А. Матысик, О. В. Правило останова в итерационных процедурах решения операторных уравнений / О. В. Матысик, В. Ф. Савчук // Веснік Брэсцкага ўніверсітэта. Серыя 4 : Фізіка. Матэматыка. – 2012. – № 1. – С. 89–94.

58–А. Матысик, О. В. О регуляризации некорректных задач с приближенным оператором явным методом итераций / О. В. Матысик, В. Ф. Савчук // Вучоныя запіскі Брэсцкага дзяржаўнага ўніверсітэта імя А. С. Пушкіна : зб. навук. пр. / Брэсц. дзярж. ун-т. – Брест, 2012. – Вып. 8, ч. 2. – С. 7–13.

59–А. Матысик, О. В. О решении методом последовательных приближений линейных уравнений с несамосопряженными операторами / О. В. Матысик, В. Ф. Савчук // Веснік Брэсцкага ўніверсітэта. Серыя 4 : Фізіка. Матэматыка. – 2012. – № 2. – С. 96–103.

60–А. Матысик, О. В. Метод итераций неявного типа для решения линейных уравнений с неограниченным оператором / О. В. Матысик // Веснік Брэсцкага ўніверсітэта. Серыя 4 : Фізіка. Матэматыка. – 2013. – № 1. – С. 77–83.

61–А. Матысик, О. В. О приближенном решении линейных уравнений с неограниченным оператором в гильбертовом пространстве / О. В. Матысик // Веснік Брэсцкага ўніверсітэта. Серыя 4 : Фізіка. Матэматыка. – 2013. – № 2. – С. 87–92.

62–А. Матысик, О. В. Об апостериорном выборе параметра регуляризации в явном методе итераций решения некорректных задач с приближенным оператором / О. В. Матысик, В. Ф. Савчук // Вучоныя запіскі Брэсцкага дзяржаўнага ўніверсітэта імя А. С. Пушкіна : зб. навук. пр. / Брэсц. дзярж. ун-т. – Брест, 2013. – Вып. 9, ч. 2. – С. 7–15.

63–А. Матысик, О.В. Об одном регуляризующем алгоритме некорректно поставленных задач с ограниченным оператором / О.В. Матысик, В.С. Зайко // Веснік Брэсцкага ўніверсітэта. Серыя 4 : Фізіка. Матэматыка. – 2014. – № 1. – С. 79–91.

64–А. Матысик, О. В. Сходимость в гильбертовом пространстве метода итераций неявного типа решения линейных операторных уравнений с апостериорным выбором параметра регуляризации / О. В. Матысик // Веснік Брэсцкага ўніверсітэта. Серыя 4 : Фізіка. Матэматыка. – 2014. – № 2. – С. 67–74.

65–А. Матысик, О. В. Регуляризация некорректных задач с приближенным оператором явным методом при априорном выборе числа итераций / О. В. Матысик, В. Ф. Савчук // Вучоныя запіскі Брэсцкага дзяржаўнага ўніверсітэта імя А. С. Пушкіна : зб. навук. пр. / Брэсц. дзярж. ун-т. – Брест, 2014. – Вып. 10, ч. 2. – С. 7–13.

66–А. Савчук, В. Ф. Апостериорный выбор момента останова в неявном методе итераций решения некорректных задач с несамосопряженным оператором / В. Ф. Савчук, О. В. Матысик // Веснік Брэсцкага ўніверсітэта. Серыя 4 : Фізіка. Матэматыка. – 2015. – № 1. – С. 98–105.

67–А. Матысик, О. В. Останов по поправкам в неявной итерационной процедуре решения некорректно поставленных задач с несамосопряженным оператором / О. В. Матысик // Новая наука: Стратегии и вектор развития : Междунар. науч. период. изд. по итогам Междунар. науч.-практ. конф., 19 апр. 2016 г., г. Ижевск, в 3 ч. – Стерлитамак : АМИ, 2016. – Ч. 2. – С. 42–45.

68–А. Матысик, О. В. Неявный итерационный процесс решения некорректных задач с остановом по соседним приближениям / О. В. Матысик // Podstawy instytucjonalne przedsiębiorczości transgranicznej : zbiór artyk. nauk. / Państwowa Szkoła Wyższa im. Papieża Jana Pawła II w Białej Podlaskiej. – Biała Podlaska, 2015. – Т. 2. – С. 240–247.

69–А. Матысик, О. В. Сходимость в гильбертовом пространтве неявного итерационного процесса решения некорректных уравнений первого рода / О. В. Матысик, С. В. Сидак // Веснік Брэсцкага ўніверсітэта. Серыя 4 : Фізіка. Матэматыка. – 2016. – № 2. – С. 71–76.

70–А. Матысик, О. В. Регуляризация некорректных задач I рода в гильбертовом пространстве / О. В. Матысик, С. В. Сидак // Вестник

Брестского технического университета. Серия : Физика, математика, информатика. – 2016. – № 5. – С. 13–21.

71–А. Матысик, О. В. Из истории регуляризации некорректных уравнений первого рода / О. В. Матысик, А. М. Иванова // Инновационная наука : в 4 ч. – 2017. – Ч. 4. – С. 20–22.

72–А. Матысик, О. В. Из истории развития теории итерационных методов решения некорректных уравнений первого рода / О. В. Матысик, А. М. Иванова // Инновационное развитие. – 2017. – № 3. –С. 4–6.

73–А. Матысик, О. В. Сходимость метода итераций к нормальному решению некорректного уравнения первого рода / О. В. Матысик, С. В. Сидак // Инновационное развитие. – 2017. – № 2. – С. 10–12.

74–А. Матысик, О. В. Регуляризация некорректных задач в энергетической норме гильбертова пространства / О. В. Матысик, С. В. Сидак // Инновационное развитие. – 2017. – № 2. – С. 12–14.

75–А. Матысик, О. В. Апостериорный выбор параметра регуляризации в явной двухшаговой итерационной схеме решения некорректных задач / О. В. Матысик, Е. И. Минзер // Инновационная наука. – 2017. – № 3. – Ч. 2. – С. 23–25.

76–А. Матысик, О. В. Останов по поправкам в явном методе итераций решения некорректных уравнений первого рода / О. В. Матысик, А. И. Мялик // Инновационная наука. – 2017. – № 3. – Ч. 2. – С. 21–23.

77–А. Худяков, А. П. Матричные интерполяционные многочлены в случае прямоугольных и сингулярных матриц / А. П. Худяков, О. В. Матысик // Ученые записки Брестского государственного университета. – 2017. – Ч. 2. – Вып. 1. – С. 9–17.

78–А. Худяков, А. П. Формулы обобщенного тригонометрического интерполирования Эрмита – Биркгофа для функций матричного аргумента / А. П. Худяков, О. В. Матысик // Веснік Брэсцкага ўніверсітэта. Серыя 4 : Фізіка. Матэматыка. – 2017. – № 1. – С. 86–95.

79–А. Матысик, О. В. Обобщенное тригонометрическое интерполирование Эрмитова типа для периодических функций скалярного аргумента / О. В. Матысик, А. П. Худяков // Ученые записки Брестского государственного университета. – 2018. – Ч. 2. – Вып. 1. – С. 9–17.

80–А. Матысик, О. В. Правило останова в процессе вычислений для метода итераций неявного типа решения линейных операторных уравнений / О. В. Матысик, М. Н. Жуковец // Веснік Брэсцкага ўніверсітэта. Серыя 4 : Фізіка. Матэматыка. – 2018. – № 1. – С. 82–87.

81–А. Матысик, О. В. Итерационная регуляризация некорректных уравнений явным двухшаговым методом с правилом останова по малости невязки / О. В. Матысик, Е. И. Минзер // Веснік Брэсцкага ўніверсітэта. Серыя 4 : Фізіка. Матэматыка. – 2018. – № 2. – С. 86–95.

82–А. Матысик, О. В. Неявный итерационный процесс приближенного решения операторных уравнений первого рода / О. В. Матысик // Ученые записки Брестского государственного университета. – 2019. – Ч. 2. – Вып. 1. – С. 9–17.

83–А. Матысик, О. В. Априорный выбор параметра регуляризации в неявном итерационном методе решения линейных некорректных уравнений / О. В. Матысик // Веснiк Брэсцкага ýнiверсiтэта. Серыя 4 : Фiзiка. Матэматыка. – 2019. – № 1. – С. 67–74.

84–А. Матысик, О. В. Итерационная регуляризация линейных некорректных уравнений первого рода методом неявного типа / О. В. Матысик // Веснiк Брэсцкага ýнiверсiтэта. Серыя 4 : Фiзiка. Матэматыка. – 2019. – № 2. – С. 67–74.

85–А. Матысик, О. В. К вопросу о регуляризации некорректных уравнений первого рода /О. В. Матысик // Ученые записки Брестского государственного университета. – 2020. – Ч. 2. – Вып. 1. – С. 10–33.

86–А. Матысик, О. В. Останов по малости невязки в методе итераций неявного типа для решения линейных операторных уравнений первого рода / О. В. Матысик // Веснiк Брэсцкага ýнiверсiтэта. Серыя 4 : Фiзiка. Матэматыка. – 2020. – № 1. – С. 67–74.

87–А. Матысик, О. В. Останов по поправкам в неявном методе итераций решения линейных операторных уравнений первого рода / О. В. Матысик, Д. В. Гавва, Е. А. Сирисько // Веснiк Брэсцкага ýнiверсiтэта. Серыя 4 : Фiзiка. Матэматыка. – 2020. – № 2. – С. 77–84.

88–А. Матысик, О. В. Метод итераций приближенного решения линейных уравнений с неограниченным оператором в гильбертовом пространстве / О. В. Матысик // Веснiк Брэсцкага ýнiверсiтэта. Серыя 4 : Фiзiка. Матэматыка. – 2021. – № 1. – С. 81–87.

89–А. Матысик, О. В. Сходимость в гильбертовом пространстве неявной итерационной процедуры решения некорректных уравнений с апостериорным выбором параметра регуляризации / О. В. Матысик // Веснiк Брэсцкага ýнiверсiтэта. Серыя 4 : Фiзiка. Матэматыка. – 2022. – № 1. – С. 82–90.

90–А. Матысик, О. В. Неявная итерационная процедура приближенного решения некорректных уравнений первого рода / О. В. Матысик // Веснiк Брэсцкага ýнiверсiтэта. Серыя 4 : Фiзiка. Матэматыка. – 2022. – № 2. – С. 79–89.

91–А. Матысик, О. В. Апостериорный выбор параметра регуляризации в неявной схеме итераций решения некорректных задач с несамосопряженным оператором / О. В. Матысик // Веснiк Брэсцкага ýнiверсiтэта. Серыя 4 : Фiзiка. Матэматыка. – 2023. – № 1. – С. 72–80.

92–А. Матысик, О. В. Априорный выбор параметра регуляризации в явной схеме итераций решения некорректных задач с линейным непрерывным оператором / О. В. Матысик // Веснік Брэсцкага ўніверсітэта. Серыя 4 : Фізіка. Матэматыка. – 2023. – № 2. – С. 82–94.

93–А. Матысик, О. В. Регуляризующий алгоритм для некорректных уравнений первого рода с самосопряженным ограниченным оператором / О. В. Матысик, М. С. Пухнаревич, П. О. Олихвер // Веснік Брэсцкага ўніверсітэта. Серыя 4 : Фізіка. Матэматыка. – 2024. – № 1. – С. 72–91.

94–А. Матысик, О. В. A priori choice of the regularization parameter in an iterative procedure of an explicit type solution of linear ill-posed equations / О. В. Матысик // Веснік Брэсцкага ўніверсітэта. Серыя 4 : Фізіка. Матэматыка. – 2024. – № 2. – С. 69–80.

95– А. Матысик, О. В. Трехслойная итерационная процедура решения некорректных уравнений первого рода в гильбертовом пространстве / О. В. Матысик, И. В. Ковальчук // Веснік Брэсцкага ўніверсітэта. Серыя 4 : Фізіка. Матэматыка. – 2025. – № 1. – С. 56–72.

Статьи в материалах научных конференций

96–А. Матысик, О. В. Останов по невязке в неявной итерационной процедуре решения некорректных задач / О. В. Матысик, Н. А. Дерачиц // Инновационные технологии обучения физико-математическим дисциплинам : материалы III Междунар. науч.-практ. интернет-конф., г. Мозырь, 5–9 апр. 2011 г. / Мозыр. гос. пед. ун-т им. И. П. Шамякина. – Мозырь, 2011. – С. 206–208.

97–А. Матысик, О. В. Регуляризация некорректных задач в банаховом пространстве при помощи итерационного процесса / О. В. Матысик // Молода наука Волині: пріоритети та перспективи досліджень : матеріали VII Міжнар. наук.-практ. конф., г. Луцьк (Україна), 14–15 мая 2013 г. / Східноєвроп. нац. ун-т ім. Л. Українки. – Луцьк, 2013. – Т. 1. – С. 161–162.

98–А. Матысик, О. В. Итеративная регуляризация некорректных задач в гильбертовом пространстве / О. В. Матысик // Aktualne problemy nowoczesnych nauk – 2013 : materiały IX Międzynar. nauk.-prakt. konf., m. Przemyśl (Polska), 7–15 czerwca 2013 r. // Nauka i studia. – Przemyśl, 2013. – Vol. 29. – S. 14–17.

99–А. Матысик, О. В. О регуляризации некорректных задач с несамосопряженным приближенно заданным оператором / О. В. Матысик // Научният потенциал на света – 2013 : материали за IX Междунар. науч.-практ. конф., г. София (България), 17–25 септемеври 2013 г. / Бял ГРАД-БГ. – София, 2013. – Т. 18. – С. 45–48.

100–А. Матысик, О. В. Регуляризация некорректных задач с приближенным оператором в случае априорного выбора числа итераций /

О. В. Матысик // Наука и образование: проблемы и перспективы : сб. ст. Междунар. науч.-практ. конф., г. Уфа (РФ), 13 марта 2014 г. / Башкир. гос. ун-т. – Уфа, 2014. – Ч. 2. – С. 230–232.

101–А. Матысик, О. В. Сходимость неявного итерационного метода решения некорректных задач в энергетической норме гильбертова пространства / О. В. Матысик // Диференціальні рівняння, обчислювальна математика, теорія функцій та математичні методи механіки : матеріали Міжнар. матем. конф., г. Київ (Україна), 23–24 квітня 2014 р. / Київ. нац. ун-т ім. Т. Шевченка. – Київ, 2014. – С. 91.

102–А. Матысик, О. В. Регуляризация некорректных задач с приближенным оператором при помощи неявного итерационного процесса / О. В. Матысик // Moderni vymoženosti vědy : materiály X Mezinár. vědecko-praktická konf., m. Praha (Česká), 27 ledna–5 unora 2014 r. / Education and Science. – Praha, 2014. – Vol. 34. – P. 50–52.

103–А. Матысик, О. В. Один общий прием построения итерационных процедур решения некорректных задач с самосопряженными операторами в гильбертовом пространстве / О. В. Матысик, П. П. Забрейко // Вычислительные методы, модели и образовательные технологии : материалы Междунар. науч.-практ. конф., г. Брест, 15–16 окт. 2014 г. / Брест. гос. ун-т ; под общ. ред. О. В. Матысика. – Брест, 2014. – С. 6–10.

104–А. Забрейко, П. П. Решение некорректных линейных уравнений с самосопряженным оператором в гильбертовом пространстве / П. П. Забрейко, О. В. Матысик // Вычислительные методы, модели и образовательные технологии : материалы Междунар. науч.-практ. конф., г. Брест, 15–16 окт. 2014 г. / Брест. гос. ун-т ; под общ. ред. О. В. Матысика. – Брест, 2014. – С. 21–22.

105–А. Зайко, В. С. Итерационный процесс явного типа решения некорректных задач с апостериорным выбором параметра регуляризации / В. С. Зайко, О. В. Матысик // Инновационные технологии обучения физико-математическим дисциплинам : материалы VI Междунар. науч.-практ. Интернет-конф., г. Мозырь, 25–28 марта 2014 г. / Мозыр. гос. пед. ун-т. – Мозырь, 2014. – С. 177–178.

106–А. Матысик, О. В. Сходимость итерационной процедуры неявного типа в случае неединственного решения некорректных задач к нормальному решению / О. В. Матысик, Л. В. Викторович // Инновационные технологии обучения физико-математическим дисциплинам : материалы VI Междунар. науч.-практ. Интернет-конф., г. Мозырь, 25–28 марта 2014 г. / Мозыр. гос. пед. ун-т. – Мозырь, 2014. – С. 203–205.

107–А. Викторович, Л. В. Регуляризация некорректных задач с приближенным оператором / Л. В. Викторович, О. В. Матысик // Научный потенциал молодежи – будущему Беларуси : материалы VII Междунар. молодеж. науч.-практ. конф., г. Пинск, 4 апр. 2014 г. / Полес. гос. ун-т. – Пинск, 2014. – С. 223–225.

108–А. Матысик, О. В. Сходимость метода неявного типа с апостериорным выбором числа итераций к решению операторного уравнения первого рода / О. В. Матысик, Д. Ю. Костюк // Вычислительные методы, модели и образовательные технологии : материалы Междунар. науч.-практ. конф., г. Брест, 15–16 окт. 2014 г. / Брест. гос. ун-т ; под общ. ред. О. В. Матысика. – Брест, 2014. – С. 27–28.

109–А. Скрипченко, Т. В. Априорные оценки погрешности в двухшаговом методе итераций явного типа для решения некорректных задач в энергетической норме гильбертова пространства / Т. В. Скрипченко, О. В. Матысик // Вычислительные методы, модели и образовательные технологии : материалы Междунар. науч.-практ. конф., г. Брест, 15–16 окт. 2014 г. / Брест. гос. ун-т ; под общ. ред. О. В. Матысика. – Брест, 2014. – С. 33–35.

110–А. Матысик, О. В. Неявный метод итераций решения некорректных задач с несамосопряженным приближенным оператором в случае апостериорного выбора параметра регуляризации // О. В. Матысик // Science in the modern information society : материалы V Междунар. науч.-практ. конф., s. North Charleston (USA), 26–27 jan. 2015 г. / Create Space. – North Charleston, 2015. – Т. 1. – С. 182–184.

111–А. Матысик, О. В. Сходимость итерационной процедуры неявного типа решения операторных уравнений в энергетической норме гильбертова пространства / О. В. Матысик, Д. Ю. Костюк // Инновационные технологии обучения физико-математическим дисциплинам : материалы VII Междунар. науч.-практ. интернет-конф., г. Мозырь, 24–27 марта 2015 г. / Мозыр. гос. пед. ун-т. – Мозырь, 2015. – С. 209–210.

112–А. Панцевич, Д. Г. Явный итерационный процесс решения некорректно поставленных задач с правилом останова по поправке / О. В. Матысик // Инновационные технологии обучения физико-математическим дисциплинам : материалы VII Междунар. науч.-практ. интернет-конф., Мозырь, 24-27 марта 2015 г. / Мозыр. гос. пед. ун-т. – Мозырь, 2015. – С. 220–221.

113–А. Прокопук, А. Н. Неявная итерационная процедура решения некорректных задач с самосопряженным оператором / А. Н. Прокопук, О. В. Матысик // Научный потенциал молодежи – будущему Беларуси : материалы IX Междунар. молодеж. науч.-практ. конф., г. Пинск, 3 апр. 2015 г. / Полес. гос. ун-т. – Пинск, 2015. – С. 286–287.

114–А. Матысик, О. В. Сходимость метода явного типа с апостериорным выбором числа итераций к решению некорректного уравнения I рода / О. В. Матысик, Д. Г. Куприянович // Вычислительные методы, модели и образовательные технологии : материалы Междунар. науч.-практ. конф., г. Брест, 22–23 окт. 2015 г. / Брест. гос. ун-т ; под общ. ред. О. В. Матысика. – Брест, 2015. – С. 20–21.

115–А. Матысик, О. В. Априорный выбор параметра регуляризации в явном итерационном методе с переменным шагом решения некорректных задач / О. В. Матысик, Н. И. Ташкинов // Вычислительные методы, модели и образовательные технологии : материалы Междунар. науч.-практ. конф., г. Брест, 22–23 окт. 2015 г. / Брест. гос. ун-т ; под общ. ред. О. В. Матысика. – Брест, 2015. – С. 21–22.

116–А. Матысик, О. В. Останов по поправкам в неявном методе итераций решения операторных уравнений / О. В. Матысик, Д. И. Януть // Вычислительные методы, модели и образовательные технологии : материалы Междунар. науч.-практ. конф., Брест, 22-23 окт. 2015 г. / Брест. гос. ун-т; под общ. ред. О.В. Матысика. – Брест, 2015. – С. 22–23.

117–А. Прокопук, А. Н. Априорные оценки погрешности для неявного метода итераций решения некорректного уравнения в случае приближенного оператора / А. Н. Прокопук, О. В. Матысик // Вычислительные методы, модели и образовательные технологии : материалы Междунар. науч.-практ. конф., г. Брест, 22–23 окт. 2015 г. / Брест. гос. ун-т ; под общ. ред. О. В. Матысика. – Брест, 2015. – С. 23–25.

118–А. Матысик, О. В. Решение некорректно поставленных задач с несамосопряженным оператором в случае апостериорного выбора параметра регуляризации / О. В. Матысик // Наука и современность : материалы Междунар. науч.-практ. конф., г. Уфа (РФ), 4 апр. 2015 г. / Башкир. гос. ун-т. – Уфа, 2015. – Ч. 2. – С. 8–9.

119–А. Матысик, О. В. Регуляризация некорректных задач с помощью итерационного процесса явного типа / О. В. Матысик // Связь теории и практики научных исследований : сб. ст. Междунар. науч.-практ. конф., г. Саранск (РФ), 3 марта 2016 г. : в 2 ч. / Мордов. гос. ун-т им. Н. П. Огарева. – Уфа, 2016. – Ч. 1. – С. 3–4.

120–А. Матысик О. В. Априорный выбор параметра регуляризации в явном методе итераций решения некорректных задач / О. В. Матысик // XII Белорусская математическая конференция : материалы Междунар. науч. конф., г. Минск, 5–10 сент. 2016 г. : в 5 ч. / Ред. С. Г. Красовский. – Минск, 2016. – Ч. 2. – С. 15.

121–А. Матысик, О.В. Сходимость двухшагового метода явного типа с апостериорным выбором числа итераций к решению некорректного уравнения I рода / О. В. Матысик, Е. И. Минзер // Вычислительные методы, модели и образовательные технологии : материалы Междунар. науч.-практ. конф., г. Брест, 21 окт. 2016 г. / Брест. гос. ун-т ; под общ. ред. О. В. Матысика. – Брест, 2016. – С. 39.

122–А. Матысик, О.В. Апостериорный выбор параметра регуляризации в явном итерационном методе с переменным шагом решения некорректных задач / О. В. Матысик, Н. Н. Ташкинов // Вычислительные методы, модели и образовательные технологии : материалы Междунар. науч.-практ. конф., г. Брест, 21 окт. 2015 г. / Брест. гос. ун-т ; под общ. ред. О.В. Матысика. – Брест, 2016. – С. 39.

123–А. Matysik, O. V. Iteration method of explicit type for solving incorrect equations with approximately specified operator / O. V. Matysik // Fundamental and applied sciences today XI : Proceedings of the conference, s. North Charleston, 10–11.04.2017 г. – North Charleston : Create Space, 2017. – Vol. 1. – P. 106–109.

124–А. Матысик, О. В. Метод простой итерации с попеременно чередующимся шагом решения некорректных задач с приближенным оператором / О. В. Матысик, В. Ф. Савчук // Вычислительные методы, модели и образовательные технологии : материалы Междунар. науч.-практ. конф., г. Брест, 18 окт. 2018 г. / Брест. гос. ун-т ; под общ. ред. О. В. Матысика. – Брест, 2018. – С. 22–23.

125–А. Сидак, С. В. Сходимость в гильбертовом пространстве итерационной процедуры неявного типа решения операторных некорректных уравнений первого рода / С. В. Сидак, О. В. Матысик // Инновационные технологии обучения физико-математическим и профессионально-техническим дисциплинам : материалы IX Междунар. науч.-практ. интернет-конф., г. Мозырь, 21–24 марта 2017 г. / Мозыр. гос. пед. ун-т, – Мозырь, 2017. – С.183–185.

126–А. Матысик, О. В. О некорректной задаче спектроскопии / О. В. Матысик, М. Н. Сахвон // Вычислительные методы, модели и образовательные технологии : материалы Междунар. науч.-практ. конф., г. Брест, 19 окт. 2017 г. / Брест. гос. ун-т ; под общ. ред. О. В. Матысика. – Брест, 2017. – С. 36.

127–А. Савчук, В. Ф. Неявный метод решения линейных уравнений с приближенным оператором в случае априорного выбора числа итераций оператором / В. Ф. Савчук, О. В. Матысик // Вычислительные методы, модели и образовательные технологии : материалы Междунар. науч.-практ. конф., г. Брест, 19 окт. 2018 г. / Брест. гос. ун-т ; под общ. ред. О. В. Матысика. – Брест, 2018. – С. 50–51.

128–А. Жуковец, М. Н. Правило останова по невязке в итерационной процедуре неявного типа решения операторных уравнений / М. Н. Жуковец, О. В. Матысик // Инновационные технологии обучения физико-матема-тическим и профессионально-техническим дисциплинам : материалы X Междунар. науч.-практ. интернет-конф., г. Мозырь, 27–30 марта 2018 г. / Мозыр. гос. пед. ун-т. – Мозырь, 2018. – С.191–192.

129–А. Матысик, О. В. Сходимость в гильбертовом пространстве явного итерационного метода решения некорректных задач / О. В. Матысик, И. О. Тарасевич // Вычислительные методы, модели и образовательные технологии : материалы Междунар. науч.-практ. конф., г. Брест, 19 окт. 2018 г. / Брест. гос. ун-т; под общ. ред. О. В. Матысика. – Брест, 2018. – С. 23–24.

130–А. Устинович, А. С. Регуляризация некорректных уравнений первого рода при помощи явного метода итераций / А. С. Устинович, О. В. Матысик // Формирование готовности будушего учителя математики к работе с одаренными учащимися : материалы Междунар. науч.-практ. конф., г. Брест, 10–11 апр. 2018 г. / Брест. гос. ун-т. – Брест, 2018. – С. 254–255.

131–А. Матысик, О. В. Об одном регуляризующем алгоритме для некорректного уравнения Фредгольма первого рода / О. В. Матысик // Перспективные направления развития региональной экономики: материалы IX Респ. науч.-практ. конф., г. Брест, 17–18 мая 2019г. / Брест. гос. ун-т.– Брест, 2019. – С. 265–269.

132–А. Матысик, О. В. Решение некорректных уравнений с приближенным оператором в случае апостериорного выбора параметра регуляризации / О. В. Матысик // Формирование готовности будущего учителя математики к работе с одаренными учащимися : материалы Междунар. науч.-практ. конф., г. Брест, 10–11 апр. 2020 г. / Брест. гос. ун-т ; под общ. ред. Е. П. Гринько. – Брест, 2020. – С. 171–172.

133–А. Матысик, О. В. Явный метод итераций решения некорректных уравнений в гильбертовом пространстве / О. В. Матысик, Е. А. Швед // Вычислительные методы, модели и образовательные технологии : материалы Респ. науч.-практ. конф., г. Брест, 18 окт. 2021 г. / Брест. гос. ун-т. – Брест, 2021. – С. 15–16.

134–А. Матысик, О. В. Неявный метод итераций решения некорректных задач с несамосопряженным приближенным оператором в случае апостериорного выбора параметра регуляризации / О. В. Матысик // Математическое моделирование и новые образовательные технологии в математике : материалы Респ. науч.-практ. конф., Брест, 28–29 апр. 2022 г. / Брест. гос. ун-т ; под общ. ред. А. И. Басика. – Брест, 2022. – С.160–163.

135–А. Матысик, О. В. Получение априорных оценок погрешности для неявной итерационной схемы решения некорректных задач / О. В. Матысик, Д. А. Щупленков // Вычислительные методы, модели и образовательные технологии : материалы Респ. науч.-практ. конф., г. Брест, 20 окт. 2023 г. / Брест. гос. ун-т. – Брест, 2023. – С. 24–25.

136–А. Матысик, О. В. Метод итераций приближенного решения некорректных уравнений с неограниченным оператором в гильбертовом пространстве / О. В. Матысик // Мухтаровские чтения : актуальные проблемы математики, методики ее преподавания и смежные вопросы : материалы Междунар. науч.-практ. конф., г. Махачкала (РФ), 23–24 апр. 2024 г. / Дагестан. гос. техн. ун-т. – Махачкала, 2024. – С. 42–44.

137–А. Матысик, О. В. Регуляризация некорректных уравнений первого рода в полунорме гильбертова пространства / О. В. Матысик // XIV Белорусская математическая конференция : материалы Междунар. науч. конф., посвящ. 65-летию Ин-та математики НАН Беларуси, г. Минск, 28 окт. – 1 нояб. 2024 г. : в 3 ч. – Ч. 3. – Минск, 2024. – С. 98–99.

138–А. Матысик, О. В. Трехслойный итерационный процесс решения некорректных уравнений первого рода / О. В. Матысик, И. В. Ковальчук // Перспективные направления развития региональной экономики : материалы XIV Респ. науч.-практ. конф., г. Брест, 21 марта 2025 г. / Брест. гос. ун-т. – Брест, 2025. – С. 89–91.

139–А. Matysik, O. V. A priori error estimates for a three-layer iterative solution procedure incorrect equations in the seminorm Hilbert space / O. V. Matysik, I. V. Kovalchuk // Системы компьютерной математики и их приложения : труды XXVI Междунар. науч. конф., г. Смоленск (РФ), 23–24 мая 2025 г. / Смолен. гос. ун-т. – Смоленск, 2025. – Вып. 26. – С. 244–249.

Тезисы докладов

140–А. Матысик, О. В. Итерационный метод неявного типа решения некорректных задач с неограниченным оператором в гильбертовом пространстве / О. В. Матысик // XV Международная научная конференция по дифференциальным уравнениям (Еругинские чтения – 2013) : тез. докл. Междунар. науч. конф., г. Гродно, 13–16 мая 2013 г. : в 2 ч. / Ин-т математики НАН Беларуси. – Минск, 2013. – Ч. 2. – С. 40–41.

141–А. Савчук, В. Ф. Правило останова по невязке в итерационной процедуре решения операторных уравнений / В. Ф. Савчук, О. В. Матысик // XV Международная научная конференция по дифференциальным уравнениям (Еругинские чтения – 2013) : тез. докл. Междунар. науч. конф., г. Гродно, 13–16 мая 2013 г. : в 2 ч. / Ин-т математики НАН Беларуси. – Минск, 2013. – Ч. 2.. – С. 46.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Для иллюстрации некоторых свойств описанных методов проанализируем модельные численные примеры.

В первых двух задачах задаются точные решения $x(s)$ и ядра $K(t,s)$, а с помощью методов численного интегрирования [61] находятся правые части $y(t)$, в которые вносятся ошибки. В задаче 3 задаются ядро $K(t,s)$, точные решения $x(s)$ и правые части $y(t)$. Примеры решались на ПЭВМ методом Ландвебера $x_{n+1,\delta} = x_{n,\delta} + \alpha\left(y_\delta - Ax_{n,\delta}\right),\ x_{0,\delta} = 0$ [158] и методами, предложенными в разделах 2.1–2.4, 3.1, при этом использовались правила останова по невязке и по соседним приближениям.

Программы для решения предложенных задач были реализованы на языке программирования *C#*.

Задача 1. *Рассмотрим в пространстве* $L_2(0,1)$ *задачу в виде уравнения*

$$\int_0^1 K(t,s)x(s)ds = y(t), \quad 0 \le t \le 1 \tag{П.1}$$

с симметричным положительным ядром

$$K(t,s) = \frac{1}{1+100(t-s)^2}. \tag{П.2}$$

В качестве точного решения сформулированной задачи выберем функцию

$$x(s) = \begin{cases} s, & 0 \le s < \dfrac{1}{2}, \\ 1-s, & \dfrac{1}{2} \le s \le 1. \end{cases}$$

С использованием метода правых прямоугольников при $m = 32$, $h = 1/m$ была вычислена в точках $t_i = ih,\ i = \overline{1,m}$ правая часть $y(t)$ уравнения (П.1), результаты указаны в таблице П.1 (ввиду симметрии приведена лишь половина таблицы).

Сформулированная задача относится к классу обратных задач теории потенциала. Обычно на практике мы не знаем точной функции $y(t)$, а вместо нее известны значения приближенной функции $\tilde{y}(t)$ в некотором числе точек с определенной, часто известной погрешностью δ, и по этим приближенным данным требуется приближенно найти решение. Чтобы имитировать эту ситуацию, будем считать заданными значения $\tilde{y}_i,\ i = \overline{1,m}$, полученные следующим образом $\tilde{y}_i = [\,y(t_i)\cdot 10^k + 0{,}5] / 10^k$, где $y(t_i)$ взяты из таблицы П.1, квадратные скобки означают целую часть числа и $k = 3; 4$. При $k = 3$ величина погрешности $\delta = 10^{-3}$. При $k = 4$ величина погрешности $\delta = 10^{-4}$. Действительно, имеем $\int\limits_0^1 [y(t) - \tilde{y}(t)]^2 dt \approx \sum\limits_{i=1}^m [y(t_i) - \tilde{y}_i]^2 h \le$ $\le mh\left(10^{-k}\right)^2 = 10^{-2k}$. Заменим интеграл в уравнении (П.1) квадратурной суммой, например, по формуле правых прямоугольников с узлами $s_j = jh, \quad j = \overline{1,m}, \; h = 1/m,$ т. е. $\int\limits_0^1 K(t,s)\, x(s)\, ds \approx \sum\limits_{j=1}^m K\left(t, s_j\right) h x_j$. Тогда получим равенство $\sum\limits_{j=1}^m K\left(t, s_j\right) h x_j + \rho_m(t) = y(t)$, где $\rho_m(t) -$ остаток квадратурной замены. Записав последнее равенство в точках $t_i, \; i = \overline{1,m},$ получим уравнения $\sum\limits_{j=1}^m K\left(t_i, s_j\right) h x_j + \rho_m(t_i) = y(t_i), \; i = \overline{1,m}.$ Точные значения $y(t_i)$ мы не знаем, а знаем лишь приближения $\tilde{y}_i$ и, отбросив теперь остаточный член, получим линейную алгебраическую систему уравнений относительно приближенного решения

$$\sum_{j=1}^m K\left(t_i, s_j\right) h x_j = \tilde{y}_i, \; i = \overline{1,m}. \tag{П.3}$$

Выберем для определенности $m = 32$ и будем решать систему (П.3) методом итераций (2.3) при $k = 2$, который в дискретной форме запишется

$$x_i^{(n+1)} = x_i^{(n)} - 2\alpha \sum_{j=1}^m K\left(t_i, s_j\right) h x_j^{(n)} - \alpha^2 \sum_{j=1}^m K\left(t_i, s_j\right) h \tilde{y}_j + 2\alpha \tilde{y}_i +$$

$$+ \alpha^2 \sum_{j=1}^m K\left(t_i, s_j\right) h \left(\sum_{l=1}^m K\left(t_j, s_l\right) h x_l^{(n)} \right), \quad x_i^{(0)} = 0, \quad i = \overline{1,m}. \tag{П.4}$$

При счете используется $\alpha = 0{,}8$. Задача была решена при $\delta = 10^{-3}$ и $\delta = 10^{-4}$. Результаты счета приведены в таблице П.1.

Затем система (П.3) решалась методом [158], который в данном случае запишется

$$x_i^{(n+1)} = x_i^{(n)} + \alpha \left[\tilde{y}_i - \sum_{j=1}^m K\left(t_i, s_j\right) h x_j^{(n)} \right], \; x_i^{(0)} = 0, \quad i = \overline{1,m}.$$

Здесь $\alpha = 0{,}8$ выбиралось из условия $0 < \alpha \le \dfrac{5}{4\|A\|}$ при $\|A\| \le 0{,}32$. Для получения оценки $\|A\|$ использовалась теорема 1 из [43, с. 324] при $p = q = 2$,

$\sigma = r = 1$. Результаты счета также приведены в таблице П.1.

При решении задачи методами (П.4) и [158] на каждом шаге итерации вычислялись: $\left\| Ax^{(n)} - \tilde{y} \right\|_m = \left\{ \sum_{i=1}^{m} \left[\sum_{j=1}^{m} K\left(t_i, s_j\right) h x_j^{(n)} - \tilde{y}_i \right]^2 h \right\}^{1/2}$ – дискретная норма невязки, $\left\| x^{(n)} \right\|_m = \left\{ \sum_{i=1}^{m} \left[x_i^{(n)} \right]^2 h \right\}^{1/2}$ – норма приближенного решения и дискретная норма разности между точным и приближенным решениями $\left\| x - x^{(n)} \right\|_m = \left\{ \sum_{i=1}^{m} \left[x(t_i) - x_i^{(n)} \right]^2 h \right\}^{1/2}$. В обоих случаях для решения задачи сведений об истокопредставимости точного решения не потребовалось, т. к. здесь воспользовались правилом останова по невязке (2.20), выбрав уровень останова $\varepsilon = 1{,}5\delta$. Итак, при $\delta = 10^{-3}$, $\varepsilon = 1{,}5 \cdot 10^{-3}$ для достижения оптимальной точности при счете методом итераций (П.4) потребовалось 10 итераций, при счете методом Ландвебера [158] – 21 итерация. При $\delta = 10^{-4}$, $\varepsilon = 1{,}5 \cdot 10^{-4}$ соответственно потребовалось 17 и 48 итераций. Пример счета показал, что для достижения оптимальной точности метод итераций (П.4) требует примерно в 2,5 раза меньше итераций, чем метод [158], что соответствует результатам раздела 2.1. Графики точного решения и приближенного решения, полученного методом (П.4) при $\delta = 10^{-4}$, приведены на рисунке П.1.

Кроме этого, предложенная задача была решена методом (2.73), который в дискретной форме запишется

$$x_i^{(n+1)} = x_i^{(n)} + \alpha_{n+1} \left[\tilde{y}_i - \sum_{j=1}^{m} K\left(t_i, s_j\right) h x_j^{(n)} \right], \; x_i^{(0)} = 0,$$

$$\alpha_{2n+1} = \alpha, \; \alpha_{2n+2} = \beta, \; i = \overline{1, m}.$$

При счете выбирались: $\alpha = 0{,}8$, $\beta = 4{,}4$. Применялось правило останова по соседним приближениям (2.37). Используя метод (2.73) для достижения оптимальной точности при $\delta = 10^{-3}$ потребовалось 6 итераций, а при $\delta = 10^{-4}$ – 15 итераций. Пример счета показал, что для достижения оптимальной точности метод итераций (2.73) требует примерно в 3 раза меньше итераций, чем метод [158], что соответствует результатам раздела 2.4.

Задача 2. *Будем решать в пространстве* $L_2(0,1)$ *уравнение* (П.1) *с симметричным положительным ядром* (П.2). *В качестве точного решения задачи возьмем функцию* $x(s) = \begin{cases} 2s, & 0 \le s < 0{,}25, \\ -s + 0{,}75, & 0{,}25 \le s < 0{,}5, \\ s - 0{,}25, & 0{,}5 \le s < 0{,}75, \\ -2s + 2, & 0{,}75 \le s \le 1. \end{cases}$

Путем интегрирования по методу правых прямоугольников вычислена при $m = 32$ правая часть уравнения (П.1), полученные значения указаны в таблице П.2 (ввиду симметрии приведена лишь половина таблицы). Сформулированная задача тоже относится к обратным задачам теории потенциала. Ее будем решать аналогично задаче 1 методом итераций (П.4) ($\alpha = 0{,}8$) и методом [158] ($\alpha = 0{,}8$), взяв $m = 32$. Погрешность в правую часть уравнения была внесена по тем же формулам, что и в задаче 1. Пользуемся правилом останова по невязке (2.20), выбрав уровень останова $\varepsilon = 1{,}5\delta$. При $\delta = 10^{-3}$, $\varepsilon = 1{,}5 \cdot 10^{-3}$ и счете методом итераций (П.4) потребовалось 11 итераций, методом [158] – 26 итераций. При $\delta = 10^{-4}$, $\varepsilon = 1{,}5 \cdot 10^{-4}$ соответственно потребовалось 17 и 62 итераций. Таким образом, нашли подтверждение результаты раздела 2.1, т. е. для достижения оптимальной точности методом итераций (П.4) требуется примерно в 2,5 раза меньше итераций, чем методом [158]. Здесь также не потребовалось сведений об истокопредставимости точного решения. Использование правила останова по невязке сделало методы (П.4) и [158] вполне эффективными. Результаты счета приведены в таблице П.2. Графики точного решения и приближенного решения, полученного методом (П.4) при $\delta = 10^{-4}$, приведены на рисунке П.2.

Данная задача была решена также методом (2.61) при k = 2, который в дискретной форме запишется

$$x_i^{(n+1)} = x_i^{(n)} - \alpha \sum_{j=1}^{m} K\left(t_i, s_j\right) h \left(\sum_{k=1}^{m} K\left(t_j, s_k\right) h x_k^{(n)} \right) + \alpha \sum_{j=1}^{m} K\left(t_i, s_j\right) h \tilde{y}_j, \ i = \overline{1, m}.$$

Применялось правило останова по соседним приближениям (2.37). На каждом шаге итерации вычислялась дискретная норма разности соседних приближений $\left\| x^{(n+1)} - x^{(n)} \right\|_m = \left\{ \sum_{i=1}^{m} \left[x_i^{(n+1)} - x_i^{(n)} \right]^2 h \right\}^{1/2}$. Выбиралось $\alpha = 0{,}8$. Для достижения оптимальной точности при $\delta = 10^{-3}$ потребовалось 11 итераций, а при $\delta = 10^{-4}$ – 22 итерации.

Задача 3. *Решим в пространстве* $L_2(0,1)$ *модельную задачу* $\int_0^1 K(t,s)\, x(s)\, ds = y(t), \quad 0 \le t \le 1$ *с симметричным положительным ядром* $K(t,s) = \begin{cases} t(1-s), 0 \le t \le s \le 1, \\ s(1-t), 0 \le s \le t \le 1, \end{cases}$ *точной правой частью* $y(t) = \dfrac{t(t-1)(t^2-t-1)}{12}$ *и решением* $x(t) = t(1-t)$.

Оператор, описанный выше интегральным уравнением, непрерывен, взаимнооднозначен и аддитивен. Для метода (П.4) возьмем $\alpha = 0{,}8$. В задаче использовано правило останова по невязке (2.20). Задача была решена методами (П.4) и [158] при $\delta = 10^{-3}$ и $\delta = 10^{-4}$. Результаты счета приведены в таблице П.3 (ввиду симметрии приведена лишь половина таблицы).

В обоих случаях для решения предложенной задачи сведений об истокопредставимости точного решения не потребовалось, так как здесь воспользовались правилом останова по невязке (2.20), выбрав уровень останова $\varepsilon = 1{,}5\delta$. Итак, при $\delta = 10^{-3}, \varepsilon = 1{,}5 \cdot 10^{-3}$ для достижения оптимальной точности при счете методом (П.4) потребовалось 6 итераций, при счете методом [158] – 14 итераций. При $\delta = 10^{-4}$, $\varepsilon = 1{,}5 \cdot 10^{-4}$ соответственно потребовалось 7 и 26 итераций. Пример счета показал, что для достижения оптимальной точности метод итераций (П.4) требует примерно в 2,5 раза меньше итераций, чем метод [158], что соответствует результатам раздела 2.1. На рисунке П.3 изображены графики точного решения и приближенного решения, полученного методом (П.4) при $\delta = 10^{-4}$.

Предложенная задача была решена методом (2.73). При счете выбирались: $\alpha = 0{,}8$, $\beta = 4{,}4$. Применялось правило останова по соседним приближениям (2.37). Для достижения оптимальной точности при $\delta = 10^{-3}$ потребовалось 5 итераций, а при $\delta = 10^{-4}$ – 12 итераций.

Таблица П.1 – Результаты счета итераций методами (П.4) и [158] для задачи 1

Узлы t_i	Правые части $y(t_i)$	Точное реше-ние $x(t_i)$	Приближенные решения			
			Метод [158] $\delta=10^{-3}$	Метод (П.4) $\delta=10^{-3}$	Метод [158] $\delta=10^{-4}$	Метод (П.4) $\delta=10^{-4}$
0,00000	0,01928	0,00000	0,02545	0,02747	0,01743	0,01792
0,03125	0,02731	0,03125	0,04720	0,05036	0,03168	0,03218
0,06250	0,02895	0,06250	0,06434	0,06746	0,05962	0,06012
0,09375	0,03481	0,09375	0,09336	0,09657	0,08898	0,08925
0,12500	0,04109	0,12500	0,11916	0,12165	0,12293	0,12303
0,15625	0,04763	0,15625	0,15809	0,16048	0,15407	0,15397
0,18750	0,05433	0,18750	0,17986	0,18059	0,18629	0,18614
0,21875	0,06107	0,21875	0,21664	0,21667	0,21965	0,21959
0,25000	0,06778	0,25000	0,25403	0,25327	0,25037	0,25039
0,28125	0,07437	0,28125	0,27776	0,27508	0,28194	0,28211
0,31250	0,08075	0,31250	0,32050	0,31732	0,31061	0,31077
0,34375	0,08680	0,34375	0,35277	0,34834	0,34454	0,34471
0,37500	0,09239	0,37500	0,37633	0,37013	0,37835	0,37840
0,40625	0,09729	0,40625	0,40855	0,40152	0,41187	0,41171
0,43750	0,10123	0,43750	0,43586	0,42815	0,44206	0,44168
0,46875	0,10384	0,46875	0,46042	0,45265	0,46570	0,46520
0,50000	0,10476	0,50000	0,46830	0,46053	0,47776	0,47732
$\left\|Ax^{(n)}-\tilde{y}\right\|_m$			0,00140	0,00137	0,00013	0,00015
$\left\|x^{(n)}\right\|_m$			0,28343	0,28332	0,28843	0,28834
$\left\|x-x^{(n)}\right\|_m$			0,01465	0,01331	0,00656	0,00667
Количество итераций:			21	10	48	17

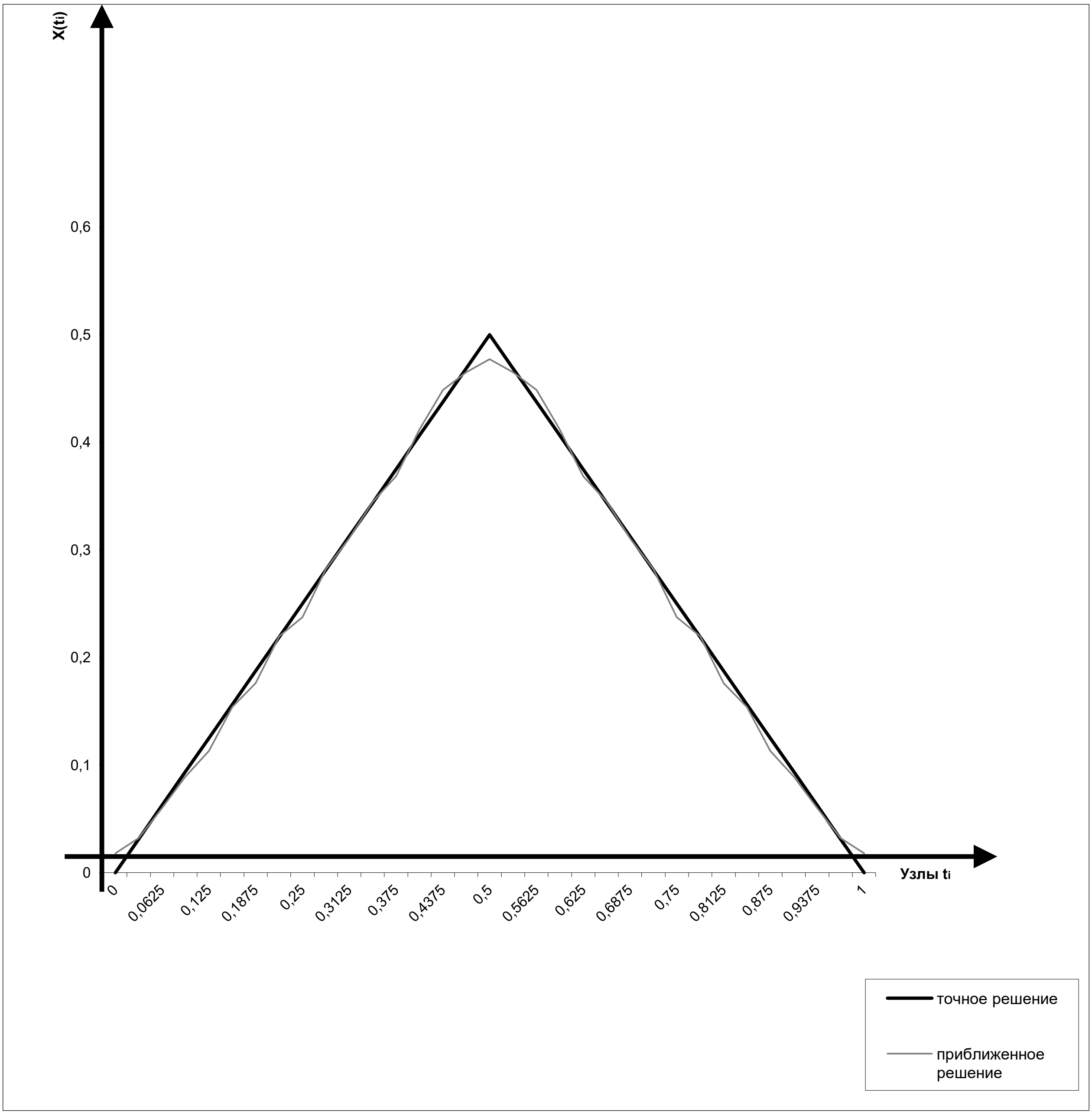

Рисунок П.1 – Графики точного решения и приближенного решения, полученного методом (П.4) при $\delta = 10^{-4}$ для задачи 1

Таблица П.2 – Результаты счета итераций методами (П.4) и [158] для задачи 2

Узлы t_i	Правые части $y(t_i)$	Точное решение $x(t_i)$	Приближенные решения			
			Метод [158] $\delta = 10^{-3}$	Метод (П.4) $\delta = 10^{-3}$	Метод [158] $\delta = 10^{-4}$	Метод (П.4) $\delta = 10^{-4}$
0,00000	0,03038	0,00000	0,04025	0,04669	0,02731	0,02795
0,03125	0,03801	0,06250	0,07789	0,08404	0,06017	0,06099
0,06250	0,04695	0,12500	0,12639	0,13130	0,11313	0,11391
0,09375	0,05669	0,18750	0,19125	0,19389	0,18107	0,18168
0,12500	0,06669	0,25000	0,25682	0,25691	0,24990	0,25001
0,15625	0,07639	0,31250	0,30803	0,30600	0,31914	0,31879
0,18750	0,08519	0,37500	0,37318	0,36851	0,38502	0,38444
0,21875	0,09244	0,43750	0,41555	0,40922	0,43699	0,43621
0,25000	0,09753	0,50000	0,46200	0,45415	0,46778	0,46717
0,28125	0,10021	0,46875	0,45018	0,44334	0,46967	0,46910
0,31250	0,10071	0,43750	0,44362	0,43792	0,44699	0,44646
0,34375	0,09961	0,40625	0,41646	0,41287	0,41290	0,41256
0,37500	0,09755	0,37500	0,38401	0,38280	0,37434	0,37428
0,40625	0,09508	0,34375	0,33873	0,34033	0,34103	0,34144
0,43750	0,09274	0,31250	0,31626	0,31964	0,30473	0,30520
0,46875	0,09103	0,28125	0,28839	0,29362	0,27946	0,27998
0,50000	0,09040	0,25000	0,27274	0,27859	0,27103	0,27159
$\left\| Ax^{(n)} - \tilde{y} \right\|_m$			0,00102	0,00145	0,00011	0,00015
$\left\| x^{(n)} \right\|_m$			0,33540	0,33322	0,33792	0,33777
$\left\| x - x^{(n)} \right\|_m$			0,01794	0,02211	0,01267	0,01272
Количество итераций:			26	11	62	17

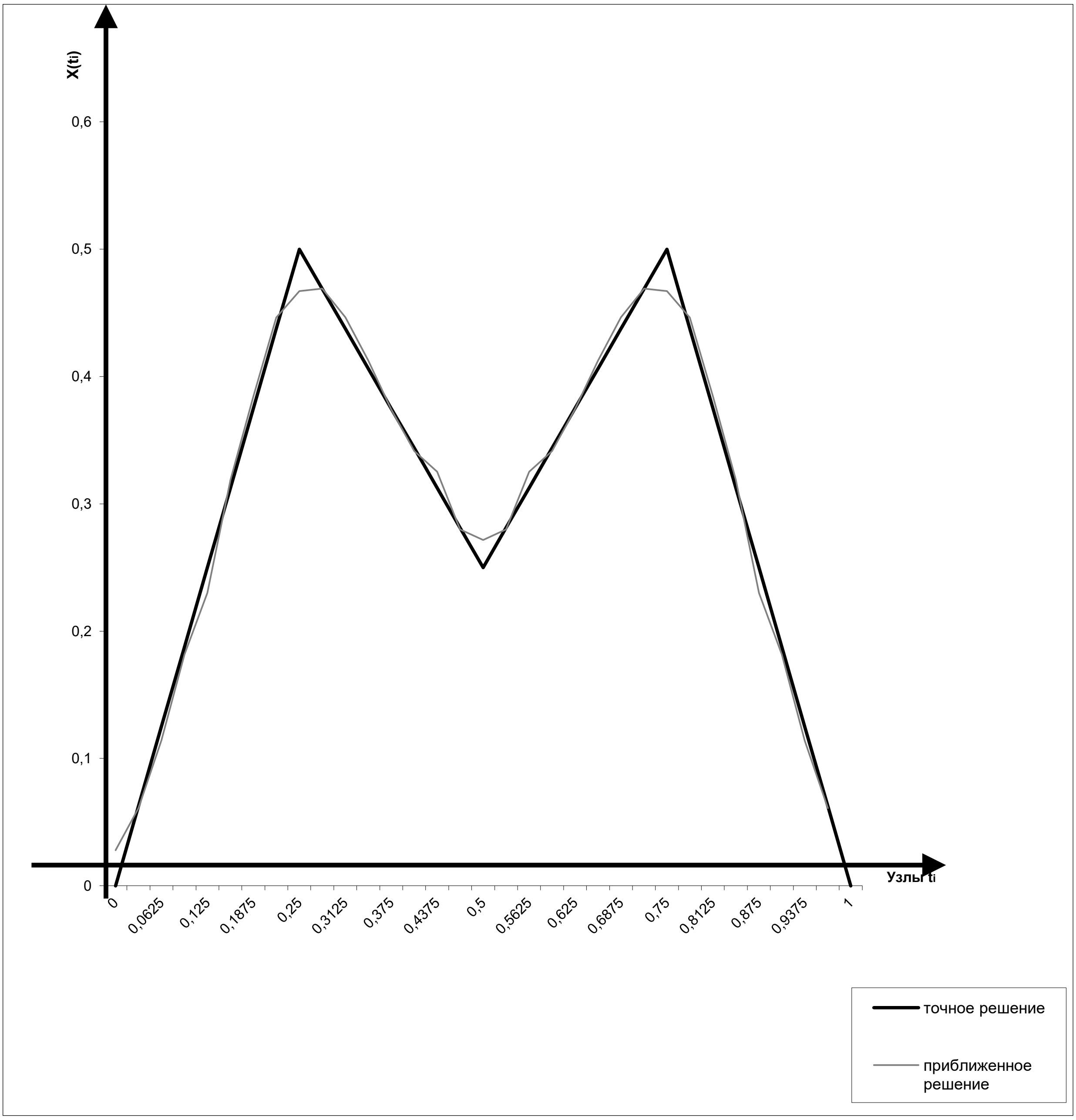

Рисунок П.2 – Графики точного решения и приближенного решения, полученного методом (П.4) при $\delta = 10^{-4}$ для задачи 2

Таблица П.3 – Результаты счета итераций методами (П.4) и [158] для задачи 3

Узлы t_i	Правые части $y(t_i)$	Точное решение $x(t_i)$	Приближенные решения			
			Метод [158] $\delta=10^{-3}$	Метод (П.4) $\delta=10^{-3}$	Метод [158] $\delta=10^{-4}$	Метод (П.4) $\delta=10^{-4}$
0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000
0,03125	0,00260	0,03027	0,03442	0,03452	0,02652	0,02700
0,06250	0,00517	0,05859	0,04415	0,04781	0,05399	0,05437
0,09375	0,00768	0,08496	0,07984	0,08325	0,07869	0,07999
0,12500	0,01011	0,10938	0,09159	0,09803	0,10152	0,10421
0,15625	0,01243	0,13184	0,10488	0,11393	0,12330	0,12737
0,18750	0,01463	0,15234	0,14515	0,15275	0,14487	0,14982
0,21875	0,01668	0,17090	0,16257	0,17169	0,16698	0,17186
0,25000	0,01855	0,18750	0,18264	0,19257	0,18575	0,19128
0,28125	0,02025	0,20215	0,18848	0,19403	0,20184	0,20836
0,31250	0,02175	0,21484	0,20654	0,21932	0,21586	0,22335
0,34375	0,02304	0,22559	0,21080	0,22551	0,22364	0,23392
0,37500	0,02411	0,23438	0,21857	0,23427	0,23490	0,24530
0,40625	0,02495	0,24121	0,22998	0,24573	0,24067	0,25258
0,43750	0,02555	0,24609	0,24521	0,26000	0,25057	0,26093
0,46875	0,02592	0,24902	0,23926	0,25562	0,25886	0,26289
0,50000	0,02604	0,25000	0,23728	0,25416	0,26012	0,26354
$\left\Vert Ax^{(n)}-\tilde{y}\right\Vert_m$			0,00138	0,00091	0,00013	0,00009
$\left\Vert x^{(n)}\right\Vert_m$			0,16996	0,17477	0,18116	0,18276
$\left\Vert x-x^{(n)}\right\Vert_m$			0,01492	0,01057	0,00454	0,00542
Количество итераций:			14	6	26	7

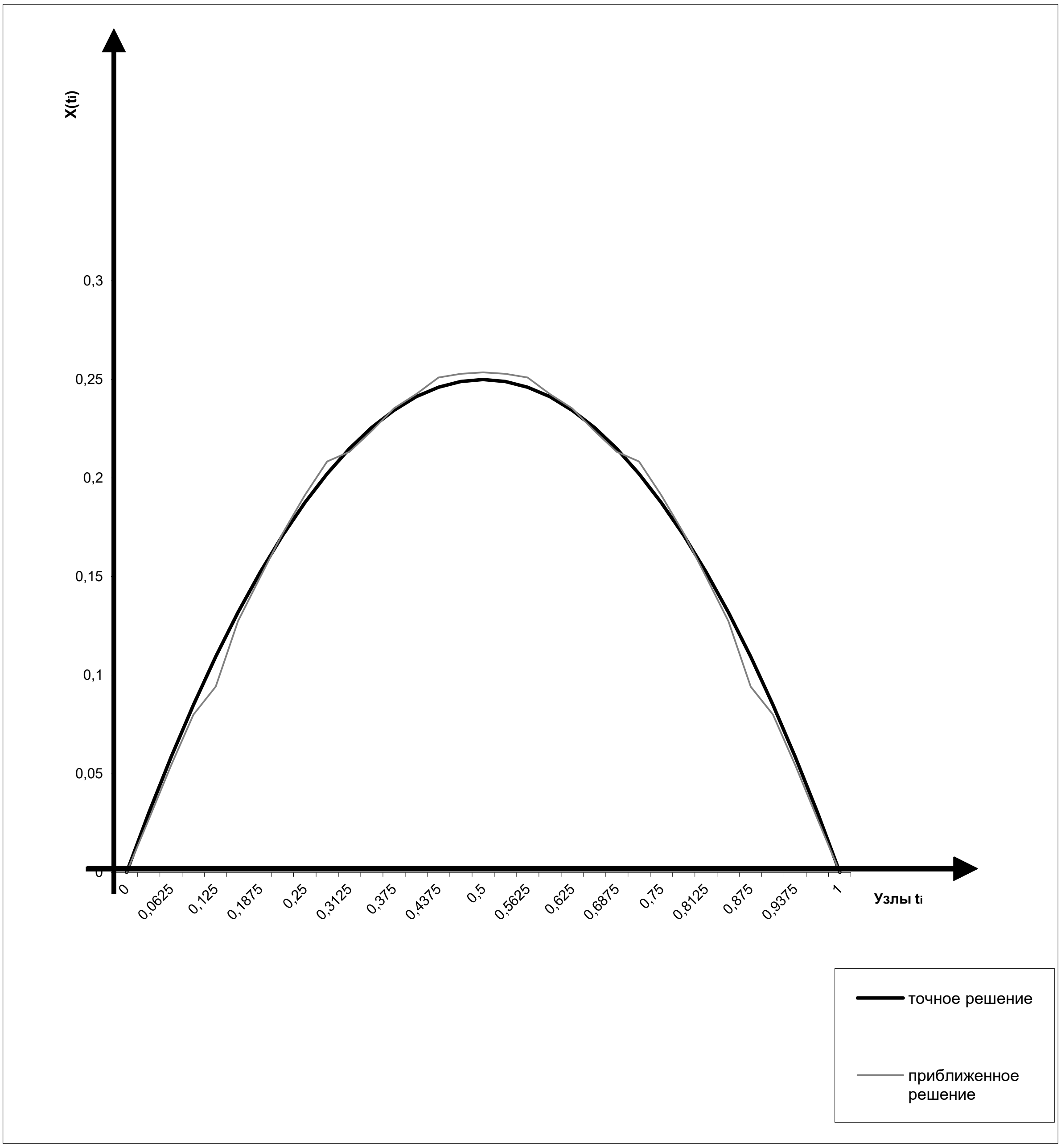

Рисунок П.3 – Графики точного решения и приближенного решения, полученного методом (П.4) при $\delta = 10^{-4}$ для задачи 3

Кроме этого, задача 3 была решена неявным методом итераций (3.2) при k = 1, который в дискретной форме запишется

$$x_i^{(n+1)} + \alpha \sum_{j=1}^{m} K(t_i, s_j) x_j^{(n+1)} h = x_i^{(n)} - \alpha \sum_{j=1}^{m} K(t_i, s_j) x_j^{(n)} h + 2\alpha \tilde{y}_i, i = \overline{1, m}. \qquad (\text{П.5})$$

Результаты счета $\delta = 10^{-4}$ приведены в таблице П.4 (ввиду симметрии приведена лишь половина таблицы). Для решения предложенной задачи сведений об истокопредставимости точного решения не потребовалось, так как здесь воспользовались правилом останова по невязке (2.20), выбрав уровень останова $\varepsilon = 1{,}5\delta$. Пример счета показал, что для достижения оптимальной точности методом итераций (П.5) при $\alpha = 9$ требуется только одна итерация, что соответствует результатам раздела 3.1. На рисунке П.4 изображены графики точного решения и приближенного решения, полученного методом (П.5) при $\delta = 10^{-4}$.

Таблица П.4 – Результаты счета итераций методом (П.5) для задачи 3

Узлы t_i	Правые части $y(t_i)$	Точное решение $x(t_i)$	Приближенное решение
			Метод (П.5) $\delta = 10^{-4}$
0	0	0	0
0,0312	0,00259	0,03027	0,02429
0,0625	0,00517	0,05859	0,04865
0,0937	0,00768	0,08496	0,07275
0,125	0,01011	0,10938	0,09629
0,1562	0,01243	0,13184	0,11898
0,1875	0,01463	0,15234	0,14056
0,2187	0,01668	0,17089	0,1608
0,2500	0,01855	0,1875	0,17948
0,2812	0,02025	0,20215	0,19641
0,3125	0,02175	0,21484	0,21142
0,3437	0,02304	0,22559	0,22437
0,375	0,02411	0,23438	0,23514
0,4062	0,02495	0,24121	0,24361
0,4375	0,02555	0,24609	0,24972
0,4687	0,02591	0,24902	0,25341
0,5000	0,02604	0,25000	0,25464
$\left\Vert Ax^{(n)} - \tilde{y} \right\Vert_m$			0,00015
$\left\Vert x^{(n)} \right\Vert_m$			0,17972
$\left\Vert x - x^{(n)} \right\Vert_m$			0,00798

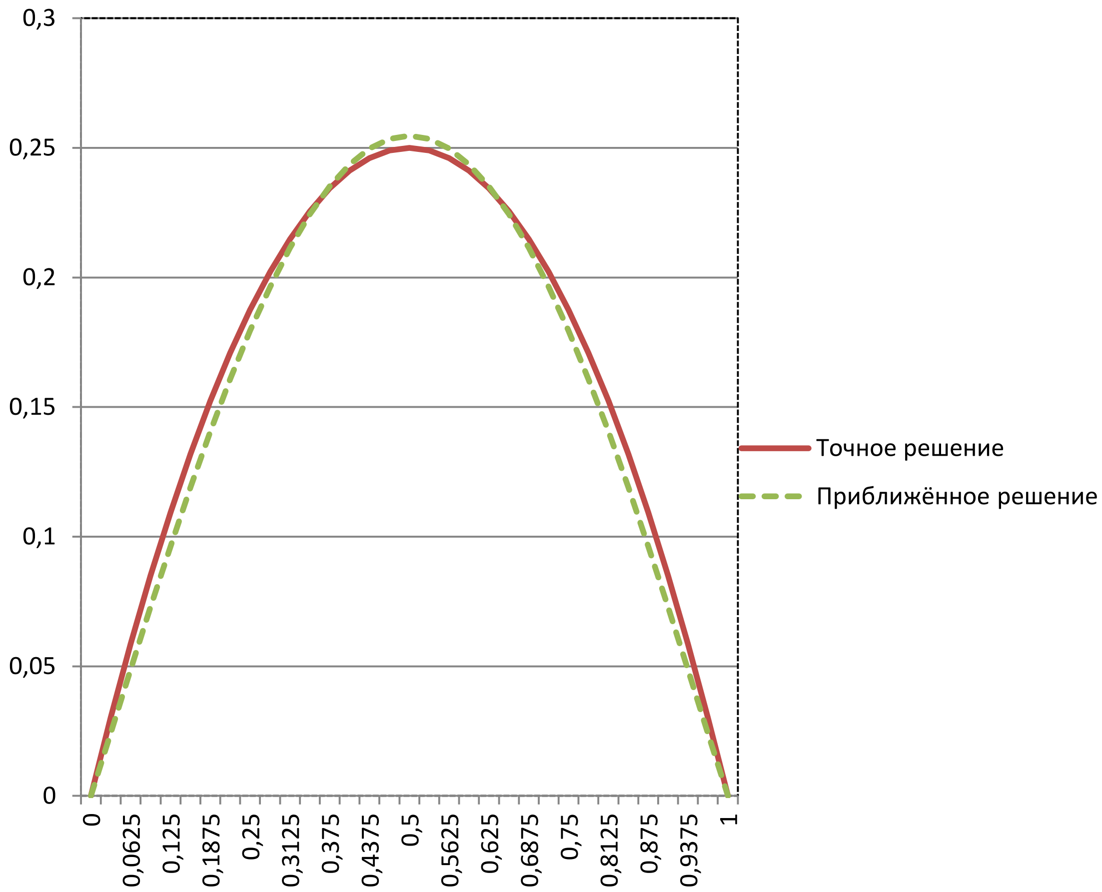

Рисунок П.4 – Графики точного решения и приближенного решения, полученного методом (П.5) при $\delta = 10^{-4}$ для задачи 3

Исходный код программы для метода (П.5) на языке C#

<u>Вспомогательные классы Matrix и Vector</u>:

```
using System;
using MTask.CoreClass;
namespace Helpers.Classes
{
  public class Matrix
  {
    private int _height, _width;
    private double[,] data;
    private double[] t;
    public int Height { get { return _height; } }
    public int Width { get { return _width; } }
    public double[,] Data { get { return data; } set { data = value; } }
    public Matrix(int height, int width)
    {
      _height = height; _width = width;
```

```
        data = new double[_height, _width];
    }
    private int getFirstNonZero(int RowNum)
    {
        for (nti  = 0; i < _width; i++)
            if (Data[RowNum, i] != 0) return i;
        return _width;
    }
    private void Sort(Vector temp)
    {
        t = new double[_width];
        for (nti  = 0; i < _height – 1; i++)
            for (int j = i + 1; j < _height; j++)
                if (getFirstNonZero(i) > getFirstNonZero(j))
                {
                    for (int h = 0; h < _width; h++) t[h] = Data[i, h];
                    for (int h = 0; h < _width; h++) Data[i, h] = Data[j, h];
                    for (int h = 0; h < _width; h++) Data[j, h] = t[h];
                    double t1 = temp.Data[i];
                    temp.Data[i] = temp.Data[j];
                    temp.Data[j] = t1;
                }
}
    private void ToStage(Vector temp)
    {
        double alpha;
        for (nti  = 0; i < _height; i++)
        {
            if (Data[i, i] == 0) continue;
            for (int j = i + 1; j < _height; j++)
            {
                if (Data[j, i] == 0) continue;
                alpha = Data[j, i] / Data[i, i];
                for (int h = 0; h < _width; h++)
                    Data[j, h] -= Data[i, h] * alpha;
                temp.Data[j] -= temp.Data[i] * alpha;
                Data[j, i] = 0;
            }
            Sort(temp);
        }
        Sort(temp);
    }
    public void CopyFrom(Matrix m)
    {
        Data = new double[m._height, m._width];
        _height = m._height; _width = m._width;
        for (nti  = 0; i < m._height; i++)
            for (int j = 0; j < m._width; j++)
                Data[i, j] = m.Data[i, j];
```

```
        }
        public Vector GetSolution(Vector b)
        {
            Vector res = new Vector();
            Vector temp = new Vector();
            temp.CopyFrom(b);
            ToStage(temp);
            if (Data[_height – 1, _width – 1] == 0)
                res.Data[_width – 1] = 0;
            else
                res.Data[_width – 1] = temp.Data[_width – 1] /
                                 Data[_height – 1, _width – 1];
            for (nti  = _height – 2; i >= 0; i--)
            {
                if (Data[i, i] == 0)
                    res.Data[i] = 0; continue;
                double sum = 0;
                for (int j = i + 1; j < _width; j++)
                    sum += Data[i, j] * res.Data[j];
                temp.Data[i] -= sum;
                res.Data[i] = temp.Data[i] / Data[i, i];
            }
            return res;
        }
    }
    public class Vector
    {
        private int _dimension;
        private double[] data;
        public int Dimension { get { return _dimension; } }
        public double[] Data { get { return data; } set { data = value; } }
        public Vector(int dimension)
        {
            _dimension = dimension;
            data = new double[dimension];
        }
        public Vector()
        {
           _dimension = Core.M;
            data = new double[Core.M];
        }
        public void CopyFrom(Vector w)
        {
            this._dimension = w._dimension;
            for (nti  = 0; i < _dimension; i++)
                this.Data[i] = w.Data[i];
        }
    }
}
```

Вспомогательный класс Core (класс, решающий поставленную задачу):

```
using System;
using Helpers.Classes;
namespace Mtask.CoreClass
{
  public class Core
  {
    private double h;
    private Matrix K, Z;
    private double n1, n2, n3;
    private int iterations;
    private Vector solution, v1, v2, y, x0;
    public nti int M = 32, k = 4;
    public const double alpha = 9, a = 0, b = 1, delta = 1e-4, eps = 1.5 * delta;
    public double Norm1 { get { return n1; } }
    public double Norm2 { get { return n2; } }
    public double Norm3 { get { return n3; } }
    public Vector PreciselySolution { get { return v2; } }
    public Vector Solution { get { return solution; } }
    public int TotalIterations { get { return iterations; } }
    public Core()
    {
      v1 = new Vector(); v2 = new Vector(); x0 = new Vector();
      y = new Vector(); solution = new Vector();
      K = new Matrix(M, M);
    }
    private void GetMatrix()
    {
      for (nti  = 0; i < M; i++) v1.Data[i] = i * h;
      for (nti  = 0; i < M; i++)
        for (int j = 0; j < M; j++)
          K.Data[i, j] = GetK(v1.Data[i], v1.Data[j]);
    }
    private double GetPoint(nti )
    {
      return i * h;
    }
    public double GetY(nti )
    {
      double f = GetPoint(i);
      return f * (f – 1) * (f * f – f – 1) / 12;
    }
    private double GetK(double t, double s)
    {
      if (t <= s) return t * (1 – s);
      if (s <= t) return s * (1 – t);
      return 0;
    }
```

```
private Vector GetRightPart(Vector xn)
{
   Vector res = new Vector();
   for (int k = 0; k < M; k++)
   {
      double t1 = GetY(k);
      double t2 = 0;
      for (int j = 0; j < M; j++) t2 += K.Data[k, j] * xn.Data[j] * h;
      res.Data[k] = xn.Data[k] – alpha * t2 + 2 * alpha * t1;
   }
   return res;
}
public double GetQ(Vector v)
{
   double sum = 0;
   for (nti  = 0; i < M; i++)
   {
      double t = 0;
      for (int j = 0; j < M; j++)
         t += K.Data[i, j] * h * v.Data[j];
      t -= (GetY(i) * Math.Pow(10, k) + 0.5) / Math.Pow(10, k);
      t *= t;
      t *= h;
      sum += t;
   }
   return Math.Sqrt(sum);
}
public void Solve()
{
   h = (b – a) / M;
   iterations = 0;
   x0 = new Vector();
   solution = new Vector();
   GetMatrix();
   Z = new Matrix(M, M);
   for (nti  = 0; i < M; i++)
   {
      double t0 = 1 + alpha * K.Data[i, 0] * h;
      Z.Data[i, i] = t0;
      for (int j = 0; j < M; j++)
      {
         if (i == j) continue;
         Z.Data[i, j] = alpha * K.Data[i, j] * h;
      }
   }
   Vector bb = GetRightPart(x0);
   solution = Z.GetSolution(bb);
   n1 = GetQ(solution);
```

```
            for (nti  = 0; i < M; i++)
               v2.Data[i] = GetPoint(i) * (1 – GetPoint(i));
            double t = 0;
            for (nti  = 0; i < M; i++)
               t += solution.Data[i] * solution.Data[i] * h;
            n2 = Math.Sqrt(t); t = 0;
            for (nti  = 0; i < M; i++)
               t += (v2.Data[i] – solution.Data[i]) *
                   (v2.Data[i] – solution.Data[i]) * h;
            n3 = Math.Sqrt(t);
      }
   }
}
```

Главный класс программы:

```
using System;
using Mtask.CoreClass;
namespace Mtask
{
   class Program
   {
      static void Main(string[] args)
      {
         Core core = new Core();
         core.Solve();
         Console.WriteLine(“Precisely solution: “);
         for (nti  = 0; i < 32; i++)
            Console.WriteLine(“x” + i + “: “ + core.PreciselySolution.Data[i]);
         Console.WriteLine();
         Console.WriteLine(“Approximately solution: “);
         for (nti  = 0; i < 32; i++)
            Console.WriteLine(“x” + i + “: “ + core.Solution.Data[i]);
         Console.WriteLine();
         Console.WriteLine(“Total iterations: “);
         Console.WriteLine(core.TotalIterations);
         Console.WriteLine();
         Console.WriteLine(“Norm: “);
         Console.WriteLine(core.Norm1);
         Console.WriteLine(core.Norm2);
         Console.WriteLine(core.Norm3);
         Console.WriteLine();
         Console.WriteLine(“Ti”);
         for (nti  = 0; i < 17; i++)
            Console.WriteLine((Core.b – Core.a) / Core.M * (i));
         Console.WriteLine();
         Console.WriteLine(“Yi”);
         for (nti  = 0; i < 17; i++)
            Console.WriteLine(core.GetY(i));
      }
   }
}
```

Также в гильбертовом пространстве решались и другие численные модельные задачи в виде интегрального уравнения

$$\int_0^1 K(t,s)\, x(s)\, ds = f(t), \quad 0 \le t \le 1:$$

1) $K(t,s) = \frac{t+s}{2} + ts + \frac{1}{3},\ x(s) = 1,\ f(t) = t + \frac{7}{12}.$

2) $K(t,s) = e^{ts},\ x(s) = 1,\ f(t) = \frac{e^t - 1}{t}.$

3) $K(t,s) = ts,\ x(s) = \frac{s}{2},\ f(t) = \frac{t}{6}.$

4) $K(t,s) = \begin{cases} t(1-s), t \le s, \\ s(1-t), t > s, \end{cases} \quad x(s) = s - 2s^3 + s^4,\ f(t) = \frac{3t - 5t^3 + 3t^5 - t^6}{30}.$

5) $K(t,s) = \begin{cases} \pi^2 t(1-s),\ t \le s, \\ \pi^2 s(1-t), t > s, \end{cases} \quad x(s) = 1.$

6) $K(t,s) = \begin{cases} t(1-s)(2s - s^2 - t^2), t \le s, \\ s(1-t)(2t - s^2 - t^2), t > s, \end{cases} \quad x(s) = 1, f(t) = \frac{t - 2t^3 + t^4}{24}.$

7) $K(t,s) = \begin{cases} s(t-1), s < t, \\ t(s-1), t \le s, \end{cases} \quad x(s) = s,\ f(t) = \frac{1}{6}(t^3 - t).$

8) $K(t,s) = \begin{cases} s(t-1), s \le t, \\ t(s-1), t < s, \end{cases} \quad x(s) = e^s,\ f(t) = e^t + (1-e)t - 1.$

9) $K(t,s) = \ln\frac{t+s}{t+s+1},\ x(s) = \begin{cases} 0, 0 \le s \le 1/9, \\ 1{,}125t + 0{,}075, 1/9 < t \le 1/3, \\ 1{,}0{,}5t + 0{,}05, 1/3 < t \le 1. \end{cases}$

Матысик Олег Викторович **родился 20 декабря 1976 года в г. п. Большая Берестовица Гродненской области. Закончил математический факультет БрГУ имени А. С. Пушкина в 1999 г. с отличием. В 1999–2001 гг. работал экономистом на совместном белорусско-российско-немецком предприятии «Инга» при заводе «Гефест».**

В 2005 г. защитил кандидатскую диссертацию на тему «*Итеративные методы решения операторных уравнений в гильбертовом пространстве*» по специальности 01.01.07 – вычислительная математика в Институте математики НАН Беларуси. С 2006 г. по август 2013 г. – заведующий кафедрой алгебры и геометрии, а с сентября 2013 г. по август 2018 г. – заведующий кафедрой прикладной математики и информатики БрГУ имени А. С. Пушкина. С 2019 г. – доцент кафедры прикладной математики и информатики БрГУ имени А. С. Пушкина.

В 2009–2016 гг. работал заместителем директора Брестского филиала ГУО «Институт непрерывного образования» Белорусского государственного университета. В 2010–2014 гг. – ответственный редактор научного журнала «Вестник Брестского университета» (Серия 4. Физика. Математика). В 2006–2008 гг. работал в секретариате приемной комиссии БрГУ имени А. С. Пушкина, в 2008–2020 гг. – член оргкомиссии по проведению ЦТ.

В 2010 г. – лауреат стипендии Президента Республики Беларусь талантливым молодым ученым за научные исследования и разработки в области естественных, технических, социальных и гуманитарных наук, а в 2011 г. – лауреат университетской премии имени профессора С. Г. Кондратени. Научно-педагогическая деятельность О. В. Матысика отмечена многочисленными благодарностями ректора университета и грамотой губернатора Брестской области.

Олег Викторович успешно занимается разработкой и исследованием свойств итерационных методов решения некорректно поставленных задач, описываемых линейными операторными уравнениями. Подготовил 10 магистров наук. Имеет более 450 публикаций научного и учебно-методического характера, в том числе 5 монографий (2 – в соавторстве), 30 учебно-методических комплексов и пособий, более 150 статей в научных журналах (в том числе из них более 50 из списка ВАК, Scopus, Web of Science и ядра РИНЦ).