МИНОБРНАУКИ РОССИИ
Юго-Западный государственный университет

МАТЕМАТИКА И ЕЕ ПРИЛОЖЕНИЯ В СОВРЕМЕННОЙ НАУКЕ И ПРАКТИКЕ

Сборник научных статей
XV Международной научно-практической конференции
студентов и аспирантов

11-12 апреля 2025 года

Редакционная коллегия:
О. А. Бредихина (отв. ред.),
Т. В. Шевцова, Г. В. Титова

Курск
ЮЗГУ
2025

УДК 51(063)
ББК 22я43
М 34

Рецензент:
Доктор физико-математических наук, профессор
Института общей физики им. А. М. Прохорова
Российской академии наук *Д. Н. Чаусов*

Редакционная коллегия:
О. А. Бредихина (отв. ред.),
Т. В. Шевцова, Г. В. Титова

М 34 **Математика и ее приложения в современной науке и практике:** сборник научных статей XV Международной научно-практической конференции студентов и аспирантов, 11-12 апреля 2025 г. / редкол.: О. А. Бредихина (отв. ред.) [и др.] ; Минобрнауки России, Юго-Западный гос. ун-т. – Курск : ЮЗГУ, 2025. – 367 с.

ISBN 978-5-7681-1743-6

Сборник содержит статьи XV Международной научно-практической конференции студентов и аспирантов «Математика и ее приложения в современной науке и практике», прошедшей в Юго-Западном государственном университете 11-12 апреля 2025 года. Статьи посвящены вопросам теоретической математики, приложениям математики в других областях знания, проблемам методики преподавания математики и истории математического образования.

Предназначен аспирантам, студентам и школьникам, занимающимся научно-исследовательской работой и проявляющим интерес к математике и ее приложениям.

УДК 51(063)
ББК 22я43

ISBN 978-5-7681-1743-6

© Юго-Западный государственный университет, 2025

СОДЕРЖАНИЕ

ПРЕДИСЛОВИЕ..9

ОБЩЕТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ВОПРОСЫ МАТЕМАТИКИ 11

О канонической краевой задаче Римана – Гильберта для одной бигармонической системы четырех уравнений в R^3 11
Басик Д. А.

О компонентах гомотопической связности одного множества эллиптических операторов в трехмерном пространстве...............................15
Болтрушко О. В.

Неабелевы подгруппы порядка 8 автотопизмов полуполевых проективных плоскостей 20
Скок Д. С.

Некоторые копредставления симметрической группы 25
Опанасенко Е. К.

Наблюдение эллипса под прямым углом 30
Долженкова В. Р., Долженкова А. С.

Обобщение факториала на нецелые числа 34
Миронов И. М.

МЕТОДЫ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ 41

Применение СКА Mathematica для решения некоторых задач теории графов 41
Ярмолик Л. А., Шеина В. А.

Оценка миграционного потенциала: методологические аспекты 47
Праулова Н. С.

Решение параметрической матричной игры..53
Шиндина К. П.

Приближенное решение задачи квадратичного программирования с параметром 59
Правдивцева А. С.

Математическое моделирование с применением Microsoft Excel................64
Ярцев Е. Е.

Применение теории чисел в криптографии: алгоритм RSA 72
Дементьев И. Д.

УДК 517.954

О компонентах гомотопической связности одного множества эллиптических операторов в трехмерном пространстве

Ольга Вадимовна Болтрушко[1]✉

Научный руководитель: А. И. Басик[1], канд. физ.-мат. наук, доцент

[1] Брестский государственный университет имени А. С. Пушкина, Брест, Беларусь

boltrushko.ol@gmail.com✉

Аннотация. Рассматривается множество линейных эллиптических операторов первого порядка размера 4×4 в R3, являющее подклассом эллиптических операторов псевдосимметрического типа. В статье проводится непосредственная гомотопическая классификация этого множества. Доказывается, что рассматриваемое множество эллиптических операторов имеет две компоненты гомотопической связности, указываются гомотопический инвариант и простейшие представители этих компонент.

Ключевые слова: эллиптическая система; гомотопическая классификация.

On components of homotopy connectivity of one set of elliptic operators in three-dimensional space

Olga V. Boltrushko[1]✉

Scientific supervisor: A. I. Basik[1], Candidate of Sciences (Physics and Mathematics), Associate Professor

[1] Brest State A. S. Pushkin University, Brest, Belarus

boltrushko.ol@gmail.com✉

Abstract. We consider the set of linear 4×4 matrix elliptic operators of the first order in R3, which is a subclass of elliptic operators of pseudo-symmetric type. A homotopy classification of this set is carried out in this paper. It is proved that the set of elliptic operators under consideration has two components of homotopy connectivity, the homotopy invariant and the representatives of these components are given.

Keywords: elliptic system; homotopy classification.

Постановка задачи

Пусть a_2, a_3, b_2, $b_3 \in \mathbf{R}$. Рассмотрим матричный линейный дифференциальный оператор первого порядка $L(a_2,a_3,b_2,b_3,\partial)$ размера 4×4, действующий на непрерывно дифференцируемые четырехкомпонентные вектор-функции $U:\mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^4$ по формуле

$$LU = \frac{\partial U}{\partial x_1} + \begin{pmatrix} 0 & a_2 & b_2 & 0 \\ -a_2 & 0 & 0 & -b_2 \\ -b_2 & 0 & 0 & a_2 \\ 0 & b_2 & -a_2 & 0 \end{pmatrix} \frac{\partial U}{\partial x_2} + \begin{pmatrix} 0 & a_3 & b_3 & 0 \\ -a_3 & 0 & 0 & -b_3 \\ -b_3 & 0 & 0 & a_3 \\ 0 & b_3 & -a_3 & 0 \end{pmatrix} \frac{\partial U}{\partial x_3}. \quad (1)$$

Характеристическая матрица оператора (1) имеет вид

$$L(a_2,a_3,b_2,b_3,\xi) = \begin{pmatrix} \xi_1 & a_2\xi_2 + a_3\xi_3 & b_2\xi_2 + b_3\xi_3 & 0 \\ -a_2\xi_2 - a_3\xi_3 & \xi_1 & 0 & -b_2\xi_2 - b_3\xi_3 \\ -b_2\xi_2 - b_3\xi_3 & 0 & \xi_1 & a_2\xi_2 + a_3\xi_3 \\ 0 & b_2\xi_2 + b_3\xi_3 & -a_2\xi_2 - a_3\xi_3 & \xi_1 \end{pmatrix}.$$

Напомним, что $L(a_2,a_3,b_2,b_3,\partial)$ называется эллиптическим оператором, если при каждом ненулевом векторе $\xi = (\xi_1,\xi_2,\xi_3)$ характеристическая матрица $L(a_2,a_3,b_2,b_3,\xi)$ является невырожденной. Поскольку

$$\det L(a_2,a_3,b_2,b_3,\xi) = (\xi_1^2 + (a_2\xi_2 + a_3\xi_3)^2 + (b_2\xi_2 + b_3\xi_3)^2)^2,$$

то, следовательно, оператор (1) является эллиптическим тогда и только тогда, когда выполняется условие

$$a_2b_3 - a_3b_2 \neq 0. \quad (2)$$

Два эллиптических оператора вида (1) назовем гомотопными, если их можно соединить друг с другом непрерывной деформацией коэффициентов в классе дифференциальных операторов вида (1) без нарушения условия эллиптичности (2). Введенное отношение гомотопии является отношением эквивалентности. Классы эквивалентности называются компонентами гомотопической связности.

Проблема гомотопической классификация была сформулирована в 1956 г. на III Всесоюзном математическом съезде [1]. В общем виде она заключается в выяснении количества компонент гомотопической связности множества эллиптических систем p уравнений s-го порядка с n независимыми переменными, указании представителей компонент, нахождении гомотопических инвариантов и признаков различения компонент для конкретных значений p, s и n.

Несмотря на давность постановки, проблема гомотопической классификации эллиптических систем решена лишь в двумерном случае [2]. В многомерном случае имеются лишь отдельные результаты [3; 4].

Основной результат

В настоящей статье мы проводим непосредственную гомотопическую классификацию эллиптических операторов вида (1) (иное решение см. в [5]). Через $\mathfrak{I}_+$ обозначим множество эллиптических операторов вида (1), для которых выполняется условие $a_2b_3 - a_3b_2 > 0$, а $\mathfrak{I}_-$ – условие $a_2b_3 - a_3b_2 < 0$.

Утверждение 1. *Операторы из* $\mathfrak{I}_+$ *и* $\mathfrak{I}_-$ *негомотопны.*

Доказательство. Предположим, что оператор $L(a_2^0, a_3^0, b_2^0, b_3^0, \partial)$ гомотопен оператору $L(a_2^1, a_3^1, b_2^1, b_3^1, \partial)$ и при этом $a_2^0b_3^0 - a_3^0b_2^0 > 0$ и $a_2^1b_3^1 - a_3^1b_2^1 < 0$. Это означает, что найдется набор $a_2(t), a_3(t), b_2(t)$ и $b_3(t)$ непрерывных на отрезке [0; 1] функций такой, что

$$(a_2(0), a_3(0), b_2(0), b_3(0)) = (a_2^0, a_3^0, b_2^0, b_3^0)$$

и

$$(a_2(1), a_3(1), b_2(1), b_3(1)) = (a_2^1, a_3^1, b_2^1, b_3^1).$$

Рассмотрим непрерывную на отрезке [0; 1] функцию

$$F(t) = a_2(t)b_3(t) - a_3(t)b_2(t).$$

Так как $F(0) = a_2^0b_3^0 - a_3^0b_2^0 > 0$ и $F(1) = a_2^1b_3^1 - a_3^1b_2^1 < 0$, то, согласно теореме Коши о промежуточном значении непрерывной функции, найдется точка $t_0 \in [0;1]$, в которой $F(t_0) = 0$. Следовательно, оператор

$$L(a_2(t), a_3(t), b_2(t), b_3(t), \partial)$$

не является эллиптическим при $t = t_0$. Последнее означает, что операторы $L(a_2^0, a_3^0, b_2^0, b_3^0, \partial)$ и $L(a_2^1, a_3^1, b_2^1, b_3^1, \partial)$ негомотопны.

Утверждение 1 доказано.

Таким образом, множество эллиптических операторов (1) имеет, по крайней мере, две компоненты гомотопической связности.

Утверждение 2. *Множество* $\mathfrak{I}_+$ *гомотопически связно.*

Доказательство. Пусть $L(a_2, a_3, b_2, b_3, \partial)$ – произвольный эллиптический оператор, для которого выполняется условие $a_2b_3 - a_3b_2 > 0$. Тогда очевидно выполняются неравенства $a_2^2+a_3^2>0$ и $b_2^2+b_3^2>0$. Рассмотрим семейство операторов вида (1) с непрерывными по $t\in[0;1]$ коэффициентами

$$L\left(a_2\sqrt{\left(a_2^2+a_3^2\right)^{-t}},a_3\sqrt{\left(a_2^2+a_3^2\right)^{-t}},b_2\sqrt{\left(b_2^2+b_3^2\right)^{-t}},b_3\sqrt{\left(b_2^2+b_3^2\right)^{-t}},\partial\right). \qquad (3)$$

При этом

$$a_2\sqrt{\left(a_2^2+a_3^2\right)^{-t}}\,b_3\sqrt{\left(b_2^2+b_3^2\right)^{-t}}-b_2\sqrt{\left(b_2^2+b_3^2\right)^{-t}}\,a_3\sqrt{\left(a_2^2+a_3^2\right)^{-t}}=$$

$$=\frac{a_2b_3-a_3b_2}{\sqrt{\left(a_2^2+a_3^2\right)^t}\sqrt{\left(b_2^2+b_3^2\right)^t}}>0,$$

т. е. при каждом $t\in[0;\,1]$ оператор семейства (3) является эллиптическим и принадлежит $\Im_+$. Таким образом, оператор $L(a_2,a_3,b_2,b_3,\partial)$ гомотопен оператору

$$L(\cos\varphi,\sin\varphi,\cos\psi,\sin\psi,\partial), \qquad (4)$$

где $\varphi,\psi\in[0;2\pi)$ и таковы, что

$$\cos\varphi=\frac{a_2}{\sqrt{\left(a_2^2+a_3^2\right)}},\ \ \sin\varphi=\frac{a_3}{\sqrt{\left(a_2^2+a_3^2\right)}},$$

$$\cos\psi=\frac{b_2}{\sqrt{\left(b_2^2+b_3^2\right)}},\ \ \sin\psi=\frac{b_3}{\sqrt{\left(b_2^2+b_3^2\right)}}.$$

Условие эллиптичности (2) оператора (4) примет вид

$$\sin(\psi-\varphi)>0. \qquad (5)$$

Далее рассмотрим семейство операторов $(t\in[0;1])$:

$$L(\cos\varphi(t),\sin\varphi(t),\cos\psi(t),\sin\psi(t),\partial), \qquad (6)$$

где $\varphi(t)=(1-t)\varphi,\quad \psi(t)=\psi-t\varphi.$

Поскольку $\psi(t)-\varphi(t)=\psi-\varphi$, то (5) выполняется автоматически и, следовательно, при каждом $t\in[0;1]$ оператор (6) является эллиптическим. Следовательно, (6) осуществляет гомотопию (4) и оператора:

$$L(1,0,\cos(\psi-\varphi),\sin(\psi-\varphi),\partial). \qquad (7)$$

Заметим, что из $\varphi,\psi\in[0;2\pi)$ следуют неравенства $-2\pi<\varphi-\psi<2\pi$ и

$$\sin(\psi-\varphi)>0\ \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 0<\psi-\varphi<\pi,\\ -2\pi<\psi-\varphi<-\pi.\end{array}\right.$$

Случай $0<\psi-\varphi<\pi$. Рассмотрим семейство операторов:

$$L(1,0,\cos\alpha(t),\sin\alpha(t),\partial), \tag{8}$$

где

$$\alpha(t)=(1-t)\cdot(\psi-\varphi)+\frac{\pi t}{2}. \tag{9}$$

Так как при $t\in[0;\ 1]$ точка $\alpha(t)$ лежит между точками $\psi-\varphi$ и $\pi/2$, то $\alpha(t)\in(0;\pi)$ и, следовательно, $\sin\alpha(t)>0$. Последнее означает, что (8) есть гомотопия оператора (7) к оператору $L(1,0,0,1,\partial)$ в классе $\Im_+$.

Рассуждения в случае $-2\pi<\psi-\varphi<-\pi$ проводятся аналогично с тем лишь исключением, что в (9) $\alpha(t)=(1-t)\cdot(\psi-\varphi)-3\pi t/2$. Тогда при всех $t\in[0;\ 1]$ точка $\alpha(t)$ лежит между точками $\psi-\varphi$ и $-3\pi/2$. Поэтому $\alpha(t)\in(-2\pi;-\pi)$ и, следовательно, $\sin\alpha(t)>0$. Последнее означает, что и в этом случае (8) с указанным здесь $\alpha(t)$ есть гомотопия оператора (7) к оператору $L(1,0,0,1,\partial)$ в классе $\Im_+$.

Таким образом, мы показали, что при выполнении условия $a_2b_3-a_3b_2>0$ произвольный оператор $L(a_2,a_3,b_2,b_3,\partial)$ гомотопен оператору $L(1,0,0,1,\partial)$. Утверждение доказано.

Аналогично доказывается, что при выполнении условия: $a_2b_3-a_3b_2<0$ произвольный оператор $L(a_2,a_3,b_2,b_3,\partial)$ гомотопен оператору $L(1,0,0,-1,\partial)$.

Таким образом, можем сформулировать итоговую теорему.

Теорема [5] *Множество всех эллиптических операторов вида* (1) *имеет две компоненты гомотопической связности,* $\Im_+$ *и* $\Im_-$. *Число* $a_2b_3-a_3b_2$ *является гомотопическим инвариантом. Если* $a_2b_3-a_3b_2>0$, *то оператор* $L(a_2,a_3,b_2,b_3,\partial)$ *гомотопен оператору* $L(1,0,0,1,\partial)$, *а если* $a_2b_3-a_3b_2<0$, *то оператору* $L(1,0,0,-1,\partial)$.

Список литературы

1. Гельфанд И. М., Петровский И. Г., Шилов Г. Е. Теория систем дифференциальных уравнений с частными производными // Труды Третьего Всесоюзного математического съезда, г. Москва, июнь–июль 1956 г. / под ред. А. А. Абрамова [и др.]; АН СССР. М., 1958. Т. 3. С. 65–72.

2. Фролов П. А. О компонентах связности вещественных эллиптических систем на плоскости // Доклады АН СССР. 1968. Т. 181, № 6. С. 1350–1353.

3. Усс А. Т. Гомотопическая классификация трехмерных аналогов системы Коши-Римана // Доклады НАН Беларуси. 2002. Т. 46, № 5. С. 30–34.

4. Усс А. Т. Гомотопическая классификация трех- и четырехмерных аналогов системы Коши-Римана // Дифференциальные уравнения. 2004. Т. 40, № 8. С. 1118–1125.

5. Басик А. И., Грицук Е. В., Болтрушко О. В. Классификация регуляризуемых краевых задач Римана – Гильберта для одного класса эллиптических систем в трехмерном пространстве // Веснік Брэсцкага універсітэта. Серыя 4. Фізіка. Матэматыка. 2024. № 2. С. 100–111.

УДК 519.145

Неабелевы подгруппы порядка 8 автотопизмов полуполевых проективных плоскостей

Дарья Сергеевна Скок[1]✉

Научный руководитель: О. В. Кравцова[1], д-р физ.-мат. наук, доцент

[1] Институт вычислительного моделирования Сибирского отделения РАН, Красноярск, Россия

skrokdarya@yandex.ru✉

Аннотация. Изучается известная гипотеза Д. Хьюза 1959 г. о разрешимости полной группы коллинеаций недезарговой полуполевой проективной плоскости конечного порядка (также вопрос 11.76 Н. Д. Подуфалова в Коуровской тетради). Для построения и исследования используется метод регулярного множества, позволяющий исключать из рассмотрения некоторые простые неабелевы группы списка Дж. Томпсона.

Ключевые слова: проективная плоскость; полуполе; регулярное множество; гомология; группа автотопизмов; бэровская инволюция.

Non-abelian subgroups of order 8 of autotopisms of semi-field projective planes

Daria S. Skok[1]✉

Scientific supervisor: O. V. Kravtsova[1], Doctor of Sciences (Physics and Mathematics), Associate Professor

[1] Institute of Computational Modeling of the Siberian Branch of the Russian Academy of Sciences, Krasnoyarsk, Russia

skrokdarya@yandex.ru✉

Abstract. The well-known conjecture of D. Hughes of 1959 on the solvability of the full collineation group of a non-Desarguesian semifield projective plane of finite order is studied (also, N.D. Podufalov’s question 11.76 in the Kourovka Notebook). For the con-

Научное издание

МАТЕМАТИКА И ЕЕ ПРИЛОЖЕНИЯ В СОВРЕМЕННОЙ НАУКЕ И ПРАКТИКЕ

Сборник научных статей
XV Международной научно-практической конференции
студентов и аспирантов

11-12 апреля 2025 года

Редактор *С. П. Тарасова*
Компьютерная вёрстка и макет *А. Е. Джиоевой*

Подписано в печать 15.10.2025. Формат 60x84 1/16. Бумага офсетная.
Усл. печ. л. 21,3. Уч.-изд. л. 21,1. Тираж 100 экз. Заказ 45.
Юго-Западный государственный университет.
305040, г. Курск, ул. 50 лет Октября, 94.
Отпечатано в ЮЗГУ.