МИНОБРНАУКИ РОССИИ
Юго-Западный государственный университет

МАТЕМАТИКА И ЕЕ ПРИЛОЖЕНИЯ В СОВРЕМЕННОЙ НАУКЕ И ПРАКТИКЕ

Сборник научных статей
XV Международной научно-практической конференции
студентов и аспирантов

11-12 апреля 2025 года

Редакционная коллегия:
О. А. Бредихина (отв. ред.),
Т. В. Шевцова, Г. В. Титова

Курск
ЮЗГУ
2025

УДК 51(063)
ББК 22я43
М 34

Рецензент:
Доктор физико-математических наук, профессор
Института общей физики им. А. М. Прохорова
Российской академии наук *Д. Н. Чаусов*

Редакционная коллегия:
О. А. Бредихина (отв. ред.),
Т. В. Шевцова, Г. В. Титова

М 34 **Математика и ее приложения в современной науке и практике:** сборник научных статей XV Международной научно-практической конференции студентов и аспирантов, 11-12 апреля 2025 г. / редкол.: О. А. Бредихина (отв. ред.) [и др.] ; Минобрнауки России, Юго-Западный гос. ун-т. – Курск : ЮЗГУ, 2025. – 367 с.

ISBN 978-5-7681-1743-6

Сборник содержит статьи XV Международной научно-практической конференции студентов и аспирантов «Математика и ее приложения в современной науке и практике», прошедшей в Юго-Западном государственном университете 11-12 апреля 2025 года. Статьи посвящены вопросам теоретической математики, приложениям математики в других областях знания, проблемам методики преподавания математики и истории математического образования.

Предназначен аспирантам, студентам и школьникам, занимающимся научно-исследовательской работой и проявляющим интерес к математике и ее приложениям.

УДК 51(063)
ББК 22я43

ISBN 978-5-7681-1743-6

СОДЕРЖАНИЕ

ОБЩЕТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ВОПРОСЫ МАТЕМАТИКИ

УДК 517.954

О канонической краевой задаче Римана – Гильберта для одной бигармонической системы четырех уравнений в R^3

Денис Александрович Басик[1]✉

Научный руководитель: А. И. Басик[1], канд. физ.-мат. наук, доцент

[1] Брестский государственный университет имени А. С. Пушкина, Брест, Беларусь

2018asada@gmail.com✉

Аннотация. В статье приводится пример эллиптической системы четырех дифференциальных уравнений первого порядка бигармонического типа с тремя переменными. Для этой системы изучается вопрос регуляризуемости канонической задачи Римана – Гильберта в ограниченной односвязной области. Доказывается, что в той точке границы области, в которой внутренняя нормаль параллельна оси Ox_1, однородная предельная задача имеет ненулевое решение в пространстве устойчивых решений.

Ключевые слова: эллиптическая система; регуляризуемость; краевая задача Римана – Гильберта.

Финансирование: Результаты работы получены при финансовой поддержке Министерства образования Республики Беларусь (№ гос. рег. 20240574).

On the canonical Riemann-Hilbert boundary value problem for one biharmonic system of four equations in R^3

Denis A. Basik[1]✉

Scientific supervisor: A. I. Basik[1], Candidate of Sciences (Physics and Mathematics), Associate Professor

[1] Brest State A. S. Pushkin University, Brest, Belarus

2018asada@gmail.com✉

Abstract. The paper gives an example of an elliptic system of four first-order differential equations of biharmonic type with three variables. For this system we study the question of regularizability of the canonical Riemann-Hilbert boundary value problem in a bounded one-connected region. It is proved that at the point of the boundary of the domain in which the internal normal is parallel to the Ox1 axis, the homogeneous limit problem has a nonzero solution in the space of stable solutions.

Keywords: elliptic system; regularizability; the Riemann-Hilbert boundary value problem.

Funding: The results of the work were obtained with the financial support of the Ministry of Education of the Republic of Belarus (State Registration no. 20240574).

В ограниченной, гомеоморфной шару области $\Omega \subset \mathbf{R}^3$, границей $\partial\Omega$ которой является гладкая поверхность Ляпунова, рассмотрим линейную однородную систему четырех дифференциальных уравнений первого порядка вида

$$\frac{\partial U}{\partial x_1}+\begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}\frac{\partial U}{\partial x_2}+\begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \end{pmatrix}\frac{\partial U}{\partial x_3}=0, \qquad (1)$$

где $x=(x_1,x_2,x_3)\in \mathbf{R}^3$, $U=(u_1(x),u_2(x),u_3(x),u_4(x))^T$ – искомая вектор-функция; T – транспонирование.

Характеристическая матрица системы (1) имеет вид

$$A(\xi)=\begin{pmatrix} \xi_1 & -\xi_2 & 2\xi_2-\xi_3 & 0 \\ \xi_2-\xi_3 & \xi_1 & 0 & -\xi_2-\xi_3 \\ \xi_3 & 0 & \xi_1 & \xi_2 \\ 0 & \xi_3 & -\xi_2-2\xi_3 & \xi_1 \end{pmatrix}$$

и, следовательно,

$$\det A(\xi)=\left(\xi_1^2+\xi_2^2+\xi_3^2\right)^2.$$

Отсюда следует, что матрица $A(\xi)$ является невырожденной при каждом ненулевом векторе $\xi\in\mathbf{R}^3$. Последнее означает, что система (1) является эллиптической.

Отметим, что система (1) не является трехмерным аналогом системы Коши – Римана [1], однако обладает тем свойством, что каждая компонента произвольного ее непрерывно дифференцируемого решения удовлетворяет бигармоническому уравнению в $\mathbf{R}^3$ [2] (является системой бигармонического типа [3]).

Задача Римана – Гильберта для системы (1) состоит в нахождении ее решения класса $C^{1,\alpha}(\Omega)\cap C^{0,\alpha}(\overline{\Omega})$ $(\alpha\in(0;1])$, удовлетворяющего граничным условиям:

$$(u_1m_1+u_2m_2+u_3m_3+u_4m_4)|_{\partial\Omega}=f_1(y),$$
$$(u_1n_1+u_2n_2+u_3n_3+u_4n_4)|_{\partial\Omega}=f_2(y), \quad (y\in\partial\Omega).$$

где f_1, f_2, m_k, $n_k:\partial\Omega\to\mathbf{R}$ – заданные непрерывные по Гельдеру с показателем α функции ($k=1,...,4$).

В теории аналитических функций задача Римана – Гильберта состоит в нахождении в ограниченной односвязной области голоморфной функции по известной на границе этой области линейной комбинации ее действительной и мнимой части. Эта задача известна также как задача Гильберта и достаточно подробно изучена [4, с. 217].

В многомерном случае первые результаты в исследовании задачи Римана – Гильберта были получены В. И. Шевченко для системы Моисила – Теодореску [5]. Им было выведено условие, обеспечивающее регуляризуемость (краевая задача называется регуляризуемой, если для нее выполнено условие Я. Б. Лопатинского [6]) краевой задачи в произвольной односвязной области, проведена гомотопическая классификация регуляризуемых задач и вычислен индекс регуляризуемой задачи. В частности, задача Римана – Гильберта для системы Моисила – Теодореску с граничным условием

$$u_1|_{\partial\Omega} = f_1(y), \quad (u_2 v_1 + u_3 v_2 + u_4 v_3)|_{\partial\Omega} = f_2(y). \tag{2}$$

является регуляризуемой, где $\nu : \partial\Omega \to \mathbf{R}^3$ – единичное поле внутренних нормалей на поверхности $\partial\Omega$.

Для эллиптических систем ортогонального типа, рассмотренных в [7], задача с граничными условиями вида (2) также является регуляризуемой. Действительно, векторные поля L и P [см. формулу (4)] [7] в этом случае задаются следующими равенствами:

$$L(y) = \nu(y), \; P(y) = \nu(y) + [\nu(y); a] + a \cdot \langle \nu(y); a \rangle,$$

и, следовательно, в каждой точке $y \in \partial\Omega$ имеем

$$\langle \nu(y); P(y) \rangle = 1 + \langle \nu(y); a \rangle^2 > 0 .$$

Согласно теореме 1 [7], задача Римана – Гильберта для систем, рассмотренных в [7], и с граничным условием (2) является регуляризуемой. В связи с вышесказанным будем называть условия (2) каноническими.

В настоящей работе доказывается нерегуляризуемость задачи (1)–(2). Известно, что выполнение условия регуляризуемости обеспечивает нетеровость задачи Римана – Гильберта как в классической постановке, так и в широкой шкале гильбертовых пространств [6].

Теорема. *Задача* (1)–(2) *не является регуляризуемой.*

Доказательство. Покажем, что в точке $\tilde{y} \in \partial\Omega$, в которой внутренняя нормаль параллельна оси Ox_1, предельная задача задачи (1)–(2) имеет нетривиальное ядро [6]. Не ограничивая общности, будем считать, что точка $\tilde{y}$ совпадает с началом координат. Рассмотрим краевую задачу (1)–(2) «под микроскопом» в окрестности начала координат с все бо́льшим увеличением [8]. Получим предельную задачу, состоящую в нахождении устойчивого на бесконечности решения системы (1) в полупространстве $x_1 > 0$, т. е. стремящегося к нулю при $x_1 \to +\infty$ и удовлетворяющего граничным условиям:

$$u_1|_{x_1=0} = f_1(x_2,x_3),\ u_2|_{x_1=0} = f_2(x_2,x_3) \quad ((x_2,x_3)\in\mathbf{R}^2). \tag{3}$$

Применяя к обеим частям (1), (3) преобразование Фурье по переменным x_2, x_3, получим задачу для системы дифференциальных уравнений:

$$\frac{\partial\hat{U}}{\partial x_1} = -i\left(\xi_2\begin{pmatrix}0 & -1 & 2 & 0\\ 1 & 0 & 0 & -1\\ 0 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & -1 & 0\end{pmatrix} + \xi_3\begin{pmatrix}0 & 0 & -1 & 0\\ -1 & 0 & 0 & -1\\ 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & -2 & 0\end{pmatrix}\right)\hat{U}, \tag{4}$$

$$\hat{u}_1|_{x_1=0} = \hat{f}_1(\xi'),\ \hat{u}_2|_{x_1=0} = \hat{f}_2(\xi'). \tag{5}$$

где $\xi' = (\xi_2,\xi_3)$, $\hat{U}(x_1,\xi_2,\xi_3)$ – преобразование Фурье $U(x)$ по x_2, x_3.

Непосредственная проверка показывает, что при $\xi' = \left(2/\sqrt{5}, 1/\sqrt{5}\right)$ и при произвольной постоянной C вектор-функция

$$\hat{U} = Ce^{-x_1}(-6x_1, -3i\sqrt{5}x_1, -2i\sqrt{5}, -5+3x_1)^T$$

является устойчивым решением однородной задачи (4)–(5). Последнее означает, что задача (4)–(5) не является однозначно разрешимой при всех ξ'.

Теорема доказана.

Список литературы

1. Усс А.Т. Гомотопическая классификация трехмерных аналогов системы Коши – Римана // Доклады НАН Беларуси. 2002. Т. 46, № 5. С. 30–34.

2. Basik D. A., Kozinets R. N., Basik A. I. On the one biharmonic type elliptic system in R^3 // Математическое моделирование и новые образовательные технологии в математике: сб. материалов Международной научно-практической конференции, г. Брест, 25-27 апреля 2024 г. / под общ. ред. А. И. Басика; Брест. гос. ун-т им. А. С. Пушкина. Брест: БрГУ, 2024. С. 91–92.

3. Басик А. И., Грицук Е. В., Галуц Д. В. Нерегуляризуемость задачи Дирихле для одной бигармонической системы в R^4 // Проблемы физики, математики и техники. 2024. № 4 (61). С. 40–44.

4. Гахов Ф. Д. Краевые задачи. 3-е изд., перераб. и доп. М.: Наука, 1977. 640 с.

5. Шевченко В. И. Гомотопическая классификация задач Римана – Гильберта для голоморфного вектора // Математическая физика: Республиканский межведомственный сборник. Киев, 1975. Вып. 17. С. 184–186.

6. Агранович М. С., Дынин А. С. Общие краевые задачи для эллиптических систем в многомерной области // Доклады АН СССР. 1962. Т. 146, № 3. С. 511–514.

7. Басик А. И., Грицук Е. В., Грицук Т. А. Задача Римана – Гильберта для эллиптических систем ортогонального типа в R^3 // Веснiк Нацыянальнай акадэмii навук Беларусi. Серыя фiзiка-матэматычных навук. 2020. Т. 56, № 1. С. 7–16.

8. Гельфанд И. М. Об эллиптических уравнениях // Успехи математических наук. 1960. Т. 15, вып. 3. С. 121–132.

Научное издание

МАТЕМАТИКА И ЕЕ ПРИЛОЖЕНИЯ В СОВРЕМЕННОЙ НАУКЕ И ПРАКТИКЕ

Сборник научных статей
XV Международной научно-практической конференции
студентов и аспирантов

11-12 апреля 2025 года

Редактор *С. П. Тарасова*
Компьютерная вёрстка и макет *А. Е. Джиоевой*

Подписано в печать 15.10.2025. Формат 60x84 1/16. Бумага офсетная.
Усл. печ. л. 21,3. Уч.-изд. л. 21,1. Тираж 100 экз. Заказ 45.
Юго-Западный государственный университет.
305040, г. Курск, ул. 50 лет Октября, 94.
Отпечатано в ЮЗГУ.