

УДК 372016:53

В. А. ПЛЕТЮХОВ, О. А. СЕМЕНЮК

Беларусь, Брест, БрГУ имени А. С. Пушкина

ТЕНЗОРНАЯ МАССА И АНИЗОТРОПНЫЙ ХАРАКТЕР ИНЕРТНЫХ СВОЙСТВ РЕЛЯТИВИСТСКИХ ТЕЛ

Понятие инертности тела (не путать с инерцией!) является одним из важнейших понятий динамики. В классической (нерелятивистской) механике смысл инертности раскрывается при рассмотрении второго закона Ньютона

$$\frac{d}{dt}(m\vec{v}) = \vec{F}, \quad (1)$$

где положительный параметр m обладает следующими свойствами:

а) для данного тела m является константой, не зависящей от времени, модуля скорости тела и действующей на него силы (свойство инвариантности);

б) m является скалярной по отношению к преобразованиям поворотов величиной, т. е. не зависит от направления скорости тела и действующей на него силы (свойство изотропности).

Параметр m называется **массой** тела, иногда его называют **классической массой**.

В силу свойства (а) уравнение (1) можно переписать в виде

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{F} \quad \text{или} \quad m\vec{a} = \vec{F}, \quad (2)$$

где $\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt}$ – ускорение тела.

Под инертностью тела понимается его способность приобретать определенное ускорение (изменять скорость) под действием данной силы. В качестве естественной количественной меры инертности в уравнениях (1) и (2) выступает масса m , которую по указанной причине называют еще **инертной массой**. В силу свойства массы (б) инертность тела носит изотропный характер, т. е. ускорение тела не зависит от угла между направлениями скорости тела и действующей на него силы, причем в каждый момент времени $\vec{a} \uparrow\uparrow \vec{F}$.

В специальной теории относительности (далее – СТО) второй закон Ньютона (1) трансформируется и приобретает вид

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{m\vec{v}}{\sqrt{1-\beta^2}} \right) = \vec{F} \quad \left(\beta = \frac{v}{c} \right). \quad (3)$$

Уравнение (3) называется трехмерным релятивистским уравнением движения.

Очевидно, что (3) не может быть представлено в форме (2), где явно фигурирует ускорение. Отсюда следует, что скалярный параметр m при больших скоростях не является коэффициентом пропорциональности между силой и ускорением, т. е. не может служить количественной мерой инертности в классическом смысле. Поэтому возникает вопрос, можно ли в СТО найти подходящую замену понятию классической инертной массы. Другими словами, можно ли ввести в (3) такую математическую конструкцию, которая выступала бы в качестве «коэффициента пропорциональности» между силой и ускорением и давала бы наглядное представление об инертных свойствах быстро движущегося тела без решения сложных дифференциальных уравнений.

Для ответа на поставленный вопрос раскроем левую часть уравнения (3), выполнив в ней операцию дифференцирования по времени. Получим:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\frac{m\vec{v}}{\sqrt{1-\beta^2}} \right) &= \frac{m}{\sqrt{1-\beta^2}} \frac{d\vec{v}}{dt} + \frac{m\vec{v} \left(\vec{v}, \frac{d\vec{v}}{dt} \right)}{c^2 (1-\beta^2)^{3/2}} = \\ &= \frac{m}{\sqrt{1-\beta^2}} \left(1 + \frac{\vec{v} \cdot \vec{v}}{c^2 (1-\beta^2)} \right) \vec{a} = \frac{m}{\sqrt{1-\beta^2}} \left(1 + \frac{\vec{\beta} \cdot \vec{\beta}}{(1-\beta^2)} \right) \vec{a}. \end{aligned} \quad (4)$$

Здесь $\vec{\beta} = \frac{\vec{v}}{c}$, $(\vec{v}, \frac{d\vec{v}}{dt}) = (\vec{v}, \vec{a})$ – скалярное произведение; $\vec{v} \cdot \vec{v}, \vec{\beta} \cdot \vec{\beta}$ – прямое (диадное) произведение векторов. Если представить векторы $\vec{F}$ и $\vec{a}$ в виде столбцов

$$\vec{F} = \begin{pmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{pmatrix}, \quad \vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}, \quad (5)$$

то диада $\vec{\beta} \cdot \vec{\beta}$ представляет собой матрицу

$$\vec{\beta} \cdot \vec{\beta} = \begin{pmatrix} \beta_1^2 & \beta_1\beta_2 & \beta_1\beta_3 \\ \beta_2\beta_1 & \beta_2^2 & \beta_2\beta_3 \\ \beta_3\beta_1 & \beta_3\beta_2 & \beta_3^2 \end{pmatrix}. \quad (6)$$

В преобразованиях (4) использовано свойство диады

$$(\vec{a} \cdot \vec{b}) \vec{c} = \vec{a} (\vec{b}, \vec{c}). \quad (7)$$

С учетом (4) уравнение (3) принимает вид

$$\vec{F} = \mu \vec{a}, \quad (8)$$

где $\vec{F}$ и $\vec{a}$ – трехмерные вектор-столбцы (5), μ – матрица 3×3 вида

$$\mu = \frac{m}{\sqrt{1 - \beta^2}} \left(1 + \frac{\vec{\beta} \cdot \vec{\beta}}{1 - \beta^2} \right). \quad (9)$$

В индексных обозначениях будем соответственно иметь:

$$F_i = \sum_{j=1}^3 \mu_{ij} a_j, \quad (10)$$

где

$$\mu_{ij} = \frac{m}{\sqrt{1 - \beta^2}} \left(\delta_{ij} + \frac{\beta_i \beta_j}{1 - \beta^2} \right) \quad (11)$$

и по повторяющимся индексам подразумевается суммирование.

Уравнения (8), (10) можно обратить:

$$\vec{a} = \mu^{-1} \vec{F}, \quad a_i = \sum_{j=1}^3 \mu_{ij}^{-1} F_j, \quad (12)$$

где обратная матрица μ^{-1} имеет вид

$$\mu^{-1} = \frac{\sqrt{1 - \beta^2}}{m} (1 - \vec{\beta} \cdot \vec{\beta}), \quad \mu_{ij}^{-1} = \frac{\sqrt{1 - \beta^2}}{m} (\delta_{ij} - \beta_i \beta_j). \quad (13)$$

Очевидно, что именно тензор-матрица μ , выступающая в качестве «коэффициента пропорциональности» между векторами силы и ускорения, адекватно отражает смысл понятия «мера инертности» в релятивистской динамике. Тензорный характер этой величины означает, что инертность релятивистского тела не является изотропным свойством.

В случае покоящегося или медленно движущегося тела тензорная масса μ_{ij} предельным образом переходит в классическую скалярную

инвариантную массу m (она же масса покоя), являющуюся мерой инертности тела в нерелятивистском приближении.

Тензорные соотношения (10)–(13) можно переписать в более доступной для учащихся и студентов векторной форме, не вводя явно в рассмотрение тензорную массу, а именно [1]:

$$\vec{F} = \frac{m}{\sqrt{1-\beta^2}} \left(\vec{a} + |\vec{a}| \frac{\beta^2}{1-\beta^2} \vec{v}_0 \cos \alpha \right), \quad (14)$$

$$\vec{a} = \frac{\sqrt{1-\beta^2}}{m} \left(\vec{F} - |\vec{F}| \beta^2 \vec{v}_0 \cos \varphi \right), \quad (15)$$

где $\vec{v}_0$ – единичный вектор, задающий направление скорости тела в момент действия силы, α – угол между направлениями ускорения и скорости, φ – угол между направлениями силы и скорости.

Из формул (14), (15) можно извлечь важную информацию об инертных свойствах релятивистского тела, не прибегая к решению дифференциального уравнения (3). В частности:

- модуль ускорения зависит не только от модуля силы, но и от скорости, которой обладает тело в момент действия силы;
- модуль ускорения зависит от угла между направлениями силы и скорости;
- направления ускорения и силы не совпадают, исключение составляют лишь два случая, когда $\vec{F} \uparrow\uparrow \vec{v}$ и $\vec{F} \perp \vec{v}$.

В первом случае тензорные уравнения (10) – (13) и эквивалентные им векторные уравнения (14), (15) принимают вид:

$$\vec{F} = \frac{m}{(1-\beta^2)^{3/2}} \vec{a}, \quad \vec{a} = \frac{(1-\beta^2)^{3/2}}{m} \vec{F}. \quad (16)$$

Здесь в качестве меры инертности тела выступает скалярная величина

$$m_{\parallel} = \frac{m}{(1-\beta^2)^{3/2}}, \quad (17)$$

называемая продольной массой [2, с. 45–48].

Во втором случае, когда $\vec{F} \perp \vec{v}$, из (14), (15) следует:

$$\vec{F} = \frac{m}{\sqrt{1-\beta^2}} \vec{a}, \quad \vec{a} = \frac{\sqrt{1-\beta^2}}{m} \vec{F}. \quad (18)$$

Коэффициент пропорциональности между $\vec{a}$ и $\vec{F}$ в (18)

$$m_{\perp} = \frac{m}{\sqrt{1 - \beta^2}} \quad (19)$$

естественно назвать поперечной массой [2, с. 45–48]. Данный случай реализуется, когда тело движется по дуге окружности, например при движении заряженных частиц в магнитном поле.

Отметим также, что с учетом обозначения (19) знаменитая эйнштейновская формула для полной релятивистской энергии тела

$$E = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - \beta^2}} \quad (20)$$

может быть переписана в виде

$$E = m_{\perp} c^2. \quad (21)$$

Эта формула устанавливает связь между полной энергией и инертностью тела, соответствующей его движению по окружности (связь между энергией и поперечной массой). Обычно приводимая в современной научной и учебно-методической литературе формула

$$E_0 = mc^2 \quad (22)$$

является нерелятивистским пределом (20), (21).

Подведем краткий итог. В релятивистской механике количественная мера инертности тел является тензорной величиной (тензорная масса). Тензорный характер релятивистской массы означает, что инертность не является изотропным свойством. Указанная неизотропность обусловлена тем, что движущееся тело создает в пространстве выделенное направление, совпадающее с направлением скорости тела в данный момент времени. В то же время адекватное и достаточно полное представление об инертных свойствах релятивистских тел можно получить и без явного введения тензорной массы, используя векторные формулы (14), (15).

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Плетюхов, В. А. Второй закон Ньютона и релятивистская масса / В. А. Плетюхов // Фізика. – 2018. – № 2. – С. 18–21.
2. Эйнштейн, А. Собрание научных трудов : в 4 т. / А. Эйнштейн. – М. : Наука, 1965–1967. – Т. 1. – 1965. – 700 с.