УДК 372.85(035.3)

Н. И. КОВАЛЕВИЧ
Беларусь, Брест, БОИРО

ПЛАНИМЕТРИЧЕСКАЯ ЗАДАЧА: РАЗЛИЧНЫЕ СПОСОБЫ РЕШЕНИЯ

Решение математических задач различными методами способствует:

- актуализации определённых предметных знаний;
- формированию положительной внутренней мотивации учащихся;
- формированию умения учащихся составлять, на основе опорных, более сложные задачи;
- пополнению банка действенных приемов в работе над математической задачей;
- формированию синтетическо-аналитического стиля мышления обучаемых;
- системному усвоению учащимися предметного содержания;
- организации самоконтроля за процессом работы над задачей;
- реализации принципа наглядности в обучении (в контексте излагаемого – иллюстрируются методы решения планиметрических задач: алгебраический, тригонометрический, геометрический, комбинированный) и др.

Поиск различных способов – само по себе занятие увлекательное и познавательное, формирующее мотивационную основу усвоения содержания школьного курса математики.

Общепринятой классификации методов решения планиметрических задач не существует, но обозначенная нами выше с практической точки зрения удобна.

При использовании алгебраического метода составляются уравнения или системы уравнений, содержащие заданные и искомые величины. Интерпретация полученных решений уравнений, систем уравнений приводит к желаемому результату. При использовании тригонометрического метода в качестве опорных элементов выбираются углы, используются тригонометрические формулы и т. п., что в конечном итоге позволяет получить желаемый результат.

При решении задач геометрическим методом требуемые утверждения выводятся посредством логических рассуждений из ряда теоретических положений. К геометрическим методам обычно относят метод геометрических преобразований: выполняются поворот, центральная и осевая симметрии, гомотетия, инверсия, параллельный перенос и др.; при использовании методов этой группы часто используются дополнительные построения: построение описанной, вписанной окружностей треугольника, четырехугольника, проведение через заданную точку прямой, параллельной (перпендикулярной) данной прямой и т. д.

При использовании комбинированного подхода ряд этапов решения реализуется геометрически, а ряд – алгебраически.

В процессе решения планиметрических задач различными способами формируется широкий спектр истинных суждений, способствующих осознанному, глубокому, прочному, обобщенному, системному усвоению математического содержания. Например, доказать, что две прямые параллельны между собой, можно, установив, что обе прямые перпендикулярны к третьей прямой; каждая из них порознь параллельна третьей прямой и т. д.; для того, чтобы все вершины четырехугольника $ABCD$ располагались на одной окружности, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось одно из равенств:

1) $\angle B + \angle D = 180°$;

2) $\angle ABD = \angle ACD$;

3) $FA \cdot FC = FB \cdot FD$, где F – точка пересечения диагоналей четырехугольника $ABCD$;

4) $NA \cdot NB = ND \cdot NC$, где N – точка пересечения прямых AB и CD; катет прямоугольного треугольника равен сумме радиуса вписанной окружности и радиуса вневписанной окружности, касающейся этого катета; площадь треугольника выражается формулой $S = (p - a)r_a$, где r_a – радиус вневписанной окружности, касающейся стороны, равной a, p – полупериметр треугольника и т. д.

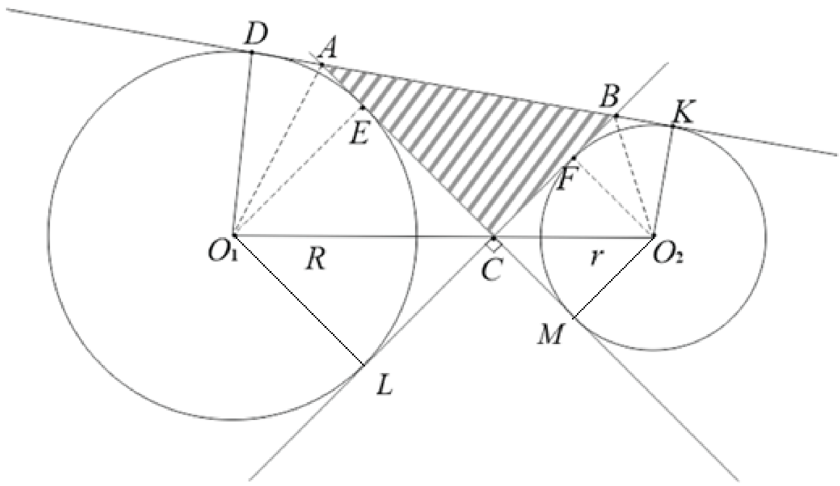
Приведем три способа (алгебраический, тригонометрический и геометрический) решения одной задачи.

Задача. *Даны две непересекающиеся окружности с центрами в точках O_1 и O_2 радиусов R и r соответственно. Их общие внутренние касательные ME и LF взаимно перпендикулярны* (*рисунок*). *Найти площадь треугольника ABC, образованного этими касательными и общей внешней касательной DK окружностей.*

Решение. Обозначим через S искомую площадь $\triangle ABC$.

I способ. Пусть $AD = x$, $BK = y$. Тогда $AE = x$ и $FB = y$ – как отрезки касательных прямых, проведенные из одной точки к одной окружности. По условию, $\angle ACB = 90^\circ$.

Заметим, что $\angle O_1EC = O_1LC = 90^\circ$ как углы между касательной и радиусом, проведенным в точку касания. Тогда O_1ECL является прямоугольником. Поскольку $O_1E = O_1L = R$, то O_1ECL – квадрат со стороной R. Аналогично доказывается, что четырехугольник O_2FCM – квадрат со стороной r.



Рисунок

$MA = AK$ и $LB = BD$ как отрезки касательных прямых, проведенных из одной точки к одной окружности. Таким образом, получим систему уравнений

$$\begin{cases} x + R + r = AB + y, \\ y + R + r = AB + x. \end{cases}$$

Вычитая из первого уравнения второе, получим, что

$$x - y = y - x \quad \Leftrightarrow \quad x = y.$$

Следовательно, $AB = R + r$.

Согласно теореме Пифагора для $\triangle ABC$, будем иметь

$$AB^2 = AC^2 + BC^2 \quad \Leftrightarrow \quad (R+r)^2 = (x+R)^2 + (x+r)^2 \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad x^2 + x(R+r) = Rr.$$

Окончательно получим

$$S=\frac{AC\cdot CB}{2}=\frac{(x+R)(x+r)}{2}=\frac{x^2+x(R+r)+Rr}{2}=Rr.$$

II способ. Обозначим $\angle DO_1E=\alpha$. Тогда

$$\angle DAE=180^\circ-\alpha,\quad \angle CAB=\alpha,\quad \angle ABC=90^\circ-\alpha,$$

$$\angle FBK=90^\circ+\alpha,\quad \angle FO_2K=90^\circ-\alpha.$$

Поэтому

$$S=\frac{AC\cdot CB}{2}=\frac{(R+AE)(r+BF)}{2}=\frac{(R+R\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2})(r+r\operatorname{tg}(45^\circ-\frac{\alpha}{2}))}{2}=$$

$$=\frac{Rr}{2}\left(1+\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\right)\left(1+\frac{1-\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{1+\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}\right)=\frac{Rr}{2}\left(1+\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}+1-\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\right)=Rr.$$

III способ. Пусть $BC=a$, $AC=b$, $AB=c$ и p – полупериметр треугольника ABC. Т. к. окружность с центром в точке O_1 и радиуса R является вневписанной для $\triangle ABC$, касающаяся стороны AC, то $S=(p-b)R$. Аналогично получим, что $S=(p-a)r$.

Пользуясь равенством $a^2+b^2=c^2$, найдем, что

$$R=\frac{S}{p-b}=\frac{ab}{a+c-b}=p+\frac{ab}{a+c-b}-\frac{a+b+c}{2}=$$

$$=p+\frac{2ab-(a+c)^2+b^2}{2(a+c-b)}=p+\frac{2ab-2ac-2a^2}{2(a+c-b)}=p-a,$$

т. е. $R=p-a$. Отсюда следует, что

$$S=r(p-a)=Rr.$$

Ответ: Rr.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Азаров, А. И. Математика для старшеклассников. Методы решения планиметрических задач. 8–11 классы : пособие для учащихся учреждений, обеспечивающих получение общ. сред. образования / А. И. Азаров, В. В. Казаков, Ю. Д. Чурбанов. – Минск : Аверсэв, 2005. – 336 с.