

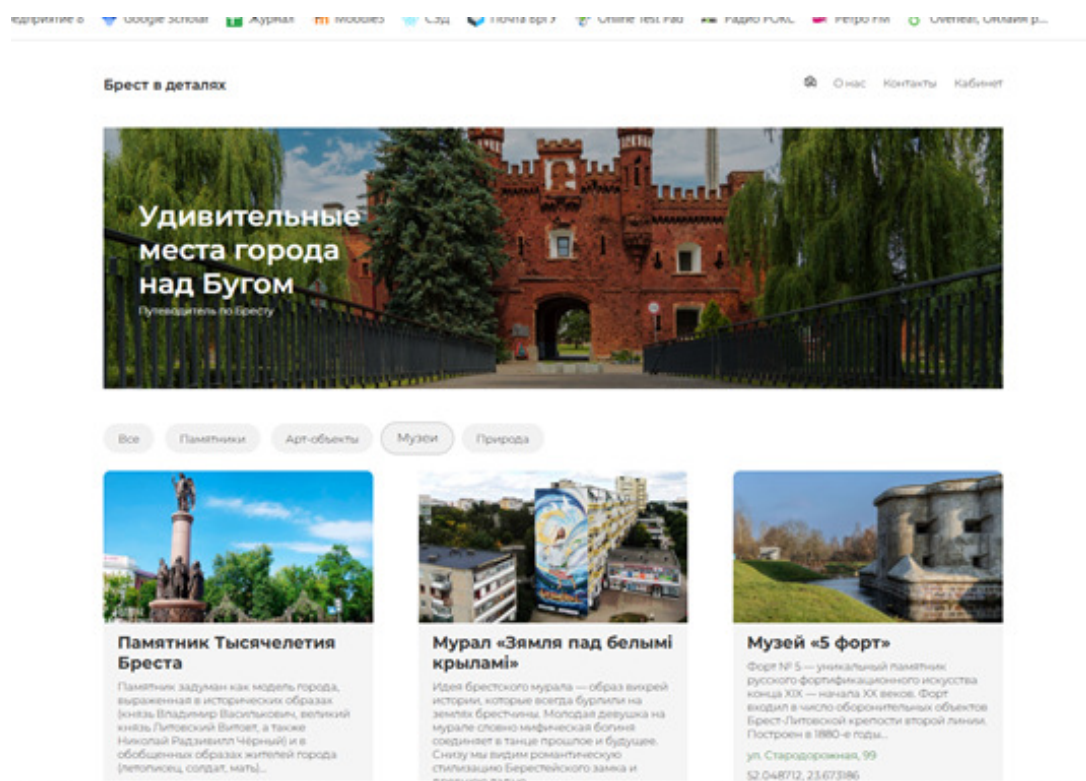


Рисунок – Сайт «Удивительные места города над Бугом»

УДК 371:517.0

М. А. КАЛАВУР

Беларусь, Брэст, БрДУ имя А. С. Пушкіна

ДЫФЕРЭНЦЫЯЛЬНЫЯ РАЎНАННІ НА ФАКУЛЬТАТЫВАХ У СЯРЭДНЯЙ ШКОЛЕ

З паняццем другой вытворнай школьнікі часткова знаёміліся пры вывучэнні прымянення вытворнай у фізіцы. Паўторнае вяртанне да гэтага пытання звязана ў асноўным з вывучэннем гарманічных ваганняў.

Паняцце другой вытворнай замацоўваецца шляхам самастойнага разбору рашэнняў прыкладаў на знаходжанне вытворных другога парадку для трыганаметрычных функцый. Абагульніўшы рашэнні такіх прыкладаў, карысна заўважыць, што:

$$\begin{aligned}\sin'' x &= (\sin' x)' = (\cos x)' = -\sin x, \\ \cos'' x &= (\cos' x)' = (-\sin x)' = -\cos x.\end{aligned}$$

Другая вытворная як ад сіноса, так і ад косіноса ёсць тая ж самая функцыя, толькі ўзятая з процілеглым знакам, г. зн. абедзве функцыі пры ўсіх значэннях аргумента x задавальняюць суадносінам:

$$f''(x) = -f(x).$$

Гэта спецыфічная ўласцівасць сіноса і косіноса.

Матэрыял аб дыферэнцыяльным раўнанні гарманічных ваганняў можна выкласці ў выглядзе лекцыі, у ходзе якой звярнуць увагу на наступнае.

У алгебры для знаходжання невядомых велічынь складваюць раўнанне, якое звязвае невядомую велічыню з данымі. Рашаючы раўнанне, знаходзяць значэнні шуканай велічыні. Аналагічна гэтаму ў матэматычным аналізе для знаходжання невядомай функцыі па дадзеных яе ўласцівасцях таксама складваюць раўнанне, якое звязвае невядомую функцыю і велічыні, якія задаюць яе ўласцівасці. Так як уласцівасці функцыі выражаюцца праз яе вытворныя таго ці іншага парадку, то прыходзяць да суадносін, якія звязваюць невядомую функцыю і яе вытворныя. Гэтыя суадносіны называюцца дыферэнцыяльным раўнаннем. Рашаючы яго, знаходзяць шуканую функцыю.

Такім чынам, апарат вытворнай дазваляе даследаваць уласцівасці зададзенай функцыі (вызначыць прамежкі яе нарастання і спадання, пункты максімуму і мінімуму, напрамак увогнутасці і выпукласці крывой на пэўным лікавым прамежку і г. д.), а апарат дыферэнцыяльных раўнанняў дазваляе рашаць адваротную задачу знаходзіць функцыю па зададзеных уласцівасцях.

Па сваіх практычных дадатках дыферэнцыяльныя раўнанні маюць вельмі вялікую значнасць у жыцці, паколькі, рашаючы іх, г. зн. знаходзячы невядомую функцыю па яе ўласцівасцях, устанаўліваем закон, па якім ажыццяўляецца той ці іншы працэс (вытворчы, фізічны, хімічны, біялагічны і г. д.). Кожны вытворчы працэс мае сваю спецыфічную праблематыку, таму, натуральна, і апісваецца сваімі дыферэнцыяльнымі раўнаннямі.

Не існуе якіх-небудзь агульных правіл для складвання дыферэнцыяльных раўнанняў па ўмове канкрэтнай задачы. Важна, каб выконвалася наступнае патрабаванне: умова задачы павінна быць такой, каб можна было класіфікаваць суадносіны, якія звязваюць пераменную, функцыю гэтай пераменнай і яе вытворныя.

Знаёмячы вучняў з гарманічнымі ваганнямі, указваем, што калі ўдарыць па камертоне, то чуваць заўсёды гук аднаго тону незалежна ад сілы ўдару. Аналагічна, націскаючы на адну і тую ж клавішу піяніна, чуем гукі адной і той жа вышыні незалежна ад сілы націску. Гэтыя і шматлікія падобныя ім з’явы можна зразумець, разглядаючы цела, якое вагаецца, па аналогіі з ваганнем пругкай спружыны. Справа ў тым, што дыферэнцыяльныя раўнанні, якія апісваюць ваганні камертона, струны піяніна і г. д., набліжана супадаюць з раўнаннем руху пругкай спружыны, г. зн. з раўнаннем $f''(t) = -\omega^2 f(t)$, дзе аргумент t выражае час вагання, $f(t)$ – велічыню зруху ад першапачатковага становішча.

Пры разглядзе формулы перыяду гарманічнага вагання $T = \frac{2\pi}{\omega}$ звяртаем увагу школьнікаў на такі дзіўны факт. У гэтую формулу ўваходзіць лік π – гэта ўказвае на сувязь гарманічнага вагання і вярчальнага руху па акружнасці. Калі пункт рухаецца па акружнасці так, што велічыня яго хуткасці пастаянная, то кожная праекцыя гэтага пункта на восі дэкартавай сістэмы каардынат выконвае гарманічныя ваганні. Гэта настаўнік можа паказаць школьнікам наглядна з дапамогай трыганаметра.

Доказ таго, што сума двух гарманічных ваганняў аднолькавай частаты з’яўляецца гарманічным ваганнем той жа частаты, заснавана на ўласцівасці рашэнняў дыферэнцыяльнага раўнання $f''(t) = -\omega^2 f(t)$: сума $f_1 + f_2$ двух рашэнняў f_1 і f_2 гэтага раўнання таксама з’яўляецца яго рашэннем.

Усе рашэнні дыферэнцыяльнага раўнання $f''(t) = -\omega^2 f(t)$ выражаюцца функцыямі выгляду $f(t) = A \cos(\omega t + \varphi)$, дзе A і φ – адвольныя канстанты. Такім чынам, у агульнае рашэнне дыферэнцыяльных раўнанняў любога гарманічнага вагання ўваходзяць дзве адвольныя пастаянныя A і φ . Таму для знаходжання прыватнага рашэння (г. зн. рашэння канкрэтнай задачы) неабходна задаць пачатковыя ўмовы: у пачатковы момант задаць значэнне функцыі і яе вытворнай. Напрыканцы адзначаем, што пры выкладанні пытання “Паняцце аб дыферэнцыяльным раўнанні. Гарманічныя ваганні” не трэба абцяжарваць школьнікаў разглядам шматлікіх тэхнічных фактаў, якія звязаны з гарманічнымі вагальнымі рухамі. Не трэба з імі вымалёўваць шматлікія графікі трыганаметрычных функцый для гэтых выпадкаў. Важна дабіцца прыняцковага разумення пытання. Пабудову графікаў гарманічных ваганняў

можна выконваць на аснове даследавання функцыі па стандартнай схеме. Атрыманыя матэматычныя веды па гэтай тэме ў значнай ступені аблегчаць разуменне шматлікіх раздзелаў фізікі, біялогіі, хіміі.

Разгледзім прыклады практыкаванняў на дыферэнцыяльныя раўнанні (далей – ДР).

Прыклад 1. Знайдзіце рашэнне ДР

$$f''(t) = \frac{1}{16}f(t),$$

якое адказвае наступным пачатковым умовам: $f(0) = 4$, $f'(0) = \sqrt{3}$.

Рашэнне. Рашэнне дадзенага ДР гарманічнага вагання ў агульным выглядзе можа быць запісана так: $f(t) = A \cos(\frac{1}{4}t + \varphi)$. Знойдзем $f'(t)$:

$$f'(t) = -A \sin\left(\frac{1}{4}t + \varphi\right) \cdot \frac{1}{4} = -\frac{A}{4} \sin\left(\frac{1}{4}t + \varphi\right),$$

тады, згодна з дадзенымі пачатковымі умовамі, маем:

$$\begin{aligned} f(0) &= A \cos \varphi, & A \cos \varphi &= 4; \\ f'(0) &= -\frac{A}{4} \sin \varphi, & -\frac{A}{4} \sin \varphi &= \sqrt{3}, & A \sin \varphi &= -4\sqrt{3}. \end{aligned}$$

Атрымаем сістэму раўнанняў:

$$\begin{cases} A \cos \varphi = 4, \\ A \sin \varphi = -4\sqrt{3}. \end{cases}$$

Адкуль знаходзім A і φ :

$$\frac{A \cos \varphi}{A \sin \varphi} = \frac{4}{-4\sqrt{3}}, \quad \operatorname{ctg} \varphi = -\frac{1}{\sqrt{3}}, \quad \varphi = \frac{2\pi}{3}, \quad A \cos \frac{2\pi}{3} = 4, \quad A = -8.$$

Рашэннем дадзенага ДР будзе функцыя $f(t) = -8 \cos(\frac{1}{4}t + \frac{2\pi}{3})$. Пасля прымянення формул прывядзення прымае выгляд

$$f(t) = 8 \sin\left(\frac{1}{4}t + \frac{\pi}{6}\right).$$