

где  $\chi_\gamma(\zeta) = (1-|\zeta|)^{-\frac{\gamma}{pq}}; \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1, \beta > -1, 0 < \frac{\gamma}{q} < \beta p + 1, \eta \geq \beta - 2 + \frac{3}{p} - \frac{\gamma}{pq};$   
 $\sigma > 2 - \frac{\gamma}{q^2}, c_3 = \text{const} > 0.$

Подобные оценки производной конформно отображающей функции применяются при решении различного рода задач в комплексном и гармоническом анализе: теории операторов, теории приближений, описании функционалов и построении базисов в различных пространствах функций.

## СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Голузин, Г. М. Геометрическая теория функций комплексного переменного / Г. М. Голузин. – М. : Наука, 1966. – 628 с.
2. Альфорс, Л. Лекции по квазиконформным отображениям / Л. Альфорс. – М. : Мир, 1969. – 133 с.
3. Махина, Н. М. Некоторые оценки конформно отображающей функции в областях с кусочно-гладкой и асимптотически конформной границей / Н. М. Махина // Вестник Омского университета. – 2018. – Т. 23, № 3. – С. 47–51.
4. Махина, Н. М. Некоторые свойства классов ВМОА и интегральные оценки конформно отображающей функции в областях с границей типа Лаврентьева / Н. М. Махина // Научные ведомости Белгородского государственного университета. Серия: Математика. Физика. – 2019. – Т. 51, № 4. – С. 487–495.

УДК 512.542

**В. И. МУРАШКО**

Беларусь, Гомель, ГГУ имени Ф. Скорины

## ПЕРСПЕКТИВЫ РАЗВИТИЯ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ ТЕОРИИ КЛАССОВ КОНЕЧНЫХ ГРУПП

Все рассматриваемые группы конечны. Теория групп находит применения как внутри самой математики (геометрия, топология, теория чисел, дифференциальные уравнения и др.), так и за ее пределами в информатике, химии, физике, финансах и эпидемиологии [1].

Основной задачей любой содержательной математической теории является изучение структуры ее объектов для последующей их классификации. В рамках теории групп существуют несколько методов решения данной задачи. Одним из них является метод классов групп. Его суть заключается в построении классов групп, изучении свойств групп в данном классе, распознавании принадлежности группы данному классу и выделении в каждой группе подгрупп, несущих информацию, связанную с данным классом групп. Результаты данного метода представлены в ряде монографий (Л. А. Шеметкова, А. Н. Скибы, К. Дёрка и Т. Хоукса, Го Вэнбиня, А. Баллестера-Болиншеса и Л. Эсквейро и др.). Отметим, что в настоящее время данный метод продолжает свое активное развитие.

Возникающие в приложениях группы могут иметь достаточно большой порядок. Например, группа преобразований кубика Рубика имеет порядок 43252003274489856000. Поэтому актуальным является вопрос построения эффективных алгоритмов изучения строения группы.

В настоящее время имеется достаточное число эффективных алгоритмов, позволяющих находить классические характеристики и подгруппы группы [2]. Однако до недавнего времени вычислительной теории классов групп уделялось мало внимания. Так, в работе [3] предложены алгоритмы вычисления  $\mathfrak{F}$ -нормализаторов,  $\mathfrak{F}$ -проекторов и  $\mathfrak{F}$ -корадикалов для разрешимой группы и насыщенной формации  $\mathfrak{F}$ . В работе [4] предложены алгоритмы вычисления  $\mathfrak{F}$ -проекторов,  $\mathfrak{F}$ -инъекторов,  $\mathfrak{F}$ -радикалов и  $\mathfrak{F}$ -корадикалов для разрешимых групп. Однако даже автором этой работы отмечалось, что данные алгоритмы могут быть улучшены при использовании свойств  $\mathfrak{F}$ .

Из вышеизложенного следует, что вычислительная теория классов конечных групп требует дальнейшего развития. Первым шагом является переход от разрешимых групп к произвольным. Одним из классических способов задания формаций групп  $\mathfrak{F}$  является их определение с помощью действия  $\mathfrak{F}$ -группы на ее главном ряде. Таким образом определяются формации нильпотентных, разрешимых, сверхразрешимых и квазинильпотентных групп, локальные, Бэр-локальные и ступенчатые формации.

**Определение** ([5; 6]). Пусть  $f$  – функция, присваивающая 0 или 1 каждой группе  $G$  и ее главному фактору  $H/K$  такая, что

1.  $f(H/K, G) = f(M/N, G)$ , если  $H/K$  и  $M/N$  являются  $G$ -изоморфными главными факторами  $G$ ;

2.  $f(H/K, G) = f((H/N)/(K/N), G/N)$  для любой  $N \trianglelefteq G$  такой, что  $N \leq K$ . Такие функции  $f$  будем называть функциями главных факторов. Обозначим через  $\mathcal{C}(f)$  класс групп ( $G \mid G \simeq 1$  или  $f(H/K, G) = 1$  для любого главного фактора  $H/K$  группы  $G$ ).

3. Через  $Z(G, f)$  будем обозначать наибольшую нормальную подгруппу группы  $G$ , что  $f(H/K, G) = 1$  для любого главного фактора  $H/K$  группы  $G$  ниже ее.

Подгруппа  $Z(G, f)$  совпадает с  $\mathfrak{X}$ -гиперцентром  $Z_{\mathfrak{X}}(G)$  группы  $G$ , если  $f$  проверяет главный фактор на  $\mathfrak{X}$ -центральность.

Пусть  $f_1$  проверяют абелевость  $H/K$  и  $f_2$  проверяют разрешимость  $G/C_G(H/K)$ . Тогда

$$\mathcal{C}(f_1) = \mathcal{C}(f_2) = \mathfrak{S},$$

$Z(G, f_1)$  и  $Z(G, f_2)$  – разрешимые радикал и гиперцентр  $G$ . Полупрямое произведение знакопеременной группы  $A_5$  степени 5 и ее точного неприводимого модуля над  $\mathbb{F}_5$  является примером группы, для которой данные подгруппы различны. Нами доказана

**Теорема** ([5; 6]). *Предположим, что  $f(H/K, G)$  можно вычислить за полиномиальное время от  $n$  для любой группы перестановок  $G$  степени  $n$  и любого  $n$ . Тогда  $\mathfrak{F}$ -корадикал и  $\mathfrak{F}$ -гиперцентр группы  $G/K$  можно вычислить за полиномиальное время для любых*

$$K \trianglelefteq G \leq S_n.$$

**Следствие** ([5; 6]). *Пусть  $\mathfrak{F}$  – локальная формация, определяемая функцией  $f$ . Предположим, что  $(G/K)^{f(p)}$  может быть вычислен за полиномиальное время для любых  $K \trianglelefteq G \leq S_n$  и простого  $p$ . Тогда за полиномиальное время можно вычислить  $Z_{\mathfrak{F}}(G/K)$  и  $(G/K)^{\mathfrak{F}}$  для любых  $K \trianglelefteq G \leq S_n$ .*

Алгоритмы, построенные при доказательстве теоремы и ее следствия, являются теоретическими. Они сводятся к известным алгоритмам в группах перестановок. Отметим, что не все из них в полной мере имплементированы в системы компьютерной алгебры. Поэтому важной перспективой вычислительной теории классов конечных групп является имплементация данных алгоритмов.

Вычисления в группах зависят от того, как группа задана. Построенные при доказательстве теоремы алгоритмы верны для любого задания группы, но их эффективность доказана только для групп перестановок. Поэтому еще одной перспективой вычислительной теории классов групп является нахождение эффективных алгоритмов для каждого из способов задания группы. В докладе будут также обсуждаться и иные результаты и перспективы развития вычислительной теории классов групп.

*Работа выполнена при финансовой поддержке БРФФИ-РНФ (проект Ф23РНФ-237).*

### СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Liu, X. Interdisciplinary applications of finite group theory – From epidemic modeling to financial market analysis / X. Liu, Y. Wu, H. Yin, H. Zhao // Theoretical and Natural Science. – 2024. – Vol. 43, No 1. – P. 253–261.
2. Seress, Á. Permutation group algorithms / Á. Seress. – Cambridge : Cambridge University Press, 2003. – 264 p.
3. Eick, B. Computing subgroups by exhibition in finite solvable groups / B. Eick, C. R. B. Wright // Journal of Symbolic Computation. – 2002. – Vol. 33, No 2. – P. 129–143.
4. Höfling, B. Computing projectors, injectors, residuals and radicals of finite soluble groups / B. Höfling // Journal of Symbolic Computation. – 2001. – Vol. 32, No 5. – P. 499–511.
5. Murashka, V. I. Formations of finite groups in polynomial time:  $\mathfrak{F}$ -residuals and  $\mathfrak{F}$ -subnormality / V. I. Murashka // Journal of Symbolic Computation. – 2024. – Vol. 122. – P. 154–165.
6. Murashka, V. I. Formations of finite groups in polynomial time II: the  $\mathfrak{F}$ -hypercenter and its generalizations / V. I. Murashka // Trudy Instituta Matematiki i Mekhaniki UrO RAN. – 2025. – Vol. 31, No 1. – P. 154–165.