

Лемма 2. Пусть Φ – линейный непрерывный функционал на X_α , e_ζ , g – функции, определенные в лемме 1. Тогда

$$\left| g^{(n)}(\zeta) \right| \leq A^n n^{n(1+\frac{1}{\alpha})}, \quad n \in \mathbb{Z}_+,$$

где A – некоторое положительное число, зависящее только от Φ .

Лемма 3. Пусть g – функция, определенная в лемме 1, E – некоторое замкнутое множество на T . Тогда если $g^{(k)}(\zeta) = 0$, $k \in \mathbb{Z}_+$, $\zeta \in E$, и при этом дополнительные интервалы $\{l_k\}_{k=1}^{+\infty}$ множества $E^* = \{\varphi \in [-\pi, \pi] : e^{i\varphi} \in E\}$ удовлетворяют условию (3), то функция g равна нулю тождественно, т. е. $g(z) \equiv 0$, $z \in D$.

Лемма 4. Пусть Φ – линейный непрерывный функционал на X_α , e_ζ , g – функции, определенные в лемме 1. Тогда для произвольной $f \in X_\alpha$ справедливо следующее представление

$$\Phi(f) = \lim_{\rho \rightarrow 1-0} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\rho e^{i\varphi}) g(\rho e^{i\varphi}) d\varphi.$$

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Djrbashian, A. E. Topics in the theory of spaces / A. E. Djrbashian, F. A. Shamoyan // Leipzig: Teubner-Texte zur Math. – 1988. – Vol. 105. – 200 p.
2. Шамоян, Ф. А. Введение в теорию весовых Lp -классов мероморфных функций / Ф. А. Шамоян. – Брянск : РИО БГУ, 2009. – 180 с.

УДК 517.977

О. Б. ЦЕХАН

Беларусь, Гродно, ГрГУ имени Янки Купалы

ОБ ОПЕРАТОРЕ ДЕКОМПОЗИЦИИ СИНГУЛЯРНО ВОЗМУЩЕННОЙ СИСТЕМЫ С ПОСТОЯННЫМ ЗАПАЗДЫВАНИЕМ

Пусть μ – малый параметр, $\mu \in (0, \mu^0]$, $\mu^0 \ll 1$, $p \triangleq \frac{d}{dt}$ – оператор дифференцирования, $h > 0$ – запаздывание, e^{-ph} – оператор запаздывания: $e^{-ph}z(t) = z(t-h)$, $PC([a, b]; \mathbb{R}^k)$ ($C, \overline{PC}$) – линейное пространство

кусочно-непрерывных (непрерывных, ограниченных кусочно-непрерывных) функций, отображающих интервал $[a, b]$ в k -мерное действительное пространство $\mathbb{R}^k$, $\mathcal{R}[[\mu]][\lambda]$ – кольцо полиномов от переменной λ с коэффициентами из кольца формальных степенных рядов по μ над полем $\mathcal{R}$. Для любых $r, s \in \mathbb{N}$ обозначим $\mathcal{A}_T^{r \times s}(\mu, e^{-ph})$ класс $r \times s$ -матричных операторов $\mathbf{A}$ с элементами из $C(T; \mathbb{R})[[\mu]][e^{-ph}]$, действующих из $PC([t-h, t]; \mathbb{R}^n)$ в $\mathbb{R}^n$, $M \triangleq \text{diag}\{E_{n_1}, \mu^{-1}E_{n_2}\}$, $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$, $M\mathcal{A}_T^{r \times s}(\mu, e^{-ph})$ – класс операторов вида $M \cdot \mathbf{A}$, где $\mathbf{A} \in \mathcal{A}_T^{r \times s}(\mu, e^{-ph})$.

Пусть $\mathbf{A}_i(t, e^{-ph}) = A_{i0}(t) + A_{i1}(t)e^{-ph}$, $A_{ij}(t)$, $i = 1, 2$, $j = 0, 1$, $A_m(t)$, $m = 3, 4$, – непрерывные на T матричные функции подходящих размеров, $z' = (x', y')$, $x \in \mathbb{R}^{n_1}$, $y \in \mathbb{R}^{n_2}$. Рассмотрим линейную нестационарную сингулярно возмущенную систему (СВС) с запаздыванием [1]:

$$\dot{z}(t) = \mathbf{A}(t, \mu, e^{-ph}) z(t), t \in T. \quad (1)$$

$$\mathbf{A}_\mu \triangleq \mathbf{A}(t, \mu, e^{-ph}) = M \cdot \mathbf{A}(t, e^{-ph}) \in M\mathcal{A}_T^{n \times n}(\mu, e^{-ph}), n = n_1 + n_2, \quad (2)$$

$$\mathbf{A}(t, e^{-ph}) = \begin{pmatrix} \mathbf{A}_1(t, e^{-ph}) & \mathbf{A}_2(t, e^{-ph}) \\ A_3(t) & A_4(t) \end{pmatrix} \in \mathcal{A}_T^{n \times n}(\mu, e^{-ph}).$$

В качестве пространства состояний системы (1) рассмотрим пространство $(PC[t-h, t]; \mathbb{R}^n) \times \mathbb{R}^n$.

Известны сложности исследования СВС из-за их жесткости, а также возможной высокой размерности. Чтобы снизить размерность и избежать жесткости, в [2] предложена двухэтапная процедура разделения временной шкалы двухтемповой СВС. Композиция преобразований двух этапов порождает оператор K специального вида [3] из группы преобразований Ляпунова [4]. Применение преобразования K к оператору СВС приводит к его блочной диагонализации, что соответствует расщеплению СВС на разделенные по темпам системы меньшей размерности, чем исходная, при этом, в отличие от исходной, эти подсистемы регулярным образом зависят от малого параметра. Таким образом, K является оператором регуляризирующего расщепляющего преобразования.

Однако применение преобразования K [2; 3] к оператору $\mathbf{A}(t, \mu, e^{-ph})$ (2) не приводит к его блочной диагонализации, что обусловлено зависимостью $\mathbf{A}_\mu$ от оператора запаздывания (нелокальным действием). Для систем с запаздыванием естественно рассматривать класс преобразований с запаздыванием [5]. Рассмотрим группу $\mathcal{G}_T^n(\mu, e^{-ph}) \subset \mathcal{A}_T^{n \times n}(\mu, e^{-ph})$

непрерывно дифференцируемых на T невырожденных для каждого $t \in T$ операторов $\mathbf{G}(t, \mu, e^{-ph})$, каждый из которых задает оператор преобразования элементов $\mathbf{A}^\mu \in M\mathcal{A}_T^{n \times n}(\mu, e^{-ph})$ по правилу:

$$\mathbf{G} * \mathbf{A}^\mu = \mathbf{G}^{-1} \mathbf{A}^\mu \mathbf{G} - \mathbf{G}^{-1} \dot{\mathbf{G}}.$$

В общем случае $\mathbf{G} * \mathbf{A}^\mu \notin M\mathcal{A}_T^{n \times n}(\mu, e^{-ph})$. Чтобы корректно определить действие операторов из $\mathcal{G}_T^n(\mu, e^{-ph})$ на $\mathbf{A}_\mu$ (2), погрузим класс $\mathcal{A}_T^{n \times n}(\mu, e^{-ph})$ в класс $\mathcal{A}^{n \times n}(\mu, e^{-ph}) : (PC(-\infty, t]; \mathbb{R}^n) \rightarrow \mathbb{R}^n$ матричных операторов с элементами из $\overline{PC}((-\infty, t_1], \mathbb{R})[[\mu]][[e^{-ph}]]$. Класс операторов вида $M \cdot \mathbf{A}$, $\mathbf{A} \in \mathcal{A}^{n \times n}$, обозначим $M\mathcal{A}^{n \times n}(\mu, e^{-ph})$.

Рассмотрим группу $\mathcal{G}^n(\mu, e^{-ph})$ непрерывно дифференцируемых на T невырожденных для каждого $t \in T$ операторов из класса $\mathcal{A}^{n \times n}(\mu, e^{-ph})$. В статье доказывается, что в общем случае для оператора $\mathbf{A}_\mu$ (2) не существует блочно-диагонализирующего преобразования в группе $\mathcal{G}_T^n(\mu, e^{-ph})$, но при некоторых условиях на $A_{ij}(t)$, $i = 1, 2$, $j = 0, 1$, $A_m(t)$, $m = 3, 4$, такое преобразование $\mathbf{K}$ существует в группе $\mathcal{G}^n(\mu, e^{-ph}) \supset \mathcal{G}_T^n(\mu, e^{-ph})$. Оператор преобразования $\mathbf{K}$ может быть представлен в виде асимптотического ряда по μ . Соответствующая расщепленная СВСЗ, алгебраически и асимптотически эквивалентная исходной системе с оператором $\mathbf{A}_\mu$, является системой с бесконечным запаздыванием специального вида. Обосновано асимптотическое приближение оператора $\mathbf{K} * \mathbf{A}_\mu \in M\mathcal{A}^{n \times n}$ расщепленной СВС блочно-диагональным оператором из $M\mathcal{A}_T^{n \times n}$, что соответствует расщеплению СВСЗ на не зависящие от параметра μ подсистемы с конечным запаздыванием.

Теорема. Пусть $\forall t \in T : \operatorname{Re} \lambda(A_4(t)) \leq -a < 0$; $\|A_4(t)\| \leq b$; $\|\dot{A}_4(t)\| \leq c$; элементы $A_{ij}(t)$, $i = 1, 2$, $j = 0, 1$, $A_i(t)$, $i = 3, 4$, определены, ограничены и непрерывно дифференцируемы с ограниченными производными на $(-\infty, t_1]$. Тогда для достаточно малых $\mu \in (0, \mu^0]$ существует преобразование Ляпунова с унимодулярным оператором $\mathbf{K} \in \mathcal{G}^n(\mu, e^{-ph})$ вида

$$\mathbf{K}(t, \mu, e^{-ph}) = \begin{pmatrix} E_{n_1} & \mu \mathbf{K}_{12} \\ -\mathbf{K}_{21} & E_{n_2} - \mu \mathbf{K}_{21} \mathbf{K}_{12} \end{pmatrix},$$

где $\mathbf{K}_{ij} \in \mathcal{A}^{n_i \times n_j}(\mu, e^{-ph})$, $i, j = 1, 2$, – операторы, удовлетворяющие специальным операторным уравнениям Риккати, которое преобразует

$\mathbf{A}_\mu \in M\mathcal{A}^{n \times n}$ в блочно-диагональный оператор:

$$\mathbf{K} * \mathbf{A}_\mu = M \cdot \text{diag} \{ \mathbf{A}_\xi, \mathbf{A}_\eta \} \in M\mathcal{A}^{n \times n},$$

$\mathbf{A}_\xi \in \mathcal{A}^{n_1 \times n_1}$, $\mathbf{A}_\eta \in \mathcal{A}^{n_2 \times n_2}$. Если при этом элементы $A_{ij}(t)$, $i = 1, 2$, $j = 0, 1$, $A_m(t)$, $m = 3, 4$, достаточно гладкие на $(-\infty, t_1]$, то асимптотическое (по μ) приближение для $\mathbf{K}$ можно найти в виде оператора с конечным запаздыванием.

Получены итерационные схемы для нахождения оператора расщепляющего преобразования $\mathbf{K}$ и матриц $\mathbf{A}_\xi$, $\mathbf{A}_\eta$ преобразованных систем, описано действие асимптотических приближений оператора $\mathbf{K}$ на СВСЗ.

Результаты можно применять для развития [1] при получении асимптотических аппроксимаций любого порядка решения СВСЗ, при построении асимптотических (по μ) регуляторов и наблюдателей таких систем.

Работа выполнена при поддержке Министерства образования Республики Беларусь в рамках ГПНИ «Конвергенция-2025», 1.2.04.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Цехан, О. Б. Асимптотическая аппроксимация решения одной линейной нестационарной сингулярно возмущенной системы с постоянным запаздыванием / О. Б. Цехан // Веснік Гродзенскага дзяржаўнага ўніверсітэта імя Янкі Купалы. Сер. 2, Матэматыка. Фізіка. Інфарматыка, вылічальная тэхніка і кіраванне. – 2024. – Т. 14, № 1. – С. 37–47.
2. Kokotovic, P. V. Singular Perturbations Methods in Control: Analysis and Design / P. V. Kokotovic, H. K. Khalil, J. O'Reilly. – New York : Academic Press, 1999. – 386 p.
3. Chang, K. Singular perturbations of a general boundary value problem / K. Chang // SIAM Journal on Mathematical Analysis. – 1972. – Vol. 3, No 3. – P. 520–526.
4. Mazanik, S. A. Lyapunov transformations of linear differential systems / S. A. Mazanik. – Minsk : BSU, 2008. – 175 p.
5. Marchenko, V. M. Realization of dynamical systems in scales of systems with aftereffect: I. Realizability / V. M. Marchenko, J. J. Loiseau // Differential Equation. – 2006. – Vol. 42. – P. 1587–1595.