

эпидемии при смене доминирующего штамма:

$$\begin{cases} \frac{dY}{dt} = R_2 Y(t) \exp(-\varsigma Y(t - \gamma\tau) - \varepsilon \sqrt{(J - N(t - \tau))^2}), \\ \frac{dN}{dt} = R_1 N(t) \ln \left(\frac{\mathcal{K}}{N(t - \tau\gamma)} \right) - \frac{\delta N^2(t - \tau_1\gamma)}{(J - Y(t))^2} - \varphi Y(t), \\ \delta > q, \gamma(\omega) \in [1, 2]. \end{cases} \quad (3)$$

В системе (3) учтен эффект борьбы штаммов при эволюции на уклонение от связывания с антителами. При $Y(0) < J < \mathcal{K}$ $N(t) \rightarrow 0 + \epsilon$ происходит смена характеристик осцилляционного режима. Положение экстремумов колебаний $N(t) \rightarrow N_*(t)$, $\max N_*(t) < J$, $\min N_*(t)$ зависит от возмущения запаздывания.

Исследование выполнено в рамках бюджетной темы СПБ ФИЦ РАН (руководитель А. С. Гейда).

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Переварюха, А. Ю. Интерпретация поведения моделей динамики биоресурсов и моментальная хаотизация в новой модели / А. Ю. Переварюха // Нелинейный мир. – 2012. – Т. 10, № 4. – С. 255–262.
2. Переварюха, А. Ю. Хаотические режимы в моделях теории формирования пополнения популяций / А. Ю. Переварюха // Нелинейный мир. – 2009. – Т. 10, № 4. – С. 925–932.

УДК 517.53

И. И. СОРОКИН

Россия, Брянск, БГУ имени И. Г. Петровского

О НЕКОТОРЫХ ПРИЛОЖЕНИЯХ ТЕОРЕМ ЕДИНСТВЕННОСТИ В ВЕСОВЫХ ПРОСТРАНСТВАХ АНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

В комплексном и гармоническом анализе важную роль играет представление функций, принадлежащих тому или иному классу на заданном множестве, в виде простых дробей с фиксированными полюсами. В данной работе рассмотрены некоторые случаи таких представлений, доказательство которых основано в том числе на использовании теоремы единственности в соответствующем классе.

Пусть $\mathbb{C}$ – комплексная плоскость, $D = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ – единичный круг на комплексной плоскости, $T = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$ – единичная окружность; $H(D)$ – множество всех аналитических функций в D .

Предположим, что E – некоторое замкнутое множество на единичной окружности T и обозначим $e_{\zeta,k}(z)$ множество всех простых дробей вида

$$e_{\zeta,k}(z) = \frac{1}{(1 - \zeta z)^k}, \quad z \in D, \quad k \in \mathbb{Z}_+, \quad \zeta \in E.$$

Положим также

$$M(r, f) = \max_{|z| \leq r} |f(z)| = \max_{|z|=r} |f(z)|, \quad 0 \leq r < 1.$$

Символом X_α обозначим пространство всех аналитических в D функций, для которых

$$X_\alpha = \left\{ f \in H(D), \quad M(r, f) e^{-\frac{1}{(1-r)^\alpha}} \xrightarrow{r \rightarrow 1-0} 0, \alpha > 0 \right\},$$

$$\|f\|_{X_\alpha} = \sup_{0 \leq r < 1} \left\{ M(r, f) e^{-\frac{1}{(1-r)^\alpha}} \right\}. \quad (1)$$

Основной результат работы – получить полное описание тех замкнутых множеств E на окружности T , для которых система функций

$$Y(E) = \{e_{\zeta,k}\}, \quad k \in \mathbb{Z}_+, \quad \zeta \in E \quad (2)$$

составляет всюду плотное множество в пространстве X_α и соответственно в $A_\alpha^p(D)$, где

$$A_\alpha^p = \left\{ f \in H(D), \quad M(r, f) e^{-\frac{1}{(1-r)^\alpha}} \xrightarrow{r \rightarrow 1-0} 0 \right\} =$$

$$= \left\{ f \in H(D) : \|f\|_{A_\alpha^p(D)} = \left(\int_D |f(z)|^p \exp \left(-\frac{1}{(1-|z|)^\alpha} \right) dm_2(z) < +\infty \right)^{\frac{1}{p}} \right\}.$$

Известно, что при $1 \leq p < +\infty$ $A_\alpha^p(D)$ является нормированным пространством, а при $0 < p < 1$ – метрическим пространством относительно соответствующей метрики. Вышеуказанные пространства введены и исследовались в работах [1], [2].

Сформулируем основные результаты работы в виде следующих двух теорем.

Теорема 1. Пусть E – замкнутое множество на единичной окружности T , $\{l_k\}_{k=1}^{+\infty}$ – дополнительные интервалы множества $E^* = \{\varphi \in [-\pi, \pi] : e^{i\varphi} \in E\}$.

Тогда, если

$$\sum_{k=1}^{+\infty} l_k^{\frac{1}{1+\alpha}} = +\infty, \quad (3)$$

то

$$\overline{Y(E)} = X_\alpha,$$

где замыкание берется в топологии пространства X_α .

В случае пространства $A_\alpha^p(D)$ справедливо следующее утверждение.

Теорема 2. Пусть $0 < p < +\infty$, E – множество из теоремы 1, $Y(E)$ определяется равенством (2). Тогда если дополнительные интервалы множества E удовлетворяют условию (3), то

$$\overline{Y(E)} = A_\alpha^p(D)$$

при всех $0 < p < +\infty$, $0 < \alpha < +\infty$, где замыкание $Y(E)$ берется в топологии пространства $A_\alpha^p(D)$.

Доказательство теоремы 2 основано на следующих вспомогательных результатах.

Лемма 1. Пусть Φ – линейный непрерывный функционал на X_α ,

$$e_\zeta(z) = \frac{1}{1 - \zeta z}, \quad z, \zeta \in D.$$

Предположим, что $g(\zeta) = \Phi(e_\zeta)$. Тогда $g \in H(D)$, причем

$$g(\zeta) = \sum_{k=0}^{+\infty} \Phi(\delta_k) \zeta^k,$$

где $\delta_k(\zeta) = \zeta^k$, $\zeta \in D$.

Лемма 2. Пусть Φ – линейный непрерывный функционал на X_α , e_ζ , g – функции, определенные в лемме 1. Тогда

$$\left| g^{(n)}(\zeta) \right| \leq A^n n^{n(1+\frac{1}{\alpha})}, \quad n \in \mathbb{Z}_+,$$

где A – некоторое положительное число, зависящее только от Φ .

Лемма 3. Пусть g – функция, определенная в лемме 1, E – некоторое замкнутое множество на T . Тогда если $g^{(k)}(\zeta) = 0$, $k \in \mathbb{Z}_+$, $\zeta \in E$, и при этом дополнительные интервалы $\{l_k\}_{k=1}^{+\infty}$ множества $E^* = \{\varphi \in [-\pi, \pi] : e^{i\varphi} \in E\}$ удовлетворяют условию (3), то функция g равна нулю тождественно, т. е. $g(z) \equiv 0$, $z \in D$.

Лемма 4. Пусть Φ – линейный непрерывный функционал на X_α , e_ζ , g – функции, определенные в лемме 1. Тогда для произвольной $f \in X_\alpha$ справедливо следующее представление

$$\Phi(f) = \lim_{\rho \rightarrow 1-0} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\rho e^{i\varphi}) g(\rho e^{i\varphi}) d\varphi.$$

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Djrbashian, A. E. Topics in the theory of spaces / A. E. Djrbashian, F. A. Shamoyan // Leipzig: Teubner-Texte zur Math. – 1988. – Vol. 105. – 200 p.
2. Шамоян, Ф. А. Введение в теорию весовых Lp -классов мероморфных функций / Ф. А. Шамоян. – Брянск : РИО БГУ, 2009. – 180 с.

УДК 517.977

О. Б. ЦЕХАН

Беларусь, Гродно, ГрГУ имени Янки Купалы

ОБ ОПЕРАТОРЕ ДЕКОМПОЗИЦИИ СИНГУЛЯРНО ВОЗМУЩЕННОЙ СИСТЕМЫ С ПОСТОЯННЫМ ЗАПАЗДЫВАНИЕМ

Пусть μ – малый параметр, $\mu \in (0, \mu^0]$, $\mu^0 \ll 1$, $p \triangleq \frac{d}{dt}$ – оператор дифференцирования, $h > 0$ – запаздывание, e^{-ph} – оператор запаздывания: $e^{-ph}z(t) = z(t-h)$, $PC([a, b]; \mathbb{R}^k)$ ($C, \overline{PC}$) – линейное пространство